

Modelos Numéricos Aplicados às Redes de Bragg

Rogério Pais Dionísio

Escola Superior de Tecnologia / Departamento de Engenharia Electrotécnica e das Telecomunicações
Castelo Branco, Portugal
rdionisio@est.ipcb.pt

Resumo — São abordados alguns métodos numéricos que conjugados com a teoria dos modos acoplados, servem para modelar e simular o comportamento espectral das redes de Bragg inscritas em fibra óptica. Averigua-se qual o método com o melhor compromisso entre a precisão dos resultados e a complexidade computacional, para redes uniformes e apodizadas.

I. INTRODUÇÃO

Este capítulo pretende dar uma revisão da teoria subjacente ao conceito de difracção, e descreve sucintamente o modelo matemático das redes de Bragg.

A. Redes de difracção

As redes de difracção são componentes amplamente utilizadas em sistemas ópticos [1]. Na sua generalidade, são formadas por um conjunto de ranhuras periodicamente espaçadas de uma distância Λ [2], tal como mostra a Figura 1. Se uma fonte de luz incidente tiver um comprimento de onda próximo da dimensão das fendas, ocorre o fenómeno chamado difracção.

Numa rede de Bragg, a rede de difracção é formada pela variação periódica do índice de refracção no núcleo da fibra óptica. O termo Λ define neste caso o período da rede, como mostra a Figura 2. Os feixes de luz incidente e difractada formam, neste caso particular, ângulos $i = \theta = 90^\circ$, pelo que se propagam no mesmo plano mas em sentidos opostos.

Considerando que o índice de refracção do núcleo é n_{eff} , a condição necessária para existir interferência construtiva [3] para uma rede de Bragg é:

$$\lambda_B = 2n_{eff}\Lambda, \quad (1)$$

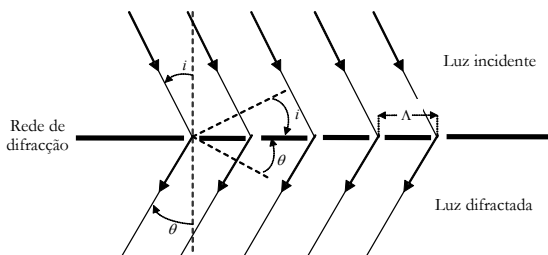


Figura 1 - Esquema ilustrativo do princípio de funcionamento de uma rede de difracção.

onde λ_B é o comprimento de onda de Bragg, para o qual a reflectividade é máxima.

B. Teoria dos modos acoplados

A teoria dos modos acoplados é uma ferramenta adequada para descrever matematicamente as propriedades de um conjunto alargado de redes de difracção [4]–[5]. Tem por base teórica a equação de onda do campo eléctrico E [6],

$$\frac{\partial^2 E(z)}{\partial z^2} + \left[\frac{2\pi}{\lambda_B} n(z) \right]^2 E(z) = 0, \quad (2)$$

onde o índice de refracção tem agora uma dependência espacial segundo uma variável z , sob a forma de uma rede de difracção descrita por

$$n(z) = n_{eff} \left[1 + \sigma(z) + 2\tau(z) \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} z + \phi(z)\right) \right]. \quad (3)$$

A variação local no valor médio do índice de refracção é descrita por $\sigma(z)$, e $\tau(z)$ representa a amplitude de modulação da rede, logo é uma grandeza sempre positiva [3]–[7],

$$\sigma(z) = \frac{\overline{\delta n_{eff}} f(z)}{n_{eff}} n_{th}(z) \quad (4)$$

$$\tau(z) = \frac{\overline{\delta n_{eff}} f(z)}{2n_{eff}} v. \quad (5)$$

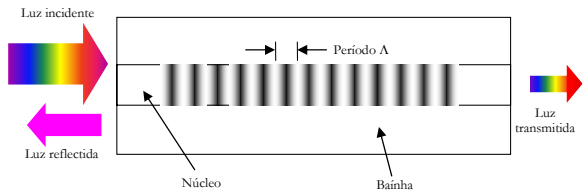


Figura 2 - Esquema ilustrativo do princípio de funcionamento de uma rede de Bragg.

O termo $\bar{\delta} n_{eff} f(z)$ é o formato da perturbação (apodização), com $f(z)$ normalizada, $\bar{\delta} n_{eff}$ é a profundidade da modulação, o termo ν é a visibilidade da modulação (*fringe visibility*), a função $n_{th}(z)$ descreve a variação do valor médio da perturbação ao longo da rede e a função $\phi(z)$ descreve a variação do período da rede (o termo mais comum é *chirp*).

O desenvolvimento das equações (2) e (3) resulta num sistema de equações diferenciais [8]-[9],

$$\begin{cases} \frac{du}{dz} = j[\hat{\sigma}u + \kappa v] \\ \frac{dv}{dz} = -j\frac{\pi}{\Lambda}[\hat{\sigma}v + \kappa u] \end{cases}, \quad (6)$$

onde u e v são as amplitudes do campo propagante e contra-propagante, respectivamente, e os parâmetros $\hat{\sigma}$ e κ definem-se por

$$\hat{\sigma}(z) = \delta + \frac{\pi}{\Lambda} \sigma(z) - \frac{1}{2} \frac{d\phi}{dz} \quad (7)$$

e

$$\kappa(z) = \frac{\pi}{\Lambda} \tau(z). \quad (8)$$

O termo

$$\delta = \frac{\pi}{\Lambda} \left(\frac{\lambda_B}{\lambda} - 1 \right) \quad (9)$$

é um parâmetro que caracteriza a sintonia em relação ao comprimento de onda de Bragg.

O sistema (6) pode ser transformado numa única equação, mediante a introdução de um coeficiente de reflexão local, designado por r , tal que $r = v/u$. Diferenciando r , e considerando que $r' = v'/u - u'v/u^2$, obtém-se a equação

$$\frac{dr}{dz} = -j[2r\hat{\sigma} + \kappa(1+r^2)], \quad (10)$$

conhecida por “Equação diferencial de Ricatti”. Trata-se de uma equação quadrática com coeficientes variáveis em função de z . A única solução fechada de (10) obtém-se para redes uniformes, quando os coeficientes κ e $\hat{\sigma}$ são constantes:

$$r = \frac{-\kappa \sinh(\alpha L)}{\hat{\sigma} \sinh(\alpha L) + j\alpha \cosh(\alpha L)}, \quad (11)$$

com $\alpha = \sqrt{\kappa^2 - \hat{\sigma}^2}$. Consequentemente, a reflectividade é:

$$R = |r|^2 = \frac{\sinh^2(\alpha L)}{\cosh^2(\alpha L) - \frac{\hat{\sigma}^2}{\kappa^2}}. \quad (12)$$

A Figura 3 ilustra graficamente o espectro de reflexão de três redes de Bragg uniformes, com base na expressão (12).

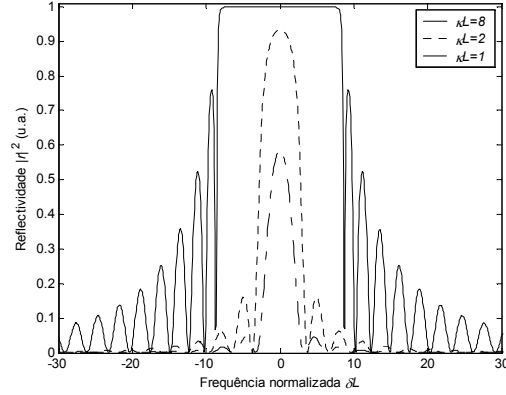


Figura 3 - Espectro de reflectividade em função da frequência normalizada de três redes uniformes, para $\kappa L=1$, $\kappa L=2$ e $\kappa L=8$, onde $L=10$ mm e $n_{th}=0$.

Um aumento do comprimento da rede ou da profundidade da modulação (aumento de κL) provoca um alargamento da banda passante e simultaneamente um crescimento da reflectividade. No entanto, esta situação leva ao aparecimento dos lobos laterais, cuja amplitude não pode ser desprezada.

II. MÉTODOS NUMÉRICOS

A solução fechada apresentada no capítulo anterior não permite analisar redes com parâmetros κ e $\hat{\sigma}$ variáveis ao longo do espaço. Além disso, muitas das aplicações práticas com redes de Bragg fazem uso de redes apodizadas ou com período Λ variável [4]-[11]. Existe por isso uma variedade de métodos numéricos utilizados para solucionar a resposta espectral de uma rede de Bragg, a partir dos dados associados ao perfil do índice de refração.

A. Integração numérica

A integração numérica baseada no método de Euler é um método simples, que, no entanto, permite calcular a resposta espectral de qualquer rede de Bragg [12]. O comprimento L é subdividido em N secções iguais. Para cada passo $h = L/N$, é utilizada uma equação linear, partindo do fim da rede, em $z = L$, com condição inicial $r(L) = 0$, e terminando em $z = 0$, onde o coeficiente de reflexão da rede de Bragg, $r(0)$, irá ser

$$r(z_{k+1}) = r(z_k) + h \frac{dr(z_k)}{dz}, \quad (13)$$

com $z_{k+1} = z_k - h$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ e onde a equação

$$\frac{dr(z_k)}{dz} = -j(2\hat{\sigma}(z_k)r(z_k) + \kappa(z_k)[1 + r^2(z_k)]) \quad (14)$$

Representa o declive da aproximação linear (13), baseado na equação (10).

O método de Heun [12], também conhecido por método de Euler modificado, baseia-se no teorema fundamental do cálculo integral e num método numérico de integração, como por exemplo a regra dos trapézios, para obter uma solução aproximada da equação diferencial de Riccati. As condições iniciais de simulação são idênticas ao método de Euler, mas faz uso de uma equação não linear, devido à presença do termo $r(z_{k+1})$ nos dois membros da equação

$$r(z_{k+1}) = -\frac{h}{2} \left(\frac{r(z_k)}{dz} + \frac{r(z_{k+1})}{dz} \right) + r(z_k) \quad (15)$$

Utiliza por isso um processo iterativo, com a equação (13) como primeira aproximação para $dr(z_{k+1})/dz$. Após o cálculo de $r(z_{k+1})$, o processo prossegue para cada passo h até $z = 0$.

Um dos métodos mais utilizados para a calcular a solução de equações diferenciais é o método de Runge-Kutta. O método mais comum é de ordem 4 (RK4) e baseia-se no desenvolvimento em série de Taylor do coeficiente de reflexão, truncado após o termo de quarta ordem. Pode no entanto ser construído para qualquer ordem.

Partindo do ponto $(z_k, r(z_k))$, a sequência de aproximação é gerada utilizando a fórmula

$$r(z_{k+1}) = r(z_k) - \frac{h(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)}{6} \quad (16)$$

onde f_1, f_2, f_3 e f_4 são estimativas para os declives em quatro pontos [12], no intervalo de um passo h .

B. Método da Matriz de Transferência

O método da Matriz de Transferência [13] começa por dividir a rede de Bragg num conjunto de M secções, que são consideradas uniformes, *i.e.*, os parâmetros ϕ , κ e σ são constantes. Cada secção uniforme, de comprimento Δz , é identificada por uma matriz quadrada de dimensão 2×2 . Todas as matrizes assim criadas são multiplicadas entre elas, resultando numa matriz única 2×2 , que caracteriza toda a rede [7]. No caso de uma rede de Bragg, a propagação dos modos acoplados por cada secção uniforme é descrita pela matriz T_k :

$$\begin{bmatrix} u_{k-1} \\ v_{k-1} \end{bmatrix} = T_k \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix}; k = M, M-1, \dots, 1, \quad (17)$$

em que

$$T_k = \begin{bmatrix} \bar{\varphi} & \bar{\zeta} \\ \zeta & \varphi \end{bmatrix}. \quad (18)$$

As variáveis $\bar{\varphi}$ e $\bar{\zeta}$ são o conjugado de φ e ζ , respectivamente, definidas por:

$$\varphi = \cosh(\alpha \Delta z) + j \frac{\hat{\sigma}}{\alpha} \sinh(\alpha \Delta z) \quad (19)$$

$$\zeta = j \frac{\kappa}{\alpha} \sinh(\alpha \Delta z) \quad (20)$$

C. Método de Rouard

O método de Rouard aplicado às redes de difracção em guias de onda foi apresentado por Weller-Brophy e Hall [14]. Trata-se de um processo recursivo, onde secções de dimensão reduzida, tipicamente com um período de comprimento, e caracterizadas por uma reflectividade complexa efectiva, são substituídas por uma interface única, que mantém as características de amplitude e de fase de cada secção. Este processo repete-se para todas as secções da rede, e a reflectividade complexa de toda a rede é assim obtida.

Este método tem, no entanto, um grande inconveniente, já que o tempo de simulação é proporcional ao número de períodos da rede, o que pode tornar todo o processo lento, mesmo para redes com comprimentos da ordem dos milímetros [4].

D. Método da Transformada de Fourier

As redes caracterizadas por uma amplitude de modulação reduzida apresentam normalmente uma resposta espectral com baixa reflectividade, como se pode ver na Figura 3. Nestas condições verifica-se [15] que o coeficiente de reflexão r é a transformada de Fourier do factor de acoplamento κ , definido em (8), acrescido de um factor de desfaseamento:

$$r = -j \int_0^L \kappa(s) e^{j\hat{\sigma}s} ds \quad (21)$$

Estudos recentes demonstram que a análise espectral das redes de Bragg pela transformada de Fourier pode ser aplicada a redes com elevada reflectividade, sem a acumulação de erros de fase, utilizando uma aproximação de Debye-Waller modificada [16] sobre o parâmetro de sintonia δ , definido em (9). O novo parâmetro $\langle \delta_R \rangle$ está relacionado com δ por

$$\langle \delta_R \rangle = \delta^2 - |\langle \kappa \rangle|^2 \left(1 - e^{-\left[\frac{\delta}{\langle \kappa \rangle} \right]^2} \right) \quad (22)$$

onde $\langle \kappa \rangle$ é o valor médio do factor de acoplamento definido em (8).

III. COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS NUMÉRICOS

Para que o desempenho dos diferentes métodos seja averiguado, no que diz respeito à precisão do resultado, é calculado o coeficiente de correlação máximo entre a reflectividade obtida pela solução fechada (11) e a reflectividade resultante de cada um dos métodos numéricos, para redes uniformes:

$$c_{xy}(0) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} x_i^2 \sum_{i=0}^{N-1} y_i^2}} \quad (23)$$

Na expressão (23), x e y são dois vectores de comprimento N , que é também o número de pontos espectrais simulados. Admite-se que 98% é o valor mínimo da correlação cruzada para considerar válidos os resultados de um determinado método.

A. Redes uniformes

Todas as redes têm em comum um índice de refração efectivo $n_{eff} = 1.45$, comprimento de onda central em 1550 nm, valor médio nulo ($n_{th} = 0$) e foram simuladas numa banda espectral com 10 nm de largura com amplitude de modulação igual a 4×10^{-4} . O comprimento físico L é variável, entre 0,5 mm e 25 mm.

Calculando a correlação cruzada entre os diversos métodos e a solução fechada, verifica-se que o método de Rouard é de todos o mais preciso.

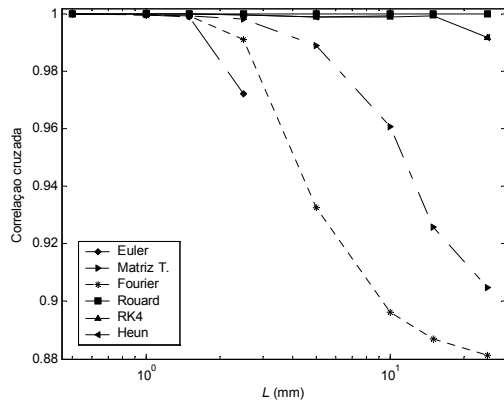


Figura 4 – Correlação cruzada da reflectividade, entre a solução fechada e os métodos numéricos implementados. O método da Matriz de Transferência utiliza $M=50$. Os três métodos de integração numérica (Euler, Heun e RK4) usam 2000 pontos para o comprimento L . Ao nível espectral, todos os métodos calculam 500 pontos num intervalo de 10 nm.

A Figura 4 evidencia que, para este método, a correlação cruzada da reflectividade é constante e equivalente a 1, em todas as redes simuladas. Todos os métodos de integração numérica perdem precisão ao longo do gráfico, porque o aumento no comprimento não é acompanhado por um aumento no número de pontos simulados, que é mantido constante. O efeito resultante é

o de uma amostragem espacial insuficiente. Os resultados provenientes do método de Euler, devido ao seu fraco poder de convergência fora da banda central, deixam de estar correlacionados para redes maiores de 1,5 mm. O mesmo se passa para o método de Heun, mas para redes com comprimento superior a 16 mm.

Por exemplo, a Figura 5 mostra que o método de Euler falha em aproximar a solução analítica fora da banda central de reflexão, divergindo da solução analítica. Para a mesma rede, o método da transformada de Fourier corrigido não produz valores correctos dentro da banda de reflexão máxima, devido aos erros de fase que introduz.

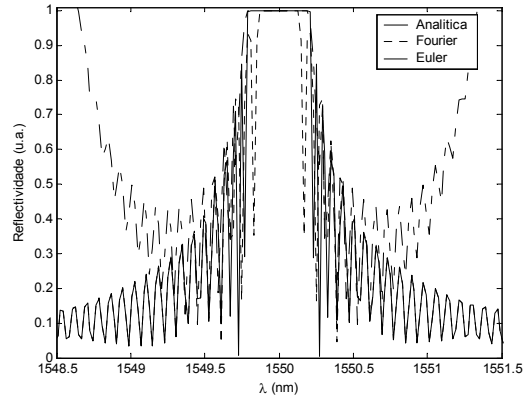


Figura 5 - Resposta espectral em amplitude para uma rede uniforme com 10 mm, obtida por três métodos: Integração numérica pelo método de Euler (-.-), Transformada de Fourier (- -) e solução analítica (—).

Finalmente, o comportamento do método da matriz de transferência perde precisão com o aumento no comprimento da rede porque o número de secções utilizado é constante e é manifestamente insuficiente para redes superiores a 16 mm.

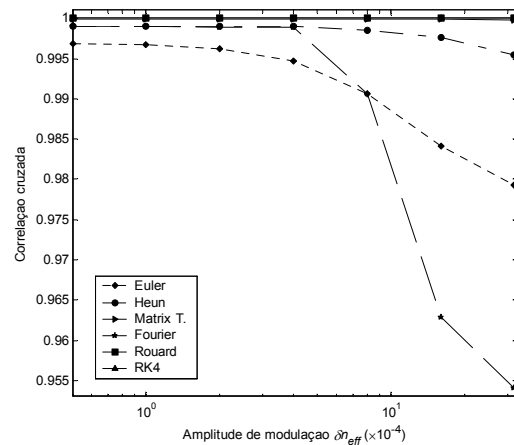


Figura 6 – Correlação cruzada da reflectividade em função da amplitude modulação, considerando uma rede uniforme com 1,6 mm de comprimento. O método da Matriz de Transferência utiliza $M=50$; Os três métodos de integração numérica (Euler, Heun e RK4) usam 2000 pontos para o comprimento L . Ao nível espectral, todos os métodos calculam 500 pontos num intervalo de 10 nm.

O comportamento de cada método é novamente testado e correlacionado com a solução geral, variando agora a amplitude de modulação do índice de refração entre $0,5 \times 10^{-4}$ e 32×10^{-4} . Para que o comprimento da rede

não influencie esta nova análise, os gráficos da Figura 4 são analisados para ser escolhido um comprimento para o qual todos os métodos tenham uma correlação equivalente e próxima de 1. O comprimento da rede escolhido é 1.6 mm.

A Figura 6 confirma o bom desempenho dos métodos de integração numérica de ordem mais elevada, nomeadamente o método de Runge-Kutta 4, além dos métodos de Rouard e da Matriz de Transferência.

No entanto, é de salientar que o método de Euler, embora seja um método com fraca convergência comparado aos outros, mantém neste caso uma correlação superior a 98% em praticamente todas as simulações.

B. Redes apodizadas

No caso das redes apodizadas, a equação (11) não é aplicável. A solução encontrada consiste em utilizar os resultados do método de Rouard como referência, admitindo que a precisão e o comportamento bem demonstrados para redes uniformes, se possam estender na análise das redes apodizadas.

Realizaram-se diversas simulações no intuito de calcular a reflectividade de uma rede com perfil tangente hiperbólica

$$f(z) = \frac{\tanh\{\eta[1 - 2|(z - L/2)/L|\]}{\tanh(\eta)} \quad (24)$$

Os parâmetros de simulação numéricas permanecem os mesmos do que para as redes uniformes.

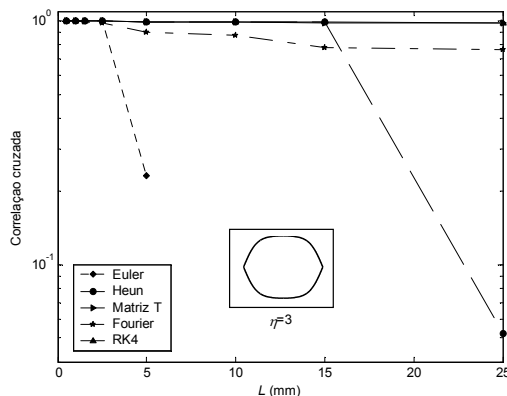


Figura 7 – Correlação cruzada da reflectividade, entre o método de Rouard e os métodos de Euler (◆), Heun (●), Matriz de Transferência (▶), Fourier corrigido (✱) e Runge-Kutta 4 (▲). O perfil do tipo tanh ($\eta=3$) é também apresentado.

Tal como as redes uniformes, e pelas mesmas razões, os métodos de Euler e da transformada de Fourier não são adequados para simular redes com comprimento superior a 1.6 mm, se 98% for o limite inferior para que dois métodos sejam considerados correlacionados.

IV. CONCLUSÕES

O método de Euler só converge correctamente com um número elevado de passos h , pelo que, em algumas situações, se pode tornar lento.

A correcção aplicada no método de Fourier continua a introduzir erros de fase, em redes com acoplamento forte, embora sejam menores do que a situação onde não existe correcção.

O método da Matriz de Transferência, demonstrou, pelas muitas simulações realizadas, fornecer resultados concordantes com o método de Rouard para redes apodizadas e com a solução geral das redes uniformes.

O método de Rouard, embora seja aquele que forneça mais precisão em qualquer tipo de rede, é mais lento de todos os métodos estudados, e deixa de ser atractivo para redes com um número elevado de períodos.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece à Fundação para Ciência e Tecnologia pelo financiamento do projecto POSI/2001/CPS/40009 integrado no WO-NET.

REFERÊNCIAS

- [1] Ramaswani, R. & Sivarajan, K. N. (2002). *Optical Networks – A practical perspective* (2nd ed.). San Francisco, Ca: Morgan Kaufmann Publishers.
- [2] Alonso, M. & Finn, E. J. (1981). *Física – Um curso universitário, vol. 2 – Campos e ondas*. São Paulo: Editora Edgar Blücher Ltda.
- [3] Agrawal, G. P. (2001). *Applications of nonlinear fiber optics*. San Diego, CA: Academic Press.
- [4] Othonos, A. & Kalli, K. (1999). *Fiber Bragg gratings: fundamentals and applications in telecommunications and sensing*. Norwood, MA: Artech House.
- [5] Kashyap, R. (1999). *Fiber Bragg gratings*. San Diego, CA: Academic Press.
- [6] Ishimaru, A. (1991). *Electromagnetic wave propagation, radiation and scattering*. New Jersey: Prentice Hall.
- [7] Erdogan, T. (1997). Fiber grating spectra. *J. Light. Tech.*, **15**, 1277-1294.
- [8] Sipe, J. E., Poladian, L. & de Sterke, C. M. (1994). Propagation through nonuniform grating structures. *J. Opt. Soc. Am. A*, **11**, 1307-1320.
- [9] Giles, C. (1997). Lightwave application of fiber Bragg gratings. *J. of Light. Tech.*, **15**, 1391-1404.
- [10] Russell, P. ST. J., Archambault, J. & Reekie, L. (1993). Fibre gratings. *Physics World*, **6**, pp. 41-46.
- [11] Hill, K. & Meltz, G. (1997). Fiber Bragg grating technology fundamentals and overview. *J. of Light. Tech.*, **18**, 1263-1276.
- [12] Mathews, J. H. & Fink, K. D. (1999). *Numerical methods using Matlab* (3rd ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.
- [13] Yamada, M. & Sakuda, K. (1987). Analysis of almost-periodic distributed feedback slab waveguides via a fundamental matrix approach. *Appl. Opt.*, **26**, 3474-3478.
- [14] Weller-Brophy, L. A. & Hall, D. G. (1985). Analysis of waveguide gratings: application of Rouard's method. *J. Opt. Soc. Am. A*, **2**, 863-871.
- [15] Aguado, J. C. et al. (2001). A Fourier transform approximation for Bragg grating reflection filters. *Proceedings of Network and Optical Communications Conferences, Long-Haul and Access Networks, Optical and WDM*, IOS Press, 298-304.
- [16] Parker, M. & Walker, S. (2002). Arrayed waveguide gratings, fiber Bragg gratings and photonic crystals: An isomorphic Fourier transform light propagation analysis. *IEEE J. Select. Topics Quant. Electr.*, **8**, 1158-1167.