O Mundo Mágico das Conexões Matemáticas

Paulo Afonso

O Mundo Mágico das Conexões Matemáticas

Edições
IPCB

O Mundo Mágico das Conexões Matemáticas

Paulo Afonso

Aos meus filhos
Tatiana e Marco

Agradecimentos

Aproveito a ocasião para agradecer a todas as pessoas que, de forma desinteressada, contribuíram para que este livro se tornasse uma realidade. Desde logo, um primeiro agradecimento vai endereçado ao meu amigo João Ruivo por ter aceite, sem reservas, o desafio de o prefaciar, assumindo o risco de o fazer sobre uma obra de matemática, área do saber com quem não tinha tido uma boa relação no passado. Fico feliz por ter aceite este desafio, pois de entre os muitos bons professores com quem tive a felicidade de aprender, coloco o Prof. João Ruivo no topo da tabela. Para além de dominar cientificamente as matérias que leccionava, fazia-o com uma postura metodológica absolutamente irrepreensível e centrava sempre a sua intervenção pedagógica na pessoa do Aluno.

Um segundo agradecimento vai dirigido aos amigos que me ajudaram na revisão científica do texto, bem como na sua componente escrita. Refiro-me, respectivamente, aos Doutores António Borralho, da Universidade de Évora, Pedro Palhares, da Universidade do Minho, Isabel Vale, da Escola Superior de Educação de Viana do Castelo e aos amigos José Rafael, da Escola Superior de Educação de Castelo Branco e Sara Nunes, da Escola Superior de Gestão, de Idanha-a-Nova.

Um especial agradecimento para os amigos Francisco Costa e José Filipe pelos inúmeros momentos de reflexão partilhada, proporcionados nestes últimos quatro anos sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Ao amigo Rui Monteiro quero agradecer as muitas horas de paciência que teve em prol do design gráfico deste livro, bem como na concepção da sua capa.

Por último, mas não menos importante, gostava de agradecer ao Instituto Politécnico de Castelo Branco, nas pessoas da sua Presidente, Professora Ana Maria Vaz, e do Coordenador da política editorial do IPCB, Professor Fernando Raposo, a possibilidade que me deram de eu poder publicar uma obra minha nesta que eu considero ser a minha casa!

A todos o meu Bem Hajam!

Prefácio

Quando, naquela tarde quente de Verão, Paulo Afonso abandonou o meu gabinete de trabalho, depois de me ter convidado a prefaciar o seu livro, deixei-o sair ignorante desta terrível e inconfessável realidade que por vezes ainda me atormenta e que me tem perseguido ao longo da vida. Vou confessar: durante o meu percurso no secundário, eu quase sempre chumbei a matemática!

Não sei se feliz, se infelizmente, não estava sozinho nesta aparente mutilação cognitiva. No meu tempo do liceu, apesar das singulares excepções, as aulas de matemática eram broncas e enfadonhas, e nós, os candidatos à aprendizagem, caíamos em longos pasmos atávicos e estados de ignorância pura, tal como tordos em costilos camuflados.

Tenho para mim que, na área da aritmética, o método João de Deus contribuiu para isso e que os "Palma Fernandes", os cadernos de "Exercícios Tipo", e as magistrais demonstrações no quadro negro de problemas considerados "óbvios", acabariam por me dar a machadada final. Tive azar! Porque, ao tempo, também conheci bons professores e boa escola.

Para bem da minha auto-estima descobri, mais tarde, que a minha relação com os números não era, afinal, problemática. Que a natureza quântica do meu saber poderia progredir na proporção directa da motivação, do envolvimento pessoal, da representação prática dos resultados e do tipo de relação que se estabelecia entre mim, aprendente, e o professor que me tutelava.

Ou seja, aprendi matemática com sucesso sempre e quando tive a sorte de me cruzar com um professor como o é Paulo Afonso. Talvez por isso, a mais forte convicção que me assaltou, quando terminei a leitura destas páginas, foi a de que a minha pequena história pessoal teria ganho imenso se tivesse ocorrido uma singela inversão da História, isto é, se Paulo Afonso tivesse sido meu professor, em vez de eu ter sido professor dele.

Se outros motivos não houvesse, este é por demais suficiente para vos garantir que *"O Mundo Mágico das Conexões Matemáticas"* é um livro em que nos marca. Desde logo, porque nos ensina a ensinar. Depois, porque se trata de uma obra em que aprendemos, em que aprendemos a aprender e que, progressivamente, nos conduz às mais profundas interrogações sobre a natureza da escola e sobre o papel do professor. E também porque aí se conjuga, admiravelmente, a interrogação com a resposta, a necessidade com o método, o objectivo com os meios, o resultado com o esforço e a motivação com a inovação.

Mas, o que aqui se apresenta ao leitor é, sobretudo, um grande exercício de maturidade do autor que, nesta terceira publicação sobre a divulgação de metodologias de formação e de ensino da matemática, nos confirma um raro talento de professor, de pedagogo e de investigador, num dos seus melhores momentos do saber e do saber como fazer.

Nestas páginas convivemos com um conjunto sedutor de propostas que pretendem associar o tema das conexões matemáticas à utilização e aplicação pedagógica e didáctica de tarefas de investigação e de resolução de problemas, propostas essas que devem ser seriamente encaradas pelos docentes, como forma de promoverem o sucesso escolar na disciplina de Matemática, e o incremento da motivação e do sentido crítico dos seus alunos. São situações problemáticas que o autor experienciou, reflectiu e maturou e que nos obrigam a relançar a reflexão sobre os obstáculos que se deparam e a que estão sujeitos todos os que não receiam a busca de novos rumos que os mantenham próximos da mestria profissional.

Sabemos que o desafio não é fácil. Infelizmente são ainda muitas as barreiras que se colocam a todos aqueles que tentam enveredar pelos caminhos da inovação e da mudança, que outros não são, aliás, os que todos deveríamos tentar percorrer no decurso da nossa vida profissional. Mas é precisamente esse o grande desígnio das "minorias" que não se devem demitir do seu papel de liderar nas escolas os processos de renovação dos procedimentos educativos, tentando integrar nesse movimento renovador as "maiorias" que à partida suspeitam das suas propostas, demonstrando-lhes como se deve conviver com a dialéctica do eterno renascer do novo e da necessidade da permanente adaptação.

Sou dos que se têm comprometido com a defesa do prolongamento da formação dos docentes para dentro das escolas em que estes trabalham, recuperando-as como centros de saber, como centros de aprendizagem em situação, como comunidades educativas em que as famílias, os jovens e os educadores assumam a sua quota-parte de formação ao longo da vida.

Tenho lutado pelo rigor de uma formação inicial e permanente fundamentadas na necessidade e exigência da alteração de atitudes, mentalidades e competências profissionais e pessoais, com vista a um melhor desempenho da prática lectiva, tendo sempre como horizonte a consequente melhoria da aprendizagem e desenvolvimento integral dos alunos.

Valorizo todos os que estimulam uma mente que interroga; os que detêm uma atitude dinâmica e uma capacidade para continuar a reformular o seu próprio entendimento das coisas e das suas convicções pessoais; os que não se refugiam em rotinas, seguindo uma prática acrítica; os que privilegiam a promoção de mecanismos de colaboração, tanto quanto estes se revelem como decisivos para incrementar o desenvolvimento profissional dos docentes.

Gosto de considerar o professor como uma pessoa em devir, em permanente evolução para níveis mais organizados de percepções, expectativas, conhecimentos e crenças, sedimentados a partir do confronto com a experiência, e em resultado da reflexão sobre si e sobre a sua prática. E encaro a profissão docente como aquela em que os seus actores aprendem a traçar percursos permanentemente permeáveis às solicitações da evolução do conhecimento científico, dos resultados da investigação educativa, da organização da escola, da evolução sócio-cultural dos alunos, bem como da evolução da comunidade em que estes se integram.

Daí que, para mim, livros como este, que agora ocupa as vossas mãos, e que promovem o gosto pela mudança e pelo aperfeiçoamento; que estimulam a reflexão e a consciencialização do professor, criando nele uma cultura profissional; que se revelam impregnados de princípios; que correspondam a constantes preocupações de humildade, compreensão, diálogo e ajuda, livros destes, dizia, são obras que me tocam de perto e na qual me revejo quanto ao entendimento que tenho do meu papel de formador.

Li, antes de vós, uma bela obra em que o autor sabe como agarrar e seduzir o leitor; em que demonstra que a brincar também se aprende; em que estimula a paixão pelos números, através da divulgação de experiências que tão extraordinariamente nos induzem ao prazer de conviver com a matemática.

Torna-se evidente, desde o contacto com as primeiras páginas, que Paulo Afonso consegue explicar bem melhor do que eu, a natureza e o fundamento de todas estas razões. Daí que me seja legítimo deduzir que, por esta hora, já haja leitores que se interrogam sobre o sentido a dar a estas minhas introdutórias palavras. Para quem se confessou enrascado na aprendizagem da matemática já escreveu demais, dirão. Quem sabe se com toda a razão...

João Ruivo

Índice:

1. Introdução

Este livro pretende associar o tema das conexões matemáticas à importância que as tarefas de investigação e de resolução de problemas têm na disciplina de Matemática. Ainda que se considere o tema das investigações matemáticas como sendo diferente da resolução de problemas, num cenário eminentemente metacognitivo (Abrantes, Leal e Ponte, 1996) ambos exigem processos complexos de pensamento por parte dos alunos (Ponte e Matos, 1996; Abrantes, Leal e Ponte, 1996).

Contudo, mais do que a resolução de problemas, as investigações matemáticas pressupõem que os alunos sejam confrontados com tarefas abertas, umas bastante elaboradas, outras mais simples, cujos enunciados não estão totalmente formulados. De facto, como referem Mestre e Matos (2005), "no contexto escolar, a investigação é, geralmente, apresentada pelo professor e desencadeada a partir de uma situação vaga ou pouco definida e, como tal, não estão formuladas quaisquer questões que orientem de forma determinante a investigação" (p. 206). Por isso, assumindo um papel semelhante ao papel investigativo dos matemáticos profissionais perante a actividade matemática (Abrantes, Ferreira e Oliveira, 1995; Brunheira e Fonseca, 1995; Mestre e Matos, 2005), os alunos têm que se envolver na sua própria aprendizagem (Almeida e Martins, 2003), formulando, testando e validando conjecturas, procurando regularidades e comunicando as conclusões aos colegas (Cunha, Oliveira e Ponte, 1995; Ponte e Matos, 1996; Abrantes, Leal e Ponte, 1996; Amaral, 2002; Segurado, 2002; Almeida e Martins, 2003; Brocardo, 2003; Mestre e Matos, 2005).

Com este tipo de atitude promove-se o sentido crítico do aluno, ao ter que avaliar determinadas estratégias adoptadas, e desenvolve-se a sua capacidade de argumentação se tiver que defender perante os colegas e o professor, com convicção, a validade e as potencialidades das suas conclusões. Por tudo isto, é comum aceitar-se a ideia de que as tarefas de investigação podem ser muito úteis no desenvolvimento ou maturação de conceitos matemáticos (Ponte e Matos, 1996), pois possibilitam a conexão entre vários conceitos desta disciplina.

Concordo, pois, com a ideia defendida por Mestre e Matos (2005), quando referem que "a actividade investigativa é uma característica essencial da verdadeira actividade matemática e, como tal, deve ser considerada no ensino e na aprendizagem desta disciplina"(p. 206).

Além destes aspectos, Cunha, Oliveira e Ponte (1995) também salientam que as actividades de investigação permitem "diferentes graus de consecução a alunos com capacidades diferentes, permitindo-lhes trabalhar no seu ritmo próprio" (p. 167). Há, contudo, que se ter em linha de conta que as tarefas a propor não devem ter um elevado nível de complexidade para a maioria dos alunos, sob pena de se desencadear um sentimento de frustração nos que apresentam maiores dificuldades (Brunheira e Fonseca, 1995).

Sendo assim, o presente texto não visa trabalhar a Matemática numa perspectiva segmentada, nem pretende afectar os temas abordados a este ao àquele ano de escolaridade. Optou-se, sim, por abordar os temas de uma forma bastante holística deixando à liberdade pedagógica de cada docente, a possibilidade de seleccionar, adaptar, alterar ou melhorar as propostas aqui apresentadas, por forma a que as mesmas consigam chegar aos alunos com a capacidade suficiente de os motivar para a Matemática.

Como se poderá constatar, os conceitos matemáticos possibilitam relacionar-se entre si e com o quotidiano dos alunos. Por isso, os professores podem encontrar nesta publicação tarefas que ajudem a que se assuma o currículo de Matemática como sendo um conjunto de temas interligados, sem estarem espartilhados pela gestão temporal do programa. Com isso estou em crer que os próprios alunos também irão criar uma visão interligada dos assuntos abordados.

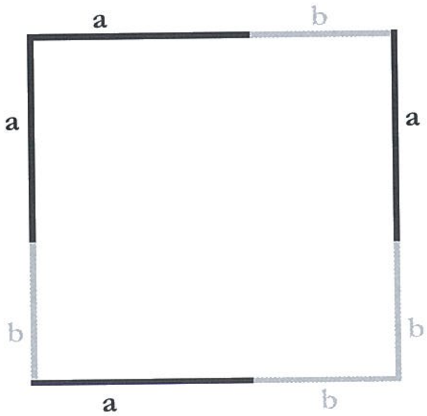
A utilização pedagógico-didáctica das propostas de investigação ou de resolução de problemas apresentadas depende, pois, do conhecimento científico, pedagógico e curricular de cada docente, de modo a que a mesmas possam contribuir para que a Matemática não seja desprovida de sentido nem de aplicabilidade prática para a maioria dos alunos.

2. Conexões matemáticas a partir do binómio de Newton

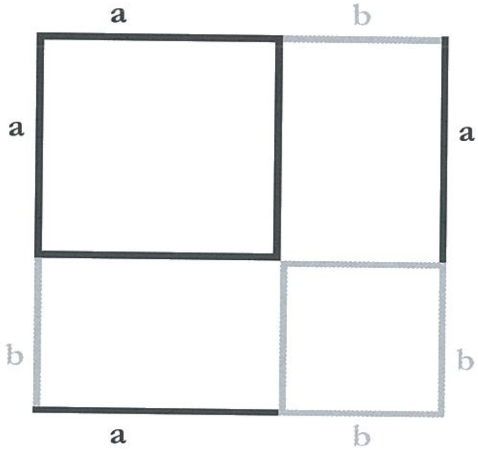
Tarefa – tentar encontrar sentido prático para o binómio de Newton

Por norma, quando o tema da binomial é abordado nas aulas de Matemática, a sua exploração costuma ser algébrica. Para tal utiliza-se o desdobramento da potência de expoente dois e base (a + b), isto é: $(a + b)^2$. Transforma-se a potência num produto de factores iguais: (a + b) x (a + b), aplica-se a distributividade da multiplicação em relação à adição e obtém-se o seguinte polinómio: $a^2 + 2ab + b^2$.

Contudo, muitos são os alunos que questionam os docentes acerca da importância desta matéria no seu quotidiano. Uma possível resposta passa por se conectar esta resolução algébrica com uma outra, de natureza geométrica, envolvendo o cálculo de áreas de figuras rectangulares que, posteriormente, poderá ser associada, por exemplo, a parcelas de um terreno destinado a habitação. A exploração poderá passar pelo desenho de um quadrado de lado "a + b":



De seguida decompõe-se o quadrado em quatro figuras



geométricas: um quadrado de lado "a", outro de lado "b" e dois rectângulos, cujo comprimento é "a" e a largura é "b".

Pode-se calcular a área deste quadrado, de lado "a + b", através de dois processos distintos. Um primeiro processo consiste no desenvolvimento algébrico da potência "(a + b)^2", atrás referenciado. Por outro lado podem-se adicionar as áreas de cada uma das quatro figuras que formam este quadrado. A área do quadrado maior é "a^2" e a área do quadrado menor é "b^2". Por sua vez, as áreas de cada um dos rectângulos são "ab". Logo, a área do quadrado de lado "a + b" é dada pela seguinte adição polinomial: "a^2 + 2ab + b^2". Constata-se, pois, que ambos os resultados são coincidentes.

Analisando-se os dois processos de resolução, poder-se-á conectar este exemplo a um possível chão, de uma cave ou de um jardim, dividido em quatro zonas a serem utilizadas para várias finalidades. Por outro lado, também permite evidenciar a conexão existente entre a Álgebra e a Geometria, duas grandes áreas da Matemática. Efectivamente, pode-se atribuir valores ao "a" e ao "b", de modo a poderem realizar-se outras conexões matemáticas. Imagine-se que o valor de "a" é o dobro do valor de "b", sendo oito metros e quatro metros, respectivamente. Se apenas nos concentrarmos nos dois quadrados que se conseguem obter, podemos levar os alunos a responder à seguinte questão: «*quando o comprimento do lado do maior quadrado é o dobro do comprimento do lado do menor quadrado, isso implica que a área do quadrado maior seja o dobro da área do quadrado menor?*» Será interessante analisar as respostas dos alunos relativamente a esta questão.

Neste caso concreto, como os valores são pequenos, é possível que os alunos refiram, de imediato, que a área do maior é sessenta e quatro metros quadrados e a área do menor é dezasseis metros quadrados. Logo, ser-lhes-á fácil concluir que a área do maior quadrado, de lado "a", é quádrupla da área do quadrado menor, de lado "b". Este exemplo também possibilita a abordagem do tema "semelhança de polígonos", pois ajuda a que se conclua que a razão das áreas de polígonos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança, isto é, a razão entre os comprimentos dos lados desses polígonos. Assim será fácil os alunos concluírem que, aumentando-se para o dobro o comprimento do lado de um quadrado, isso implica quadruplicar a sua área.

Uma outra possibilidade de exploração pedagógica passaria por se comparar a área do quadrado mais pequeno com a área do quadrado de lado "a + b", isto é, o que tem doze metros de lado. No fundo ter-se-ia que levar em linha de conta que os comprimentos dos lados são quatro metros e doze metros, respectivamente, isto é, o comprimento do lado do quadrado menor é a terça parte do comprimento do lado do quadrado maior. As áreas envolvidas neste caso são dezasseis metros quadrados e cento e quarenta e quatro metros quadrados. Logo, isto não implica que a área do quadrado menor seja um terço da área do quadrado maior, pois a maior área é nove vezes maior que a área do menor quadrado.

Fazendo-se uma síntese, o quadro seguinte permite evidenciar as relações que se podem estabelecer entre os comprimentos dos lados de quadrados e as áreas respectivas:

Comprimento dos lados dos quadrados	Área dos respectivos quadrados
x	x^2
2x	$4x^2$
3x	$9x^2$

Assim, duplicar o comprimento dos lados de um quadrado implica quadruplicar a área desse quadrado. Por sua vez, triplicar o comprimento do lado implica obter uma área nove vezes maior que a inicial. Logo, se um lado aumentar dez vezes o seu comprimento, o respectivo quadrado aumentará a área cem vezes, isto é, dez ao quadrado.

Se este tipo de reflexão pode ser feita relativamente ao conceito de área, o mesmo poderá fazer-se com o conceito de perímetro. Assim, elaborando-se para o perímetro uma tabela semelhante à anterior, constata-se o seguinte:

Comprimento dos lados dos quadrados	Perímetro dos respectivos quadrados
x	4x
2x	8x
3x	12x

Comparando os dois quadrados, de lado "x" e "2x", respectivamente, verifica-se que o perímetro do maior é o dobro do perímetro do quadrado menor. Isto é, a relação existente entre os comprimentos dos lados de dois quadrados é a mesma que a existente entre os respectivos perímetros. Daí que se se compararem os perímetros dos quadrados de lado "a + b" ou "3x" e de lado "b", isto é, "x", verifica-se que o primeiro é o triplo do segundo. Esta relação também é válida para os comprimentos dos lados desses quadrados, pois o comprimento do lado do quadrado maior é o triplo do comprimento do lado do quadrado mais pequeno. Confirma-se, pois, que a razão de semelhança entre os perímetros de polígonos semelhantes é igual à razão de semelhança, ou seja a razão entre os comprimentos dos lados desses polígonos.

Considerando esta regra, seria interessante perguntar aos alunos: *qual o perímetro de um quadrado, sabendo que o comprimento de cada um dos seus lados é cinquenta vezes maior que o comprimento do lado de um quadrado cujo perímetro é doze centímetros*? Seria muito bom se eles concluíssem, de imediato, que o perímetro do quadrado formado teria que ser cinquenta vezes maior que esses doze centímetros.

Note-se que esta reflexão iniciou-se a partir do binómio de Newton e já se estão a comparar perímetros de figuras geométricas, tendo por base a comparação dos comprimentos dos respectivos lados. Isto é, já se está a abordar outro conceito matemático, que é o da proporcionalidade directa.

Outra possível conexão matemática emergente desta situação inicial poderia ser a comparação da área e do perímetro do quadrado de lado "a" com a área e o perímetro do rectângulo de lados "a" e "b", sendo "b" metade do valor de "a".

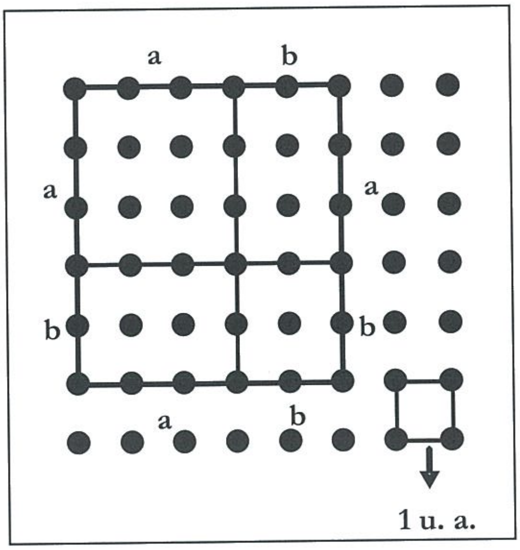
Como a área do quadrado é "a^2" e a área do rectângulo é "ab", será interessante concluir-se que a primeira área é o dobro da segunda. De facto, a título de exemplo, se se atribuir ao "a" o valor quatro metros e ao "b" o valor dois metros, obtém-se para a área do quadrado dezasseis metros quadrados e para a área do rectângulo oito metros quadrados.

Analisando-se, agora, o que acontece com os perímetros, verifica-se que no quadrado obtém-se 16 metros e no rectângulo obtém-se 12 metros, isto é, uma medida é quatro terços da outra. Comprovando esta conclusão para outro exemplo – o caso de o comprimento de "a" ser 6 metros e o de "b" ser 3 metros, o perímetro do quadrado seria 24 metros e o perímetro do rectângulo seria 18 metros, isto é, três quartos do anterior. Confirma-se, pois, a relação encontrada anteriormente.

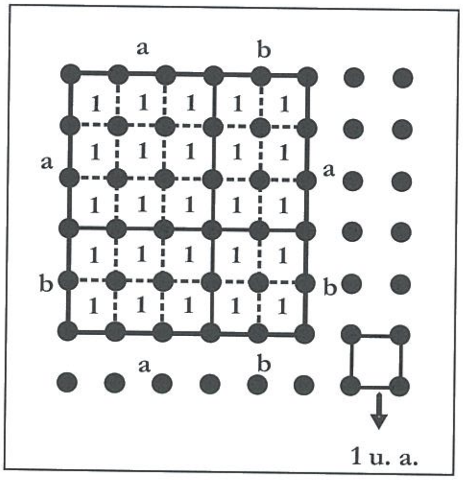
Com base nestas conclusões poder-se-ia lançar o seguinte desafio aos alunos: «*qual o perímetro de um rectângulo cujo comprimento é "a" e a largura é "b", sendo "b" metade de "a", sabendo-se que um quadrado de lado "a" tem de perímetro quarenta e oito centímetros?*». Seria muito importante que os alunos respondessem que o perímetro teria que ser três quartos deste valor, isto é, trinta e seis centímetros.

Uma outra possível exploração desta tarefa também pode passar pelo recurso à utilização de um simples geoplano, pois trata-se de um bom recurso para o cálculo de medidas de áreas e de perímetros.

De facto, utilizando-se um geoplano, poder-se-ia conceber a figura seguinte, onde se assumia como unidade de área a área ocupada pelo menor quadrado que se pode construir neste material estruturado:



Utilizando o método da decomposição, obtêm-se as seguintes áreas parcelares:



Para cada uma das quatro figuras que decompõem o quadrado obtêm-se as seguintes medidas de área: o quadrado mais pequeno tem quatro unidades de área, o quadrado maior tem nove unidades de área e cada um dos rectângulos tem seis unidades de área. Logo, o quadrado de lado "a + b" tem, ao todo, vinte e cinco unidades de área.

Por sua vez, também se poderiam confirmar as áreas de cada uma das quatro figuras recorrendo-se ao teorema de Pick - *a área de cada figura geométrica construída no geoplano com os elásticos é dada por metade do número de pregos da fronteira (F) mais o número de pregos do interior (I) menos um.*

$$A = \frac{F}{2} + I - 1$$

Contudo, não se pode ignorar que este teorema tem em conta que a unidade de área é a área ocupada pelo menor quadrado que se pode construir num geoplano. Logo, no caso do quadrado pequeno, a área é quatro unidades de área

$$A = \frac{8}{2} + 1 - 1 = 4 \text{ u.a.}$$

Por sua vez, a área do quadrado maior é de nove unidades de área:

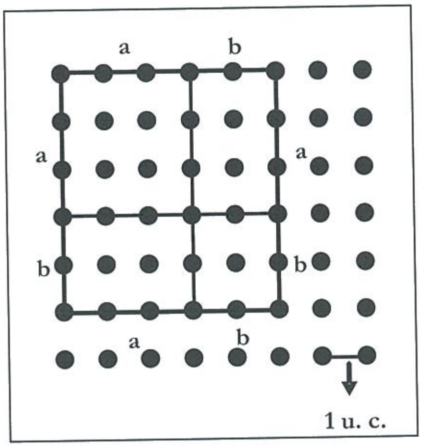
$$A = \frac{12}{2} + 4 - 1 = 9 \text{ u.a.}$$

Por fim, a área de cada rectângulo é de seis unidades de área:

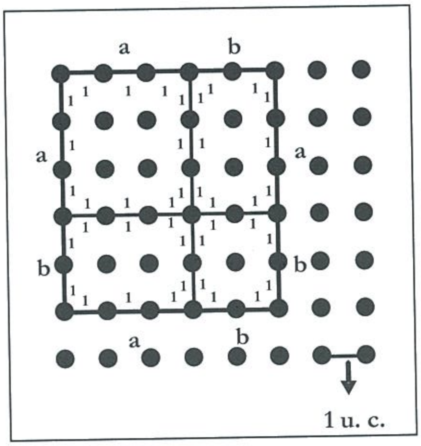
$$A = \frac{10}{2} + 2 - 1 = 6 \; u.a.$$

Assim, continuando-se a assumir que a unidade de área é a área ocupada pelo menor quadrado que se pode construir no geoplano, confirma-se que a área total da figura relativa ao binómio de Newton é de vinte e cinco unidades de área (4 + 9 + 6 + 6).

Para o caso do perímetro de cada uma das quatro figuras que decompõem o quadrado de lado "a + b", também se pode recorrer ao geoplano. Para tal, somente há que definir a unidade de comprimento, que pode ser o comprimento do segmento de recta que une dois pregos adjacentes na horizontal e vale um:



Identificando-se o número de unidades de comprimento de cada uma das figuras que decompõem o quadrado:



conclui-se que o quadrado mais pequeno tem de perímetro oito unidades de comprimento. Por sua vez, o outro quadrado tem de perímetro doze unidades de comprimento e cada um dos rectângulos tem de perímetro dez unidades de comprimento, pois são figuras isoperimétricas. Por sua vez, o perímetro do quadrado de lado "a + b" é vinte unidades de comprimento.

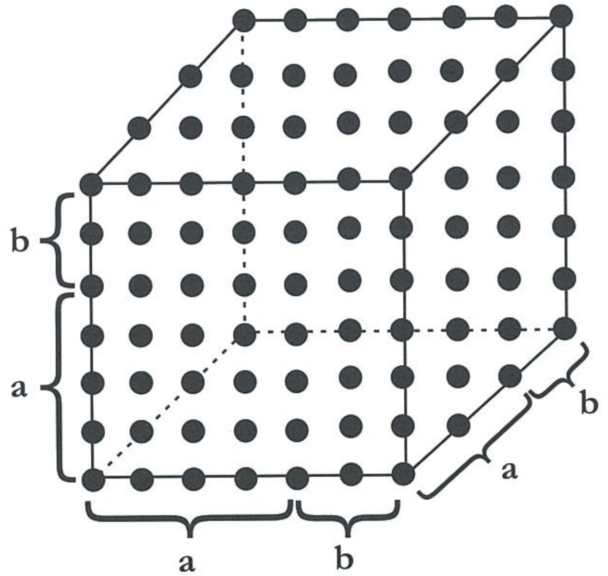
Se a exploração geométrica do binómio de Newton se revela interessante ao nível do plano, também o será ao nível do espaço.

Imaginemos, pois, que para além de se estudar a potência "$(a + b)^2$", se estudava também esta outra: "$(a + b)^3$". Contudo, antes de se proceder à sua exploração geométrica, pode-se seguir a vulgar exploração algébrica, que consiste em decompor esta potência em produtos de factores iguais: "$(a + b)^3 = (a + b) \text{ x } (a + b) \text{ x } (a + b)$", que é igual a: "$(a + b)^2 \text{ x } (a + b)$". Como vimos anteriormente, o quadrado da soma de dois monómios é "$a^2 + 2ab + b^2$". Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição: "$(a^2 + 2ab + b^2) \text{ x } (a + b)$", resulta o seguinte polinómio: "$a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3$". Logo, o resultado final é: "$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$".

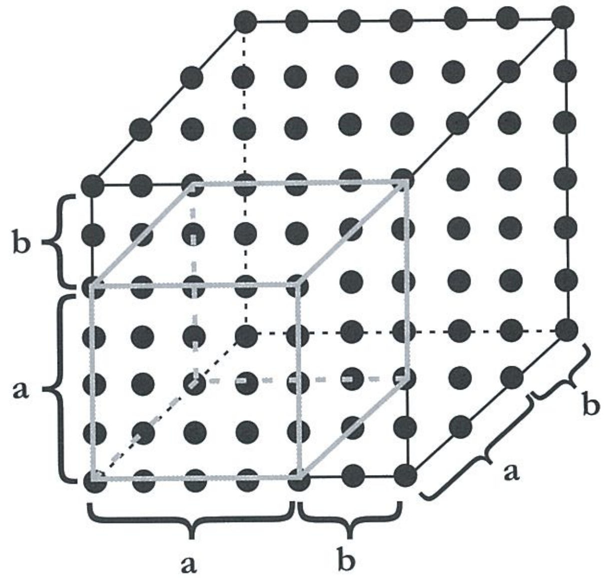
Estabelecendo, agora, a conexão do resultado desta exploração algébrica com uma outra exploração, de natureza geométrica, constata-se que se está perante um cubo de aresta "(a + b)". Ora, o desdobramento da potência em causa permite que se conclua que o volume de um cubo de aresta "(a + b)" é igual ao volume de oito prismas: dois cubos de lados "a" e "b", cujos volumes são, respectivamente, "a^3" e "b^3"; e seis paralelepípedos divididos em dois grupos de três. Os pertencentes a um desses grupos têm duas arestas "a" e uma aresta "b", ou seja, têm volume "a^2b", e os que pertencem ao outro grupo têm duas arestas "b" e uma aresta "a", isto é, têm volume "b^2a".

Perante esta conclusão seria interessante confrontar os alunos com o desafio de desenharem esses oito sólidos geométricos, de modo a originar-se o cubo de aresta "(a + b)".

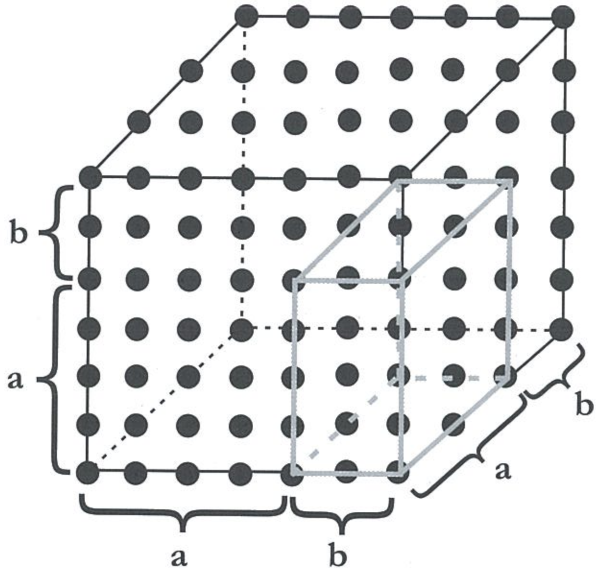
Uma vez mais, a utilização de um geoplano ou uma folha de papel ponteado pode ser útil para a resolução deste desafio. É desejável desenharem-se os oito sólidos separadamente, para que as várias faces comuns não perturbem a visualização no seu conjunto. Por uma questão de operacionalização, pode-se assumir que o lado maior é o "a", e que tem o dobro do comprimento do lado menor, o "b":



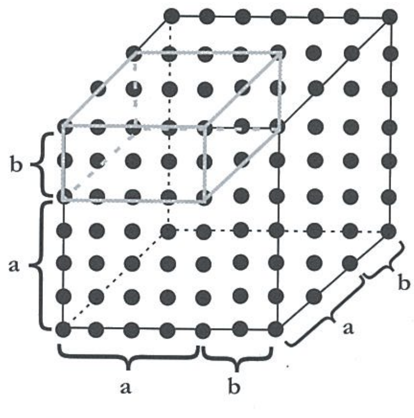
Vamos começar pelo cubo de aresta "a". Podemos desenhá-lo com um risco mais grosso e a cinzento:

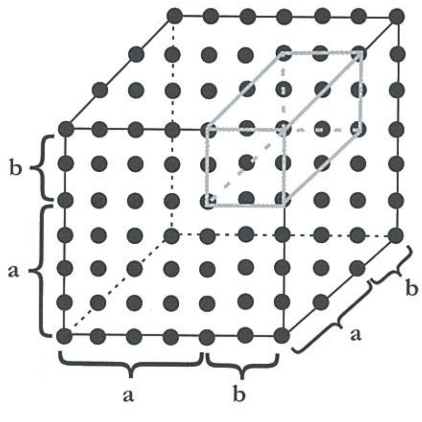


De seguida pode-se desenhar o paralelepípedo que aparecerá ao lado deste cubo. Terá a mesma altura que o cubo, isto é, "a" e terá uma base com medidas "b" e "a":



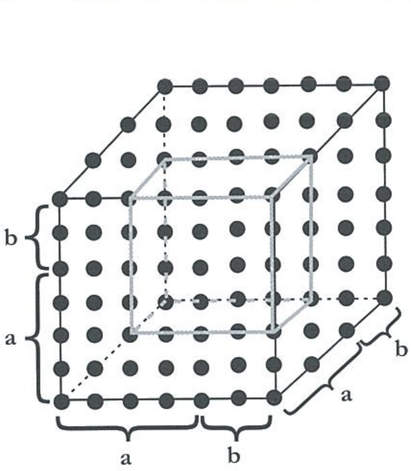
Em continuação será muito fácil descobrir os dois sólidos que assentam, respectivamente, em cada um dos que já se desenharam:

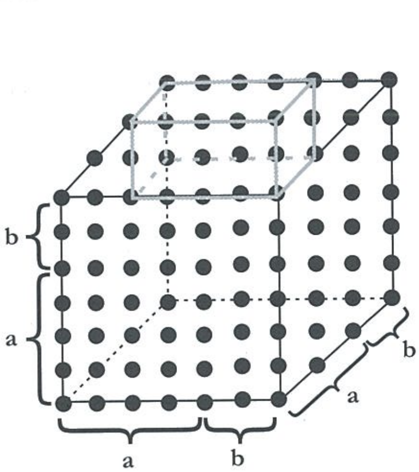




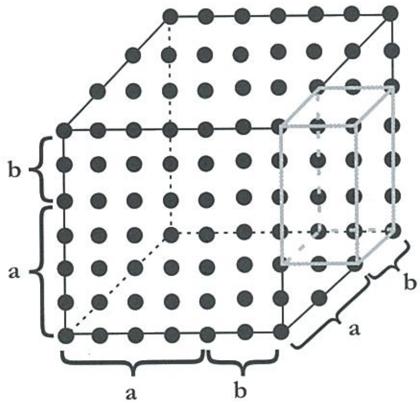
Fazendo-se uma síntese, constata-se que já estão identificados o cubo de aresta "a", um paralelepípedo de arestas "b", "b" e "a" e os outros dois paralelepípedos com arestas "a", "a" e "b". Falta desenhar-se o cubo de aresta "b", um paralelepípedo de volume "a^2b" e dois paralelepípedos de volume "b^2a". Ou seja, faltam os quatro sólidos que encostam à face oposta do cubo e que ficam por trás destes já desenhados.

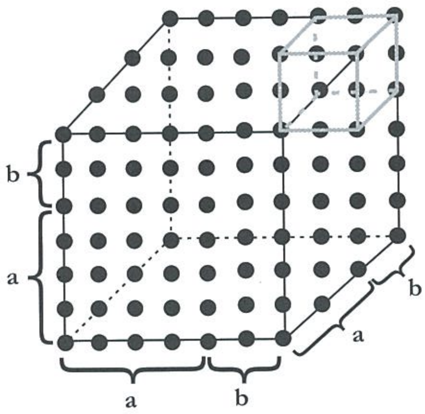
Eis mais um paralelepípedo de volume "a^2b" e outro com volume "b^2a":



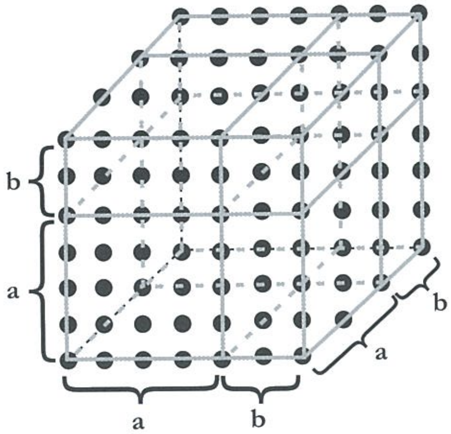


Por fim, eis um novo paralelepípedo de volume "b^2a" e o cubo com volume "b^3":





Se agora quiséssemos desenhar todas as arestas visíveis dos oito sólidos que formam este cubo envolvente, ficaria assim, no caso de ser transparente:



Como desafio subsequente os alunos poderiam ser motivados a construir os modelos sólidos acabados de explorar.

Uma outra conexão matemática a levar a cabo poderia ser o estudo da relação existente entre as medidas dos comprimentos das arestas de dois cubos e os respectivos volumes. Atribuindo à aresta "a" o comprimento quatro e à aresta "b" o comprimento dois, poder-se-ia desafiar os alunos a testar a possibilidade de o volume do cubo de aresta "a" ser ou não duas vezes maior que o volume do cubo de aresta "b". Esta tarefa permitiria concluir-se que a razão de semelhança entre os volumes dos cubos é igual ao cubo da razão de semelhança, isto é a razão entre os comprimentos das respectivas arestas.

Note-se que o volume do cubo maior é sessenta e quatro unidades de volume e o volume do mais pequeno é oito unidades de volume. Logo, verifica-se que o volume do cubo maior é oito vezes mais que o volume do cubo menor. Enquanto que a relação das medidas dos comprimentos das arestas era de um para dois, a relação entre os respectivos volumes é de um para oito.

Assim, se existir um cubo cujo comprimento da aresta meça doze centímetros, poderá facilmente descobrir-se o comprimento da aresta de um outro cubo, cujo volume é exactamente oito vezes menor que o volume daquele. Será um cubo com comprimento de aresta de seis centímetros. De facto, os volumes de cada cubo são, respectivamente, os resultados de 12^3 e 6^3, isto é, 1728 cm^3 e 216 cm^3 respectivamente. Confirma-se que o valor do maior é oito vezes o valor do menor, pois 1728 é igual a 8 x 216.

Este tipo de explorações matemáticas pode revelar-se muito motivador, pois já se está a lidar com o conceito de proporção. De facto, a título de exemplo, se quatro centímetros da aresta relativa ao cubo maior estão para dois centímetros da aresta relativa ao cubo menor, então doze centímetros da aresta maior estarão para "x". Resolvendo a proporção, obtém-se o valor de 6 centímetros para a medida do comprimento da aresta do cubo menor.

Por outro lado, a descoberta desta relação também permite lançar o seguinte desafio: «*havendo duas arestas de cubos diferentes, em que uma mede o dobro da outra, e sabendo-se que a menor mede vinte e cinco centímetros, descobrir o volume do cubo maior*».

O que no fundo seria pedido, primeiro, aos alunos, é que encontrassem o volume do cubo menor, que é o resultado de 25^3, ou seja, 15625 cm^3. Depois só teriam que multiplicar este valor por oito, obtendo-se o valor do volume do cubo maior, que, neste caso, seria 125000 cm^3. De facto, os 125000 equivalem a 50^3.

Uma possível aplicação destes conceitos matemáticos ao quotidiano poderia passar por um cenário envolvendo aquários de forma cúbica, de modo a que os alunos soubessem a quantidade de água que os mesmos comportariam. Com esta ligação ao real também se poderia introduzir a conexão matemática entre as medidas de volume e as medidas de capacidade.

Note-se que os valores obtidos na situação anterior podem parecer ser de uma grandeza elevada, pois trata-se de 15625 cm^3 e de 125000 cm^3. Contudo, quando se convertem estas medidas para decímetros cúbicos e, depois, para as medidas de capacidade, constata-se que se estaria na presença de cubos não muito volumosos, com as capacidades respectivas de 15,625 litros e 125 litros.

Eis um novo exemplo de problema a colocar aos alunos: *«se um aquário, de forma cúbica, tem capacidade para 512 litros de água, qual será a medida do comprimento da aresta de outro aquário cúbico que tenha uma capacidade oito vezes menor que esta?»*.

Convertendo-se esta medida de capacidade para o respectivo volume, isso origina 512 dm^3, ou seja, 512000 cm^3. Agora pode-se recorrer a dois processos distintos: desde logo, achar a raiz cúbica de 512000 para se obter a medida do comprimento da aresta do aquário maior, é uma das possibilidades de resolução. Depois basta dividir por 2 para se encontrar a medida do comprimento da aresta do aquário mais pequeno. O outro caminho possível é o seguinte: dividir-se o 512000 por 8, para se encontrar o volume do aquário mais pequeno. Depois calcula-se a raiz cúbica desse valor para se obter a medida do comprimento da respectiva aresta.

Calculando-se a raiz cúbica de 512000, obtém-se o valor 80 centímetros. Logo, dividindo por 2, encontra-se, de imediato, a medida para o comprimento da aresta do aquário mais pequeno, que é 40 centímetros.

Por outro lado, ao dividir-se o 512000 por 8 obtém-se o valor 64000 centímetros cúbicos, que é a medida do volume do aquário mais pequeno. Depois, calculando-se a raiz cúbica deste valor, obtêm-se os 40 centímetros, que é, realmente, a medida do comprimento da aresta do cubo menor.

Verifica-se, pois, que existe uma relação entre os volumes de dois cubos, em que as arestas de um têm metade do comprimento das arestas do outro. Imagine-se, agora, que nos debruçávamos sobre outros dois cubos, mas em que o comprimento das arestas de um fosse o triplo do comprimento das arestas do outro - «*tentar relacionar o volume do cubo de aresta "b" com o volume do cubo de aresta "a + b", sendo que "a" é o dobro de "b". Será que a relação dos volumes continuará a ser de um para oito?*».

Quanto às arestas, imagine-se que as do cubo menor medem 2 cm e as do cubo maior medem 6 cm. Logo, os respectivos volumes são 8 cm^3 e 216 cm^3. Desde logo, confirma-se que a relação entre os volumes não é de um para oito, porque o maior valor não é oito vezes o menor valor.

Se se dividir o maior valor pelo menor, dá 27. Logo, conclui-se que o volume do cubo de aresta "a + b" é vinte e sete vezes maior que o volume do cubo de aresta "b".

No caso anterior estavam em jogo dois cubos, em que o volume de um era oito vezes maior que o volume do outro. Agora analisaram-se outros dois cubos, em que o volume de um era vinte e sete vezes maior que o volume do outro. Constata-se haver relação entre estes dois valores, isto é, o oito e o vinte e sete. Note-se que cada um desses valores é sempre o cubo do número de vezes que a aresta do cubo menor cabe na aresta do cubo maior. No primeiro caso, a aresta maior era duas vezes o comprimento da aresta menor, logo, a relação entre os respectivos volumes foi de que o do maior era oito vezes o do menor, e esse oito é precisamente o tal dois ao cubo. Por sua vez, neste último caso, o comprimento da aresta do cubo maior era três vezes o comprimento da aresta do cubo menor. Logo, o volume do cubo maior era vinte e sete vezes o volume do cubo menor, e esse valor não é mais do que o três ao cubo.

Eis um quadro síntese respeitante às análises elaboradas:

Medida da aresta de um cubo	x	$2x$	$3x$
Volume do respectivo cubo	x^3	2^3x^3 ou $8x^3$	3^3x^3 ou $27x^3$

A relação patenteada no quadro anterior permite que os alunos sejam desafiados com uma nova situação: «*tendo em conta os cubos de* *aresta "a" e de aresta "a + b", como é que se relacionam os respectivos volumes?».*

Este caso é um pouco mais complexo, pois a medida do comprimento da aresta do cubo maior não é um múltiplo da medida da aresta do cubo menor. Mantendo os mesmos valores considerados, está-se na presença dos valores 4 e 6, isto é, o maior desses valores é três meios do segundo. É desejável que os alunos conjecturem que o volume do cubo maior também é três meios ao cubo do volume do cubo menor.

Se se tiver em linha de conta que a unidade de comprimento é o centímetro, os volumes que estão em jogo são, respectivamente, sessenta e quatro centímetros cúbicos e duzentos e dezasseis centímetros cúbicos. O que é necessário fazer-se é multiplicar esse 64 por $\left(\frac{3}{2}\right)^3$ para ver se se obtém o valor 216. Logo, multiplicando o sessenta e quatro por vinte e sete oitavos dá precisamente os 216 cm^3. Completando o quadro síntese, elaborado anteriormente, o mesmo assume o seguinte aspecto:

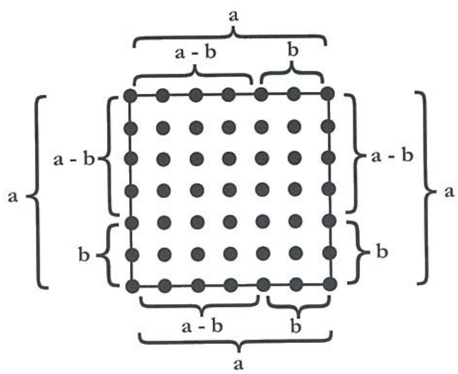
Medida da aresta de um cubo	x	$2x$	$3x$	$\left(\frac{3}{2}\right)x$
Volume do respectivo cubo	x^3	2^3x^3 ou $8x^3$	3^3x^3 ou $27x^3$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3 x^3$ ou $\left(\frac{27}{8}\right) x^3$

3. Conexão algébrica e geométrica relacionando outros casos notáveis da multiplicação

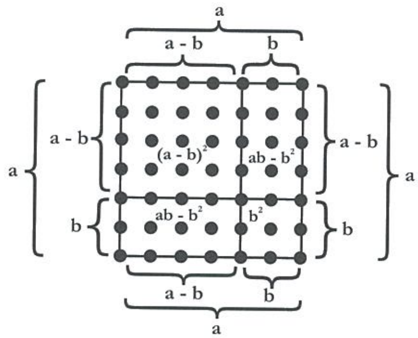
Tarefa – explorar algébrica e geometricamente outros casos notáveis da multiplicação

Comecemos por analisar o caso do quadrado da diferença de dois monómios, decompondo a potência num produto de factores iguais: "$(a - b)^2 = (a - b)\ (a - b)$". Como resultado, origina-se o seguinte polinómio: "$a^2 - 2ab + b^2$".

Pensando, agora, em termos geométricos, sabe-se que o que se pretende é encontrar a área de um quadrado de lado "a – b". Por isso, colocando a situação no geoplano, pode-se construir um quadrado de lado "a", dividido em duas partes: "a – b" e "b":



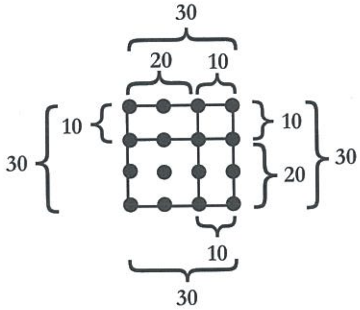
Face às medidas dos lados do quadrado originam-se dois quadrados com lados "a-b" e "b", respectivamente, e dois rectângulos de lados "a-b" e "b", tal como havia ocorrido no caso do quadrado da soma de dois monómios. A única diferença é que agora há que se subtrair os dois rectângulos. Se se fizer o quadrado de lado "a – b", verifica-se que a área do geoplano que sobra dentro do quadrado de lado "a" corresponde a dois rectângulos com área "ab – b^2" e a um quadrado de lado "b".



Uma possibilidade de se obter a área do quadrado de lado "a – b" passa por se subtrair à área do quadrado de lado "a" as áreas dos rectângulos obtidos, bem como a do quadrado de lado "b". Logo, pode-se estabelecer a seguinte igualdade: "$(a - b)^2 = a^2 - [(ab - b^2) + (ab - b^2) + b^2]$". O resultado a obter será o seguinte: "$a^2 - ab + b^2 - ab + b^2 - b^2$", ou seja, "$a^2 - 2ab + b^2$", como era previsto.

No fundo pode-se concluir que o quadrado da diferença de dois monómios "a" e "b" é um quadrado de lado "a – b" que está inserido num quadrado maior de lado "a". A forma encontrada para obter a sua área foi pegar na área do quadrado maior e retirar-lhe todas as áreas das figuras geométricas existentes no seu interior, exceptuando-se a do quadrado de lado "a – b", porque era esta a que se pretendia obter.

Entretanto, em vez de se resolver esta situação como sendo algo desligado do real, pode associar-se o caso notável da multiplicação a um possível problema do quotidiano, envolvendo a divisão de um terreno em parcelas. Pode-se pensar num terreno quadrado com trinta metros de lado, o qual vai ser dividido em quatro partes. Uma primeira parte será um amplo espaço para uma garagem, cujo chão será um rectângulo com dez metros de largura e vinte metros de comprimento. Mesmo encostada a esta garagem está uma piscina quadrada, com cem metros quadrados de área. Além disso, mesmo ao lado da piscina fica uma zona ajardinada, de forma rectangular, com exactamente a mesma área que o chão da garagem. O resto do terreno fica para a edificação da casa, cujo chão será um quadrado. «*Qual é a área desse chão?*».



Pode-se calcular a área do chão da casa recorrendo a dois processos. O mais óbvio é sugerido pelo esquema, pois o quadrado tem de lado vinte metros, o que faz com que a sua área seja de quatrocentos metros quadrados.

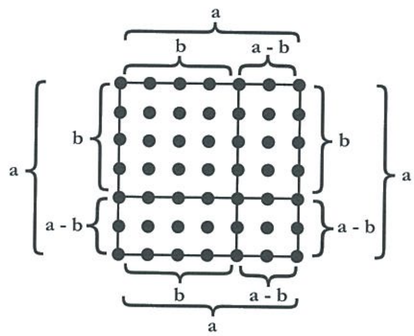
O outro caminho de resolução passa por se retirar à área total do terreno, as áreas afectas à garagem, ao jardim e à piscina, ou seja: $900 - (200 + 200 + 100) = 400$, ou seja $400\ m^2$.

Esta resolução ajudaria os alunos a verificar que os cálculos efectuados são equivalentes aos que costumam ser usados no desdobramento deste caso notável: $(30 - 10)^2 = 30^2 - 2 \times 30 \times 10 + 10^2$. Sem dúvida, esta demonstração geométrica é bem mais facilitadora da compreensão deste caso notável do que a simples resolução algébrica que envolve o desdobramento da potência.

O que se fez agora foi subtrair à área do quadrado de lado "a" todas as áreas das figuras geométricas que se construíram lá dentro, excepto a do quadrado de lado "a – b".

Por outro lado, também se poderia tentar saber qual a área do terreno sobrante, se à área total se retirar a área destinada à casa. Isto servirá para se estabelecer a conexão com outro caso notável da multiplicação, que consiste na diferença entre dois quadrados.

Para a resolução deste novo caso notável "($a^2 - b^2$)", basta manter a construção anterior, mas as letras para os seus lados terão que ser mudadas. Assim o comprimento de cada lado do quadrado maior é "a". Relativamente ao maior quadrado inserido neste, em vez do comprimento de cada um dos seus lados ser "a – b", passa a ser apenas "b". Por sua vez, existem dois rectângulos cujos comprimentos dos lados são "a – b" e "b", e existe ainda um quadrado de lado "a – b":

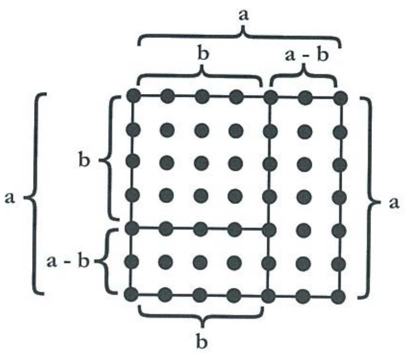


O que mudou relativamente ao caso anterior foram apenas as letras afectas aos dois quadrados que estão inseridos no quadrado maior, de lado "a".

Olhando para a figura, pode-se concluir que a diferença das áreas dos quadrados de lado "a" e de lado "b" é dada pela adição das áreas das outras três figuras geométricas, isto é, dos dois rectângulos e do quadrado mais pequeno: "[(a – b) x b] + [(a – b) x b] + [(a – b) x (a – b)]". Colocando o factor comum em evidência, resulta o seguinte: "(a – b) x [b + b + (a – b)]". Finalmente, aplicando a lei do corte e a propriedade comutativa da adição, fica "(a – b) x (a + b)".

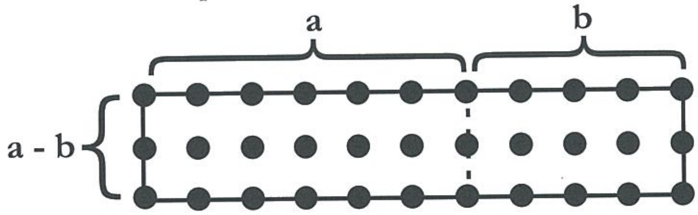
Confirmando-se algebricamente: "(a – b) x (a + b) = a^2 + ab – ab – b^2" e aplicando a lei do corte, obtém-se "$a^2 - b^2$", como era esperado.

Caso não existisse o quadrado de lado "a – b" na figura, restariam apenas duas figuras geométricas, além do quadrado de lado "b":



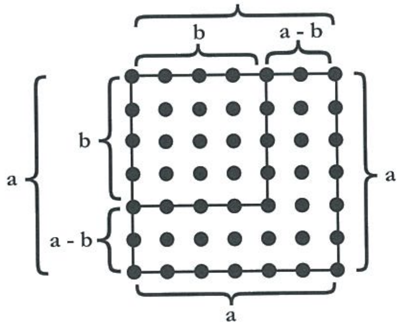
Neste caso, para se calcular a diferença das áreas dos dois quadrados de lado "a" e de lado "b", basta adicionar as áreas dos dois rectângulos sobrantes. Assim, o resultado é novamente o esperado: "(a – b) x (a + b)".

Aparentemente poderá parecer que a igualdade seguinte não tem aplicação à realidade: "$a^2 - b^2 = (a - b) \times (a + b)$". Contudo, note-se que os dois rectângulos anteriores têm um lado com o mesmo comprimento. Se os juntarmos obtém-se um rectângulo com a largura "a – b" e comprimento "a + b":

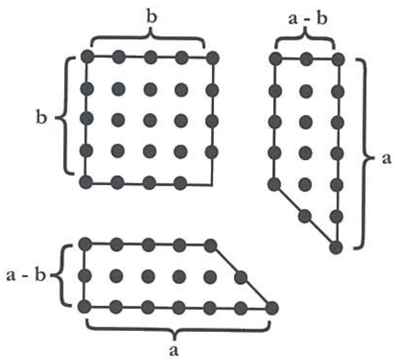


Conclui-se, pois, que a diferença entre as áreas de dois quadrados origina a área de um rectângulo. Curiosamente, as medidas dos lados deste rectângulo relacionam-se com as medidas dos lados dos dois quadrados, cujas áreas se estão a subtrair. A medida da largura do rectângulo é dada pela diferença entre a medida do lado do quadrado maior e a medida do lado do quadrado menor. Por sua vez, a medida do comprimento do rectângulo é dada pela soma das medidas dos comprimentos dos lados de cada um desses quadrados.

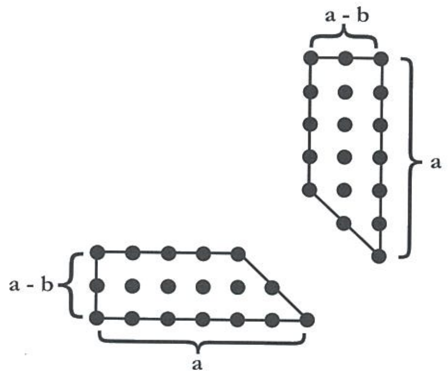
Contudo, a situação geométrica ainda poderia assumir a seguinte forma.



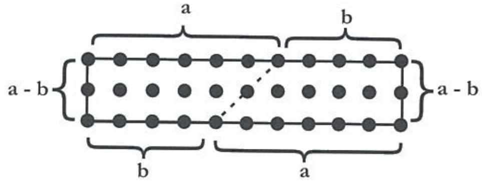
Poder-se-ia unir o vértice inferior direito do quadrado de lado "b" com o vértice inferior direito do quadrado de lado "a". Ou seja, obter-se-ia o quadrado e dois trapézios rectângulos, geometricamente iguais:



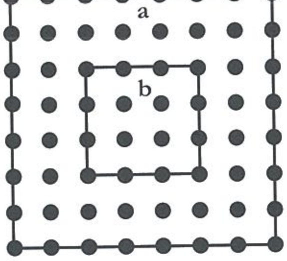
Uma questão interessante a ser colocada seria a de se averiguar se a solução também seria "(a – b) x (a + b)". Desenhando as figuras numa folha ponteada, poder-se-ia cortar os dois trapézios para se agir sobre eles:



Depois de se manipularem os dois trapézios, facilmente se descobre a formação de um rectângulo de lados "a – b" e "a + b", bastando, para tal, haver a rotação das peças. Logo confirma-se a solução prevista: "(a – b) x (a + b)":

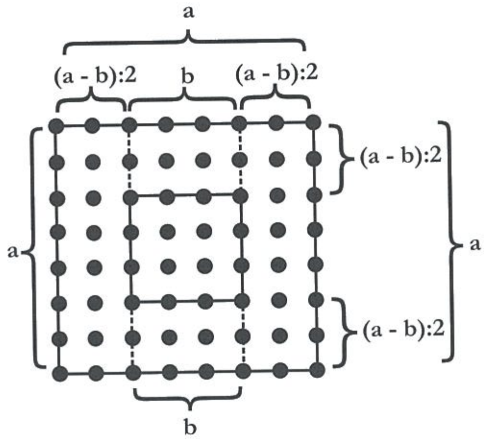


Eis um desafio semelhante que se poderia colocar aos alunos sobre este assunto: «*tirando partido da figura seguinte, em que o comprimento do lado do quadrado maior é "a" e o comprimento do lado do quadrado menor é "b", provem que "$a^2 - b^2 = (a - b) \times (a + b)$"*»:



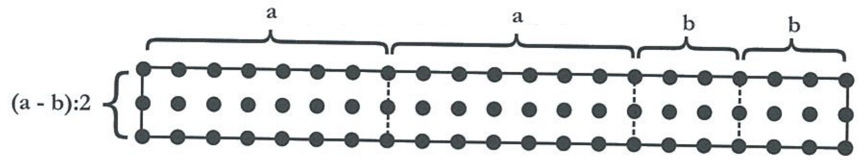
Note-se que este é mais um caso em que o lado do quadrado menor não faz parte do lado do quadrado maior, isto é, os quadrados nem sequer se intersectam. Contudo, trata-se de uma situação de resolução rápida, porque o resto que sobra do quadrado maior, retirando-se o quadrado menor, pode converter-se em quatro rectângulos, iguais dois a dois.

É expectável que os alunos decomponham esse espaço que sobra nos quatro rectângulos, que é para se saber quanto mede cada um dos seus lados:



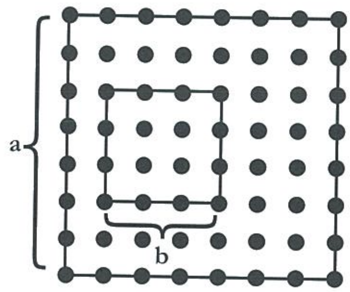
A diferença das áreas dos dois quadrados é dada pelas áreas de dois rectângulos, de lados "a" e "(a – b) : 2" e pelas áreas de outros dois rectângulos, de lados "b" e "(a – b) : 2". Adicionando as áreas, fica: "$\left(2 \times a \times \dfrac{a-b}{2}\right) + \left(2 \times b \times \dfrac{a-b}{2}\right)$". Logo, continuando os cálculos, resulta o seguinte: "(a – b) x a + (a – b) x b", ou seja "(a – b) x (a + b)", por se colocar o factor comum em evidência.

É fácil ver que em termos geométricos consegue-se fazer um único rectângulo com esses quatro rectângulos juntos, porque todos têm um lado com o mesmo comprimento, que é "(a – b) : 2":



Ou seja, através da observação deste rectângulo, obtém-se o seguinte: "[(a – b) : 2] x (2a + 2b) = [(a – b) : 2] x 2 x (a + b) = (a – b) x (a + b)". Fica, pois, provada, uma vez mais, que a diferença entre as áreas de dois quadrados, de lados "a" e "b", respectivamente, equivale à área de um rectângulo que tem como medidas dos seus lados "a – b" e "a + b".

E se se pensar na situação de o quadrado menor estar ligeiramente deslocado para a esquerda, como ilustra o seguinte esquema?:



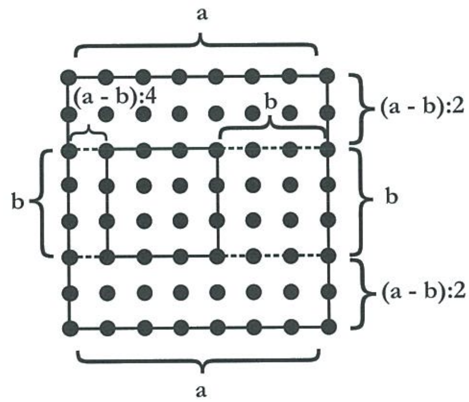
Imagine-se que esta é uma possível propriedade onde se pretende construir uma enorme moradia. A título e exemplo, se o lado do quadrado menor medir 15 metros e representar o chão de uma piscina, qual a área que sobra do terreno, também quadrado?

Se o lado do quadrado menor medir 15 metros, implica que cada espaço meça 5 metros. Logo, o quadrado maior, como tem sete espaços, tem 35 metros de lado. Assim, $35^2 - 15^2 = 1225 - 225 = 1000$ m^2. Trata-se de uma situação que permite estabelecer-se uma nova conexão matemática - as medidas de área com as medidas agrárias.

A propósito disto, é sabido que nem sempre é fácil os alunos terem uma noção precisa do que é um hectare de terreno. Muitos costumam referir que são mil metros quadrados, isto é, a ideia que têm de um hectare de terreno é apenas a décima parte do seu real valor. Quando se lhes diz para pensarem num terreno quadrado com cem metros de lado é que tomam consciência de que a sua ideia estava muito distante dos reais dez mil metros quadrados.

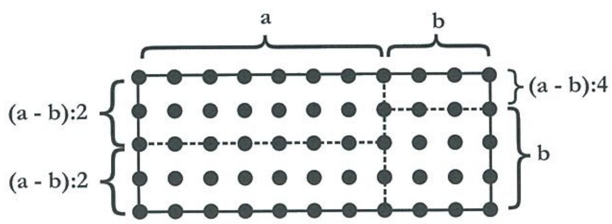
Quando se lhes pergunta, por exemplo, o que quer dizer nove hectares de terreno ardido pelo fogo, eles têm imensa dificuldade em responder, de modo a evidenciar compreensão acerca da ordem de grandeza que está em causa. A maioria refere valores muito aquém do que deveriam dizer, o que só revela que assimilam mecanicamente o conceito das reduções entre unidades de medida, mas evidenciam muitas lacunas ao nível da compreensão dessas aquisições.

Voltando ao esquema em análise, o mesmo também permite ver que a diferença das áreas dos dois quadrados origina a área de um único rectângulo, de medidas "a – b" e "a + b". Tal como efectuado anteriormente, pode-se fazer a decomposição da figura:



Se ao quadrado de lado "a" se retirar o quadrado de lado "b", ainda resulta outro quadrado de lado "b" e mais três rectângulos. Dois destes rectângulos têm, como comprimentos dos lados, "a" e "(a – b) : 2" e o outro rectângulo tem como comprimentos dos lados, "b" e "(a – b) : 4".

Como sugestão, talvez seja vantajoso recortarem-se essas quatro figuras geométricas sobrantes, para ver se podem originar um rectângulo. Eis a possível construção geométrica:



Em termos algébricos também se pode comprovar a veracidade desta construção geométrica. Usando-se as medidas do lado esquerdo e as do lado superior, pode-se concluir que a área deste rectângulo surge da aplicação da seguinte fórmula: "$A = \left[2 \text{ x} \left(\frac{a-b}{2}\right)\right] \text{ x } (a+b)$".
Simplificando-a, resulta o seguinte: "A = (a – b) x (a + b)".

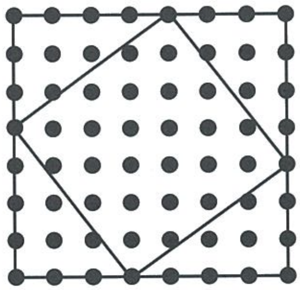
Se se utilizasse a medida do lado direito do rectângulo em vez da medida do lado esquerdo, resultaria o seguinte: "$b + \left(\frac{a-b}{4}\right)$". Se se substituir o "b" pelo triplo de "[(a–b):4]", fica "$3 \text{ x} \left(\frac{a-b}{4}\right) + \left(\frac{a-b}{4}\right)$" o que daria o seguinte: "$\left(\frac{3a-3b}{4}\right) + \left(\frac{a-b}{4}\right)$".
Continuando, ficava: "$\left(\frac{4a-4b}{4}\right)$", ou seja, "$4 \text{ x} \left(\frac{a-b}{4}\right)$", o que daria o tal "a – b".

Obter-se-ia, novamente, o resultado pretendido: "(a – b) x (a + b)".

4. Conexão entre a diferença de quadrados e o teorema de Pitágoras

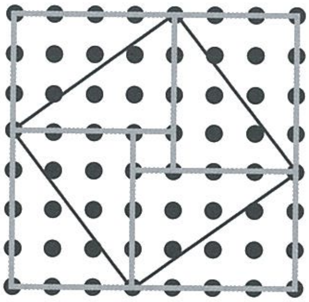
Tarefa – relacionar a "diferença de quadrados" com o teorema de Pitágoras

Se em vez da figura analisada no capítulo anterior, existisse esta outra, em que o quadrado exterior tem "a" como comprimento de cada lado e o quadrado interior tem "b" como comprimento de cada lado, como será a demonstração geométrica deste caso notável, que consiste na diferença das duas áreas?:



Se ao quadrado maior se retirar o quadrado de dentro, fica-se apenas com quatro triângulos geometricamente iguais. Tentemos, agora, relacionar a diferença destes quadrados "$a^2 - b^2$" com a área destes quatro triângulos. Relativamente ao quadrado maior, a sua área é quarenta e nove unidades de área, considerando como unidade de área a área ocupada por um quadrado deste tipo:

Por sua vez, para o cálculo da área do quadrado de lado "b" há que usar o método do enquadramento, pois os lados são segmentos de recta oblíquos. Curiosamente, o enquadramento do quadrado de lado "b" é o quadrado de lado "a". Por isso, a área do enquadramento coincide com as quarenta e nove unidades de área. Fazendo-se, agora, os rectângulos afectos a cada diagonal, ficam assim:

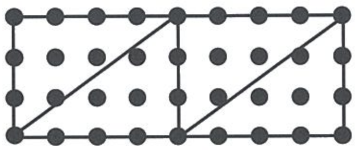


Pode-se constatar a obtenção de quatro rectângulos com doze unidades de área cada um. Como o quadrado de lado "b" permite desprezar metade da área de cada um desses rectângulos, isso leva a que não se tenha em conta vinte e quatro unidades de área. Logo, do total de quarenta e nove unidades de área afectas ao enquadramento retiram-se as vinte e quatro que não fazem parte do quadrado de lado "b" e sobram vinte e cinco unidades de área para a área desse quadrado. Conclui-se, pois, que a área do quadrado de lado "b" é vinte e cinco unidades de área.

Outra observação a fazer-se é a de que as vinte e quatro unidades de área que não são necessárias são precisamente as unidades de área dos quatro triângulos obtidos, pois: "4 x [(b x h) : 2] = 2 x b x h". Substituindo os valores de "b" e de "h" por 4 e 3, respectivamente, resultam precisamente as 24 unidades de área. Fica, pois, provado que a diferença das áreas dos dois quadrados coincide com a área total dos quatro triângulos.

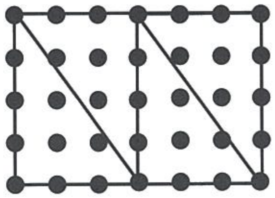
Tendo em conta que se trata de dois quadrados de áreas 49 e 25 unidades de área, respectivamente, então cada lado do quadrado maior mede 7 unidades de comprimento e cada lado do quadrado menor mede 5 unidades de comprimento. *Assim sendo, em termos geométricos poder-se-á desafiar os alunos a tentarem obter, através dos quatro triângulos, um rectângulo de lados (7 – 5) e (7 + 5) unidades de comprimento.*

Por este motivo torna-se útil recortar os quatro triângulos para se tentar fazer o rectângulos com aquelas medidas. Por detrás de cada triângulo convém desenhar-se os pontinhos que se vêem do lado da frente, para que, em caso de se ter que utilizar essa parte de algum triângulo, continue a poder ver-se a malha ponteada. Eis um rectângulo possível de ser construído:



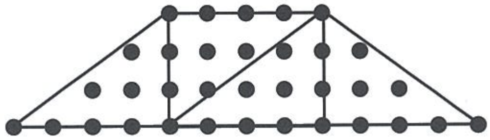
Contudo, este rectângulo não possibilita verificar-se a igualdade pretendida: "$a^2 - b^2 = (a - b)\ (a + b)$", pois os seus lados não medem, respectivamente "(7 – 5)" e "(7 + 5)" unidades de comprimento.

Reflectindo-se um pouco mais, ainda poderão obter-se dois novos rectângulos, de 4 x 3, que originam este maior de 4 x 6:

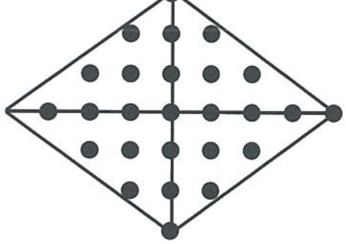


Continua a não conseguir-se encontrar o rectângulo de 2 x 12 unidades de comprimento que permita obter as vinte e quatro unidades de área.

Este trapézio isósceles também resulta da combinação dos quatro triângulos, mas apesar de a fórmula para o cálculo da área voltar a confirmar o valor vinte e quatro unidades de área, não substitui o rectângulo que se procura. Realmente, o produto da semi-soma das bases pela altura do trapézio dá: "(12 + 4) : 2 x 3 = 24". Eis a figura referida:

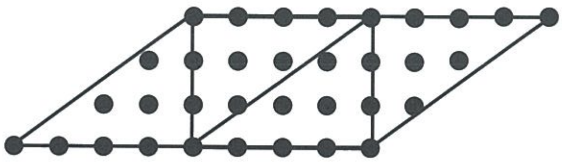


Outra figura possível de se obter é um losango cujas diagonais maior e menor medem, respectivamente, oito e seis unidades de comprimento:



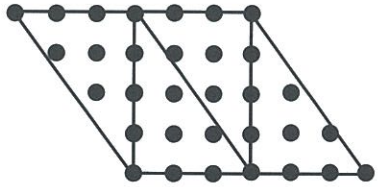
Aplicando-se a fórmula do cálculo da área do losango – semi-produto das suas diagonais – volta-se a obter o valor vinte e quatro, como sendo a área da figura. Contudo, não é de um losango que se anda à procura.

Pode-se obter uma nova figura, que é o paralelogramo obliquângulo, que tem a mesma área que o rectângulo de há pouco, pois um até se pode converter no outro:



Contudo, apesar de o paralelogramo também ter vinte e quatro unidades de área, não é, de facto, resultante de ter um base de doze e uma altura de duas unidades de comprimento.

Esta situação ainda permite a obtenção de mais uma figura equivalente às obtidas. Trata-se de um paralelogramo obliquângulo de base seis e de altura quatro:

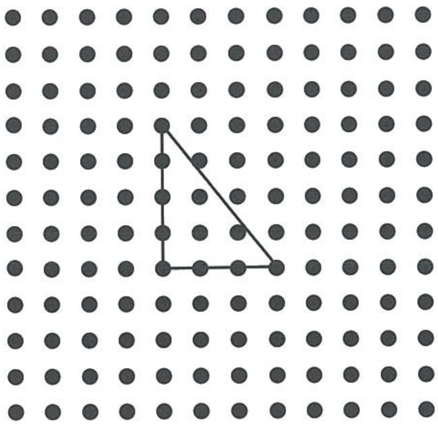


Em síntese, pretende-se que se conclua que, através do exemplo dado, não é possível demonstrar por meio de um rectângulo de 2 por 12 unidades de comprimento, este caso notável da multiplicação.

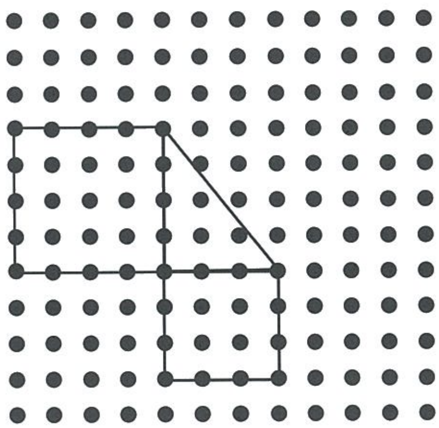
Contudo, um outro método que se poderia usar para se saber a área do quadrado de lado "b" seria usar os quatro triângulos que envolvem esse quadrado de lado "b". Caracterizando-os, quanto aos ângulos, verifica-se que são triângulos rectângulos.

Note-se que os lados do quadrado de lado "b" são as hipotenusas dos quatro triângulos rectângulos que o envolvem. Então poder-se-á dizer que esse quadrado é o quadrado das hipotenusas. Logo, aplicando o teorema de Pitágoras, verifica-se que "$b^2 = 3^2 + 4^2$", isto é, "$b^2 = 25$" unidades de área.

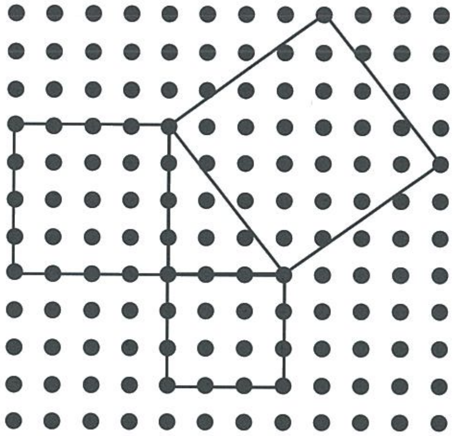
Constata-se, pois, que com estes quatro triângulos escalenos se pode demonstrar geometricamente o teorema de Pitágoras. De facto, numa malha de geoplano, de doze por doze, pode-se construir um desses triângulos:



De seguida podem-se construir os quadrados de cada um dos catetos desse triângulo:

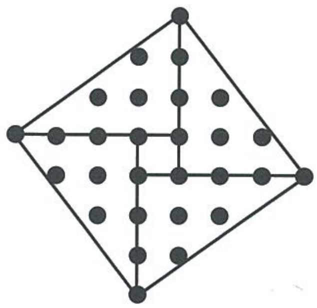


Posteriormente acrescenta-se-lhe o quadrado da hipotenusa:



Calculando a área de cada quadrado através do teorema de Pick, constata-se que o quadrado do lado menor do triângulo tem de área 9 unidades de área. Por sua vez, o quadrado do outro cateto do triângulo tem de área 16 unidades de área. Por último, o quadrado da hipotenusa tem de área 25 unidades de área. Pode-se concluir que a soma das áreas dos quadrados dos dois catetos é igual à área do quadrado da hipotenusa.

Por outro lado, utilizando-se ainda os quatro triângulos geometricamente iguais, pode-se obter uma nova figura:

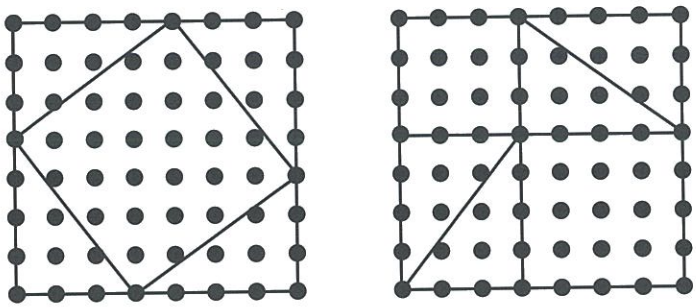


Parece ser óbvio que se trata de um quadrado cujos lados são as hipotenusas dos triângulos. Por isso, pode-se dizer que se está perante o "quadrado da hipotenusa".

Repare-se que a área desse quadrado pode calcular-se sem ser pelo produto da medida de uma hipotenusa pela medida da outra, isto é, sem ser pelo cinco ao quadrado. Também se pode chegar ao valor de vinte e cinco unidades de área se se adicionarem as áreas dos quatro triângulos da figura com o área do quadrado pequeno que está ao centro da mesma.

Relativamente à figura anterior vamos atribuir letras aos lados dos triângulos. À hipotenusa de cada um atribuímos a letra "c"; ao cateto maior de cada triângulo atribuímos a letra "a" e ao cateto menor atribuímos a letra "b". Tendo em conta este procedimento, é fácil perceber-se que as medidas dos lados do quadrado pequeno são "a – b". Associando o "b" à altura dos triângulos, podem-se efectuar alguns cálculos para se obter a área do quadrado de lado "c". De facto, existe quatro vezes o "(a x b) : 2" e ainda o "$(a - b)^2$". Logo, resulta: "4 x [(a x b) : 2] + $(a - b)^2$", ou seja, "$2ab + a^2 - 2ab + b^2$". Continuando os cálculos, fica que "$c^2 = a^2 + b^2$".

Por outro lado, eis o que se passa com as áreas dos quatro triângulos e dos dois quadrados da figura da esquerda:



Os quatro triângulos que enquadram o quadrado interno da figura da esquerda permitem a construção dos dois rectângulos da figura da direita. Por sua vez, o quadrado interno da figura da esquerda tem a mesma área que os dois quadrados internos da figura da direita, pois a malha do geoplano permite comprovar isso mesmo. Não são precisos grandes cálculos para se concluir que a área do quadrado interno da figura da esquerda é igual à soma das áreas dos dois quadrados da figura da direita. Concluímos isso facilmente, pois basta aplicar-se o teorema de Pick. Além disto, em ambas as figuras os lados dos quadrados externos têm o mesmo comprimento.

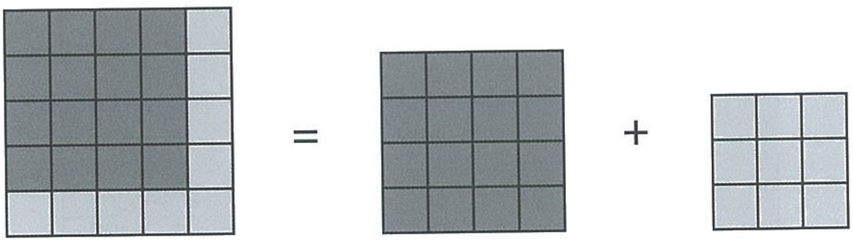
Outra razão óbvia que serve de confirmação para a demonstração do teorema de Pitágoras é que o quadrado da figura da esquerda é o quadrado da hipotenusa de um dos triângulos. Por sua vez, os quadrados da figura da direita são os quadrados dos dois catetos desse mesmo triângulo. Confirma-se, mais uma vez, que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

5 - Ternos pitagóricos – várias perspectivas conectadas

Tarefa – relacionar diferentes perspectivas de abordagem dos ternos pitagóricos

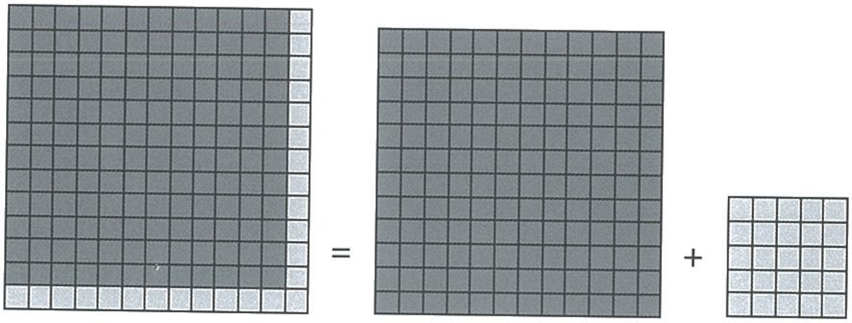
Um dos ternos pitagóricos mais trabalhado ao nível da sala de aula é o formado pelos números consecutivos (3, 4, 5), pois o quadrado do maior valor é igual à soma dos quadrados dos dois números restantes.

Em termos geométricos pode-se associar este terno pitagórico às seguintes figuras quadradas:



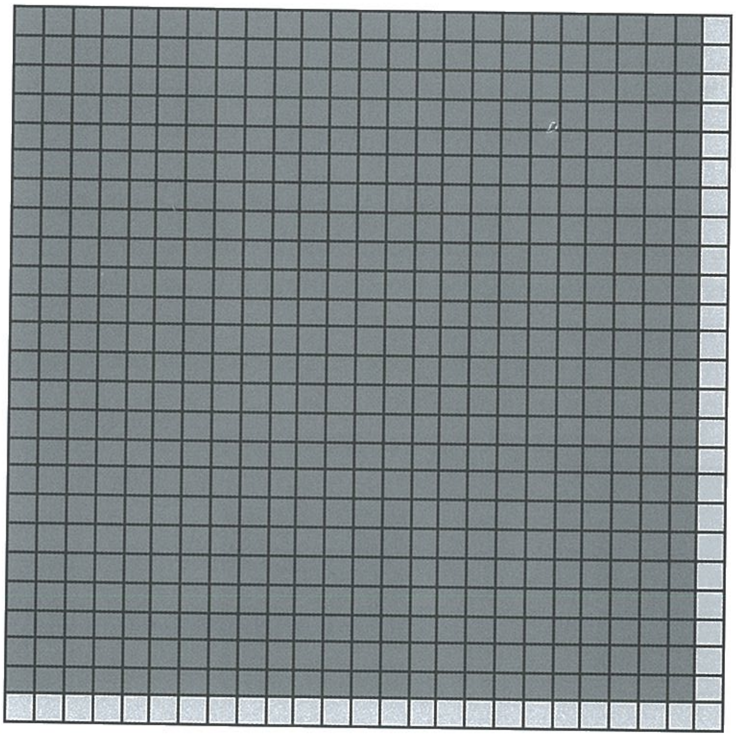
$5^2 = 4^2 + (5 + 4)$ $\qquad$ 4^2 $\qquad$ 3^2

Será interessante desafiar os alunos na procura de outros ternos pitagóricos que possibilitem estabelecer uma relação geométrica semelhante à acabada de evidenciar. Outro exemplo possível é o seguinte:

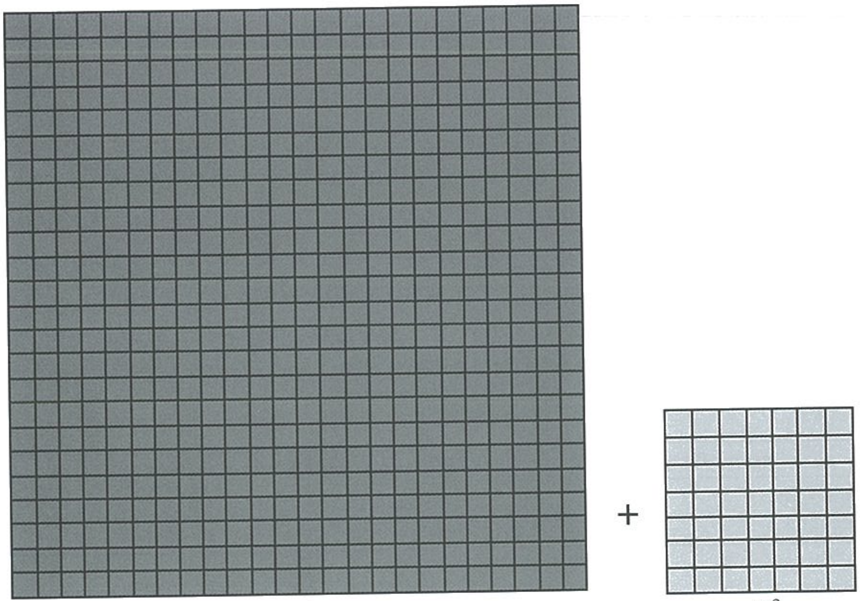


$13^2 = 12^2 + (13 + 12)$ $\qquad$ 12^2 $\qquad$ 5^2

O terno pitagórico (25, 24, 7) também permite confirmar a relação geométrica anterior:



$25^2 = 24^2 + (25 + 24)$



24^2 7^2

Note-se que para cada caso anterior, o quadrado mais pequeno coincide sempre com o quadrado de um número ímpar, iniciando em 3. Sendo assim, é legítimo perguntar aos alunos se serão capazes de encontrar uma lei geral para quaisquer ternos pitagóricos, iniciando num número ímpar, maior que um. Espera-se que os três casos anteriores possam ser analisados numa tabela semelhante à seguinte, de modo a poder obter-se a lei geral:

3^2	4^2	5^2 ou $4^2 + (5 + 4)$
5^2	12^2	13^2 ou $12^2 + (13 + 12)$
7^2	24^2	25^2 ou $24^2 + (25 + 24)$
n > 1 (ímpar)	$\left(\dfrac{n^2-1}{2}\right)^2$	$\left(\dfrac{n^2+1}{2}\right)^2$

$$\left(\frac{n^2-1}{2}+1\right)^2=\left(\frac{n^2-1}{2}+\frac{2}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$$

Associando os valores anteriores às medidas dos lados de um triângulo rectângulo, e partindo-se de um número ímpar maior que a unidade, as fórmulas para se obterem os valores dos catetos são as seguintes: para um dos catetos, "a", atribui-se o valor do número ímpar considerado, isto é: "$a = x$". Por sua vez, o outro cateto, "b", obtém-se pela semi-diferença do quadrado desse número ímpar considerado e a unidade, isto é: "$b = (x^2 - 1) : 2$". Por último, a hipotenusa, "c", calcula-se pela semi-soma entre o quadrado desse número ímpar e a unidade, isto é: "$c = (x^2 + 1) : 2$".

Eis a tabela ilustrativa para o caso dos cinco primeiros números ímpares, iniciando no valor três:

Ternos Pitagóricos			
Números ímpares	$a = x$	$b = \frac{x^2 - 1}{2}$	$c = \frac{x^2 + 1}{2}$
3	3	4	5
5	5	12	13
7	7	24	25
9	9	40	41
11	11	60	61

Teorema de Pitágoras			
a^2	b^2	c^2	$c^2 = a^2 + b^2$
9	16	25	25 = 25
25	144	169	169 = 169
49	576	625	625 = 625
81	1600	1681	1681 = 1681
121	3600	3721	3721 = 3721

Os dados do quadro anterior permitem fazer algumas apreciações. Desde logo, constata-se que dois elementos de cada terno são números consecutivos. Por outro lado, o produto dos catetos é divisível por doze e o produto de cada terno é divisível por sessenta.

O conhecimento destas três fórmulas permite que os alunos possam ser desafiados a resolver várias situações problemáticas, como esta: «*imaginem que um terreno com a forma de um triângulo rectângulo tem de hipotenusa trezentos e treze metros. Quais serão as medidas dos comprimentos dos catetos deste triângulo, ou seja do terreno triangular?*»

Ora, igualando o valor conhecido à fórmula que permite obter os valores das hipotenusas, possibilita a descoberta do número ímpar em causa. Obtido esse valor, associa-se à medida do comprimento do cateto menor, o que também já permite obter a medida do outro cateto: "$313 = (x^2 + 1) : 2$", que é equivalente a "$x^2 = 2 \times 313 – 1$", que por sua vez implica que "$x^2 = 625$". Logo o valor de "x" é 25, ou seja, é a medida do cateto mais pequeno. Pode-se concluir a resolução desta tarefa por três processos distintos: ou se aplica o teorema de Pitágoras para se obter o valor do outro cateto, ou se aplica a fórmula da tabela para encontrarmos directamente esse valor que falta, ou aplica-se a relação directa: "b = c – 1". Pela aplicação do teorema de Pitágoras, e sabendo que "a" = 25 e "c" = 313:

$$b^2 = c^2 - a^2 \Leftrightarrow b^2 = 313^2 - 25^2 \Leftrightarrow b^2 = 97969 - 625 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{97344} \Rightarrow b = 312$$

Por sua vez, a aplicação da fórmula directamente da tabela, permite a obtenção do mesmo valor:

$$b = \frac{x^2 - 1}{2} \Leftrightarrow b = \frac{25^2 - 1}{2} \Leftrightarrow b = \frac{624}{2} \Leftrightarrow b = 312.$$

O terceiro processo de resolução, que resulta da aplicação directa da relação: "b" = "c – 1", permite que se volte a obter o valor "b = 312".

Resta abordar a situação do número inicial poder ser um número par. Neste caso ter-se-ão que usar outras fórmulas, designadas por fórmulas de Platão: "a = x"; "b = (x : 2)^2 – 1" e "c = (x : 2)^2 + 1".

Eis a tabela envolvendo cinco pares consecutivos, com início no valor quatro:

Ternos Pitagóricos			
Números pares	a = x	$b = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1$	$c = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1$
4	**4**	**3**	**5**
6	**6**	**8**	**10**
8	**8**	**15**	**17**
10	**10**	**24**	**26**
12	**12**	**35**	**37**

Teorema de Pitágoras			
a^2	b^2	c^2	$c^2 = a^2 + b^2$
16	9	25	25 = 25
36	64	100	100 = 100
64	225	289	289 = 289
100	576	676	676 = 676
144	1225	1369	1369 = 1369

Note-se que agora, em vez do "b" ser igual a "c – 1", passamos a obter outro padrão ou regularidade, em que "b" é igual a "c – 2".

Fazendo-se uma análise comparativa entre estas duas últimas tabelas, verifica-se que, quer com um tipo de fórmula ou com o outro, pode-se obter o valor vinte e quatro para o cateto "b". Se os alunos forem solicitados a encontrar os outros dois valores, obteriam respostas diferentes, dependendo das fórmulas usadas. Seria, pois, um exemplo interessante a explorar com os alunos para que eles pudessem ver que uma mesma situação problemática admite mais do que uma possível solução. Um exemplo de situação problemática a colocar poderia ser a seguinte: *«encontre a área de dois triângulos rectângulos, não equivalentes, em que um cateto de cada triângulo mede vinte e quatro centímetros»*.

Usando a fórmula dos números ímpares, obtém-se o valor sete centímetros para o cateto "a", e usando a fórmula dos números pares obtém-se o valor dez centímetros para esse cateto. Aplicando a respectiva fórmula para o cálculo da área do triângulo obtém-se para o primeiro caso: A = (24 x 7) : 2. Logo, A = 84 cm^2. Por sua vez, no outro caso, fica: A = (24 x 10) : 2, o que é equivalente a termos A = 120 cm^2.

Na procura de novos ternos pitagóricos é expectável que os alunos tentem jogar com os dobros dos três números envolvidos no terno pitagórico primitivo, isto é, com o seis, com o oito e com o dez. De facto, constata-se que "$10^2 = 6^2 + 8^2$", pois 100 = 100. O mesmo acontece com outros múltiplos desse terno primitivo, como sejam os triplos respectivos, isto é, (9, 12, 15). De facto, "$15^2 = 9^2 + 12^2$".

Se se seguir a sugestão existente num dos livros de Perelman (1989a), verifica-se que se podem obter ternos pitagóricos sem ser a partir de um só número. De facto, usando-se dois números podem utilizar-se as seguintes fórmulas:

Ternos Pitagóricos		
$a = mn$	$b = \frac{m^2 - n^2}{2}$	$c = \frac{m^2 + n^2}{2}$
Ex: m = 3 e n = 1		
a = 3	b = 4	c = 5

Veja-se que ao considerar "m = 3" e "n = 1", obtém-se: "a = 3 x 1 = 3"; "b = $(3^2 - 1^2) : 2 = 4$"; "c = $(3^2 + 1^2) : 2 = 5$". Se repararmos, o três e o um são números primos entre si. Confirmando esta observação para outros dois números primos entre si, como sejam o sete e o três, verifica-se que o "a" origina vinte e um, o "b" origina vinte e o "c" origina vinte e nove. Logo, "$29^2 = 21^2 + 20^2$", pois: "841 = 441 + 400".

Repare-se, agora, nos números cinco e nove que, apesar do último não ser número primo, eles são primos entre si. Aplicando as fórmulas anteriores constata-se que "a = 9 x 5 = 45"; "b = $(9^2 - 5^2) : 2 = 28$"; "c = $(9^2 + 5^2) : 2 = 53$". Por sua vez, $53^2 = 45^2 + 28^2$, pois 2809 = 2025 + 784.

Combinando-se, dois a dois, os cinco primeiros números ímpares que são primos entre si, incluindo o valor um, eis os ternos pitagóricos que se obtêm:

Ternos Pitagóricos				Teorema de Pitágoras			
Números primos entre si	$a=mn$	$b=\frac{m^2-n^2}{2}$	$c=\frac{m^2+n^2}{2}$	a^2	b^2	c^2	$c^2=a^2+b^2$
9 e 1	9	40	41	81	1600	1681	1681 = 1681
9 e 5	45	28	53	2025	784	2809	2809 = 2809
9 e 7	63	16	65	3969	256	4225	4225 = 4225
7 e 1	7	24	25	49	576	625	625 = 625
7 e 3	21	20	29	441	400	841	841 = 841
7 e 5	35	12	37	1225	144	1369	1369 = 1369
5 e 1	5	12	13	25	144	169	169 = 169
5 e 3	15	8	17	225	64	289	289 = 289
3 e 1	3	4	5	9	16	25	25 = 25

Este quadro permite que se tirem algumas conclusões. Em primeiro lugar, um dos catetos é múltiplo de três. Por outro lado, um dos catetos é múltiplo de quatro. Além disto, um dos números pitagóricos é múltiplo de cinco. Não se pretende dizer com isto que cada número pitagórico seja exclusivamente múltiplo do três ou múltiplo do quatro ou múltiplo do cinco. Até pode haver um número que não seja múltiplo do três, nem do quatro e nem do cinco. Na quarta linha do quadro, o sete é um exemplo disto mesmo.

Abordando um pouco a área da Aritmética Racional apresentemos a explicação teórica para a obtenção destes algoritmos. Como se sabe, o três, o quatro e o cinco são números primos entre si. Comecemos por demonstrar que uma das medidas dos catetos "a" ou "b" é par e a outra é ímpar. Pelo método da redução ao absurdo, se ambas as medidas forem pares, então a soma dos quadrados dessas medidas também o é. De facto, sendo a hipotenusa, também, um número par, isso implicaria que as medidas dos três lados não representassem números primos entre si, pois haveria mais divisores comuns entre eles, para além da unidade. Pode-se, pois, concluir que pelo menos uma das medidas dos catetos será um número ímpar. Note-se que não poderiam ser ambos números ímpares e a hipotenusa número par, porque a condição para dois números serem ímpares é a seguinte: "2x + 1" e "2y + 1". Por sua vez, a soma dos respectivos quadrados é a seguinte:

$$(2x+1)^2+(2y+1)^2=4x^2+4x+1+4y^2+4y+1=4\left(x^2+x+y^2+y\right)+2$$

Isto implica que se trata de um número que, ao ser dividido por quatro, dá resto dois, o que contraria o que se passa com o quadrado de qualquer número par, porque, se se dividir o quadrado de um número par qualquer por quatro, o resto é zero. Fica, pois, demonstrado que as medidas dos catetos de um triângulo rectângulo têm que ser uma par e outra ímpar. Logo a soma dos quadrados dos catetos originará um número ímpar. Por sua vez, a medida da hipotenusa também o é. Supondo que o "a" é par e "b" é ímpar, da igualdade "$c^2 = a^2 + b^2$" deduzimos que "$b^2 = c^2 - a^2$". Como estamos perante a diferença de dois quadrados, também sabemos que "$b^2 = (c + a) \times (c - a)$". Facilmente demonstramos que, quer o "(c + a)", quer o "(c - a)" são números primos entre si, porque se eles tivessem mais algum divisor primo, para além da unidade, quer a sua soma, quer a sua diferença ou seu produto também seriam divisíveis por esse outro número primo comum. Ou seja, a soma destes dois números seria "$(c + a) + (c - a) = 2c$". Por sua vez, a diferença entre eles seria "$(c + a) - (c - a) = 2a$". Por último, o seu produto seria "$(c + a) \times (c - a) = b^2$". Assim, os números "2c", "2a" e "b^2" teriam um divisor comum que não pode ser o dois. Logo, "a", "b" e "c" teriam esse factor em comum, o que não é possível. Conclui-se, pois, que "(c + a)" e "(c - a)" são números primos entre si. Agora, se o produto de dois números primos entre si é um quadrado, também o é cada um deles. Por isso, podemos estabelecer o seguinte sistema:

$$\begin{cases} c + a = m^2 \\ c - a = n^2 \end{cases}$$

Desse sistema retiramos que $\mathrm{c} = \dfrac{m^2 + n^2}{2}$ e $\mathrm{a} = \dfrac{m^2 - n^2}{2}$. Retomando a fórmula inicial: $b^2 = c^2 - a^2$, fica que $b^2 = \left(\dfrac{m^2 + n^2}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{m^2 - n^2}{2}\right)^2 = m^2n^2$. Logo, $b = mn$. Concluímos, pois, que os ternos pitagóricos surgem das fórmulas: $\mathrm{a} = \dfrac{m^2 - n^2}{2}$, $b = mn$ *e* $\mathrm{c} = \dfrac{m^2 + n^2}{2}$.

Tendo em conta as palavras do matemático David Wells (1996), o terno pitagórico (3, 4, 5) é o único que permite construir um triângulo cujas medidas dos seus lados estão em progressão aritmética. Nesta observação há que excluir os respectivos múltiplos, como seja, por exemplo, o terno (9, 12, 15).

Curiosamente se se testarem as fórmulas anteriores para o caso em que se usam dois números que não são ímpares e, portanto, não são primos entre si, as mesmas também originam ternos pitagóricos. Exemplificando com os valores dezoito e seis, resultam o seguinte terno (108, 144, 180):

$a=mn$	$b=\frac{m^2-n^2}{2}$	$c=\frac{m^2+n^2}{2}$	a^2	b^2	c^2	$c^2=a^2+b^2$
108	144	180	11664	20736	32400	32400 = 32400

Este exemplo poder-nos-ia levar a inferir que as fórmulas divulgadas por Perelman (1989a) são válidas para quaisquer números naturais que escolhamos, obtendo-se sempre ternos pitagóricos inteiros. Contudo, o par (9, 6) vem contrariar esta indução, pois:

$a=mn$	$b=\frac{m^2-n^2}{2}$	$c=\frac{m^2+n^2}{2}$	a^2	b^2	c^2	$c^2=a^2+b^2$
54	22,5	58,5	2916	506,25	3422,25	3422,25 = 3422,25

Realmente as fórmulas também se aplicam neste caso, mas já deixámos de obter ternos de números inteiros. Fica, pois, a garantia que se se pretender obter ternos pitagóricos formados por números inteiros, a utilização destas fórmulas obriga à utilização de números ímpares, primos entre si.

Contudo, Clifford Pickover (2002) e Theoni Pappas (1995b) apresentam uma ligeira alteração às fórmulas anteriormente abordadas. Relativamente aos catetos, as fórmulas propostas são as seguintes: "$a = 2mn$" e "$b = m^2 - n^2$. Além disto, em vez de a fórmula para a hipotenusa ser "$c = (m^2 + n^2) : 2$", apresentam esta: "$c = m^2 + n^2$". Estas fórmulas são associadas a Diofanto, bem como ao método de Euclides para a obtenção de ternos pitagóricos. Confrontando os dois tipos de fórmulas, estas últimas representam o dobro dos valores obtidos pelas anteriores.

Eis a aplicação destas últimas aos casos abordados anteriormente. Os valores obtidos são, de facto, o dobro dos obtidos antes:

Ternos Pitagóricos				Teorema de Pitágoras			
Números primos entre si	a = 2mn	b = m² – n²	c = m² + n²	a²	b²	c²	c² = a² + b²
9 e 1	18	80	82	324	6400	6724	6724 = 6724
9 e 5	90	56	106	8100	3236	11236	11236 = 11236
9 e 7	126	32	130	15876	1024	16900	16900 = 16900
7 e 1	14	48	50	196	2304	2500	2500 = 2500
7 e 3	42	40	58	1764	1600	3364	3364 = 3364
7 e 5	70	24	74	4900	576	5476	5476 = 5476
5 e 1	10	24	26	100	576	676	676 = 676
5 e 3	30	16	34	900	256	1156	1156 = 1156
3 e 1	6	8	10	36	64	100	100 = 100

Com este tipo de fórmulas já se consegue obter um terno de números inteiros mesmo quando se usam os números nove e seis. Neste caso o "a" seria igual a 2 x 54 que é 108. Por sua vez, o "b" seria igual a $9^2 - 6^2$, ou seja, 81 – 36, que é 45. Por último, a hipotenusa, ou seja, o "c", seria igual a $9^2 + 6^2$, isto é, 81 + 36, que originaria 117. Confirmando agora pelo teorema de Pitágoras, constata-se que $117^2 = 108^2 + 45^2$, isto é, 13689 = 11664 + 2025.

Um desafio interessante a colocar aos alunos é o de tentarem obter, por utilização destas últimas fórmulas, o terno pitagórico primitivo (3, 4, 5). Espera-se que sugiram a utilização de valores pequenos, como sejam o um e o dois:

Ternos Pitagóricos				Teorema de Pitágoras			
Números envolvidos	a = 2mn	b = m² – n²	c = m² + n²	a²	b²	c²	c² = a² + b²
2 e 1	4	3	5	16	9	25	25 = 25

A literatura associa a Pitágoras as fórmulas que permitem iniciar os números ímpares pelo valor um: "$a = 2n + 1$", "$b = 2n^2 + 2n$", e "$c = 2n^2 + 2n + 1$". Eis a tabela para o caso dos cinco primeiros números ímpares:

Ternos Pitagóricos				Teorema de Pitágoras			
Números ímpares	a=2n+1	b=2n²+2n	c=2n²+2n+1	a²	b²	c²	c²=a²+b²
1	3	4	5	9	16	25	25=25
3	7	24	25	49	576	625	625=625
5	11	60	61	121	3600	3721	3721=3721
7	15	112	113	225	12544	12769	12769=12769
9	19	180	181	361	32400	32761	32761=32761

Por sua vez, com início na utilização do valor dois, apresentam-se as fórmulas de Platão: "$a = n^2 - 1$"; "$b = 2n$" e "$c = n^2 + 1$" Eis a tabela para o caso dos cinco primeiros números pares:

Ternos Pitagóricos				Teorema de Pitágoras			
Números pares	$a = n^2 - 1$	$b = 2n$	$c = n^2 + 1$	a^2	b^2	c^2	$c^2 = a^2 + b^2$
2	3	4	5	9	16	25	25 = 25
4	15	8	17	225	64	289	289 = 289
6	35	12	37	1225	144	1369	1369 = 1369
8	63	16	65	3969	256	4225	4225 = 4225
10	99	20	101	9801	400	10201	10201 = 10201

Quer num caso, quer no outro, obtém-se sempre o terno pitagórico primitivo (3, 4, 5).

Estas várias fórmulas acabadas de analisar permitem perceber-se que o tema dos ternos pitagóricos pode ser trabalhado na sala de aula, num ambiente de investigação matemática, pois, com a ajuda do docente, a descoberta das fórmulas pode ser uma importante fonte de motivação dos jovens para esta disciplina.

6 - O triângulo de Pascal e sua conexão com o cálculo combinatório, com os números de Fibonacci e com outros temas matemáticos

Tarefa – associar o triângulo de Pascal a vários temas da Matemática

O triângulo de Pascal permite estabelecer várias conexões matemáticas, de entre as quais se destaca o cálculo combinatório e a sequência de números de Fibonacci. Este "triângulo aritmético" costuma ser associado ao matemático francês Blaise Pascal, por ter descoberto muitas propriedades numéricas. Contudo, ele já era conhecido, muitos anos antes, pelos chineses, pois Pascal viveu entre 1623 e 1662, mas num livro publicado em 1303 pelo chinês Chu Shih-Chieh, com o título "O Precioso Espelho dos Quatro Elementos", já aparecia este triângulo com os correspondentes símbolos chineses. Como se pode constatar, cada número resulta da soma de dois números da fila anterior, que estão por cima dele. Além disso, o início e o fim de cada fila são formados pela unidade. Eis as primeiras linhas desse famoso triângulo:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Uma primeira conexão matemática envolvendo este triângulo pode fazer-se com o binómio de Newton. No livro de Chu Shih-Chieh já se podiam constatar os coeficientes binomiais até à oitava potência. De facto, cada linha deste triângulo representa os coeficientes da binomial. Quando temos a potência $(a + b)^2$, o seu desenvolvimento implica que os coeficientes dos polinómios obtidos sejam o 1, o 2 e o 1, que são precisamente os números que existem na terceira linha do triângulo. Por sua vez, quanto aos coeficientes relativos à potência seguinte $(a + b)^3$, eles são exactamente os números da quarta linha deste triângulo: o 1, o 3, outro 3 e outro 1. É por estes motivos que o triângulo pode ser usado para chegar à fórmula binomial de Newton:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}\, b + \binom{n}{2} a^{n-2}\, b^2 + \ldots + \binom{n}{n} b^n$$

A título de exemplo, aplicando-se a fórmula anterior à quinta linha do triângulo, infere-se facilmente a seguinte igualdade:

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Associando este triângulo ao tema das combinações, poder-se-ia usar a seguinte situação problemática: «*se tiver autocolantes dos seguintes quatro clubes de futebol: Académica (a), Benfica (b), Sporting (s) e Porto (p), e pretender prever como irão ser ocupados os três primeiros lugares do campeonato, quantas serão as possibilidades que existem?*»

Uma eventual resposta passaria por fazer-se uma tabela com todas as possibilidades existentes:

Possibilidades:					
abs	asb	sab	sba	bas	bsa
abp	apb	pab	pba	bap	bpa
bsp	bps	pbs	psb	sbp	spb
asp	aps	pas	psa	sap	spa

A coluna da esquerda evidencia que há quatro combinações possíveis, que resultam em vinte e quatro arranjos: A(4, 3) ou $\frac{4!}{(4-3)!}$.

Este quadro relativo às iniciais dos clubes de futebol pode ajudar a explicar que o total de arranjos resulta do produto das quatro combinações possíveis, envolvendo três diferentes letras, com o três factorial, porque cada combinação de três letras origina seis permutações, ou seja, três factorial. Logo, poder-se-á compreender que a fórmula final dos arranjos parte do produto das combinações de quatro clubes, três a três, pelo três factorial. Simbolicamente fica: $A(4,3) = C(4,3) \times 3!$ ou $\binom{4}{3} \times 3!$ ou $C_3^4 \times 3!$. Desta relação também se pode concluir que o processo de obtenção das quatro combinações é o seguinte: $C_3^4 = \frac{A_3^4}{3!}$. Por outro lado, sabendo que $A_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!}$ fica: $C_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!\,3!}$ Genericamente, a fórmula para o cálculo de quaisquer combinações é a seguinte: $C_m^n = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$.

Associando as combinações a cada um dos elementos do triângulo de Pascal, pode-se propor a seguinte figura:

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

Comparando os dois triângulos, a posição das combinações $\binom{4}{3}$ ou C(4,3) ou C_3^4 neste último triângulo coincide com o valor quatro do triângulo de Pascal. Face a esta conexão entre a combinatória e o triângulo de Pascal podem-se propor algumas situações problemáticas, como, por exemplo, esta: «*sabendo que existem cinco pessoas a pretender jogar matraquilhos, quantas são as combinações possíveis para estarem quatro pessoas a jogar de cada vez?*»

Isto envolve combinações de cinco, quatro a quatro. Logo, comparando os dois tipos de triângulos pode-se concluir o seguinte:

$\binom{0}{0}$	1
$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$	1 1
$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$	1 2 1
$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$	1 3 3 1
$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$	1 4 6 4 1
$\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$	1 5 10 10 **5** 1

De facto, aplicando o algoritmo, fica: $C^n_m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \Leftrightarrow C^5_4 = \frac{5!}{4!\,1!} = 5$

Por outro lado, o triângulo de Pascal também pode ser associado ao tema das probabilidades. Para tal, vamos tirar partido da seguinte situação problemática: «*se lançarmos uma moeda ao ar quatro vezes, sabemos que em cada uma delas sairá cara ou coroa. Qual é a probabilidade de saírem duas caras e duas coroas?*».

Um processo de resolução possível desta situação pode ser a construção de uma tabela onde se registem todos os acontecimentos possíveis de ocorrer. Claro que uma primeira conclusão é que há apenas uma possibilidade de não sair caras e outra de saírem quatro caras.

Eis uma tabela possível, em que o "C" representa a "cara" e o "c" representa a "coroa":

Zero caras	Uma cara	Duas caras	Três caras	Quatro caras	Total
cccc	Cccc	CCcc	CCCc	CCCC	
	cCcc	cCCc	cCCC		
	ccCc	ccCC	CCcC		
	cccC	CcCc	CcCC		
		cCcC			
		CccC			
1	4	**6**	4	1	**16**

Este caso permite aplicar a definição de probabilidade de um acontecimento proposta por Pierre Laplace, de modo a concluir-se que para dezasseis casos possíveis apenas existem seis casos favoráveis. Neste caso a probabilidade do acontecimento seleccionado seria $P = \frac{6}{16} = 0{,}375$. Agora, como é que isto se relaciona com o triângulo de Pascal? Note-se que os números do final da tabela, exceptuando o dezasseis, coincidem com os números da quinta linha do triângulo.

Isto quererá dizer que os números existentes na linha seguinte do triângulo de Pascal: 1, 5, 10, 10, 5, 1, estão relacionados com os acontecimentos possíveis envolvidos no lançamento de uma moeda ao ar cinco vezes. Fazendo-se a tabela respectiva para esse caso, confirma-se esta conjectura:

Zero caras	**Uma cara**	**Duas caras**	**Três caras**	**Quatro caras**	**Cinco caras**	**Total**
ccccc	Ccccc	CCccc	CCCcc	CCCCc	CCCCC	
	cCccc	cCCcc	cCCCc	cCCCC		
	ccCcc	ccCCc	ccCCC	CCCcC		
	cccCc	cccCC	CCcCc	CcCCC		
	ccccC	CcCcc	CCccC	CCcCC		
		CccCc	cCCcC			
		CcccC	cCcCC			
		cCcCc	CccCC			
		cCccC	CcCCc			
		ccCcC	CcCcC			
1	5	10	10	5	1	**32**

De facto, os numeradores relativos às seguintes fracções $\frac{1}{32}, \frac{5}{32}, \frac{10}{32}, \frac{10}{32}, \frac{5}{32}$ e $\frac{1}{32}$ são os que existem na sexta linha do triângulo de Pascal e representam os casos favoráveis a cada um dos seis tipos de acontecimentos possíveis.

Passemos a analisar a conexão deste triângulo com a sequência de números de Fibonacci, recorrendo a um problema clássico envolvendo coelhos: «*parte-se de um único casal de coelhos recém-nascidos e supõe-se que um casal de coelhos torna-se fértil após o segundo mês de vida. Quantos pares de coelhos podem nascer durante um ano, sabendo-se que todos os meses cada par de coelhos procria um novo par e que os coelhos nunca morrem?*»

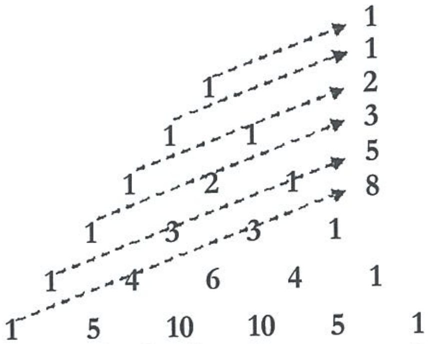
Esta situação problemática permite que se conclua que no final dos 1° e do 2° meses ainda só haja um casal de coelhos. A partir daí, esse casal adulto dará origem a um casal de coelhos jovens.

Isto quer dizer que no final do 3° mês já existirão dois casais de coelhos: um adulto e um jovem. Continuando este raciocínio encontra-se o valor final de duzentos e trinta e três casais, conforme atesta a seguinte tabela:

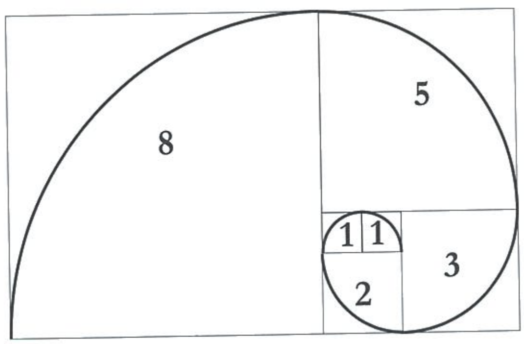
	Número de casais adultos	Número de casais jovens	Total
Início	1	0	1
Fim de Janeiro	1	0	1
Fim de Fevereiro	1	1	2
Fim de Março	1	2	3
Fim de Abril	2	3	5
Fim de Maio	3	5	8
Fim de Junho	5	8	13
Fim de Julho	8	13	21
Fim de Agosto	13	21	34
Fim de Setembro	21	34	55
Fim de Outubro	34	55	89
Fim de Novembro	55	89	144
Fim de Dezembro	89	144	**233**

A sequência de números 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55... existente na coluna da direita da tabela anterior é conhecida como sendo a sucessão de números de Fibonacci. A designação Fibonacci provém do facto do filho de Guilielmo Bonacci, de nome Leonardo, ter nascido na cidade italiana de Pisa e do próprio se auto-proclamar "filio de Bonacci", isto é, filho de Bonacci. É a este matemático italiano, que viveu, pensa-se, entre 1170 e 1250, que se atribui a sequência de números Fibonacci. Contudo, a Historia da Matemática refere que a situação problemática acabada de resolver sobre os coelhos foi resolvida por Fibonacci como sendo um mero exercício mental e este não dedicou muita atenção à estratégia que seguiu para obter a resposta de duzentos e trinta e três casais de coelhos. Apenas seis séculos mais tarde, ou seja, no século XIX, o francês Edouard Lucas propôs a seguinte lei geral para a obtenção dos números de Fibonacci: $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}, n \geq 3$ e $f_1 = f_2 = 1$. Outra forma, semelhante, de se obterem esses números é recorrer a esta fórmula: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 3$ e $f_1 = f_2 = 1$. Note-se que, exceptuando o primeiro e o segundo elementos da sequência, cada elemento resulta sempre da adição dos dois elementos imediatamente anteriores.

A relação que esta situação tem com o triângulo de Pascal pode evidenciar-se na seguinte figura:



Esta famosa sequência de números também costuma ser associada a vários quadrados justapostos. De facto, se se construírem dois quadrados pequenos de lado igual a um e, de seguida, se construir outro quadrado de lado dois, contíguo aos anteriores, seguindo-se-lhes um novo quadrado, de lado três, justaposto aos quadrados de lados um e dois, e assim sucessivamente, ir-se-ão obter quadrados de lados três mais dois, cinco mais três, oito mais cinco, que são, precisamente, os números de Fibonacci. Nos rectângulos que resultam desta construção geométrica pode-se inscrever a famosa espiral logarítmica, também designada por spira mirabilis de Bernoulli:



Esta imagem costuma ser associada a vários aspectos da natureza, como seja na disposição das sementes de girassol ou em pinhas.

Em termos matemáticos, esta sequência numérica também reserva algumas surpresas interessantes. Por exemplo, se se dividirem quaisquer dois números de Fibonacci consecutivos, o quociente aproxima-se do irracional 1,1618..., que não é mais do que o enigmático número de ouro. Isso quer dizer que esses quocientes se aproximam de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Outra curiosidade interessante desta sequência é que a soma dos quadrados de dois números de Fibonacci consecutivos ainda é um número de Fibonacci. A título de exemplo, vejam-se os seguintes casos

$$3^2 + 5^2 = \mathbf{34} \qquad 5^2 + 8^2 = \mathbf{89}$$

Tendo em conta a sucessão de Fibonacci poder-se-á pedir aos alunos para escolherem dois números quaisquer dessa sequência e, a partir deles, tentarem arranjar uma nova sequência de números baseada no critério de formação da sucessão de Fibonacci. Depois poderão verificar que a soma dos dez primeiros números obtidos é onze vezes maior que o sétimo termo da sequência elaborada.

A titulo de exemplo, poder-se-ão escolher o quinto e o oitavo números, que são, respectivamente, o 5 e 21. Construindo-se a sequência numérica, obtêm-se os seguintes valores: 5, 21, 26, 47, 73, 120, 193, 313, 506, 819,... O sétimo termo é o 193 e a soma dos dez termos é 2123. Confirma-se, pois, que o 2123 é onze vezes maior que 193, pois multiplicando o 193 por 11, obtém-se o valor 2123.

Será interessante desafiar os alunos a apresentar uma explicação para esta curiosidade matemática ocorrer. Seria desejável que os alunos estabelecessem um raciocínio semelhante ao seguinte: sendo "a" e "b" os dois primeiros termos da sucessão obtida, o terceiro resulta de "a + b". Por sua vez, o quarto termo da sequência pode ser representado por "a + 2b" e o quinto pela adição do dobro do primeiro termo com o triplo do segundo, isto é, "2a + 3b". Já o sexto elemento da sequência resulta da adição do triplo do primeiro elemento com o quíntuplo do segundo, isto é, "3a + 5b". Note-se que se estão a utilizar como coeficientes do "a" e do "b" os números relativos à sequência original de Fibonacci. Logo, se se juntarem os dois últimos coeficientes que se obtiveram para o "a", que são o 2 e o 3, obtém-se o valor 5. Depois, se se juntarem os dois últimos coeficientes obtidos para o "b", o 3 e o 5, origina-se o valor 8. Assim, "5a + 8b" será o valor do sétimo elemento. Consequentemente, o próximo número terá que resultar de "8a + 13b"; o 9º resulta de "13a + 21b" e o 10º resulta de "21a + 34b".

Bastava adicionar-se todas as somas que fomos descobrindo para cada um dos dez números ordinais da sequência e, ao dividir essa soma por onze, dava "5a + 8b", que é o valor do sétimo elemento. De facto, a soma dos dez primeiros termos de qualquer sequência deste tipo origina "55a + 88b", que é precisamente onze vezes maior que "5a + 8b".

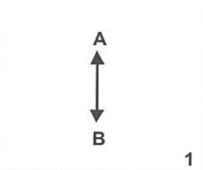
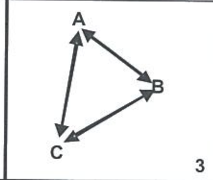
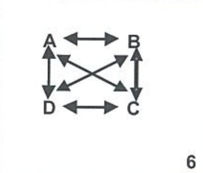
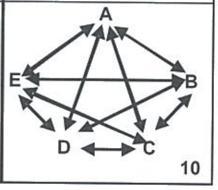
Esta sequência numérica permite introduzir novas curiosidades matemáticas, como sejam: (a) escolhendo-se três números consecutivos, como por exemplo, 5, 8 e 13, verifica-se que 5 x 13 = 65 e que 8 x 8 = 64. Usando outro exemplo: 13, 21 e 34, verifica-se que 13 x 34 = 442 e que 21 x 21 = 441. Ou seja, daqui parece que poderíamos concluir que o produto dos valores extremos é superior em uma unidade ao quadrado do valor central. Contudo, se os valores usados forem, por exemplo: 3, 5 e 8, verifica-se que 3 x 8 = 24 e que 5 x 5 = 25. Neste caso, é o quadrado do valor central que supera em uma unidade o produto dos valores extremos; (b) escolhendo-se agora quatro números consecutivos desta sequência, como, por exemplo, 5, 8, 13 e 21, verifica-se que 5 x 21 = 105 e que 8 x 13 = 104. Ou seja, parece poder-se concluir que o produto dos valores extremos é superior em uma unidade ao produto dos valores centrais. Contudo, se o exemplo for este: 8, 13, 21 e 34, verifica-se que 8 x 34 = 272 e que 13 x 21 = 273, isto é, o produto dos valores centrais é que supera em uma unidade o produto dos valores extremos; (c) perante quaisquer quatro números consecutivos de Fibonacci, como, por exemplo, 3, 5, 8 e 13, existe a seguinte relação: 3 x 13 = $8^2 - 5^2$. Confirmando, 39 = 64 – 25.

7 - Conexão entre o triângulo de Pascal, os números triangulares e os números tetraédricos

Tarefa – associar o triângulo de Pascal a vários números figurados

Perante uma situação problemática como a seguinte: *«quantos jogos serão disputados num torneio de andebol, envolvendo 16 equipas, sabendo que cada uma terá que jogar com todas as restantes? (Nota: Este torneio só se joga a uma volta, isto é, cada par de equipas só disputa um jogo entre si)»*, é natural que alunos o resolvessem recorrendo ao cálculo combinatório, caso dominassem este conteúdo matemático. Sendo assim, não seria mais do que um mero exercício de combinações de dezasseis, dois a dois, originando cento e vinte jogos: $C_2^{16} = \frac{16!}{2! \times (16-2)!} = \frac{16 \times 15}{2} = 120$ jogos.

Contudo, este problema também poderia ser colocado a alunos que não tivessem o domínio do cálculo combinatório. Uma possibilidade de resolução passa pelo recurso à estratégia de se usarem casos mais simples. A tabela seguinte pode ilustar um raciocínio deste tipo:

Se fossem apenas duas equipas (A e B), resultaria um único jogo:	Se fossem três equipas (A, B e C), resultariam três jogos:	Se fossem quatro equipas (A, B, C e D), resultariam seis jogos:	Se fossem cinco equipas (A, B,. C, D e E), resultariam dez jogos:
 1	 3	 6	 10

Continuando a desenvolver-se esquemas como estes, chegar-se-á ao número de jogos que se realizarão pelas dezasseis equipas. Contudo, sendo uma estratégia válida, seria muito fastidioso fazer setas a partir de um certo número de equipas envolvidas. Às tantas o número de setas seria tão elevado que os esquemas ficariam muito confusos. Contudo os esquemas anteriores permitem que se estabeleça a seguinte relação:

2 equipas ---------▸ **1** jogo 1

3 equipas ---------▸ **3** jogos 3 = 1 **+ 2**

4 equipas ---------▸ **6** jogos 6 = 1 + 2 **+ 3**

5 equipas ---------▸ **10** jogos 10 = 1 + 2 + 3 **+ 4**

Seguindo esta regularidade descoberta, resulta que, para o caso de seis equipas, ter-se-á que acrescentar o valor cinco ao total de jogos imediatamente anterior, isto é, aos jogos realizados por cinco equipas:

6 equipas **15** jogos 15 = 1+2+3+4**+5**

Este padrão pode ser prolongado sucessivamente até ao caso de considerarmos as 16 equipas. Nesse caso, o total de jogos a realizar será $J_{16} = 1 + 2 + 3 + ... + 14 + 15$. Esta adição poderia originar um quadro deste tipo, isto é, $16 \times 7 + 8 = 120$ jogos:

1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9	+10	+11	+12	+13	+14	+15
							8							
							16							
							16							
							16							
							16							
							16							
							16							
							16							

Eis outra possível estratégia de resolução, que passa pela utilização de uma tabela:

Nº Jogos	1		3		6		10		15		21		...
Nº Equipas		+2		+3		+4		+5		+6		+7	

Para além da relação que acabámos de ver nas colunas anteriores, esta tabela evidencia um novo padrão que também permite obter o resultado desejado. Logo, a lei geral que permite descobrir de imediato o número de jogos a realizar para cada caso, como, por exemplo, para o caso irreal de serem mil equipas num torneio deste género passa pelo seguinte algoritmo:

J = 1 + 2 + ... + (E - 1), em que "J" representa o número de jogos e "E" representa o número de equipas.

Além destes processos de resolução, ainda poderia haver outro, que usava uma tabela de dupla entrada, como aquelas que aparecem nos jornais desportivos a relacionar as equipas entre si através dos resultados obtidos nos jogos realizados. Apesar dessas tabelas pressuporem que as equipas jogam duas vezes entre si, isto é, quando recebem o adversário e quando o vão visitar, só se só preencheria metade da mesma, para depois se contarem as células preenchidas. A partir desta tabela seria possível constatar que, considerando as dezasseis equipas, o total de jogos a realizar seria 15 + 14 + 13 + ... + 2 + 1 = 120 jogos

Neste caso, a lei geral é a seguinte: J = (E –1) + (E – 2) + ... + 1, sendo "J" o número de jogos e "E" o número de equipas envolvidas:

$$J = \sum_{i=1}^{E-1} (E-i) = (16 - 1) + (16 - 2) + \ldots + (16 - 15) = 120\,.$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
A		●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
B			●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
C				●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
D					●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
E						●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
F							●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
G								●	●	●	●	●	●	●	●	●
H									●	●	●	●	●	●	●	●
I										●	●	●	●	●	●	●
J											●	●	●	●	●	●
K												●	●	●	●	●
L													●	●	●	●
M														●	●	●
N															●	●
O																●
P																

Se se olhar para a tabela constata-se que cada uma das dezasseis equipas realiza quinze jogos, o que aparentemente originaria duzentos e quarenta jogos. Contudo, este resultado pressupõe que cada par de equipas joga duas vezes entre si, o que não é permitido pelas condições impostas no enunciado do problema. Logo, o resultado de duzentos e quarenta jogos terá que ser dividido por dois, devido ao facto de cada par de equipas jogar apenas uma vez entre si, o que origina um total de cento e vinte jogos. Daqui conclui-se que "o número de jogos (J) a realizar é igual a metade do produto entre o número de equipas participantes (E) e o número de equipas participantes menos uma unidade (E - 1)", isto é:

$$J = \frac{E \times (E-1)}{2}$$

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtracção, pode-se dizer que o número de jogos resulta da semi-diferença entre o quadrado do número de equipas envolvidas e esse número de equipas, isto é:

$$J = \frac{E^2 - E}{2}$$

Sintetizando, esta situação tanto poderia ser resolvida com o recurso a um algoritmo específico, como seja o do cálculo combinatório, como através de estratégias, aparentemente, mais rudimentares, como foram os casos da resolução através de problemas mais simples ou da descoberta de um padrão ou regularidade ou, ainda, pela construção de uma tabela de dupla entrada.

Esta sequência numérica relativa aos jogos que vão resultando, quando se aumenta o número de equipas em jogo, também pode ser obtida nas linhas oblíquas do triângulo de Pascal:

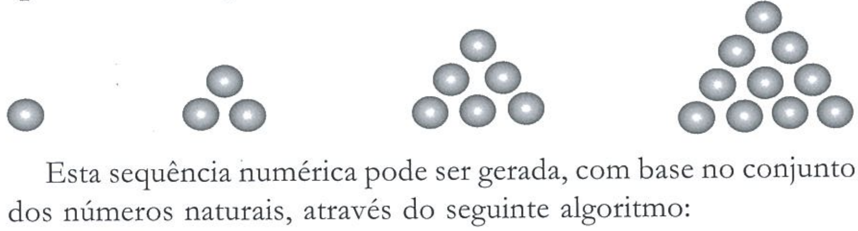
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Dando continuidade à elaboração do triângulo de Pascal, facilmente se evidencia o número de jogos a realizar no caso de existirem seis equipas no torneio. Esse valor seria o 15:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Os números pertencentes à sequência 1, 3, 6, 10, 15, ... são designados por números triangulares, pois permitem a elaboração de triângulos:

1 **3** **6** **10**



Esta sequência numérica pode ser gerada, com base no conjunto dos números naturais, através do seguinte algoritmo:

$$T_n = \frac{n^2 + n}{2}, n \in N$$

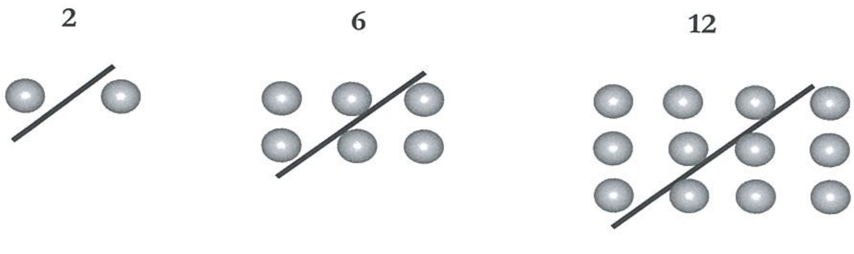
Para se perceber a sua construção vale a pena recordar o importante papel que o matemático Gauss teve nesta matéria, ao ser solicitado a encontrar a soma dos cem primeiros números naturais. Eis uma abordagem parecida à que fez, aplicada ao caso presente. Como vimos antes, as dezasseis equipas implicam a realização dos seguintes jogos: 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1. Em paralelismo ao que Gauss fez, vamos inverter a sequência: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15. De seguida olhando-se simultaneamente para as duas sequências constata-se que, ao adicionarem-se, originam quinze vezes as somas parciais de 15 + 1. Contudo, como o resultado desta multiplicação 15 x (15 + 1) origina o dobro do valor pretendido, por ter duplicado a sequência, então ainda há que se encontrar a metade desse valor obtido. Isto é:

$$N = \frac{15 \times (15 + 1)}{2} \quad \text{ou seja,} \quad T_n = \frac{n^2 + n}{2}, n \in N$$

José Chamoso e William Rawson (2003) chegam à mesma fórmula:

$$T = \frac{n \times (n + 1)}{2}$$

tirando partido da disposição geométrica dos números triangulares. Como sabemos, qualquer triângulo rectângulo ocupa metade da área de um rectângulo com a mesma base e a mesma altura do triângulo considerado. De facto, é possível converter qualquer valor triangular, como o um, o três ou o seis, em dois, seis e doze, por duplicação desses triângulos:



Tal como referem aqueles autores, podemos escrever cada um destes valores como:

$2 = 1 \times 2 = 1 \times (1 + 1)$; $6 = 2 \times 3 = 2 \times (2 + 1)$; $12 = 3 \times 4 = 3 \times (3 + 1)$

Logo, a lei geral é $R = n \times (n + 1)$, para todo e qualquer rectângulo que resulte da junção de dois triângulos equiláteros geometricamente iguais. Daqui conclui-se que, pelo facto de a área do triângulo ser metade da do respectivo rectângulo:

$$T = \frac{n \times (n + 1)}{2}$$

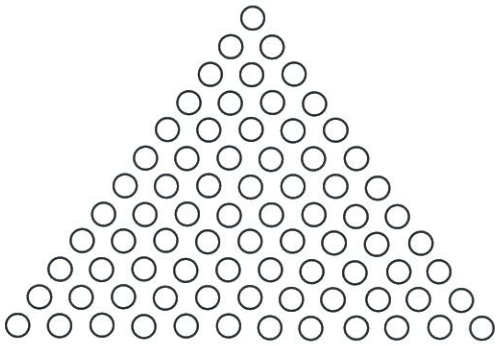
Este algoritmo é equivalente ao anterior, que utiliza o número de equipas envolvidas. Comparando-os, podemos relacionar a ordem pela qual aparecem os números triangulares com o número de equipas envolvidas; isto se ainda tivermos em linha de conta o enunciado da situação problemática inicial. Assim, o valor um, relativo ao primeiro número triangular, tanto resulta da aplicação directa do algoritmo anterior: $\frac{1^2 + 1}{2} = 1$, como do facto de se estarem a considerar duas equipas em jogo: $\frac{2^2 - 2}{2} = 1$. O mesmo é válido para o valor três, relativo ao segundo número triangular: $\frac{2^2 + 2}{2} = 3$, ou prevendo a intervenção de três equipas: $\frac{3^2 - 3}{2} = 3$. Desta analogia podemos retirar a seguinte igualdade: $T_n = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2}, n \in N$.

Confirmando esta igualdade para o caso das dezasseis equipas do torneio: $\frac{16^2 - 16}{2} = 120$ jogos. Por outro lado: $T_{15} = \frac{15^2 + 15}{2} = 120$.

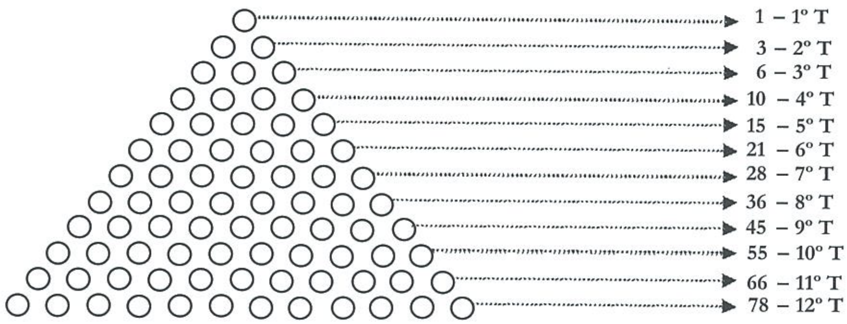
Uma possível situação problemática a relacionar estas duas fórmulas poderia ser a seguinte: «*verificar se o cento e noventa é ou não um número triangular. Além disso, se a resposta for afirmativa, identificar o número de equipas associadas a esse número triangular, supondo que as estaríamos a associar a um torneio semelhante ao que se acabou de descrever*».

Como resolução é desejável que os alunos descubram o décimo nono número triangular: $190 = \frac{n^2 + n}{2} \Leftrightarrow n^2 + n - 380 = 0 \Rightarrow n = 19$, e que implica a participação de vinte equipas num torneio semelhante ao que estava a ser abordado: $190 = \frac{E^2 - E}{2} \Leftrightarrow E^2 - E - 380 = 0 \Rightarrow E = 20$.

Imagine-se, agora, que se pretendia saber qual o número de equipas envolvidas num torneio que originasse um determinado número triangular de jogos, ilustrado pela figura seguinte. Além disso, há a condição de não se poderem contar os círculos um a um para descobrirem o número triangular em causa. Como se poderia dar resposta a esta situação?



Pode-se adicionar cada fila do triângulo às filas anteriores e associar a soma obtida a cada número triangular. Resultará a seguinte sequência: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66...:



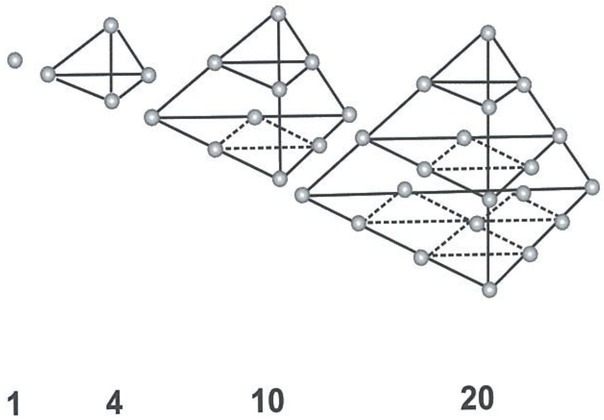
Como se trata do décimo segundo número triangular, implica que estejam envolvidas treze equipas. De facto: $\frac{13^2 - 13}{2} = \frac{156}{2} = 78$.

Por outro lado, basta constatar-se que o triângulo é formado por doze linhas, o que implica estar-se na presença do décimo segundo número triangular: $T_{12} = \frac{12^2 + 12}{2} = \frac{156}{2} = 78$.

Depois, para encontrar o número de equipas envolvidas, aplica-se o seguinte algoritmo: $78 = \frac{E^2 - E}{2} \Leftrightarrow E^2 - E - 156 = 0 \Rightarrow E = 13$.

Relacionando esta sequência numérica com os números de Fibonacci constata-se que exceptuando os dois primeiros números triangulares, cada um dos restantes pode ser obtido pela adição de três números de Fibonacci. A título de exemplo, 6 = 1 + 2 + 3; 10 = 2 + 3 + 5; 15 = 2 + 5 + 8; 21 = 2 + 8 + 11.

Repare-se numa outra sequência numérica que também existe no triângulo de Pascal, na linha oblíqua a seguir à linha dos números triangulares: 1, 4, 10, 20, 35,... Trata-se da sequência de números tetraédricos, os quais permitem a criação de vários tetraedros.



Note-se que cada número tetraédrico pode resultar da adição de vários números triangulares consecutivos:

Números Tetraédricos	Adição de Números Triangulares Consecutivos
1	1
4	1 + 3
10	1 + 3 + 6
20	1 + 3 + 6 + 10
35	1 + 3 + 6 + 10 + 15
...	...

Para se obter a lei geral que permita a obtenção da sequência de números tetraédricos teremos que voltar a recorrer ao conceito de combinações. De facto, pelo seguinte algoritmo: C_3^n, $n \geq 3$, obtém-se a sequência completa dos números tetraédricos.

Confirmando para os quatro primeiros elementos da sequência:

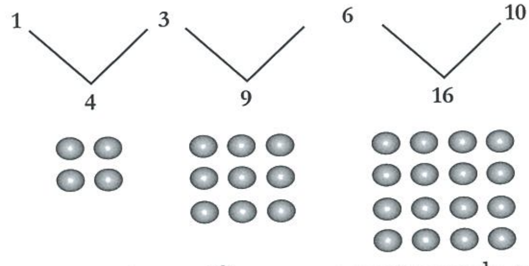
$$T_{t_1} = C_3^3 = \frac{3!}{3! \times 0!} = 1 \qquad T_{t_2} = C_3^4 = \frac{4!}{3! \times 1!} = 4$$

$$T_{t_3} = C_3^5 = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10 \qquad T_{t_4} = C_3^6 = \frac{6!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} = 20$$

8 - Conexão entre os números triangulares e outros números figurados

Tarefa – associar a sequência de números triangulares a outros números figurados

A sequência dos números triangulares apresenta inúmeras propriedades interessantes. A título de exemplo, a partir desta sequência é possível obter-se a sequência dos números quadrados, pois cada um resulta da soma de dois números triangulares consecutivos, como evidencia o esquema seguinte:



Este esquema permite verificar que o quatro pode ser visto como sendo equivalente a um quadrado com dois de lado. Por sua vez, o nove pode ser associado a um quadrado com três de lado, e o dezasseis a um quadrado com quatro de lado. Isto é, o quatro é o quadrado de dois; o nove é o quadrado de três e o dezasseis é o quadrado de quatro.

Face a esta última conexão matemática, seria interessante questionar os alunos sobre *quais teriam que ser os dois números triangulares consecutivos cuja soma originasse, por exemplo, o oitavo número quadrado.*

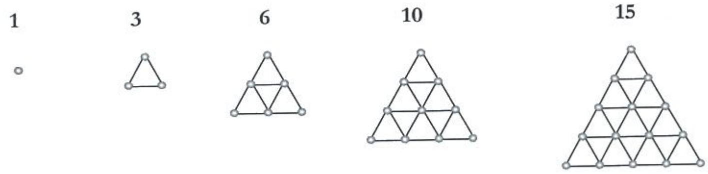
Se se tiver em linha de conta que o primeiro número quadrado é o 1 e que a lei de formação dos números quadrados é n^2, com $n \in N$, facilmente se identifica o oitavo número quadrado, bastando aplicar o respectivo algoritmo: $8^2 = 64$.

Tendo em conta a relação estabelecida entre a sequência dos números triangulares e a sequência dos números quadrados, verifica-se que o segundo número quadrado (4) resulta da adição do primeiro com o segundo número triangular (1 + 3). Por sua vez, o terceiro número quadrado (9) resulta da adição do segundo com o terceiro número triangular (3 + 6). Continuando este raciocínio, conclui-se que o oitavo número quadrado (64) resulta da adição do sétimo com o oitavo número triangular, restando apenas identificar os números em questão.

Recorrendo-se ao respectivo algoritmo, o sétimo número triangular é dado por $T_7 = \frac{7^2+7}{2} = \frac{56}{2} = 28$ e o oitavo por $T_8 = \frac{8^2+8}{2} = \frac{72}{2} = 36$. Confirmando, a soma dos dois números triangulares encontrados é, de facto, o oitavo número quadrado, pois 28 + 36 = 64.

Outra possibilidade de resolução passa pelo recurso às seguintes fórmulas: $T_n = \frac{n^2+n}{2}$ e $T_{n+1} = \frac{(n+1)^2+n+1}{2}$, bastando, para tal, resolver-se a seguinte equação: $\frac{n^2+n}{2} + \frac{(n+1)^2+n+1}{2} = 64$, da qual resulta n= -9 v n = 7. Seleccionando a solução positiva (por se tratar de uma ordem), pode-se concluir que os números triangulares procurados são os de ordem 7 (n) e ordem 8 (n + 1), que facilmente se encontram: $T_7 = \frac{7^2+7}{2} = \frac{56}{2} = 28$ e $T_8 = \frac{8^2+8}{2} = \frac{72}{2} = 36$., como vimos antes.

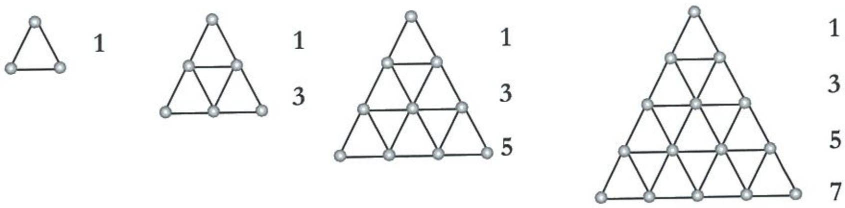
A partir da sequência de números triangulares é possível encontrar novamente a sequência de números quadrados, mas sem se recorrer à adição de dois triangulares consecutivos. Para tal basta unir os pontos das imagens triangulares anteriores, obtendo-se novos triângulos que, por sua vez, originam triângulos maiores:



Contando os triângulos unitários existentes em cada um dos triângulos maiores, obtém-se, de facto, a sequência dos números quadrados:

1 4 9 16

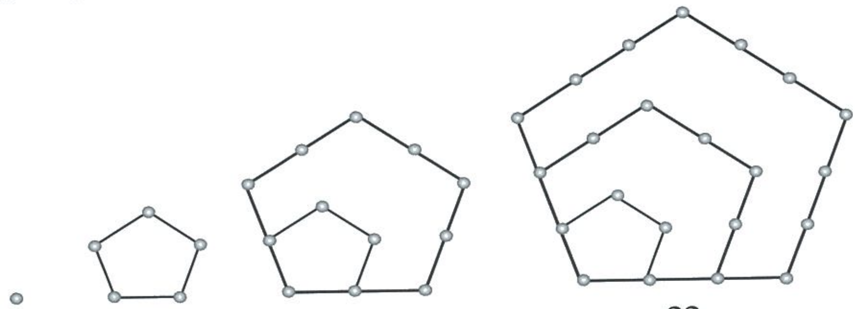
Se se observar cada um dos triângulos maiores, constata-se que, a partir da contagem do número de triângulos por linha, se obtém uma nova sucessão que é a dos números ímpares:



1 4 9 16

Desta conexão resulta uma nova conclusão: "com excepção do primeiro, qualquer outro número quadrado resulta da adição de dois ou mais números ímpares consecutivos", ou seja, a sucessão das somas parciais associada à sequência dos números ímpares é, precisamente, a sucessão de números quadrados.

Outra conexão possível a partir dos números triangulares, prende-se com outro tipo de números figurados, que são os números pentagonais:

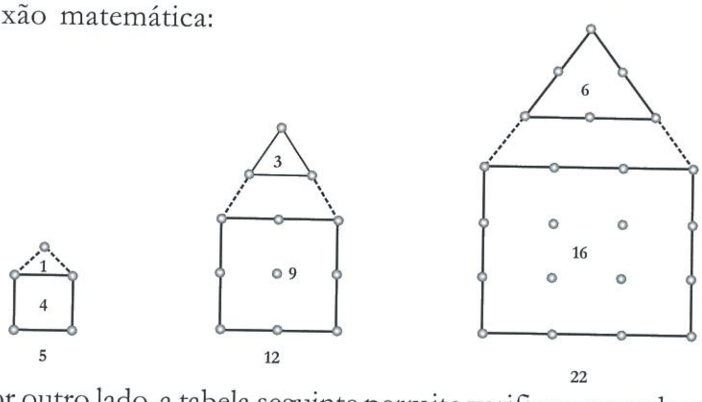


1 5 12 22

Se se observar a tabela seguinte pode-se verificar que adicionando o primeiro número triangular (um) com o segundo número quadrado (quatro), obtém-se o segundo número pentagonal (cinco). Por sua vez, adicionando-se o segundo número triangular (três) com o terceiro número quadrado (nove), obtém-se o terceiro número pentagonal (doze). Continuando, ao adicionar-se o terceiro número triangular (seis) com o quarto número quadrado (dezasseis), obtém-se o quarto número pentagonal que é o vinte e dois, e assim sucessivamente. Generalizando, pode-se afirmar que da soma do número triangular de ordem "n" com o número quadrado de ordem "n + 1" resulta o número pentagonal de ordem "n + 1":

Números Triangulares		Números Quadrados		Números Pentagonais	
1º	**1**	1º	**1**	1º	**1**
2º	**3**	2º	**4**	2º	**5**
3º	**6**	3º	**9**	3º	**12**
4º	**10**	4º	**16**	4º	**22**

A nível geométrico também é interessante visualizar esta última conexão matemática:



Por outro lado, a tabela seguinte permite verificar que cada número pentagonal resulta da diferença entre a soma de um número triangular com um número quadrado, e o respectivo valor de "n" considerado:

	Números Triangulares	Números Quadrados	Números Pentagonais
n = 1	1	1	1
n = 2	3	4	5
n = 3	6	9	12
n = 4	10	16	22
Expressão geral:	**$(n^2 + n) : 2$**	**n^2**	

A relação anteriormente constatada possibilita o desenvolvimento dos seguintes cálculos para se obter a lei geral relativa à sequência dos números pentagonais:

$$\frac{n^2+n}{2}+n^2-n=\frac{n^2+n+2n^2-2n}{2}=\frac{3n^2-n}{2}$$

Logo, para obtermos todos os números pentagonais, iniciando pelo um, usando apenas os números naturais, teremos, de facto, que recorrer a esta fórmula:

$$P_n=\frac{3n^2-n}{2},\ n\in N$$

Perante o estabelecimento destas conexões, os alunos poderão ser solicitados a resolver a seguinte situação problemática: «*será que o número noventa e dois é um número pentagonal? Se for, qual é a sua ordem?*».

A sua resolução permite concluir que, de facto, se trata do oitavo número pentagonal, pois:

$$92=\frac{3n^2-n}{2}\Leftrightarrow 3n^2-n=184\Leftrightarrow 3n^2-n=184\Rightarrow n=8$$

Salienta-se, ainda, que também se pode estabelecer outra forma de construir a sequência dos números pentagonais, desenvolvendo o seguinte processo recursivo:

$P_1 = 1$
$P_2 = 1 + 4$
$P_3 = 1 + 4 + 7$
$P_4 = 1 + 4 + 7 + 10$
$P_5 = 1 + 4 + 7 + 10 + 13$
...
$P_n = 5 + (7 + 10 +...)$, em que o número de parcelas que está entre parêntesis é $(n - 2)$, sendo o n-ésimo número pentagonal dado por $P_n = P_{n-1} + (3n - 2)$ ou por $P_n = (n : 2) \times (3n - 1)$.

9 - Outras conexões matemáticas envolvendo os números triangulares

Tarefa – estabelecer outras conexões matemáticas a partir da sequência de números triangulares

Imaginando-se que os valores 1, 3, 6, 10, 15 e 21 representam a quantidade de peças de fruta – mangas – existentes em seis caixas, pode-se constatar a possibilidade de se formarem dois grupos de igual valor numérico:

(a) $3 + 10 + 15 = 28$ (b) $1 + 6 + 21 = 28$

A partir deste valor (28) podem-se questionar os alunos relativamente à possibilidade dos números relativos às seis caixas também permitirem obter um grupo com dois frutos a mais do que este valor e um outro com dois frutos a menos do que este valor central.

De facto, pode obter-se o primeiro valor através das caixas contendo vinte e uma, seis e três mangas e, além disto, os frutos das restantes três caixas perfazem, exactamente, o outro valor, pois trata-se de quinze, dez e uma mangas.

De seguida pode-se analisar a possibilidade de se continuar a obter um valor superior ao valor trinta, em duas unidades, retirando, simultaneamente, duas unidades ao valor vinte e seis. Uma vez mais, os seis números triangulares com que se está a operar permitem obter uma nova resposta favorável, pois: 32 = 15 + 10 + 6 + 1 e 24 = 21 + 3.

Perante estes resultados, pode-se pedir aos alunos para averiguarem se a sequência dos números triangulares permite dar continuidade a este padrão. Uma possível resolução pode passar pela realização da seguinte tabela:

Valor mais baixo	Identificação das caixas de fruta	Valor mais elevado	Identificação das caixas de fruta
26	15 + 10 + 1	30	21 + 6 + 3
24	21 + 3	32	15 + 10 + 6 + 1
22	21 + 1	34	15 + 10 + 6 + 3
20	10 + 6 + 3 + 1	36	21 + 15
18	15 + 3	38	21 + 10 + 6 + 1
16	10 + 6	40	21 + 15 + 3 + 1
14	10 + 3 + 1	42	21 + 15 + 6
12		44	
10	6 + 3 + 1	46	21 + 15 + 10
8		48	
6	6	50	21 + 15 + 10 + 3 + 1
4	3 + 1	52	21 + 15 + 10 + 6
2		54	

Esta tabela permite constatar que apenas para três pares de números não é possível obter as caixas de fruta necessárias. De facto, o número de frutos existentes em cada uma das seis caixas não permite obter os valores: (a) 2 e 54; (b) 8 e 48 e, (c) 12 e 44.

Outra curiosidade, que ressalta da observação da tabela, é que se está na presença da sequência dos números pares. Logo, pode-se concluir que, através de adições de alguns destes seis números triangulares, obtêm-se todos os números pares inferiores a cinquenta e seis, exceptuando-se, apenas, seis casos: o dois, o oito, o doze, o quarenta e quatro, o quarenta e oito e o cinquenta e quatro.

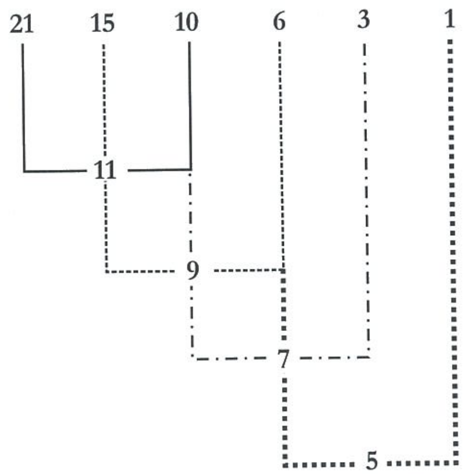
A exploração numérica acabada de fazer induz a que se possam desafiar os alunos acerca de uma nova investigação: «*será que mantendo o mesmo valor médio e usando apenas os números ímpares, também se consegue obter uma tabela semelhante a esta?*».

Começando-se pelos valores vinte e sete e vinte e nove, e mantendo o vinte e oito como valor médio, constata-se que estes seis números triangulares continuam a permitir obter os valores ímpares que se vão afastando desse valor médio, como evidencia a tabela seguinte:

Valor mais baixo	Identificação das caixas de fruta	Valor mais elevado	Identificação das caixas de fruta
27	21 + 6	29	15 + 10 + 3 + 1
25	21 + 3 + 1	31	15 + 10 + 6
23		33	
21	15 + 6	35	21 + 10 + 3 + 1
19	15 + 3 + 1	37	21 + 10 + 6
17	10 + 6 + 1	39	21 + 15 + 3
15	15	41	21 + 10 + 6 + 3 + 1
13	10 + 3	43	21 + 15 + 6 + 1
11	10 + 1	45	21 + 15 + 6 + 3
9	6 + 3	47	21 + 15 + 10 + 1
7	6 + 1	49	21 + 15 + 10 + 3
5		51	
3	3	53	21 + 15 + 10 + 6 + 1
1	1	55	21 + 15 + 10 + 6 + 3

De facto, apenas dois pares de números ímpares não podem ser obtidos jogando com estes números triangulares. Num dos casos trata-se do vinte e três e do trinta e três, e, no outro, trata-se do cinco e do cinquenta e um. Ou seja, através do um, do três, do seis, do dez, do quinze e do vinte e um podem-se obter todos os números ímpares inferiores a cinquenta e sete, com excepção do cinco, do vinte e três, do trinta e três e do cinquenta e um.

No capítulo anterior ficou demonstrado que a adição de quaisquer dois números triangulares consecutivos originava um número quadrado. Analise-se, agora, a subtracção de dois números triangulares não consecutivos, mas sim alternados, isto é, o vinte e um com o dez, o quinze com o seis e assim sucessivamente. Constata-se a obtenção da sequência dos números ímpares, como evidencia o esquema seguinte:



De facto, exceptuando os dois primeiros números ímpares, consegue-se obter qualquer outro número ímpar pela subtracção de dois números triangulares não consecutivos.

Uma vez que se tem estado a analisar a sequência de números triangulares, pode-se construir um triângulo formado pelos primeiros vinte e um números naturais e constatar-se-á que um dos lados desse triângulo é formado exclusivamente por números triangulares:

1

2 **3**

4 5 **6**

7 8 9 **10**

11 12 13 14 **15**

16 17 18 19 20 **21**

De seguida pode-se elaborar um novo triângulo, mas formado apenas pelos próprios números triangulares e contendo somente quatro filas:

1

3 6

10 15 21

28 36 45 55

Observando-se em simultâneo os dois triângulos acabados de construir poder-se-á propor aos alunos a descoberta de um algoritmo que permita converter os quatro primeiros valores triangulares, existentes no triângulo inicial, nos valores de cada um dos quatro números correspondentes do último triângulo, isto é, no um, no seis, no vinte e um e no cinquenta e cinco:

1º Triângulo	2º Triângulo
1	1
3	6
6	21
10	55

Seria interessante que os alunos pudessem propor um raciocínio do seguinte tipo: "*se se multiplicar o três pelo quatro obtemos o dobro do valor que pretendemos. Por isso ainda temos que dividir o doze por dois. Será que isto dá para os restantes pares de números que temos que relacionar?*"

De facto, se se multiplicar cada valor da coluna da esquerda pelo respectivo sucessor, e o produto obtido ainda for dividido por dois, origina-se o respectivo número da coluna da direita. Logo, a lei geral será a seguinte:

$$\frac{n \times (n+1)}{2} \text{ ou } \frac{n^2 + n}{2}$$

Nesta fórmula, o "n" terá que ser substituído por cada número triangular pertencente ao lado do primeiro triângulo. Note-se que o algoritmo anterior coincide com o que gera a sequência de números triangulares, números que fazem parte do último triângulo proposto.

Centrando agora a atenção apenas nos valores existentes no primeiro triângulo, é extraordinariamente fácil descobrir-se o último número existente em qualquer das filas, porque basta aplicar-se o algoritmo relativo aos números triangulares. A título de exemplo, o último número existente na décima quinta fila deste triângulo será o cento e vinte, pois:

$$T_{15} = \frac{15^2 + 15}{2} = \frac{240}{2} = 120$$

Por sua vez, sabendo-se este valor, também se encontra facilmente o seu correspondente número triangular existente na continuidade do segundo triângulo elaborado há pouco, pois:

$$\frac{120^2 + 120}{2} = \frac{14520}{2} = 7260$$

Trata-se de uma conexão interessante, porque agora até se poderá dizer que o sete mil, duzentos e sessenta é o último número triangular existente num triângulo formado apenas por números triangulares e com quinze linhas.

Face a estas conexões, os alunos poderiam ser solicitados a resolver uma nova situação problemática: «*sabendo-se que o número*

4186 é um dos valores da fila de números existentes no lado direito do triângulo formado exclusivamente por números triangulares, qual será o número da fila onde existirá o número triangular que lhe corresponde no triângulo dos números naturais?».

Uma possível resolução poderia passar por se igualar o valor quatro mil, cento e oitenta e seis à fórmula que gera os números triangulares. Resolvendo esta equação de segundo grau obtém-se o valor do número triangular "x" existente no triângulo dos números naturais. Depois pode-se igualar este número "x" à fórmula dos números triangulares e o valor "y" que se obtiver indicará em que linha do triângulo se encontra o número "x" obtido anteriormente. De facto:

a)

$$4186 = \frac{n^2 + n}{2} \Leftrightarrow n^2 + n - 8372 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-8372)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{33489}}{2} \Rightarrow n = \frac{-1 + 183}{2} \Leftrightarrow n = \frac{182}{2} \Leftrightarrow n = 91$$

b)

$$91 = \frac{n^2 + n}{2} \Leftrightarrow n^2 + n - 182 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-182)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{729}}{2} \Rightarrow n = \frac{-1 + 27}{2} \Leftrightarrow n = \frac{26}{2} \Leftrightarrow n = 13$$

Fica, pois, identificado o número que se encontra no último lugar da décima terceira fila de um triângulo formado pela sequência dos números naturais, partindo do conhecimento de um número triangular existente no último lugar de um fila desconhecida de um outro triângulo numérico, formado apenas por números triangulares.

Um desafio interessante seria agora o da descoberta de um potencial algoritmo capaz de identificar, de imediato, o último número triangular existente em qualquer linha de um triângulo formado exclusivamente por números triangulares:

1

3 6

10 15 21

28 36 45 55

...

Note-se que uma das fórmulas que permitiu a obtenção dos valores do triângulo dos números triangulares era exactamente a fórmula geradora dos números triangulares que, por sua vez, resultava de outra fórmula em que se multiplicava o último número do triângulo dos números naturais pelo seu sucessor, e o produto obtido ainda era dividido por dois. Acrescente-se que os números referidos do triângulo dos números naturais não são uns números quaisquer, são todos triangulares, isto é, resultantes da fórmula: $\frac{n^2+n}{2}$, $n \in N$. Logo, se se usar a fórmula dos números triangulares, pode-se substituir o valor de "n" exactamente pela fórmula geradora desse tipo de números, porque o "n" é triangular. Então fica assim:

$$\frac{\left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2+\frac{n^2+n}{2}}{2}.$$

Efectuando-se os respectivos cálculos:

$$\frac{\left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2+\frac{n^2+n}{2}}{2}=\frac{\left(\frac{n^2+n}{2}\right)\times\left(\frac{n^2+n}{2}\right)+\frac{n^2+n}{2}}{2}=$$

$$=\frac{\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}+\frac{n^2+n}{2}}{2}=\frac{\frac{n^4+2n^3+n^2+2n^2+2n}{4}}{2}$$

$$=\frac{n^4+2n^3+n^2+2n^2+2n}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{n^4+2n^3+3n^2+2n}{8}$$

Testando o algoritmo para o caso de o "n" ser três, dará o valor vinte e um, que é precisamente o último número triangular da terceira fila do triângulo formado apenas por este tipo de números:

$$\frac{3^4+2\times 3^3+3\times 3^2+2\times 3}{8}=\frac{81+54+27+6}{8}=\frac{168}{8}=21$$

A título de exemplo, torna-se, agora, extremamente fácil verificar se o número seiscentos e sessenta e seis é ou não o último número triangular de um triângulo com oito filas, formado exclusivamente por números triangulares.

De facto, basta substituir o valor do "n", existente nessa fórmula, por oito e ver se dá ou não o seiscentos e sessenta e seis:

$$\frac{8^4 + 2 \times 8^3 + 3 \times 8^2 + 2 \times 8}{8} = \frac{4096 + 1024 + 192 + 16}{8} = \frac{5328}{8} = 666$$

Construindo-se o triângulo até à oitava fila, confirma-se o valor agora obtido:

$$\begin{array}{c}
1 \\
3 \quad 6 \\
10 \quad 15 \quad 21 \\
28 \quad 36 \quad 45 \quad 55 \\
66 \quad 78 \quad 91 \quad 105 \quad 120 \\
136 \quad 153 \quad 171 \quad 190 \quad 210 \quad 231 \\
253 \quad 276 \quad 300 \quad 325 \quad 351 \quad 378 \quad 406 \\
435 \quad 465 \quad 496 \quad 528 \quad 561 \quad 595 \quad 630 \quad \mathbf{666}
\end{array}$$

A sequência de números naturais permite uma nova curiosaidade matemática envolvendo os números triangulares. Atente-se em cada uma das adições seguintes:

$$\begin{array}{r} 1 \\ +\ 2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,2 \\ +\ 4\,3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,2\,3 \\ +\ 6\,5\,4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,2\,3\,4 \\ +\ 8\,7\,6\,5 \\ \hline \end{array}$$

Verifica-se que a soma dos dígitos de cada soma obtida, origina sempre um número triangular.

$$\begin{array}{r} 1 \\ +\ 2 \\ \hline \underbrace{3}_{\mathbf{3}} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,2 \\ +\ 4\,3 \\ \hline \underbrace{5\,5}_{\mathbf{10}} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,2\,3 \\ +\ 6\,5\,4 \\ \hline \underbrace{7\,7\,7}_{\mathbf{21}} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,2\,3\,4 \\ +\ 8\,7\,6\,5 \\ \hline \underbrace{9\,9\,9\,9}_{\mathbf{36}} \end{array}$$

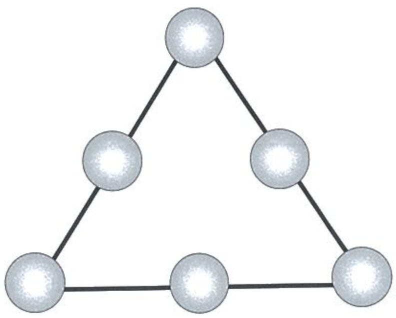
10 - Composição e decomposição de números através da utilização de triângulos mágicos

Tarefa – conectar os números triangulares aos triângulos mágicos

O número triangular "dez" pode ser decomposto em quatro adições com três parcelas cada, que envolvem os números naturais até ao nove, inclusive, mas diferentes entre si. Eis as adições possíveis:

a) $1 + 2 + 7$; b) $1 + 3 + 6$; c) $1 + 4 + 5$; d) $2 + 3 + 5$

Destas quatro possibilidades, os alunos poderão ser solicitados a escolher três para que o triângulo seguinte possa ser um triângulo mágico de soma dez:



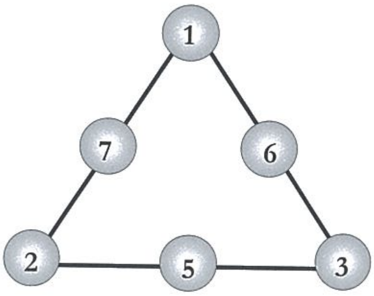
Este desafio permite que se estabeleça novamente a conexão com o conceito das combinações. De facto, face às quatro possibilidades existentes de se obter soma dez, há que se escolher três delas para que o triângulo seja um triângulo mágico com essa soma. Ora isto implica estarmos perante combinações de quatro, três a três, isto é, quatro combinações:

$$C_3^4 = \frac{4!}{3! \times (4-3)!} = 4$$

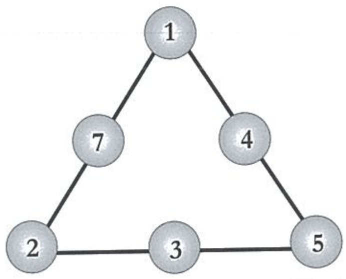
Seria interessante que os alunos pudessem fazer o estudo de cada um dos quatro conjuntos de três dessas adições para verificarem se conseguiam transformar sempre o triângulo numa figura mágica de soma dez. Os casos a analisar seriam: a), b), c); a), b), d); a), c), d) e b), c), d).

Para o primeiro caso, envolvendo as adições: a) 1 + 2 + 7; b) 1 + 3 + 6; c) 1 + 4 + 5, convém analisar se existem números comuns a cada duas dessas três adições, para colocar nos vértices do triângulo. Note-se que apenas o valor um é comum à adição a) e à adição b), bem como à adição c). Dos restantes números naturais, mais nenhum aparece em mais do que uma adição, pelo que, neste caso, não se consegue atribuir o adjectivo de mágico ao triângulo proposto.

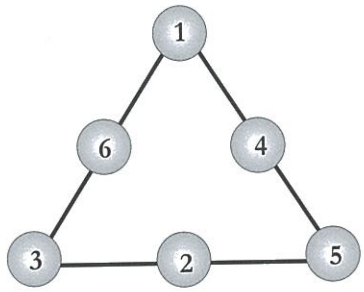
Já o segundo caso, formado pelas adições: a) 1 + 2 + 7; b) 1 + 3 + 6; d) 2 + 3 + 5, permite constatar que o valor um é comum a a) e b), o valor dois é comum a a) e d) e o valor três é comum a b) e d). Logo, os restantes números, não comuns, não podem ocupar os vértices do triângulo. Eis a solução para este caso:



Analisando-se o terceiro caso, formado pelas adições: a) 1 + 2 + 7; c) 1 + 4 + 5; d) 2 + 3 + 5, constata-se que o um é comum a a) e c), o dois é comum a a) e d) e o cinco é comum a c) e d). Logo, os números que não ficam nos vértices são o sete, o quatro e o três:



O último caso, formado pelas adições: b) 1 + 3 + 6; c) 1 + 4 + 5; d) 2 + 3 + 5, também se trata de um caso de sucesso, pois o um é comum a b) e c), o três é comum a b) e d) e o cinco é comum a c) e d). Logo, os valores que não podem ir para os vértices do triângulo terão que ser o seis, o quatro e o dois. Eis a nova solução:



Pensemos, agora, num estudo semelhante, mas cuja soma mágica seja o próximo número triangular, isto é, o quinze.

Iniciando pela descoberta de várias maneiras diferentes de se conseguir encontrar a soma quinze através da adição de três números naturais, de um a nove, diferentes entre si, obtêm-se as seguintes oito possibilidades:

a) 1 + 9 + 5;	b) 1 + 8 + 6;	c) 2 + 9 + 4;	d) 2 + 8 + 5;
e) 2 + 7 + 6;	f) 3 + 8 + 4;	g) 3 + 7 + 5;	h) 4 + 6 + 5;

Retomando o tema das combinações resultam cinquenta e seis combinações possíveis:

$$C_3^8 = \frac{8!}{3! \times (8-3)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3 \times 2 \times 5!} = 56$$

Uma possível estratégia de resolução poderia passar pela divisão dos alunos em três grupos para que cada um deles tentasse identificar as combinações possíveis esgotando duas letras. Isto é, um grupo poderia ver as combinações envolvendo a adição a) bem como todas as combinações envolvendo a adição b). Outro grupo poderia identificar as restantes combinações envolvendo a adição c), bem como as restantes combinações envolvendo a adição d) e o terceiro grupo tentaria identificar as restantes combinações envolvendo a adição e) e as restantes combinações envolvendo a adição f). Ao descobrirem-se todas estas combinações, no final, as adições g) e h) já estariam contempladas.

Para as adições a) e b) poder-se-iam fazer tabelas como as seguintes:

Iniciando com a adição a)					
abc	acd	ade	aef	afg	agh
abd	ace	adf	aeg	afh	
abe	acf	adg	aeh		
abf	acg	adh			
abg	ach				
abh					

Iniciando com a adição b)				
bcd	bde	bef	bfg	bgh
bce	bdf	beg	bfh	
bcf	bdg	beh		
bcg	bdh			
bch				

Por sua vez, para as adições c) e d) surgiriam as seguintes combinações:

Iniciando com a adição c)				**Iniciando com a adição d)**		
cde	cef	cfg	cgh	def	dfg	dgh
cdf	ceg	cfh		deg	dfh	
cdg	ceh			deh		
cdh						

Por último, as restantes adições envolvendo a e) e a f) resultam nas seguintes combinações:

Iniciando com a adição e)		**Iniciando com a adição f)**
efg	egh	fgh
efh		

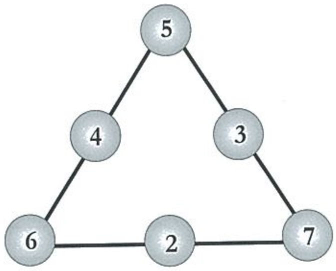
Será interessante constatar-se que os números de combinações envolvidas para cada caso coincidem com os números iniciais da sequência de números triangulares: 1, 3, 6, 10, 15, 21. De facto, são vinte e uma combinações a iniciar com a adição a), mais quinze combinações a iniciar com a adição b), mais dez combinações a iniciar com a adição c), mais seis combinações a iniciar com a adição d), mais três combinações a iniciar com a adição e) e mais uma combinação a iniciar com a adição f).

De seguida, cada tipo de combinações poderia ser estudado por cada grupo. Um grupo poderia tentar ver quais das adições envolvendo a a) e b) permitiam que o triângulo fosse mágico, com soma quinze. Por sua vez, outro grupo poderia averiguar o caso das combinações que iniciavam com a adição c) e com as combinações que iniciavam com a adição d). Por último, o terceiro grupo averiguaria as combinações que iniciam com a adição e) e as combinações que iniciam com a adição f).

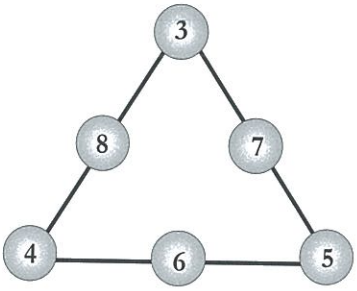
Iniciando pelas adições e), f) e g), isto é, 2 + 7 + 6, 3 + 8 + 4 e 3 + 7 + 5, facilmente se conclui que não permitem transformar o triângulo em triângulo mágico, com soma quinze, pois não existem três números naturais comuns a cada par dessas adições.

Por sua vez, as adições e), f) e h): 2 + 7 + 6, 3 + 8 + 4 e 4 + 6 + 5 também não conseguem dotar o triângulo com o atributo de mágico, porque apenas existem dois pares de números naturais comuns, que são o quatro e o seis.

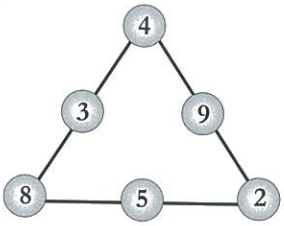
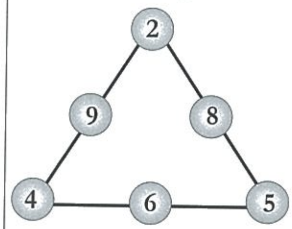
Contudo, as adições e), g) e h): 2 + 7 + 6, 3 + 7 + 5 e 4 + 6 + 5, já possibilitam que o triângulo possa ser mágico, com soma quinze, pois existem três números que são comuns a cada par de adições. Esses números são o sete - comum às adições e) e g), o seis - comum às adições e) e h) e o cinco - comum às adições g) e h). Assim, a solução para este caso é a seguinte:

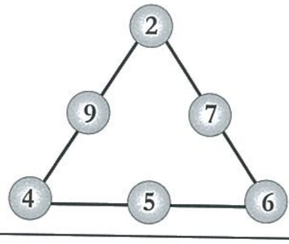


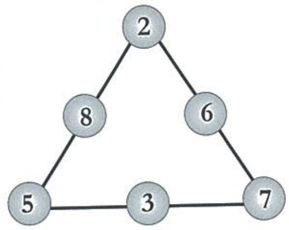
De igual modo, as adições f), g) e h): 3 + 8 + 4, 3 + 7 + 5 e 4 + 6 + 5, também permitem a obtenção de um novo triângulo mágico, com essa mesma soma:

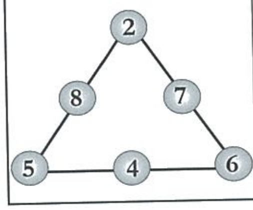
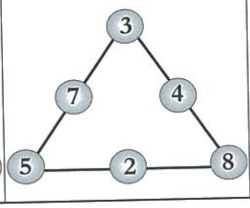
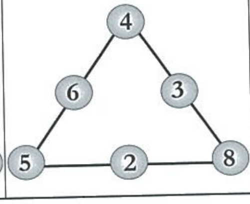


Relativamente às adições iniciadas pela c) ou pela d) originam alguns casos de sucesso, como evidencia a tabela seguinte:

Adições c), d) e e)	Adições c), d) e f)	Adições c), d) e g)	Adições c), d) e h)
2 + 9 + 4	2 + 9 + 4	2 + 9 + 4	2 + 9 + 4
2 + 8 + 5	2 + 8 + 5	2 + 8 + 5	2 + 8 + 5
2 + 7 + 6	3 + 8 + 4	3 + 7 + 5	4 + 6 + 5
			

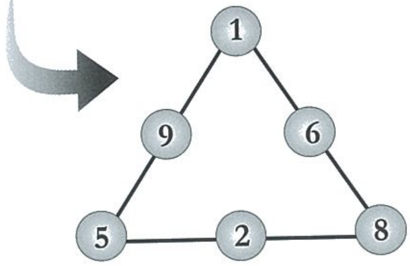
Adições c), e) e f)	Adições c), e) e g)	Adições c), e) e h)	Adições c), f) e g)
2 + 9 + 4	2 + 9 + 4	2 + 9 + 4	2 + 9 + 4
2 + 7 + 6	2 + 7 + 6	2 + 7 + 6	3 + 8 + 4
3 + 8 + 4	3 + 7 + 5	4 + 6 + 5	3 + 7 + 5
			

Adições c), f) e h)	Adições c), g) e h)	Adições d), e) e f)	Adições d), e) e g)
2 + 9 + 4	2 + 9 + 4	2 + 8 + 5	2 + 8 + 5
3 + 8 + 4	3 + 7 + 5	2 + 7 + 6	2 + 7 + 6
4 + 6 + 5	4 + 6 + 5	3 + 8 + 4	3 + 7 + 5
			

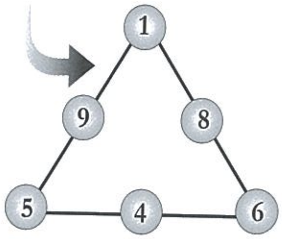
Adições d), e) e h)	Adições d), f) e g)	Adições d), f) e h)	Adições d), g) e h)
2 + 8 + 5	2 + 8 + 5	2 + 8 + 5	2 + 8 + 5
2 + 7 + 6	3 + 8 + 4	3 + 8 + 4	3 + 7 + 5
4 + 6 + 5	3 + 7 + 5	4 + 6 + 5	4 + 6 + 5
			

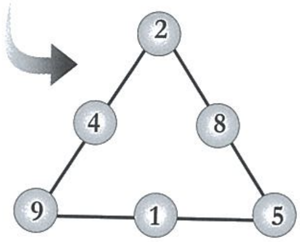
Por último, o grupo que ficar com as adições iniciadas pela (a) ou pela (b) obterá os seguintes resultados:

a), b) e c)	a), b) e d)	a), b) e e)	a), b), e f)	a), b) e g)
1 + 9 + 5	1 + 9 + 5	1 + 9 + 5	1 + 9 + 5	1 + 9 + 5
1 + 8 + 6	1 + 8 + 6	1 + 8 + 6	1 + 8 + 6	1 + 8 + 6
2 + 9 + 4	2 + 8 + 5	2 + 7 + 6	3 + 8 + 4	3 + 7 + 5

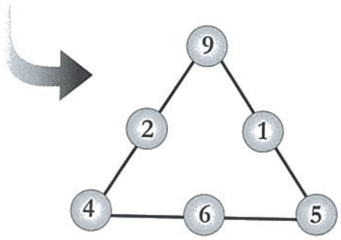


a), b) e h)	a), c) e d)	a), c) e e)	a), c) e f)
1 + 9 + 5	1 + 9 + 5	1 + 9 + 5	1 + 9 + 5
1 + 8 + 6	2 + 9 + 4	2 + 9 + 4	2 + 9 + 4
4 + 6 + 5	2 + 8 + 5	2 + 7 + 6	3 + 8 + 4





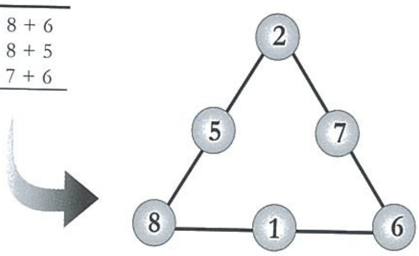
a), c) e g)	a), c) e h)	a), d) e e)	a), d) e f)
1 + 9 + 5	1 + 9 + 5	1 + 9 + 5	1 + 9 + 5
2 + 9 + 4	2 + 9 + 4	2 + 8 + 5	2 + 8 + 5
3 + 7 + 5	4 + 6 + 5	2 + 7 + 6	3 + 8 + 4



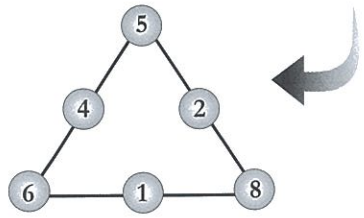
a), d) e g)	a), d) e h)	a), e) e f)	a), e), e g)	a), e) e h)
1 + 9 + 5	1 + 9 + 5	1 + 9 + 5	1 + 9 + 5	1 + 9 + 5
2 + 8 + 5	2 + 8 + 5	2 + 7 + 6	2 + 7 + 6	2 + 7 + 6
3 + 7 + 5	4 + 6 + 5	3 + 8 + 4	3 + 7 + 5	4 + 6 + 5

a), f) e g)	a), f) e h)	a), g) e h)	b), c) e d)	b), c) e e)	b), c) e f)
1 + 9 + 5	1 + 9 + 5	1 + 9 + 5	1 + 8 + 6	1 + 8 + 6	1 + 8 + 6
3 + 8 + 4	3 + 8 + 4	3 + 7 + 5	2 + 9 + 4	2 + 9 + 4	2 + 9 + 4
3 + 7 + 5	4 + 6 + 5	4 + 6 + 5	2 + 8 + 5	2 + 7 + 6	3 + 8 + 4

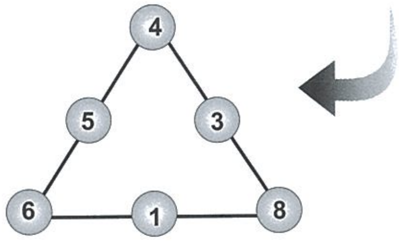
b), c) e g)	b), c) e h)	b), d) e e)
1 + 8 + 6	1 + 8 + 6	1 + 8 + 6
2 + 9 + 4	2 + 9 + 4	2 + 8 + 5
3 + 7 + 5	4 + 6 + 5	2 + 7 + 6



b), d) e f)	b), d) e g)	b), d) e h)	b), e) e f)	b), e) e g)
1 + 8 + 6	1 + 8 + 6	1 + 8 + 6	1 + 8 + 6	1 + 8 + 6
2 + 8 + 5	2 + 8 + 5	2 + 8 + 5	2 + 7 + 6	2 + 7 + 6
3 + 8 + 4	3 + 7 + 5	4 + 6 + 5	3 + 8 + 4	3 + 7 + 5



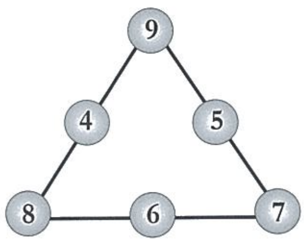
b), e) e h)	b), f) e g)	b), f) e h)	b), g) e h)
1 + 8 + 6	1 + 8 + 6	1 + 8 + 6	1 + 8 + 6
2 + 7 + 6	3 + 8 + 4	3 + 8 + 4	3 + 7 + 5
4 + 6 + 5	3 + 7 + 5	4 + 6 + 5	4 + 6 + 5



Após este estudo exaustivo será interessante desafiar os alunos a explorar o caso da soma mágica seguinte ser o próximo número triangular, isto é, o vinte e um. Provavelmente os alunos pensarão que este novo caso implicará ainda mais trabalho do que o da soma quinze. Contudo, fazendo-se o respectivo estudo inicial para se obter a soma vinte e um, apenas existem três adições possíveis:

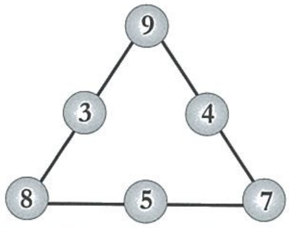
a) 9 + 8 + 4; b) 9 + 7 + 5; c) 8 + 7 + 6

Sendo assim, facilmente se conclui que o único triângulo mágico possível será o seguinte:

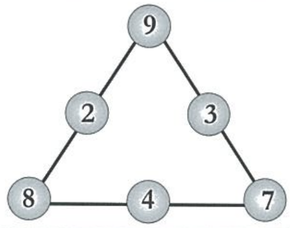


Em jeito de generalização, os alunos poderiam tentar verificar que também seria possível obter-se triângulos mágicos para todas as somas, do nove ao vinte e um, sendo que já estava provado que isso resultaria para os números triangulares dez, quinze e vinte e um. Trata-se de um desafio que certamente motivará os estudantes, pois existe pelo menos um caso de sucesso para cada soma estudada:

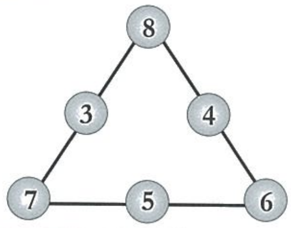
SOMA 20



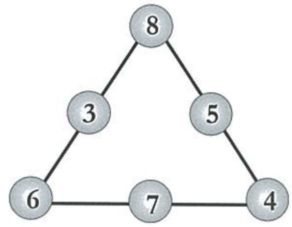
SOMA 19



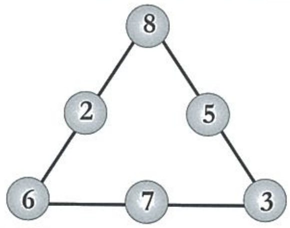
SOMA 18



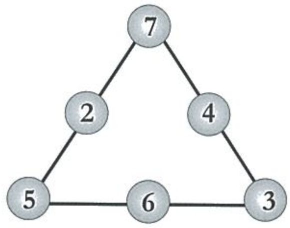
SOMA 17



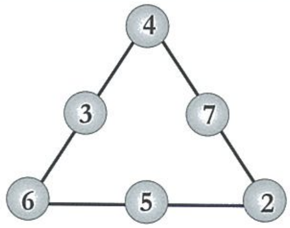
SOMA 16



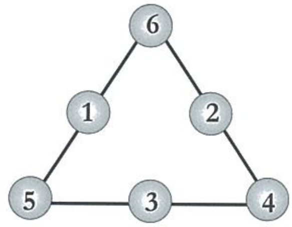
SOMA 14

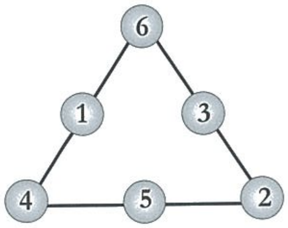
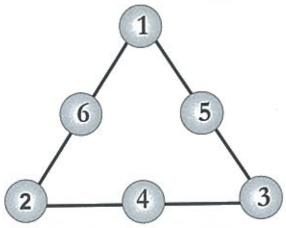


SOMA 13

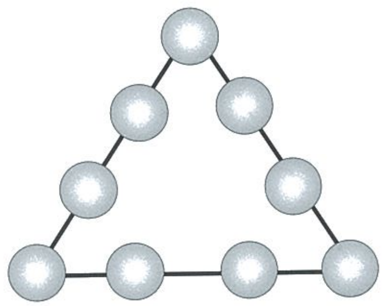


SOMA 12



SOMA 11	SOMA 9
	

Todos os triângulos mágicos que foram explorados eram formados apenas por seis números naturais. Contudo, também se podem explorar triângulos mágicos que envolvam outras quantidades de números naturais. Por exemplo, ao usarem-se os primeiros nove números naturais tem que se ter em linha de conta que cada lado do triângulo é formado por quatro destes números. Testemos o caso da soma mágica ser o número triangular vinte e um:



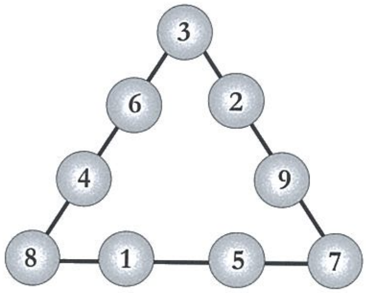
Tal como foi feito para os triângulos mais pequenos, tem que se ver de quantas maneiras diferentes se consegue obter a soma vinte e um, usando adições com quatro parcelas distintas, formadas por números do um ao nove. Eis os onze casos possíveis:

a) 9 + 8 + 1 + 3; b) 9 + 7 + 4 + 1; c) 9 + 7 + 3 + 2; d) 9 + 6 + 5 + 1;
e) 9 + 6 + 4 + 2; f) 9+ 5 + 4 + 3; g) 8 + 7 + 5 + 1; h) 8 + 7 + 4 + 2;
i) 8 + 6 + 5 + 2; j) 8 + 6 + 4 + 3; k) 7 + 6 + 5 + 3

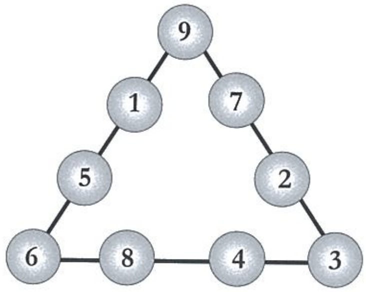
De seguida, combinando estes onze casos, três a três, dá um número de combinações elevado:

$$C_3^{11} = \frac{11!}{3! \times (11-3)!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8!}{3 \times 2 \times 8!} = 165$$

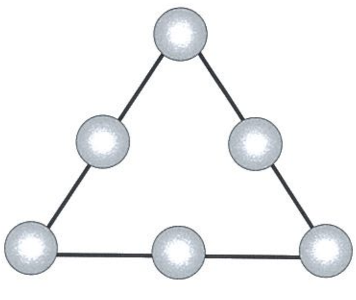
Testar cada uma desta combinações seria muito moroso, pois ter-se-ia que ver quais poderiam ser as três adições em que cada duas delas tivessem de comum apenas um número. Por isso ilustramse apenas dois casos de possibilidade de se obter a soma vinte e um. Eis um caso possível, envolvendo as adições c) 9 + 7 + 3 + 2, g) 8 + 7 + 5 + 1 e j) 8 + 6 + 4 + 3. Constata-se que o sete é comum a c) e a g), o três é comum a c) e a j) e o oito é comum a g) e a j). Logo, terão que ser estes os valores a colocar nos vértices do triângulo:



Eis outra solução, envolvendo as adições c) 9 + 7 + 3 + 2, j) 8 + 6 + 4 + 3 e d) 9 + 6 + 5 + 1:

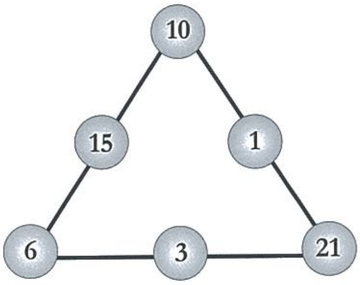


Apesar de não se tratar de um verdadeiro triângulo mágico, não deixa de ser mágica a situação com que os alunos poderiam agora ser confrontados, envolvendo alguns números triangulares: «*distribuir os seis primeiros números triangulares num triângulo como o da figura seguinte, de modo que num lado a soma seja trinta, noutro a soma seja trinta e um e no restante lado a soma seja trinta e dois*».

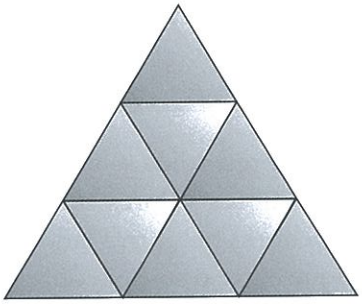


Seria interessante que os alunos descobrissem que o trinta e dois pode resultar da adição: 21 + 1 + 10, que adicionando o vinte e um ao três e ao seis, dá o trinta como soma (21 + 3 + 6 = 30), e 15 + 10 + 6 = 31.

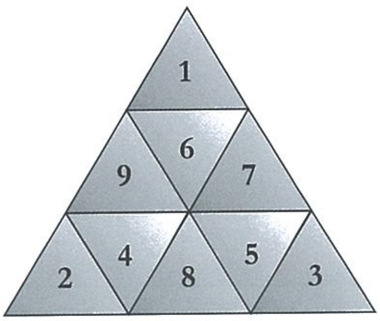
Constatar-se-ia que os valores repetidos seriam o vinte e um, o seis e o dez:



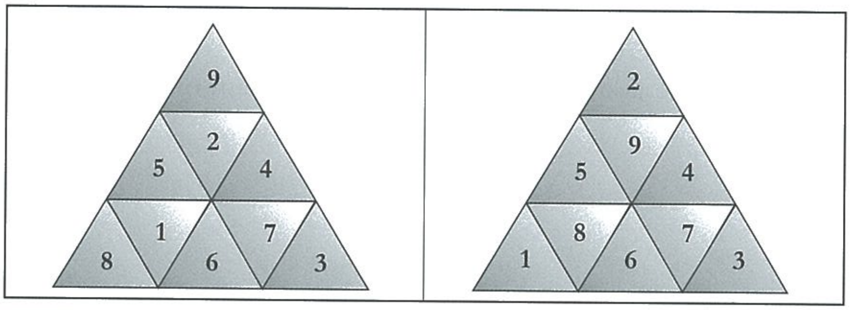
A próxima tarefa envolve o número triangular seguinte, isto é o vinte e oito. Para tal, pode-se solicitar que os alunos coloquem nos nove triângulos existentes no interior da figura seguinte os números de um a nove, de modo que a soma em cada lado do triângulo maior seja sempre esse número triangular:



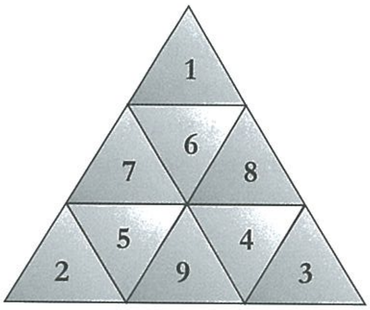
Por tentativas podem resultar outras somas mágicas, com por exemplo o vinte e dois, conforme ilustra a figura seguinte:



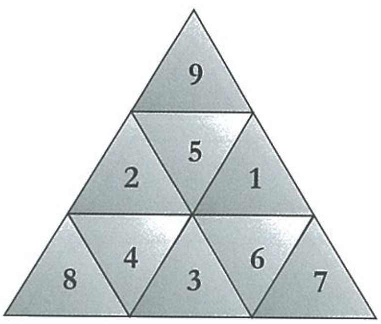
A exploração livre desta tarefa pode trazer outros resultados surpreendentes, como estes dois exemplos de soma vinte e cinco:



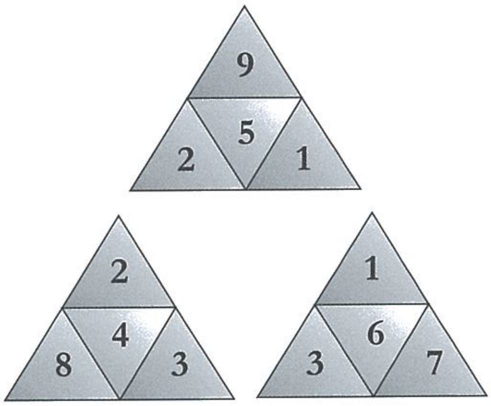
Outro resultado curioso envolve os seguintes três números consecutivos: vinte e um num lado, vinte e dois no outro e vinte e três no outro:



Note-se que a soma pretendida – vinte e oito – obter-se-á ao colocarem-se os três maiores valores nos vértices do triângulo e distribuindo os três menores pelos três lados, de modo que o maior deles, isto é, o três fique entre o sete e o oito, pois, dos três maiores, são os dois mais pequenos. Depois resta experimentar colocar os três restantes números nos triângulos que estão vazios:

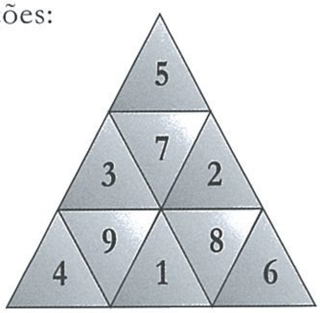


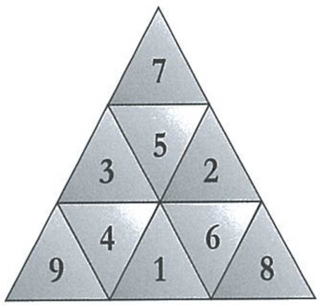
Este caso permite revelar uma curiosidade interessante. Para tal, divide-se o triângulo anterior nas seguintes três partes que o compõem:

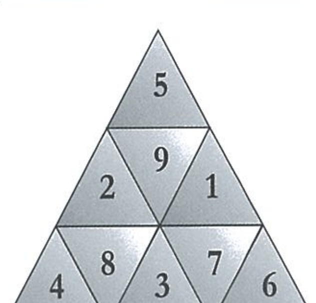


Pode-se constatar que o resultado da adição dos valores de cada um destes triângulos médios é sempre o mesmo, sendo, neste caso, dezassete.

Contudo, para a mesma soma mágica é possível obter-se mais soluções:







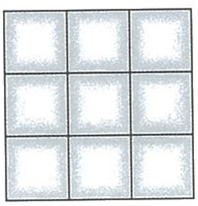
Repare-se que se mantém sempre a soma dezassete para cada um dos três triângulos médios que compõem cada figura.

11 - Composição e decomposição de números através da utilização de quadrados mágicos

Tarefa – conectar os números triangulares aos quadrados mágicos

Tal como no caso das figuras triangulares, também se podem utilizar figuras quadradas para o desenvolvimento do tema – composição e decomposição de números. Este assunto dos quadrados mágicos é bastante fascinante e trata-se de um tema muito antigo, pois um quadrado mágico, formado por três colunas e por três linhas, costuma ser associado ao imperador chinês Yu que fez o seu reinado cerca de dois mil e duzentos anos antes de Cristo.

Usando-se os primeiros nove números naturais, podem-se colocar, sem se repetirem, em cada uma das nove quadrículas da figura seguinte por forma que a soma em cada uma das três linhas, em cada uma das três colunas e em cada diagonal seja o número triangular quinze:



Seria interessante analisar se os alunos concluem que o valor central tem que ser comum a um linha, a uma coluna e às duas diagonais. Além disto, cada valor dos vértices ainda tem que ser comum a três adições.

Como processo de resolução orientado por critérios sistematizados pode-se tentar obter todas as adições, com três parcelas naturais até ao número nove, inclusive, que originem a soma quinze. Eis os oito casos possíveis:

a) 1 + 9 + 5; b) 1 + 8 + 6; c) 2 + 9 + 4; d) 2 + 8 + 5
e) 2 + 7 + 6; f) 3 + 8 + 4; g) 3 + 7 + 5 h) 4 + 6 + 5

Note-se que o único valor que se repete quatro vezes é o cinco. Por isso, deve ser colocado na quadrícula central. Para os vértices do quadrado é fácil escolherem-se os números, pois são apenas quatro os que se repetem três vezes, o 2, o 4, o 6 e o 8. Os restantes quatro números: o 1, o 3, o 7 e o 9, apenas surgem duas vezes, pelo que não poderão ser os dos vértices.

Analise-se, pois uma possível solução correcta:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Uma primeira conclusão a retirar no quadrado anterior é que os três maiores valores não estão juntos. De facto, os valores nove, oito e sete não coincidem numa mesma linha nem numa mesma coluna. O mesmo acontece com os três números menores, pois o um está numa das filas, o dois está noutra e o três está noutra. Esta análise também ocorre ao nível da sua distribuição por colunas.

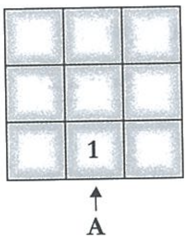
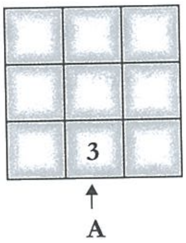
Pensando esta situação para o número triangular seguinte – vinte e um – os 9 números sucessivos envolvidos já seriam outros:

4	11	6
9	7	5
8	3	10

Perante este dois casos, poder-se-á desafiar os alunos no sentido de identificarem regularidades ou semelhanças entre ambos ao nível da distribuição dos números pelas várias quadrículas, bem como identificar como se relacionam esses números entre si. Eis algumas relações que se podem identificar:

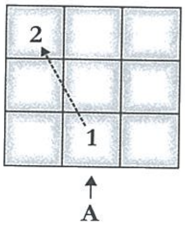
a) o valor da quadrícula central é sempre a terça parte da soma mágica obtida;
b) o valor da quadrícula do canto superior esquerdo é sempre inferior, em três unidades, relativamente ao valor da quadrícula central;
c) a obtenção do valor anterior permite que seja fácil obter-se o restante valor dessa diagonal, pois será a diferença entre a soma mágica pretendida e a soma desse valor com o valor da quadrícula central;
d) o valor da quadrícula do canto superior direito é sempre o número par sucessor ao existente na quadrícula do canto superior esquerdo. Ver-se-á mais à frente que o mesmo ocorre se o valor desta quadrícula for ímpar, pois o seu sucessor ímpar será o que deve ocupar a quadrícula do canto superior direito;
e) conhecendo os valores já identificados nas alíneas anteriores, será fácil descobrir os restantes.

Contudo, comparando estas duas somas mágicas, pode ser feita outra análise. Começa-se por se colocar no ponto A o menor dos números envolvidos em cada caso:

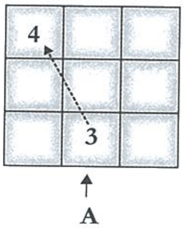
Soma 15	**Soma 21**
	

De seguida segue-se a indicação da seta e coloca-se o respectivo sucessor do número que já se encontra na figura, como se se estivesse a movimentar um cavalo no jogo de xadrez:

Soma 15

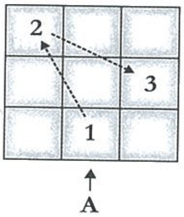


Soma 21

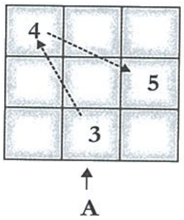


Continua-se a seguir a seta e a colocar o sucessor respectivo, usando outra vez o mesmo tipo de movimento:

Soma 15

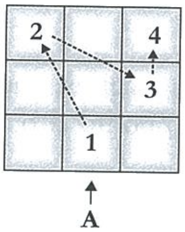


Soma 21

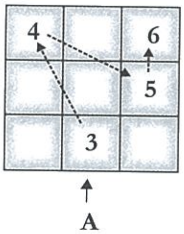


Continuando, sobe-se uma quadrícula:

Soma 15

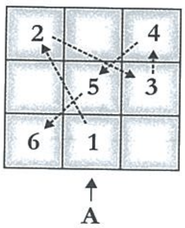


Soma 21

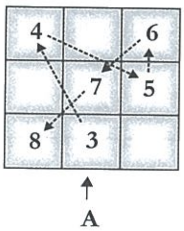


De seguida faz-se uma das diagonais da figura:

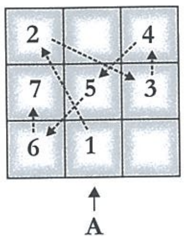
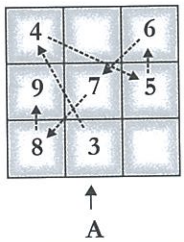
Soma 15



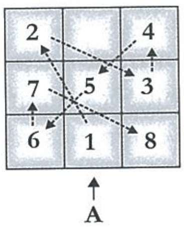
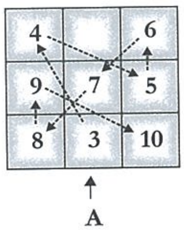
Soma 21



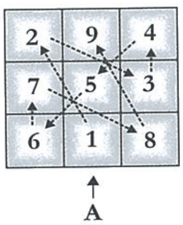
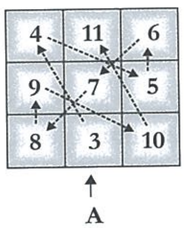
Posteriormente sobe-se uma nova quadrícula:

Soma 15	Soma 21
	

Como penúltimo passo, preenche-se a quadrícula do canto inferior direito, com novo movimento do cavalo de xadrez:

Soma 15	Soma 21
	

Por fim, preenche-se a quadrícula que está vazia, usando o mesmo tipo de movimento:

Soma 15	Soma 21
	

Depois de os alunos verificarem que existe esta disposição geométrica dos números, poderão ser solicitados a implementar este algoritmo para uma nova sequência de números consecutivos iniciados no valor quatro. Espera-se que surja a seguinte solução, de soma mágica vinte e quatro:

5	12	7
10	8	6
9	4	11

A

Confirmando esta solução, partindo da soma vinte e quatro, constata-se que a sua terça parte coincide com o valor da quadrícula central. De seguida, subtraindo-se a este valor central o valor três obtém-se o valor cinco, que coincide com o valor existente na quadrícula do canto superior esquerdo. O valor da quadrícula do canto superior direito coincide com o número ímpar consecutivo do valor ímpar existente na quadrícula do canto superior esquerdo. Logo, estão identificados os três números necessários e suficientes para se descobrirem os seis restantes. Confirma-se, pois, que os dois processos de resolução evidenciam soluções idênticas.

Este tema permite estabelecer várias extensões. A título de exemplo, se se adicionar o valor dois a cada um dos valores existentes no quadrado mágico anterior, voltar-se-á a obter uma soma mágica que será, neste caso, o valor trinta:

7	14	9
12	10	8
11	6	13

Por sua vez, se se usar qualquer outra operação aritmética, o quadrado resultante também continuará a ser mágico.

Experimentando subtrair o valor um a cada número deste último quadrado mágico obtém-se um novo quadrado mágico, de soma vinte e sete:

6	13	8
11	9	7
10	5	12

Uma possível pergunta que os alunos poderão fazer é se os quadrados mágicos têm sempre que ser formados por números consecutivos. Para se dar resposta, pode-se pedir que pensem num número qualquer, que pode ser, por exemplo, o cinco, para ser colocado no canto superior esquerdo de um quadrado mágico de três linhas por três colunas, como este:

5		

De seguida pode-se seguir o seguinte critério: escolhe-se um número para adicionar a esse cinco e a soma obtida coloca-se na quadrícula do meio dessa linha. Se o número escolhido for, por exemplo, o sete, a soma que resulta é doze. A este doze volta-se a adicionar o número escolhido, isto é, o sete, e a nova soma obtida coloca-se na quadrícula da direita dessa linha:

5	12	19

Agora pode-se fazer o mesmo para a coluna onde já se encontra o valor cinco inicial. Neste caso pode-se escolher, por exemplo, o número seis para adicionar a esse cinco, bem como à soma que se vai obter, que é o onze:

5	12	19
11		
17		

Para se completar a figura tem que se manter o critério de ir adicionando o valor sete na horizontal e o valor seis na vertical.

5	12	19
11	18	25
17	24	31

Apesar de os valores existentes na figura anterior não permitirem que o quadrado seja mágico, serve para se descobrir a sequência dos nove números que se podem usar. Contudo, não podem ser usados tendo em conta a ordem crescente, mas tendo em conta os valores de cada linha. Começando pela de cima, temos: 5, 12 e 19. Depois temos também: 11, 18 e 25. Por último, na terceira linha, ainda existem os seguintes números: 17, 24 e 31. Logo, a sequência de números a usar é a seguinte: 5, 12, 19, 11, 18, 25, 17, 24, 31.

Agora basta seguir-se o algoritmo envolvendo os movimentos semelhantes aos de uma cavalo, como se fosse um jogo de xadrez, para que isso se transforme na soma mágica cinquenta e quatro:

12	31	11
17	18	19
25	5	24

Confirma-se, pois, que a sequência não tem que ser formada apenas por números consecutivos.

Este tema também permite a realização de um jogo interessante, envolvendo duas pessoas. Trata-se de um jogo existente num magnífico livro, com o título "100 juegos estratégicos para hacer con lapíz y papel" do autor Walter Joris (2004).

Cada um dos jogadores desenha as nove quadrículas de um possível quadrado mágico numa folha em branco. Podendo repetir números, de um a nove, devem preencher apenas as quatro quadrículas afectas aos vértices do quadrado. De seguida, cada jogador tem que colocar entre os seus números os números do respectivo adversário, pela ordem que entender. Por último, cada um tem que escolher um número para colocar na quadrícula central. Ganha quem conseguir obter o maior número de somas iguais. Eis um exemplo ilustrativo, envolvendo dois hipotéticos alunos, de nomes Joana e Rita:

Joana

3		5
5		6

Rita

2		4
6		8

Ao receberem os valores do adversário, cada um dos quadrados pode ficar com o seguinte aspecto:

Joana

3	4	5
6		2
5	8	6

Rita

2	6	4
5		5
6	3	8

Por último, ao escolherem o valor central, cada quadrado pode ficar completo com os seguintes valores:

Joana

3	4	5
6	4	2
5	8	6

Rita

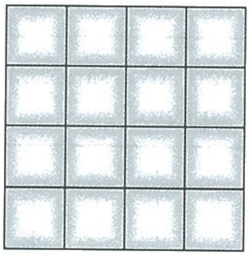
2	6	4
5	5	5
6	3	8

Ao confrontarem-se as respostas, constata-se que a Joana seria a vencedora deste jogo, pois teria obtido seis adições, em que duas delas tinham soma catorze (5 + 6 + 3 e 5 + 4 + 5), outras duas tinham soma treze (6 + 2 + 5 e 6 + 4 + 3) e outras duas tinham soma doze (6 + 4 + 2 e 3 + 4 + 5).

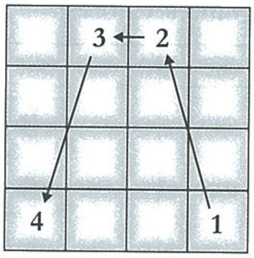
Por sua vez, a Rita só conseguiria obter cinco adições de somas iguais, em que duas delas tinham soma dezassete (6 + 3 + 8 e 8 + 5 + 4) e as outras três tinham soma quinze (6 + 5 + 4, 5 + 5 + 5 e 2 + 5 + 8).

Os quadrados mágicos explorados até aqui são apenas os de ordem três, isto é, formados por três linhas e três colunas. Contudo, há outros tipos de quadrados mágicos, como sejam os que são formados por quatro linhas e por quatro colunas, os de ordem cinco, formados por cinco linhas e cinco colunas e assim sucessivamente.

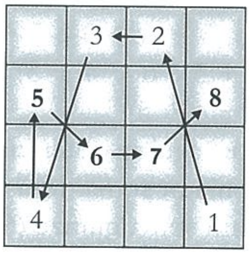
De seguida ir-se-ão explorar os de ordem quatro. Uma primeira solicitação poderia ser a de se obter a soma mágica trinta e quatro, usando-se os dezasseis primeiros números naturais num quadrado como o da figura seguinte:



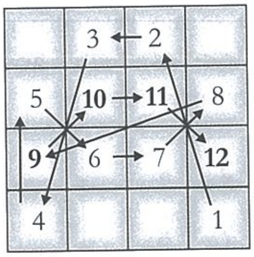
Um possível algoritmo para a sua construção é o seguinte: coloca-se o valor um no canto inferior direito e segue-se a seta para se colocar o valor dois, o valor três e voltar à linha inicial para se colocar o valor quatro:



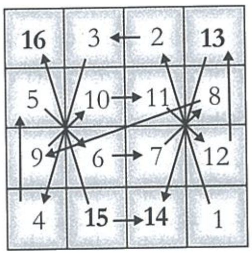
De seguida usam-se as linhas do meio, obtendo-se os valores, cinco, seis, sete e oito:



Agora coloca-se o valor nove entre o quatro e o cinco e faz-se o percurso simétrico ao anterior, obtendo os valores dez, onze e doze:



Por fim, preenchem-se as quatro quadrículas que faltam, iniciando no canto superior direito, indo depois até à fila inicial, e terminando no canto superior esquerdo:



Os movimentos são fáceis de memorizar, porque são mais ou menos simétricos uns dos outros.

Iniciando-se no valor dois, também se confirma o aparecimento de uma nova soma mágica que, neste caso, será o valor trinta e oito:

17	4	3	14
6	11	12	9
10	7	8	13
5	16	15	2

Contudo, existe outro possível algoritmo de resolução que passa por se escrever, por ordem crescente, os dezasseis números no quadrado:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

De seguida mantêm-se nas respectivas posições os valores que se encontram nas quadrículas afectas aos vértices deste quadrado, bem como os quatro valores centrais:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1			4
	6	7	
	10	11	
13			16

Por fim basta trocar a posição do três com o catorze, do dois com o quinze, do oito com o nove e do doze com o cinco para se obter um quadrado mágico:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Como esperado, trata-se novamente da soma trinta e quatro. O mesmo ocorre se se iniciar pelo valor dois e terminar no dezassete, pois obter-se-á a esperada soma trinta e oito:

2	3	4	5
6	7	8	9
10	11	12	13
14	15	16	17

2	16	15	5
13	7	8	10
9	11	12	6
14	4	3	17

Se em vez de se manterem fixos esses oito números, se optar por fixar os outros oito, é interessante analisar que este algoritmo também funciona. Basta, para tal, trocar as posições dos que não se mantiverem fixos:

1	**2**	**3**	**4**
5	**6**	**7**	**8**
9	**10**	**11**	**12**
13	**14**	**15**	**16**

	2	**3**	
5			**8**
9			**12**
	14	**15**	

16	**2**	**3**	13
5	11	10	**8**
9	7	6	**12**
4	**14**	**15**	1

Perante estas regularidades poder-se-ia pedir aos alunos para converterem esta soma mágica em dois números especiais: o número triangular imediatamente anterior a essa soma e o número triangular imediatamente a seguir a ela. Seriam as somas vinte e oito e trinta e seis, respectivamente.

No primeiro caso a soma trinta e quatro tem que baixar seis valores e, para o segundo, tem que aumentar dois. Contudo, este desafio tem um truque, porque só resulta se se repetirem alguns números na mesma figura.

Para o primeiro caso basta retirar seis valores a um número de cada linha que, por sua vez, já representa cada coluna, para se obter a soma vinte e oito. Assim, por causa das diagonais, o melhor valor a seleccionar na linha de cima pode ser o dezasseis ou o treze.

Resolvendo em simultâneo a selecção destes dois números e tendo-se escolhido o dezasseis para a primeira diagonal, poder-se-ia escolher o valor dez para a segunda:

POSSIBILIDADE A

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

16	2	3	13
5	11	**10**	8
9	7	6	12
4	14	15	1

10	2	3	13
5	11	**4**	8
9	7	6	12
4	14	15	1

No caso do valor escolhido para a primeira linha ser o treze, que já contempla uma das diagonais, o valor a escolher na segunda fila poderia ser o onze, de forma a que a outra diagonal já esteja a ser contemplada:

POSSIBILIDADE B											
16	2	3	13	16	2	3	**13**	16	2	3	**7**
5	11	10	8	5	**11**	10	8	5	**5**	10	8
9	7	6	12	9	7	6	12	9	7	6	12
4	14	15	1	4	14	15	1	4	14	15	1

Assim é fácil ver-se que na possibilidade A pode-se seleccionar o doze na terceira linha e o catorze na linha de baixo, para se contemplarem todas as linhas, todas as colunas e ambas as diagonais desta figura:

POSSIBILIDADE A											
16	2	3	13	**16**	2	3	13	**10**	2	3	13
5	11	10	8	5	11	**10**	8	5	11	**4**	8
9	7	6	12	9	7	6	**12**	9	7	6	**6**
4	14	15	1	4	**14**	15	1	4	**8**	15	1

Na possibilidade B pode-se seleccionar o nove da terceira linha e o quinze da última:

POSSIBILIDADE B											
16	2	3	13	16	2	3	**13**	16	2	3	**7**
5	11	10	8	5	**11**	10	8	5	**5**	10	8
9	7	6	12	**9**	7	6	12	**3**	7	6	12
4	14	15	1	4	14	**15**	1	4	14	**9**	1

Note-se que apesar de se repetirem alguns números, o que não é habitual nos quadrados mágicos elaborados anteriormente, pode-se com este novo critério obter qualquer soma que se pretenda.

Veja-se agora um novo quadrado em que as duas primeiras filas são ocupadas por apenas números pares e as segundas por apenas números ímpares, começando no um e terminando no dezasseis:

2	4	6	8
10	12	14	16
1	3	5	7
9	11	13	15

Aplicando o mesmo algoritmo usado para o caso dos dezasseis números alinhados por ordem crescente, isto é, mantendo apenas os valores das células afectas aos vértices da figura, bem como os quatro valores centrais e trocando a posição dos restantes valores, volta-se a obter um quadrado mágico de soma trinta e quatro:

2	13	11	8
7	12	14	1
16	3	5	10
9	6	4	15

Seria interessante que os alunos analisassem o caso de estes dois tipos de números aparecerem intercalados, isto é, uma linha par, outra ímpar, a terceira par e a última ímpar, para verem que se continuava a obter a soma mágica trinta e quatro:

2	4	6	8
1	3	5	7
10	12	14	16
9	11	13	15

2	13	11	8
16	3	5	10
17	12	14	1
9	6	4	15

12 - As potências e sua conexão a vários temas matemáticos

Tarefa – conectar o tema das potências a outros temas matemáticos

Uma introdução ao tema das potências pode surgir a partir do algoritmo da multiplicação egípcia. Tirando-se partido da ideia de que multiplicar um número inteiro, qualquer, por quatro é multiplicá-lo pelo dobro de dois e que multiplicar esse mesmo número por oito é multiplicá-lo pelo dobro do dobro de dois e, assim sucessivamente, pode-se efectuar, por exemplo, o produto de dezoito por doze, através dos seguintes cálculos: $18 \times (4 + 8) = 18 \times 2 \times 2 + 18 \times 2 \times 2 \times 2 = 36 \times 2 + 36 \times 2 \times 2 = 72 + 72 \times 2 = 72 + 144 = 216$. Ora o algoritmo da multiplicação egípcia baseia-se nestes princípios acabados de descrever, isto é, colocando-se os dois factores lado a lado, por baixo do factor da direita vão-se colocando os dobros sucessivos do um até se obter o valor desse factor pela soma de alguns desses valores que estão sob ele. Por outro lado, coloca-se por baixo do factor da esquerda os produtos resultantes da multiplicação deste factor por cada valor que se colocar por baixo do factor da direita, isto é:

18	x	**12**
18		1
36		2
72		4
144		8

Uma vez que se consegue obter o valor doze através da soma de quatro com oito, o algoritmo termina aqui. Resta apenas adicionar os valores da coluna da esquerda (72 + 144) que estão relacionados como cada uma destas parcelas envolvidas na soma doze, pertencentes à coluna da direita (4 e 8). Logo o produto de dezoito por doze obtém-se pela adição de setenta e dois com cento e quarenta e quatro, ou seja, 216. Como se pode verificar, os valores envolvidos na coluna da direita são potências de base dois: Logo, conclui-se que $18 \times 12 = 18 \times 2^2 + 18 \times 2^3$.

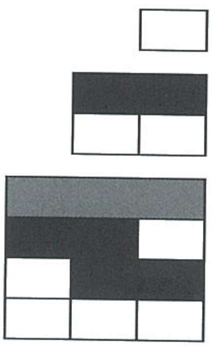
Percebendo-se este algoritmo poder-se-á pedir aos alunos para encontrarem o produto de 23 por 19. Espera-se que a sua resolução seja a seguinte:

23	x	**19**
23		1
46		2
92		4
184		8
368		16

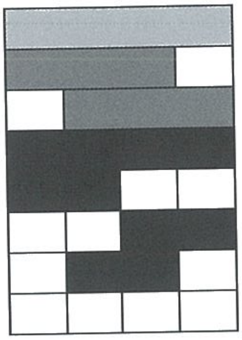
$$23 \times 19 = 23 \times (1 + 2 + 16) = 23 + 46 + 368 = 437$$

De facto, $23 \times 19 = 23 \times 2^0 + 23 \times 2^1 + 23 \times 2^4 = 437$.

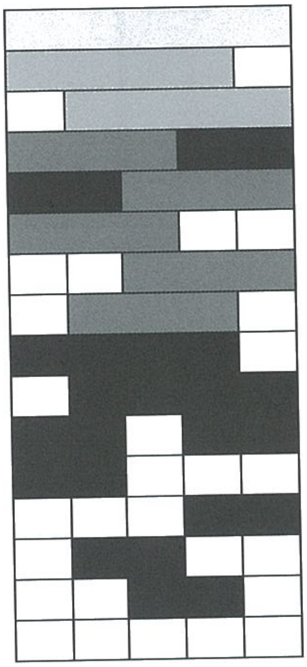
Outro contexto onde as potências de base dois estão presentes é o da decomposição de números. Usando-se, por exemplo, o Material Cuisenaire, constata-se a seguinte regularidade:



1	**1**
2	**2**
1 + 1	
3	**4**
2 + 1	
1 + 2	
1 + 1 + 1	



<table>
<tr><td>4</td><td rowspan="8">8</td></tr>
<tr><td>3 + 1</td></tr>
<tr><td>1 + 3</td></tr>
<tr><td>2 + 2</td></tr>
<tr><td>2 + 1 + 1</td></tr>
<tr><td>1 + 1 + 2</td></tr>
<tr><td>1 + 2 + 1</td></tr>
<tr><td>1 + 1 + 1 + 1</td></tr>
</table>

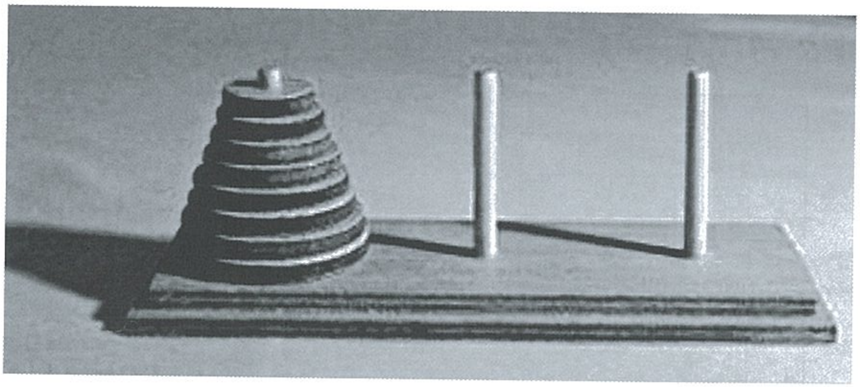


<table>
<tr><td>5</td><td rowspan="16">16</td></tr>
<tr><td>4 + 1</td></tr>
<tr><td>1 + 4</td></tr>
<tr><td>3 + 2</td></tr>
<tr><td>2 + 3</td></tr>
<tr><td>3 + 1 + 1</td></tr>
<tr><td>1 + 1 + 3</td></tr>
<tr><td>1 + 3 + 1</td></tr>
<tr><td>2 + 2 + 1</td></tr>
<tr><td>1 + 2 + 2</td></tr>
<tr><td>2 + 1 + 2</td></tr>
<tr><td>2 + 1 + 1 + 1</td></tr>
<tr><td>1 + 1 + 1 + 2</td></tr>
<tr><td>1 + 2 + 1 + 1</td></tr>
<tr><td>1 + 1 + 2 + 1</td></tr>
<tr><td>1 + 1 + 1 + 1 + 1</td></tr>
</table>

As figuras anteriores permitem concluir que o número de decomposições possíveis (N) de qualquer número natural (n) resulta da aplicação da seguinte lei geral: $N = 2^{n-1}$: sendo que também se inclui o próprio número a decompor. Caso não se inclua o próprio número, a lei geral será: $N = 2^{n-1} - 1$.

Ao solicitarem-se os alunos a obter-se o número de decomposições possível para $n = 8$, incluindo o próprio valor 8, facilmente encontrarão o valor 256, por ser o valor de 2^7.

Um jogo interessante onde o tema das potências também está inerente é o das Torres de Hanoi. Trata-se de um puzzle criado por Édouard Lucas em 1883 e consiste numa base contendo três pinos, em que num deles são dispostos sete discos uns sobre os outros, em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo. O problema consiste em passar todos os discos de um pino para outro qualquer, usando um dos pinos como auxiliar, de maneira que um disco maior nunca fique em cima de outro menor em nenhuma situação. O número de discos pode variar sendo que o mais simples contém apenas três *(http://pt.wikipedia.org/wiki/Torre_de_Hanoi).*



in http://pt.wikipedia.org/wiki/Torre_de_Hanoi

Estudemos o caso de três discos (A, B e C, sendo A o de maior diâmetro):

	Pino da Esquerda	Pino do Meio	Pino da Direita
Situação inicial	cB**A**		
1ª Jogada	B**A**	c	
2ª Jogada	**A**	c	B
3ª Jogada	A		cB
4ª Jogada		**A**	cB
5ª Jogada	c	**A**	B
6ª Jogada	c	B**A**	
7ª Jogada		cB**A**	

No caso de haver quatro discos, o estudo a fazer-se poderia ser o seguinte:

	Pino da Esquerda	Pino do Meio	Pino da Direita
Situação inicial	dCB**A**		
1ª Jogada	CBA	d	
2ª Jogada	B**A**	d	C
3ª Jogada	BA		dC

	Pino da Esquerda	Pino do Meio	Pino da Direita
4ª Jogada	A	B	DC
5ª Jogada	DA	B	C
6ª Jogada	DA	CB	
7ª Jogada	A	DCB	
8ª Jogada		DCB	A
9ª Jogada		CB	DA
10ª Jogada	C	B	DA
11ª Jogada	DC	B	A
12ª Jogada	DC		BA
13ª Jogada	C	D	BA
14ª Jogada		D	CBA
15ª Jogada			DCBA

Analisando-se os dois casos, conclui-se que, para três discos, o número de jogadas necessárias para se deslocar a posição da totalidade dos discos é sete e no caso de quatro discos, o número de movimentos é quinze. Estes dois exemplos permitem intuir que o número de jogadas (J) é igual a dois elevado ao número de discos (2^d) menos uma unidade: $J = 2^d - 1$.

De facto, para $d = 3 \Rightarrow J = 2^3 - 1 = 7$; para $d = 4 \Rightarrow J = 2^4 - 1 = 15$.

Tendo em conta esta lei geral, facilmente os alunos poderão inferir que o total de movimentos para cinco discos será de trinta e um, pois é o resultado de $2^5 - 1$.

Outra possível conexão matemática envolvendo o tema das potências de base dois pode ocorrer ao nível do tema - grandezas e medidas, nomeadamente ao nível das medidas de massa, passando, depois, pela actividade lúdica de se adivinhar um determinado número secreto. Imagine-se a situação hipotética de termos à nossa disposição uma massa de um quilograma. Numa balança de dois pratos, esta massa permite pesar apenas uma quantidade inteira de mercadoria, por exemplo, batatas, que é o um quilo. Imagine-se, agora que se lançava o seguinte desafio aos alunos: «*é mais vantajoso encomendar uma nova massa de um quilograma ou uma massa de dois quilogramas para pesarmos dois ou mais quilos de batatas, sabendo que o preço das massas é o mesmo?*». Claro que a resposta seria a massa de dois quilos, porque, com ela e com a de um quilo já existente poder-se-iam pesar, um, dois ou três quilos de mercadoria. Continuando-se a desafiar os alunos com uma nova pergunta «*qual será a massa* *que deveremos encomendar para dar continuidade às pesagens inteiras de quilos de batatas? Será outra de dois quilogramas? Será uma de três quilogramas, ou será uma de quatro? Nota: cada massa continua a custar o mesmo preço, independentemente do seu peso*», a resposta será, certamente, a de quatro quilogramas. Ora, com estas três massas, de um, dois e quatro quilogramas, já se poderiam pesar as seguintes quantidades de batatas: um, dois, três, quatro, cinco, seis e sete quilos. A tabela seguinte permite sintetizar as pesagens envolvendo a existência destas massas:

Massas existentes	Quantidade inteira de batatas a pesar (quilos)	Massas envolvidas na pesagem
1 kg	1 kg	1 kg
1 kg	1 kg	1 kg
2 kg	2 kg	2 kg
	3 kg	1 kg + 2 kg
	1 kg	1 kg
	2 kg	2 kg
1 kg	3 kg	1 kg + 2 kg
2 kg	4 kg	4 kg
4 kg	5 kg	1 kg + 4 kg
	6 kg	2 kg + 4 kg
	7 kg	1 kg + 2 kg + 4 kg

Para se poder pesar oitos quilos de batatas já seria necessário adquirir uma nova massa – a de oito quilos, que permitiria fazer as seguintes pesagens:

Massas existentes	Quantidade inteira de batatas a pesar (quilos)	Massas envolvidas na pesagem
	1 kg	1 kg
	2 kg	2 kg
	3 kg	1 kg + 2 kg
	4 kg	4 kg
	5 kg	1 kg + 4 kg
1 kg	6 kg	2 kg + 4 kg
2 kg	7 kg	1 kg + 2 kg + 4 kg
4 kg	8 kg	8 kg
8 kg	9 kg	1 kg + 8 kg
	10 kg	2 kg + 8 kg
	11 kg	1 kg + 2 kg + 8 kg
	12 kg	4 kg + 8 kg
	13 kg	1 kg + 4 kg + 8 kg
	14 kg	2 kg + 4 kg + 8 kg
	15 kg	1 kg + 2 kg + 4 kg + 8 kg

Se os alunos já tiverem identificado que cada nova massa representa o dobro da massa adquirida imediatamente antes, é expectável que a seguir sugiram a aquisição da massa de dezasseis quilogramas, permitindo a realização das seguintes pesagens:

Massas existentes	Quantidade inteira de batatas a pesar (quilos)	Massas envolvidas na pesagem
	1 kg	1 kg
	2 kg	2 kg
	3 kg	1 kg + 2 kg
	4 kg	4 kg
	5 kg	1 kg + 4 kg
	6 kg	2 kg + 4 kg
	7 kg	1 kg + 2 kg + 4 kg
	8 kg	8 kg
	9 kg	1 kg + 8 kg
	10 kg	2 kg + 8 kg
	11 kg	1 kg + 2 kg + 8 kg
	12 kg	4 kg + 8 kg
	13 kg	1 kg + 4 kg + 8 kg
1 kg	14 kg	2 kg + 4 kg + 8 kg
2 kg	15 kg	1 kg + 2 kg + 4 kg + 8 kg
4 kg	16 kg	16 kg
8 kg	17 kg	1 kg + 16 kg
16 kg	18 kg	2 kg + 16 kg
	19 kg	1 kg + 2kg + 16 kg
	20 kg	4 kg + 16 kg
	21 kg	1 kg + 4 kg + 16 kg
	22 kg	2 kg + 4 kg + 16 kg
	23 kg	1 kg + 2 kg + 4 kg + 16 kg
	24 kg	8 kg + 16 kg
	25 kg	1 kg + 8 kg + 16 kg
	26 kg	2 kg + 8 kg + 16 kg
	27 kg	1 kg + 2kg + 8 kg + 16 kg
	28 kg	4 kg + 8 kg + 16 kg
	29 kg	1 kg + 4 kg + 8 kg + 16 kg
	30 kg	2 kg + 4 kg + 8 kg + 16 kg
	31 kg	1 kg + 2 kg + 4 kg + 8 kg + 16 kg

Caso as massas adquiridas ainda não tenham sido associadas ao tema das potências de base dois, poderá fazer-se essa conexão, evidenciando-se que qualquer número inteiro, neste caso até ao trinta e um, inclusive, pode ser obtido por uma ou pela soma de várias potências de base dois, que mais não são do que os valores das massas encomendadas.

Tirando-se partido da conclusão anterior, será interessante confrontar os alunos com o conhecido jogo dos cinco cartões numéricos:

7	15	11	29	31
25				3
5		A		27
17				23
9	19	1	21	13

19	23	26	31	27
10				30
22		B		6
7				15
3	14	2	11	18

7	21	12	30	31
20				29
13		C		23
6				15
28	14	4	5	22

31	15	9	14	29
11				26
24		D		13
30				10
12	28	8	25	27

22	27	17	18	25
20				31
23		E		29
24				21
26	28	16	30	19

O objectivo da utilização destes cartões é desafiar os alunos a pensarem num número inteiro até ao trinta e um, inclusive, e revelar apenas a letra ou letras do cartão ou cartões onde esse número secreto se encontra. O professor apenas terá que saber que cada cartão está associado a uma potência de base dois (1, 2, 4, 8 ou 16). Para mais facilmente adivinhar o número pensado pelo aluno, sugere-se que a escrita destes cinco números ocorra sempre na mesma posição em cada cartão. A título de exemplo, se um determinado aluno disser que o seu número secreto se encontra apenas nos cartões A, D e E, facilmente se descobre que se trata no número vinte e cinco. De facto o vinte e cinco pode ser obtido através da soma de três potências de base dois ($2^0 + 2^3 + 2^4$), como se havia verificado no jogo das pesagens: $25 = 1 + 8 + 16$. Ora, estes valores são, respectivamente, os que identificam os cartões A, D e E.

Após a exploração de vários exemplos será interessante reflectir-se acerca da conexão existente entre este jogo de cartões e o jogo das pesagens. De facto, no cartão da primeira potência de base dois, os números aí registados são todos aqueles que no jogo das pesagens necessitavam a utilização da massa de um quilograma. O mesmo se passa em relação aos restantes cartões, isto é, em relação às próximas quatro potências de base dois.

Analisando os números envolvidos em cada cartão, seria interessante que os alunos pudessem estabelecer novas conexões matemáticas. Assim, ao nível do cartão A, os dezasseis números aí existentes são os seguintes: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31. Tratam-se dos primeiros dezasseis números ímpares. Colocando-os numa outra disposição, verifica-se o seguinte padrão:

$$
\begin{array}{ccc}
1 & \longrightarrow & 3 \\
5 & \longleftarrow\longrightarrow & 7 \\
9 & \longleftarrow\longrightarrow & 11 \\
13 & \longleftarrow\longrightarrow & 15 \\
17 & \longleftarrow\longrightarrow & 19 \\
21 & \longleftarrow\longrightarrow & 23 \\
25 & \longleftarrow\longrightarrow & 27 \\
29 & \longleftarrow\longrightarrow & 31
\end{array}
$$

No que respeita ao cartão B, os dezasseis números aí existentes são os seguintes: 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 30, 31.

Relativamente à sequência numérica do cartão anterior, os números existentes nas posições pares mantêm-se. Apenas se alteram os números existentes nas posições ímpares desta nova sequência. Colocando-os numa disposição semelhante à do cartão A, verifica-se, realmente, que a coluna da direita se mantém. Já os números da coluna da esquerda aumentam todos um valor relativamente aos respectivos números dessa mesma coluna do cartão A. Por isso, os valores desta coluna passaram todos a ser pares, mantendo-se a outra coluna com os respectivos sucessores, isto é, formada por números ímpares. Além disto, analisando os números de cada coluna, encontra-se uma nova regularidade, que é o facto desses números irem aumentando de quatro em quatro:

$$
\begin{array}{ccc}
2 & \longrightarrow & 3 \\
6 & \longrightarrow & 7 \\
10 & \longrightarrow & 11 \\
14 & \longrightarrow & 15 \\
18 & \longrightarrow & 19 \\
22 & \longrightarrow & 23 \\
26 & \longrightarrow & 27 \\
30 & \longrightarrow & 31
\end{array}
$$

Já ao nível do cartão C, os dezasseis números aí existentes são os seguintes: 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 28, 29, 30, 31. Relativamente à sequência numérica do cartão B, mantêm-se sempre os últimos dois números de cada conjunto de quatro. Colocando-os numa disposição semelhante às dos cartões A e B, verifica-se uma nova regularidade, pois aparecem quatro conjuntos formados por quatro números consecutivos. Além deste aspecto, o número que inicia um novo conjunto é sempre maior, em oito unidades, do que o número que inicia o conjunto anterior:

4 → 5
6 ↔ 7

12 → 13
14 ↔ 15

20 → 21
22 ↔ 23

28 → 29
30 ↔ 31

Uma vez mais, a coluna da esquerda é formada exclusivamente por números pares e a da direita por números ímpares.

No que concerne ao cartão D, os dezasseis números aí existentes são os seguintes: 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31. Relativamente à sequência numérica do cartão C, mantêm-se sempre os últimos quatro números de cada conjunto de oito. Colocando-os numa disposição semelhante às dos cartões A, B e C, verifica-se uma nova regularidade, pois aparecem dois conjuntos formados por oito números consecutivos. Uma vez mais, a coluna da esquerda é formada exclusivamente por números pares e a da direita por números ímpares:

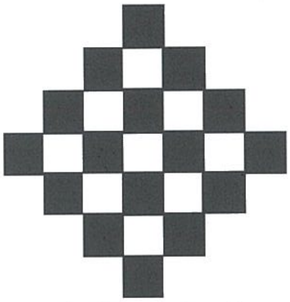
8 → 9
10 ↔ 11
12 ↔ 13
14 ↔ 15

24 → 25
26 ↔ 27
28 ↔ 29
30 ↔ 31

Por último, ao nível do cartão E, os dezasseis números aí existentes são os seguintes: 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31. Relativamente à sequência numérica do cartão D, mantêm-se apenas os últimos oito números. Colocando-os numa disposição semelhante às dos cartões anteriores, verifica-se uma nova regularidade, pois aparece um único conjunto formado por dezasseis números consecutivos. Novamente a coluna da esquerda é formada exclusivamente por números pares e a da direita por números ímpares:

16 → 17
18 ↔ 19
20 ↔ 21
22 ↔ 23
24 ↔ 25
26 ↔ 27
28 ↔ 29
30 ↔ 31

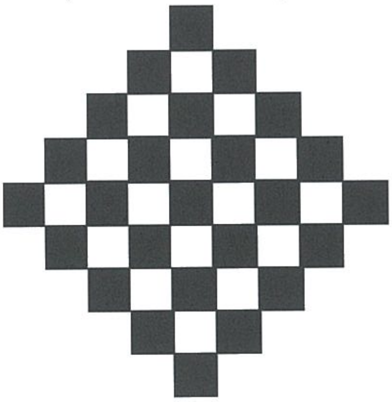
Associando-se o tema das potências ao tema das pavimentações, pode-se tirar partido do modelo seguinte, composto por azulejos brancos e pretos, cuja largura envolve sete elementos.



Esta imagem pode servir de motivação para se lançar o seguinte desafio aos alunos: «*imagine-se que na estação de combóio existe um painel como este, cuja largura envolve 125 azulejos. Qual a totalidade dos azulejos desse painel?*»

Seria interessante que os alunos decidissem iniciar a resolução desta situação explorando primeiro o exemplo da própria figura. Para o caso da largura do painel contemplar sete azulejos, estes dividem-se em quatro pretos e três brancos. O total de azulejos neste caso é de vinte e cinco, sendo dezasseis pretos e nove brancos. Curiosamente está-se perante três números quadrados, pois $5^2 = 4^2 + 3^2$.

De seguida, os alunos poderiam estudar o caso cuja fila central é formada por nove azulejos, sendo cinco pretos e quatro brancos:



O total de azulejos neste caso é de quarenta e um, sendo vinte e cinco pretos e dezasseis brancos. Neste caso a soma de dois números quadrados já não é um número quadrado, pois $41 = 5^2 + 4^2$ e 41 não é um número quadrado.

Tirando partido dos dois exemplos anteriores poder-se-á elaborar a seguinte tabela:

Nº de azulejos da linha central	Nº de azulejos pretos da linha central	Nº de azulejos brancos da linha central	Total de azulejos pretos	Total de azulejos brancos	Total de azulejos
7	4	3	16	9	25
9	5	4	25	16	41

Nº de azulejos da linha central	Nº de azulejos pretos da linha central	Nº de azulejos brancos da linha central	Total de azulejos pretos	Total de azulejos brancos	Total de azulejos
n	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n-1}{2}$	$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$	

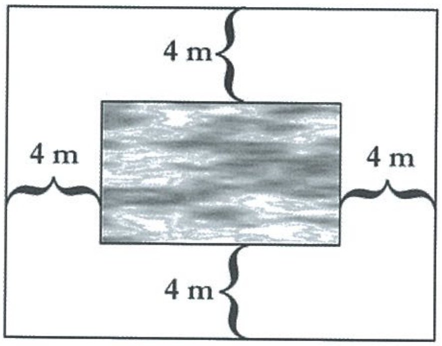
Justificação do total de azulejos:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2+\left(\frac{n-1}{2}\right)^2=\frac{n^2+2n+1+n^2-2n+1}{4}=\frac{2n^2+2}{4}=\frac{n^2+1}{2}$$

$$Para\ n=125 \Rightarrow \frac{125^2+1}{2}=7813$$

Os 125 azulejos da fila central dividem-se em (125 + 1): 2 azulejos pretos e (125 - 1) : 2 brancos, isto é, 63 azulejos pretos e 62 azulejos brancos.

As potências também poderão ser associadas a outro problema envolvendo pavimentações. Veja-se o exemplo de uma hipotética piscina rectangular com dez metros de comprimento e seis metros de largura que tem um enorme espaço envolvente, também ele rectangular, conforme ilustra a figura seguinte, o qual pretende ser pavimentado com determinado tipo de mosaicos:

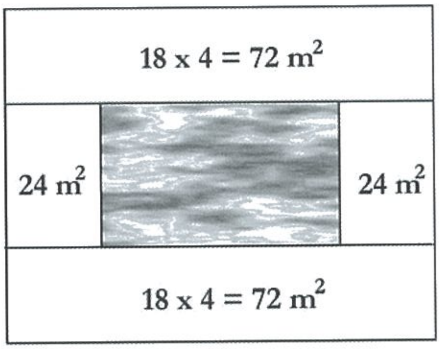


Os mosaicos a usar na pavimentação do espaço envolvente da piscina serão encomendados expressamente para esta obra, pois as suas dimensões são elevadas. As áreas dos mosaicos são 1 m^2, 2 m^2 ou 4 m^2:

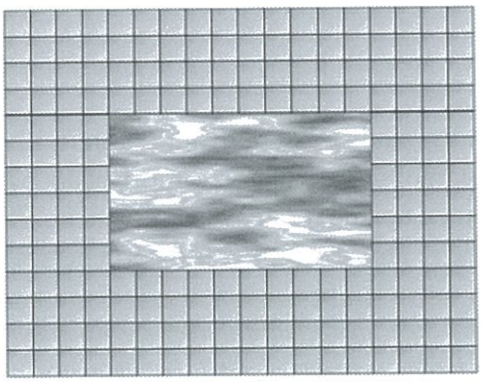
Será que poderão ser usados apenas mosaicos de um só tipo para pavimentar a totalidade desse espaço, usando-se apenas mosaicos inteiros?

Este desafio exige que se calcule a medida da área do espaço envolvente à piscina para depois se averiguar se é múltipla da área de cada tipo de mosaico.

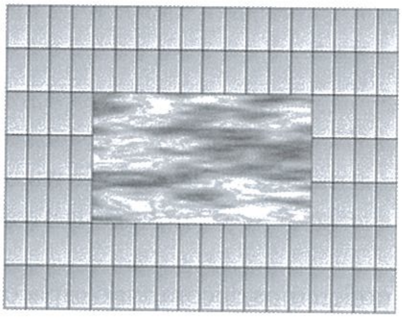
Como evidencia a figura seguinte, poderemos decompor o espaço envolvente à piscina em quatro rectângulos, obtendo-se uma área total de 192 m^2 (72 x 2 + 24 x 2) m^2:

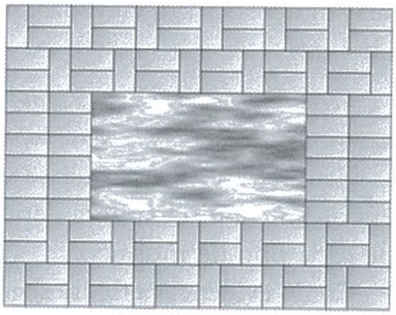


Este valor implica que se possam usar 192 mosaicos de área 1 m^2. Uma possível pavimentação seria a seguinte:

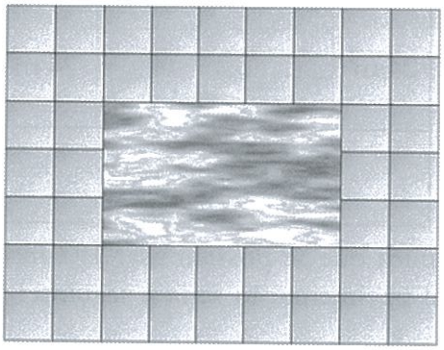


Neste caso, a área do espaço envolvente à piscina é 192 x 2^0 = 192 m^2. Por sua vez, o valor 192 também é múltiplo de 2 m^2, resultando a possibilidade de se pavimentar o referido espaço através da utilização de 96 mosaicos deste tipo, como evidenciam as duas figuras seguintes:





Neste caso, a área do espaço envolvente à piscina é $96 \times 2^1 = 192$ m^2. De seguida constata-se que o valor 192 também é múltiplo de 4 m^2, resultando a possibilidade de se pavimentar o referido espaço através da utilização de 48 mosaicos deste tipo, como evidencia a figura seguinte:



De facto, a área do espaço envolvente à piscina é, neste caso, $48 \times 2^2 = 192$ m^2.

Em jeito de síntese, penso que as actividades acabadas de explorar poderão servir de forte motivação para que os alunos possam gostar de trabalhar o tema das potências. As mesmas poderão surgir antes de se abordar as regras da potenciação e antes de serem apresentados os triviais problemas do tipo: «*num quintal existem quatro árvores contendo cada uma quatro ninhos e cada ninho quatro passarinhos. Quantos passarinhos existem no total das árvores?*»

13 - Conexões finais

Tarefa – conectar vários conceitos matemáticos entre si

Retomando a sequência de números de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,... e excluindo os três primeiros números, podem-se colocar os restantes num quadrado mágico de ordem três, segundo o algoritmo que recorre a movimentos semelhantes aos do cavalo no jogo de xadrez:

5	144	13
55	21	8
34	3	89

Apesar de não se estar perante um quadrado mágico, existe uma curiosidade interessante envolvendo o produto dos valores afectos a cada uma das linhas e a cada uma das colunas:

a) 5 x 144 x 13 = 9360 b) 55 x 21 x 8 = 9240 c) 34 x 3 x 89 = 9078

d) 5 x 55 x 34 = 9350 e) 144 x 21 x 3 = 9072 f) 13 x 8 x 89 = 9256

Comparando a soma dos produtos obtidos através dos valores das linhas com a soma dos produtos relativos aos valores das colunas, obtém-se sempre o valor 27678. Ora esta curiosidade matemática também resulta para qualquer quadrado mágico verdadeiro, porque a soma de cada linha é igual a cada uma das somas das outras linhas, bem como à soma de cada uma das colunas.

Recorde-se, agora, a elaboração de um quadrado mágico de ordem quatro iniciando-se pelo valor cinco e obtendo-se a soma mágica cinquenta:

5	19	18	**8**
16	**10**	**11**	13
12	**14**	**15**	9
17	7	6	**20**

Elevando ao quadrado cada valor da fila de cima e adicionando os valores obtidos, verifica-se que o resultado final coincide com o obtido, segundo o mesmo procedimento para com os valores da última fila:

(a) $5^2 + 19^2 + 18^2 + 8^2 = 25 + 361 + 324 + 64 = 774$

(b) $17^2 + 7^2 + 6^2 + 20^2 = 289 + 49 + 36 + 400 = 774$

Sensibilizando os alunos para verificarem se o mesmo ocorre com as duas filas do meio, facilmente constatarão que sim, pois:

(c) $16^2 + 10^2 + 11^2 + 13^2 = 256 + 100 + 121 + 169 = 646$

(d) $12^2 + 14^2 + 15^2 + 9^2 = 144 + 196 + 225 + 81 = 646$

Estas regularidades também ocorrem ao nível dos valores das colunas:

(a) $5^2 + 16^2 + 12^2 + 17^2 = 25 + 256 + 144 + 289 = 714$

(b) $8^2 + 13^2 + 9^2 + 20^2 = 64 + 169 + 81 + 400 = 714$

(c) $19^2 + 10^2 + 14^2 + 7^2 = 361 + 100 + 196 + 49 = 706$

(d) $18^2 + 11^2 + 15^2 + 6^2 = 324 + 121 + 225 + 36 = 706$

Observe-se, agora, o quadrado mágico envolvendo os números desde o cinco até ao vinte, construído segundo o algoritmo da linha mágica:

20	7	6	17
9	14	15	12
13	10	11	16
8	19	18	5

Este quadrado mágico também pode ser conectado ao tema das potências. Para tal pode-se inserir um novo quadrado no quadrado mágico anterior que, no no caso presente, é este:

20	7	6	17
9	14	15	12
13	10	11	16
8	19	18	5

Adicionando os quatro valores existentes em dois lados paralelos deste novo quadrado, a soma obtida coincide com a soma dos outros quatro valores dos outros dois lados paralelos:

(a) $9 + 7 + 16 + 18 = 50$

(b) $6 + 12 + 19 + 13 = 50$

Elevando ao quadrado cada um desses quatro valores afectos a cada dois lados paralelos deste quadrado e adicionando os valores obtidos, pode-se constatar que o resultado final coincide com a soma obtida com a soma dos quadrados dos outros quatro números:

(a) $9^2 + 7^2 + 16^2 + 18^2 = 81 + 49 + 256 + 324 = 710$

(b) $6^2 + 12^2 + 19^2 + 13^2 = 36 + 144 + 361 + 169 = 710$

O mesmo se passa com a potência de grau seguinte, pois:

(a) $9^3 + 7^3 + 16^3 + 18^3 = 729 + 343 + 4096 + 5832 = 11000$

(b) $6^3 + 12^3 + 19^3 + 13^3 = 216 + 1728 + 6859 + 2197 = 11000$

Tirando partido do tema das potências poder-se-á retomar o tema do triângulo de Pascal, pois a soma dos valores envolvidos em cada uma das suas linhas horizontais representa uma potência de base dois:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & & & & \longrightarrow & 1 = \mathbf{2^0} \\
 & & & 1 & & 1 & & & & \longrightarrow & 2 = \mathbf{2^1} \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & \longrightarrow & 4 = \mathbf{2^2} \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \longrightarrow & 8 = \mathbf{2^3} \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \longrightarrow & 16 = \mathbf{2^4}
\end{array}
$$

Por sua vez, as potências de base onze também podem ser obtidas pelos valores envolvidos nesse triângulo, pois:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & & & & \longrightarrow & \mathbf{11^0} = 1 \\
 & & & 1 & & 1 & & & & \longrightarrow & \mathbf{11^1} = 11 \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & \longrightarrow & \mathbf{11^2} = 121 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \longrightarrow & \mathbf{11^3} = 1331 \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \longrightarrow & \mathbf{11^4} = 14641
\end{array}
$$

Ainda a propósito de potências, poder-se-ia entrar, agora, no fascinante domínio dos padrões numéricos, dando-se continuidade ao seguinte padrão:

$1^2 = 1$ $11^2 = 121$ $111^2 = 12321$ $1111^2 =$ ______

Seria um bom exemplo para se abordar o tema das capicuas:

$1^2 = 1$ $11^2 = 121$ $111^2 = 12321$ $1111^2 = 1234321$

De facto, é fácil adivinhar que a próxima capicua será 123454321, que corresponde a 11111^2.

Note-se que com o nove surge um padrão diferente, mas igualmente interessante de analisar:

$9^2 = 1$ $\quad 99^2 = 9801$ $\quad 999^2 = 998001$ $\quad 9999^2 = 99980001$

Seria interessante que os alunos inferissem que 9999800001 representa o valor da seguinte potência: 99999^2.

Voltando às potências de base dois e comparando-as com as potências de base três, evidenciam-se novas regularidades interessantes:

$2^0 = 1$	$3^0 = 1$
$2^1 = 2 = 1 + 1$	$3^1 = 3 = 1 \text{ x } 2 + 1$
$2^2 = 4 = (1 + 2) + 1$	$3^2 = 9 = (1 + 3) \text{ x } 2 + 1$
$2^3 = 8 = (1 + 2 + 4) + 1$	$3^3 = 27 = (1 + 3 + 9) \text{ x } 2 + 1$
$2^4 = 16 = (1 + 2 + 4 + 8) + 1$	$3^4 = 81 = (1 + 3 + 9 + 27) \text{ x } 2 + 1$

Completando cada um dos padrões com mais um passo resulta o seguinte:

$2^5 = 32 = (1 + 2 + 4 + 8 + 16) + 1$ $\qquad 3^5 = 243 = (1 + 3 + 9 + 27 + 81) \text{ x } 2 + 1$

Finalizando com a sequência de números triangulares, os alunos poderiam ser confrontados com o seguinte desafio: «*adicionando o número de lados de um polígono regular com o respectivo número de diagonais, que sequência numérica se obtém?*».

Uma possível resolução poderia passar pela elaboração de uma tabela:

Polígono Regular	Número de Lados	Número de Diagonais	Soma Resultante
Triângulo	3	0	3
Quadrado	4	2	6
Pentágono	5	5	10
Hexágono	6	9	15

Confirma-se, pois que cada valor obtido coincide, uma vez mais, com um número da mágica sequência de números triangulares.

É, pois, verdadeiramente fascinante este mundo mágico das conexões matemáticas!

14 - Bibliografia

Abrantes, P.; Ferreira, C. e Oliveira, H. (1995). Matemática Para Todos – Investigações na sala de aula. *ProfMat 95. Actas,* 243-249

Abrantes, P., Leal, L. e Ponte, J. (1996). *Investigar para Aprender Matemática. Textos seleccionados.* Lisboa: APM.

Afonso, P. (2001). *Uma aventura matemática na Internet.* Porto: ASA.

Afonso, P. (2004). *Ensino e Aprendizagem da Matemática – em ambiente de e-Learning.* Coimbra/Castelo Branco: Alma Azul.

Afonso, P. (2006a). *Investigações e Conexões Matemáticas. In Actas do 2nd Internacional Meeting - Elementary Mathematics Education (EME06)- Suporte DVD* (ISBN 978-972-99970-5-1).

Afonso, P. (2006b). A Magia das Conexões Matemáticas – um caso envolvendo os números triangulares. *Educação e Matemática,* Novembro/Dezembro, pp. 35-38.

Afonso, P. e Gabriel, M. (2007). Investigações Matemáticas envolvendo alunos do 1° Ciclo do Ensino Básico. *LIBEC Line – Revista em Literacia e Bem-Estar da Criança,* 1, 23-30. ISSN 1646-7329

Afonso, P. (2008). Conexões Matemáticas: As Potências de Base 2. *Educação e Matemática,* Março/Abril, pp. 33-36.

Afonso, P. et al (2008). *Aprender Matemática nos Primeiros Anos. Algumas Propostas de Tarefas.* Castelo Branco: IPCB.

Almeida, C. e Martins, R. (2003). O que fica das investigações matemáticas: reflexões sobre os resultados de um questionário aplicado a alunos do 2º ciclo. In *Actas XIV SIEM 2003 –* Seminário de Investigação em Educação Matemática, 431-6445.

Amaral, H. (2002). Actividades investigativas no 1º Ciclo. In *Actas XIII SIEM 2002* – Seminário de Investigação em Educação Matemática, 297-305.

Arguelles, J. (1998). *Matemática recreativa y otros juegos de ingenio.* Madrid: Akal, 2ª Ed.

Balbuena, L. e Coba, M. (1992). *La Matemática Recreativa vista por los alumnos.* Granada: Proyecto Sur.

Berloquin, P. (1991). *100 Jogos Numéricos.* Lisboa: Gradiva.

Bernabé, M. (1989). *Curiosidades matemáticas.* Madrid: Alianza Editorial.

Bolt, B. (1991). *Actividades Matemáticas.* Lisboa: Gradiva.

Bolt, B. (1992). *Mais Actividades Matemáticas.* Lisboa: Gradiva.

Bolt, B. (1994). *The Amazing Mathematical Amusement Arcade.* New York: Cambridge University Press, 8ª Ed.

Bolt, B. (1996). *Puzzles de Matemática.* Lisboa: Terramar.

Bolt, B. (1997). *Uma Paródia Matemática.* Lisboa: Gradiva.

Boyer, C. (1998). *História da Matemática.* São Paulo: Edgard Blucher, 2ª Ed.

Blum, R. (1998). *Brincando com a Matemática.* Lisboa: Replicação.

Brocardo, J. (2003). As investigações matemáticas: análise de um projecto curricular. In *Actas XIV SIEM 2003* – Seminário de Investigação em Educação Matemática, 45-61.

Brunheira, L. e Fonseca, H. (1995). Investigar na aula de Matemática. *Educação e Matemática*, nº 35, 16-20.

Capó, M. (2005a). *El país de las mates. 100 problemas de ingenio 1.* Madrid: elrompecabezas.

Capó, M. (2005b). *El país de las mates. 100 problemas de ingenio 2.* Madrid: elrompecabezas.

Chamoso, J. e Rawson, W. (2003). *A vueltas con los números.* Madrid: Nivola.

Collins, A. (1998). El potencial de las tecnologías de la información para la educación. In C. Vizcarro, e J. León, (Eds.). *Nuevas Tecnologías para el Aprendizaje.* Madrid: Pirámide.

Cunha, H.; Oliveira, H. e Ponte, J. (1995). Investigações matemáticas na sala de aula. *ProfMat 95. Actas*, 61-167.

Paulo Afonso é professor da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Castelo Branco desde o ano de 1990. É Doutor em Tecnologia Educativa pela Universidade de Salamanca (2004), tendo a Tese obtido o Prémio Extraordinário de Doctorado desta Universidade; e Mestre em Tecnologia Educativa pela Universidade do Minho (1995), tendo ambas as teses incidido na formação metacognitiva de futuros professores de Matemática.

Actualmente é Director do Departamento de Ciências e Matemática da Escola Superior de Educação daquele Instituto Politécnico e, de entre vários projectos de investigação em que participou, destaca-se a coordenação institucional do Projecto Skoool.pt, em parceria com a Câmara Municipal de Castelo Branco e com a Fundación Germán Sánchez Ruipérez.

ISBN: 978-989-8196-06-4