



Escola Superior de Tecnologia
Instituto Politécnico de Castelo Branco

Sebenta de Matemática Aplicada

Curso de Engenharia Electrotécnica e das
Telecomunicações

Rogério Pais Dionísio

ISBN: 978-989-8196-52-1

ÍNDICE

NOTA INTRODUTÓRIA	4
ANÁLISE COMPLEXA	5
DEFINIÇÃO DE NÚMERO COMPLEXO	6
REPRESENTAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS	6
FÓRMULA DE EULER	7
OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS	8
ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE NÚMEROS COMPLEXOS	11
CONCEITO DE NÚMERO COMPLEXO CONJUGADO	11
RELAÇÕES ENVOLVENDO CONJUGADOS	12
<i>Relações envolvendo o módulo de números complexos:</i>	13
CONJUNTOS DEFINIDOS POR CONDIÇÕES ENVOLVENDO NÚMEROS COMPLEXOS	14
FUNÇÕES DE VARIÁVEL COMPLEXA	16
<i>Definição</i>	16
<i>Representação cartesiana</i>	17
<i>Representação polar</i>	18
<i>Limite de uma função de variável complexa</i>	19
Conceito de vizinhança	19
Propriedades	20
<i>Continuidade de uma função de variável complexa</i>	21
Propriedades das funções contínuas	23
<i>Diferenciação de uma função complexa</i>	23
Definição:	23
Regras de diferenciação	24
FUNÇÕES ANALÍTICAS	25
FUNÇÕES HARMÔNICAS	29
<i>Construção de uma função analítica à partir da parte real ou imaginária</i>	29
FUNÇÕES ELEMENTARES DE VARIÁVEL COMPLEXA	30
<i>Função exponencial complexa e^z</i>	30
Definição:	30
Propriedades	30
<i>Funções trigonométricas ($\sin x$ e $\cos x$) e hiperbólicas ($\sinh(x)$ e $\cosh(x)$)</i>	32
<i>Função logarítmica $\ln(x)$</i>	33
Definição	33
<i>Potenciação, z^C</i>	35
Definição	35
INTEGRAÇÃO COMPLEXA	36
<i>Definição de integral de linha</i>	36
<i>Representação</i>	37
<i>Propriedades</i>	38
<i>Teorema de Cauchy-Goursat:</i>	41
Demonstração:	41
<i>Formula do Integral de Cauchy</i>	45
Demonstração:	45
Derivadas de funções analíticas	48
TEORIA SOBRE SINAIS E SISTEMAS	51
INTRODUÇÃO	52
TRANSFORMAÇÕES ELEMENTARES SOBRE SINAIS	54
CARACTERIZAÇÃO DOS SINAIS	56
FUNÇÕES (SINAIS) ELEMENTARES	57
CONVOLUÇÃO	62

<i>Propriedades da Convolução</i>	68
SISTEMAS	69
<i>Caracterização funcional de um sistema</i>	69
<i>Sistemas lineares</i>	70
<i>Sistemas invariantes no tempo</i>	70
ANÁLISE DE FOURIER	77
ESPECTRO DE UM SINAL	78
SÉRIE TRIGONOMÉTRICA	82
SÉRIE EXPONENCIAL	90
TEOREMA DE PARSEVAL	91
TRANSFORMADA DE FOURIER	92
<i>Propriedades da transformada de Fourier</i>	96
TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNÇÕES ESPECIAIS	99
EXEMPLOS DE APLICAÇÃO:	104
<i>Teorema da amostragem</i>	104
<i>Modulação</i>	106
TRANSFORMADAS DE LAPLACE	110
DEFINIÇÃO	111
PROPRIEDADES	111
TRANSFORMADAS DE ALGUMAS FUNÇÕES TÍPICAS	113
TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE	114

Nota Introdutória

O texto de apoio apresentado nos capítulos subsequentes consiste na compilação de notas de aulas dos anos anteriores e numa renovação da Sebenta de Matemática Aplicada produzida pelos Professores Teresa Rodrigues e Gabriel Pires. Este texto, além da reformulação do aspecto gráfico, apresenta ainda alguns desenvolvimentos de matérias que podem ser encontradas, em maior detalhe, na bibliografia indicada no fim da sebenta.

Pretende-se assim, dotar os alunos de uma ferramenta de estudo que permita um contacto inicial com o conteúdo programático da disciplina de Matemática Aplicada sem necessidade de recolha de elementos parcelares. É obvio que o recurso à bibliografia complementar é imperioso.

Dado ser esta a primeira versão é natural a ocorrência de gralhas e/ou imprecisões. Agradeço desde já que a sua detecção me seja comunicada.

Rogério Pais Dionísio

Setembro de 2001

As correcções detectadas ao longo destes anos, por alunos e colegas, foram entretanto corrigidas. Agradeço a colaboração de todos.

Rogério Pais Dionísio

Outubro de 2006

Análise Complexa

Definição de número complexo

Os números complexos surgiram inicialmente como forma de tornar solúveis equações algébricas tais como:

$$x^2 + 1 = 0$$

As duas soluções desta equação do 2º grau são:

$$x_1 = -\sqrt{-1}; x_2 = \sqrt{-1}$$

Em \Re a raiz quadrada de um número negativo não tem significado. No sentido de tornar resolúveis equações deste tipo, define-se um nova unidade imaginária:

$$j = \sqrt{-1}$$

Esta definição leva à introdução de um novo conjunto de números:

O conjunto dos números complexos, \mathbb{C} ¹

A partir daí, podemos afirmar que:

$$\mathbb{C} = \Re \cup \{\text{números imaginários puros}\}$$

Representação de números complexos

A forma geral de um número complexo é:

$$z = x + jy \quad x, y \in \Re$$

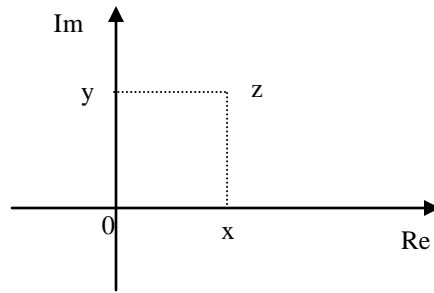
em que:

$$\begin{aligned} x &= \text{Re}(z) && \text{Parte real de } z \\ y &= \text{Im}(z) && \text{Parte imaginária de } z \end{aligned}$$

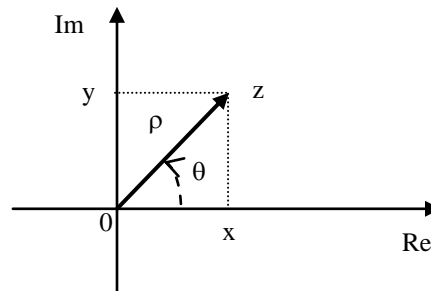
Os números complexos podem ser interpretados como pares ordenados de números reais, e é usual representá-los num plano onde é definido um sistema de eixos cartesianos.

A cada valor $z = x + jy$ corresponde um ponto do plano. Esse plano designa-se **Plano Complexo**.

¹ Nota histórica: Um dos criadores dos números complexos foi Bombelli, no Século XVI. Chamava aos números complexos “Quantidades Silvestres”.



Do gráfico anterior, depreende-se que um número complexo pode representar-se em coordenadas polares:



$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$\text{onde } \begin{cases} \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} & \text{-- Módulo de } z \\ \theta = \begin{cases} \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right), & x \geq 0 \\ \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0 \end{cases} & \text{-- Argumento de } z \end{cases}$$

Daqui resulta:

$$z = \rho \cos \theta + j\rho \sin \theta = \rho(\cos \theta + j \sin \theta) \quad [1]$$

Fórmula de Euler

Partindo do desenvolvimento de e^x em série infinita de potências (Série de Taylor):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

e supondo que é válido quando x é imaginário puro, fica:

$$\begin{aligned}
 x &= jt \\
 e^x &= e^{jt} = 1 + jt + \frac{(jt)^2}{2!} + \frac{(jt)^3}{3!} + \frac{(jt)^4}{4!} + \frac{(jt)^5}{5!} + \dots \\
 &= 1 + jt - \frac{t^2}{2!} - j\frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + j\frac{t^5}{5!} + \dots \\
 &= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + j\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots\right)
 \end{aligned}$$

Onde se verifica que:

Parte real – É o desenvolvimento em série de Taylor da função $\cos(t)$.

Parte imaginária – É o desenvolvimento em série de Taylor da função $\sin(t)$.

Daqui resulta:

$$e^{jt} = \cos t + j \sin t \quad [2]$$

Fórmula de Euler

De[1] e [2] resulta:

$$z = \rho e^{j\theta}$$

Esta é a representação exponencial de um número complexo. É muito útil nas operações de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação envolvendo números complexos.

Operações com números complexos

$$z_1 = x_1 + jy_1 = \rho_1 e^{j\theta_1} \quad \rho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}; \theta_1 = \arctan\left(\frac{y_1}{x_1}\right)$$

$$z_2 = x_2 + jy_2 = \rho_2 e^{j\theta_2} \quad \rho_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}; \theta_2 = \arctan\left(\frac{y_2}{x_2}\right)$$

a) Adição

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

b) Subtração

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

c) Multiplicação

$$z_1 \times z_2 = \rho_1 e^{j\theta_1} \times \rho_2 e^{j\theta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} e^{j\left(\arctan\left(\frac{y_1}{x_1}\right) + \arctan\left(\frac{y_2}{x_2}\right)\right)}$$

d) Divisão

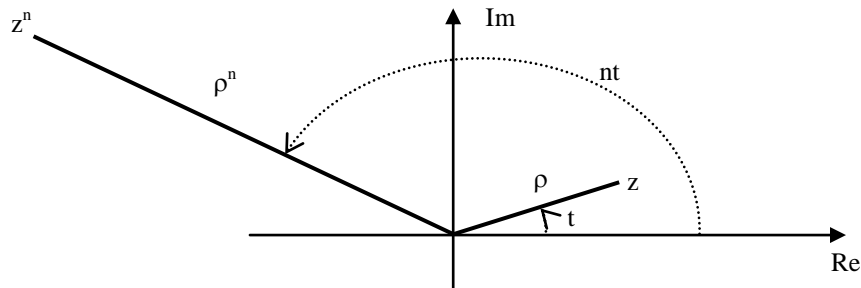
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{j\theta_1}}{\rho_2 e^{j\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} = \sqrt{\frac{x_1^2 + y_1^2}{x_2^2 + y_2^2}} e^{j\left(\arctan\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - \arctan\left(\frac{y_2}{x_2}\right)\right)}$$

e) Potenciação

Se $z = x + jy = \rho e^{jt} = \rho(\cos t + j \sin t)$,

Então

$$z^n = \rho^n e^{jnt} = \rho^n(\cos(nt) + j \sin(nt))$$



Caso Particular:

Se $z=j$, calcular j^n

$$\begin{aligned} j^0 &= 1 & j^4 &= j^2 j^2 = 1 \\ j^1 &= j & j^5 &= j^4 j = j \\ j^2 &= -1 & j^6 &= j^4 j^2 = -1 \\ j^3 &= -j & j^7 &= j^4 j^3 = -j \end{aligned}$$

existe um padrão de repetição múltiplo de 4.

$$\begin{array}{l} n \\ r \end{array} \begin{array}{l} \lfloor \\ 4 \\ \rfloor \\ q \end{array} \quad n = 4q + r$$

$$e \quad j^n = j^{(4q+r)} = j^{4q} j^r = (j^4)^q j^r = 1^q j^r = j^r$$

Conclui-se que $j^n = j^r$, onde r é o resto da divisão inteira de n por 4.

f) Radiciação

Seja $z = \rho e^{j\theta}$ e $z_1 = \rho_1 e^{j\theta_1}$

$$z = \sqrt[n]{z_1} \Rightarrow z^n = z_1$$

$$z^n = z_1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\rho^n e^{jn\theta} = \rho_1 e^{j\theta_1}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\rho^n (\cos(n\theta) + j \sin(n\theta)) = \rho_1 (\cos(\theta_1) + j \sin(\theta_1))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^n = \rho_1 \\ n\theta = \theta_1 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{\rho_1} \\ \theta = \frac{\theta_1 + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

Daqui se conclui que:

Raiz de ordem $n \Rightarrow \exists n$ soluções

Exemplo:

Calcular as raízes de $z = \sqrt[4]{-1}$ e representá-las no plano complexo

$$-1 = 1 \times e^{j\pi} \text{ (módulo} = 1 \text{ e ângulo} = \pi)$$

$$z = \sqrt[4]{e^{j\pi}} \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{1} \times e^{j \frac{\pi + 2k\pi}{4}}, k = 0, 1, 2, 3$$

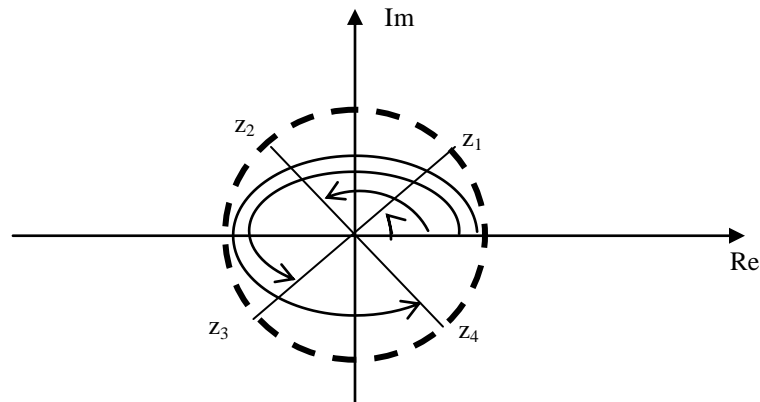
$$k = 0 \Rightarrow z_1 = e^{j \frac{\pi}{4}}$$

$$k = 1 \Rightarrow z_2 = e^{j(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})} = e^{j \frac{3\pi}{4}}$$

$$k = 2 \Rightarrow z_3 = e^{j(\frac{\pi}{4} + \pi)} = e^{j \frac{5\pi}{4}}$$

$$k = 3 \Rightarrow z_4 = e^{j(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2})} = e^{j \frac{7\pi}{4}}$$

As quatro soluções estão representadas no seguinte gráfico



Algumas propriedades da radiciação:

$$\sqrt[n]{z_1} \sqrt[n]{z_2} = \sqrt[n]{z_1 z_2}$$

$$\frac{\sqrt[n]{z_1}}{\sqrt[n]{z_2}} = \sqrt[n]{\frac{z_1}{z_2}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{z}} = \sqrt[np]{z}$$

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)^p = \sqrt[n]{z^p}$$

mas

$$\sqrt[n]{z} \neq \sqrt[np]{z^p} \text{ (porquê?)}$$

Algumas considerações sobre números complexos

- i) Os números complexos obedecem às leis fundamentais da álgebra dos n° reais.
- ii) Em C , não existe relação de ordem entre números: dizer que “ z_1 é maior que z_2 ” é uma afirmação desprovida de significado. As relações de ordem existem unicamente quando aplicadas ao módulos ou fase dos números complexos.

Conceito de número complexo conjugado

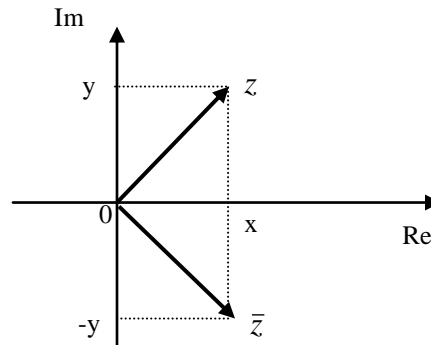
Sendo

$$z = x + jy = \rho e^{j\theta}$$

O seu conjugado é:

$$\bar{z} = x - jy = \rho e^{-j\theta}$$

Graficamente,



Relações envolvendo conjugados

$$a) \quad z + \bar{z} = (x + jy) + (x - jy) = 2x = 2\text{Re}(z)$$

$$b) \quad z - \bar{z} = (x + jy) - (x - jy) = 2jy = 2j\text{Im}(z)$$

$$c) \quad z \times \bar{z} = (x + jy) \times (x - jy) = x^2 + y^2 = |z|^2 = \rho^2$$

$$\text{ou } \rho e^{j\theta} \times \rho e^{-j\theta} = \rho^2 e^0 = \rho^2 = |z|^2$$

Daí resulta que

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \times \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - j \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$d) \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$$

$$e) \quad \overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \overline{z_1 \times z_2} &= \overline{\rho_1 e^{j\theta_1} \times \rho_2 e^{j\theta_2}} = \overline{\rho_1 \times \rho_2 \times e^{j(\theta_1 + \theta_2)}} = \rho_1 \times \rho_2 \times e^{-j(\theta_1 + \theta_2)} = \rho_1 e^{-j\theta_1} \times \rho_2 e^{-j\theta_2} = \\ &= \overline{\rho_1 e^{j\theta_1}} \times \overline{\rho_2 e^{j\theta_2}} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2 \end{aligned}$$

$$f) \quad \overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$$

$$g) \quad \overline{\bar{z}} = z$$

Relações envolvendo o módulo de números complexos:

a)

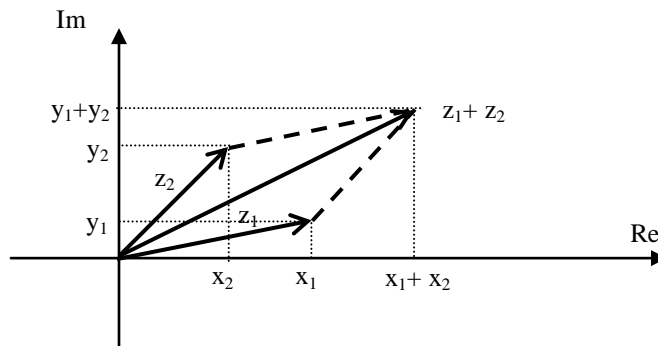
$$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$$

Sugestão: Prove esta relação utilizando a representação polar (exponencial) do número complexo.

b) Desigualdade do triângulo

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Pode ser demonstrado graficamente:



c)

$$|z_1 + z_2| \geq \left| |z_1| - |z_2| \right|$$

Demonstração:

Considerando inicialmente que $|z_1| > |z_2|$,

$$|z_1| = |(z_1 + z_2) + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2| = |z_1 + z_2| + |z_2|$$

\Leftrightarrow

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$$

Para $|z_1| < |z_2|$, chega-se à conclusão que:

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_1 + z_2|$$

Daqui se pode concluir que:

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 + z_2|$$

Conjuntos definidos por condições envolvendo números complexos

$$z = a + jb = \rho e^{j\theta}$$

$$z_1 = a_1 + jb_1 = \rho_1 e^{j\theta_1}$$

$$z_2 = a_2 + jb_2 = \rho_2 e^{j\theta_2}$$

i.

$$|z_1 - z_2| = |a_1 - a_2 + j(b_1 - b_2)| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$

\Leftrightarrow

Distância entre o ponto $P_1(a_1, b_1)$ e o ponto $P_2(a_2, b_2)$

ii.

$$|z - z_1| = r \quad r = \text{constante}$$

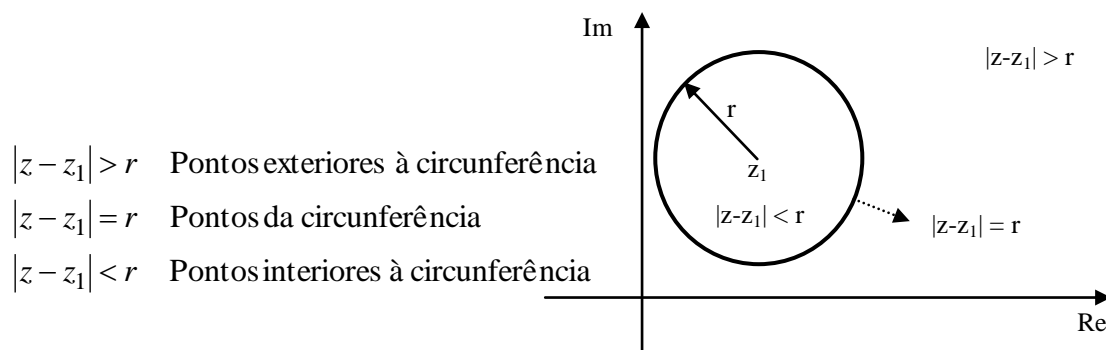
\Leftrightarrow

$$\sqrt{(a - a_1)^2 + (b - b_1)^2} = r$$

\Leftrightarrow

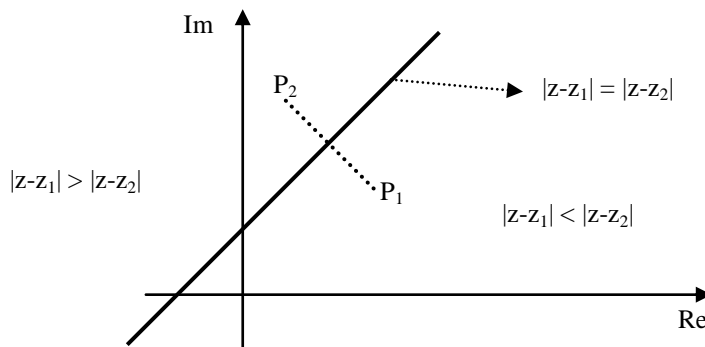
$$(a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 = r^2$$

Equação de 1 circunferência com centro em (a_1, b_1) e raio r



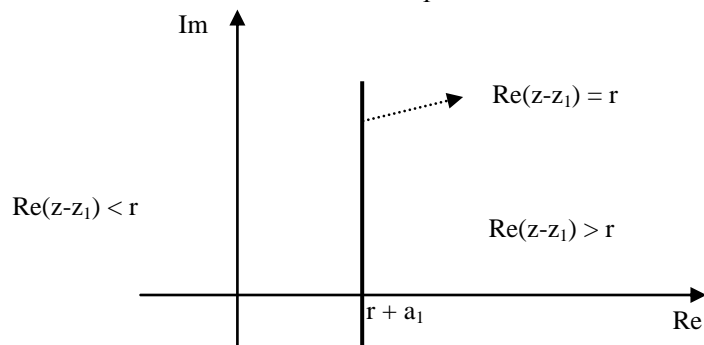
$$\begin{aligned}
 |z - z_1| &= |z - z_2| \\
 \Leftrightarrow \\
 (a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 &= (a - a_2)^2 + (b - b_2)^2 \\
 \Leftrightarrow \\
 2(a_2 - a_1)a + 2(b_2 - b_1)b &= a_2^2 - a_1^2 + b_2^2 - b_1^2 \\
 \Leftrightarrow \\
 b &= \frac{(a_1 - a_2)}{(b_2 - b_1)}a + \frac{a_2^2 - a_1^2 + b_2^2 - b_1^2}{2(b_2 - b_1)}
 \end{aligned}$$

É uma equação de recta do tipo $y = mx + b$, e é a mediatriz do segmento de recta $\overline{P_1P_2}$.



iii.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(z - z_1) &= r \\
 \Leftrightarrow \\
 a - a_1 &= r \\
 \Leftrightarrow \\
 a &= r + a_1
 \end{aligned}$$



Recta vertical que passa no ponto $(r + a_1, 0)$

iv.

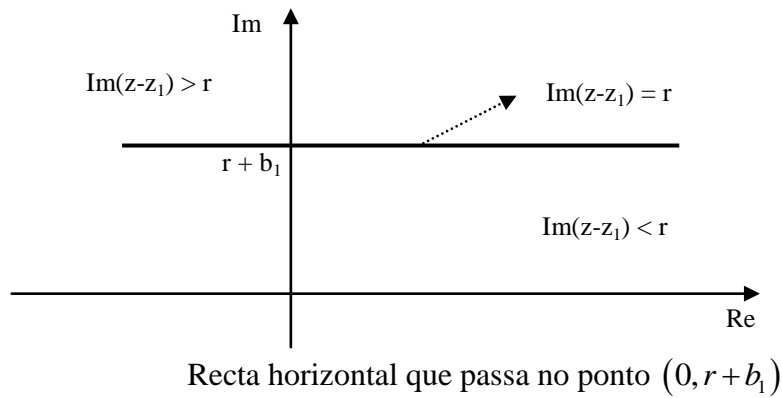
$$\operatorname{Im}(z - z_1) = r$$

$$\Leftrightarrow$$

$$b - b_1 = r$$

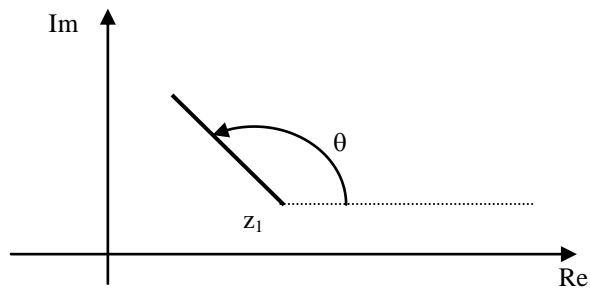
$$\Leftrightarrow$$

$$b = r + b_1$$



v.

$$\operatorname{Arg}(z - z_1) = \theta, \theta \text{ constante}$$

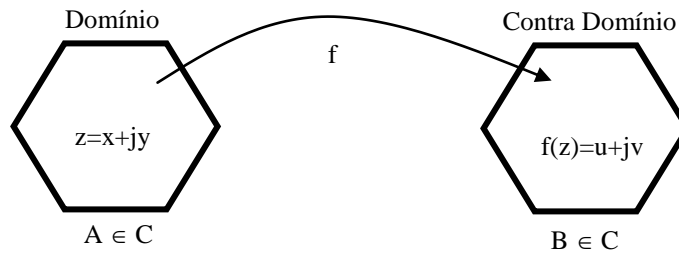


Semi-recta com origem em z_1 e que forma um ângulo θ com o semieixo positivo real.

Funções de variável complexa

Definição

Consideremos dois conjuntos de números complexos:



Função de variável complexa define-se como sendo toda e qualquer aplicação que faça corresponder a um ponto $z \in A$, um e um só ponto $f(z)$, de B:

\Rightarrow **A função é unívoca**

No entanto, existem situações em que uma função pode assumir mais do que um valor, para um determinado ponto do seu domínio.

Exemplo:

$$f(z) = z^{1/2}$$

$$z^{1/2} = \sqrt{z} \quad n = 2 \Rightarrow 2 \text{ soluções}$$

Toma dois valores distintos para todo o $z \neq 0$

\Rightarrow Podemos redefinir a função, de forma a criar uma situação de unicidade

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) = \sqrt{|z|} e^{j\frac{\theta}{2}} \\ f_2(z) = \sqrt{|z|} e^{j\frac{\theta+2\pi}{2}} \end{cases}$$

$f_1(z)$ e $f_2(z)$ são unívocas.

À partir deste momento, sempre que for mencionada uma função, parte-se do princípio de que ela é unívoca.

Representação cartesiana

Dado $z = x + jy$, seja $f(z) = u + jv$

A cada par ordenado (x,y) de n.ºs reais, é possível associar um outro par ordenado de números reais (u,v) , tal que:

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

Definir uma
função complexa

\Leftrightarrow

Definir um sistema de 2 funções reais
dependentes das variáveis reais x, y

Exemplo:

$$f(z) = z^2 \quad \text{com } z = x + jy$$

$$f(z) = z^2 = (x + jy)^2 = x^2 - y^2 + 2jxy = u(x, y) + jv(x, y)$$

onde

$$\begin{cases} u(x, y) = x^2 - y^2 \\ v(x, y) = 2xy \end{cases}$$

Representação polar

È uma forma alternativa de representar uma função complexa.

$$\text{Se } z = x + jy$$

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y) = u + jv$$

$$= \rho(x, y)e^{j\theta(x, y)} = \rho e^{j\theta}$$

onde

$$\begin{cases} \rho(x, y) = \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)} \\ \theta(x, y) = \arctan\left(\frac{v(x, y)}{u(x, y)}\right) \end{cases}$$

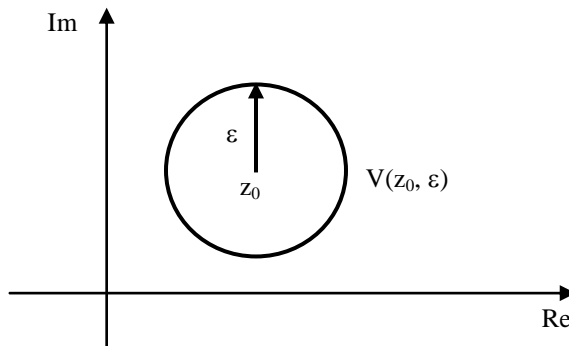
Exemplo:

$$f(z) = z^2 = (x + jy)^2 = (x^2 - y^2) + j(2xy) = \dots = (x^2 - y^2) e^{j \arctan\left(\frac{2xy}{x^2 - y^2}\right)}$$

Limite de uma função de variável complexa

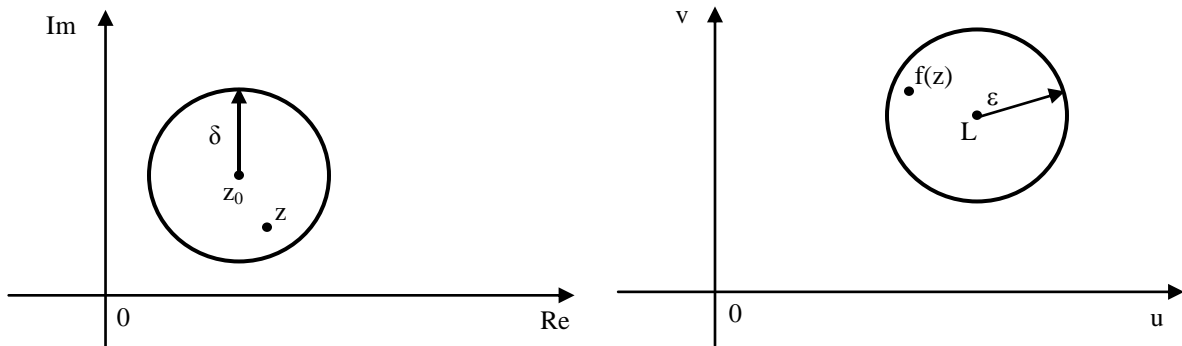
Conceito de vizinhança

Vizinhança de raio ε e centrada em z_0 define-se como sendo o conjunto de todos os pontos do plano complexo situados a uma distância de z_0 inferior a ε .



$$V(z_0, \varepsilon) \equiv \{z : |z - z_0| < \varepsilon, \varepsilon > 0\}$$

Este conceito leva-nos à definição de limite de uma função:



Qualquer que seja o valor de $\varepsilon > 0$, existe sempre um valor δ , tal que todos os pontos contidos na vizinhança de z_0 e raio δ tenham imagem contida na vizinhança de centro L e raio ε .

Analiticamente,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon$$

Esta afirmação significa que o valor de $f(z)$ pode ser feito tão próximo de L quanto se queira, mediante a escolha de um valor de z suficientemente próximo de z_0 , mas diferente de z_0 .

Propriedades

a) Se existe limite de uma função, este é único.

$$b) \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \pm \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$$

$$c) \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \times g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \times \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$$

$$d) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)} \quad \text{desde que } \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0$$

Exemplo

$$\text{Calcular } \lim_{z \rightarrow j} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - j}$$

$$\text{Substituindo } z \text{ por } j, \text{ fica } \frac{3 + 2j - 8 - 2j + 5}{0} = \frac{0}{0}$$

É uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0} \Rightarrow$ É necessário verificar se o numerador como o denominador podem ser divididos por $z - j$, utilizando a **Regra de Ruffini**.

$$\begin{array}{r} 3 \quad -2 \quad 8 \quad -2 \quad 5 \\ \quad 3j \quad -2j+3 \quad 2+5j \quad -5 \\ \hline 3 \quad -2+3j \quad -2j+5 \quad 5j \quad [0 \end{array}$$

$$3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5 = (z - j)(3z^3 + (-2 + 3j)z^2 + (-2j + 5)z + 5j)$$

$$\lim_{z \rightarrow j} (3z^3 + (-2 + 3j)z^2 + (-2j + 5)z + 5j) = -3j + (-2 + 3j)(-1) + (-2j + 5)j + 5j =$$

$$= 4 + 4j$$

Se a função $f(x, y)$ pode ser escrita na forma

$$f(x, y) = u(x, y) + jv(x, y)$$

com $z_0 = x_0 + jy_0$ e $f_0 = u_0 + jv_0$,

então

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = u_0 + jv_0 \quad \text{sse} \quad \begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0 \end{cases}$$

Continuidade de uma função de variável complexa

Seja $f(z)$ definida num domínio D_f .

$$\text{Se } \exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \wedge \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

\Rightarrow

$f(z)$ é contínua em z_0

ou de outra forma:

A função $f(z)$ diz-se contínua num ponto $z_0 \in D_f$ sse

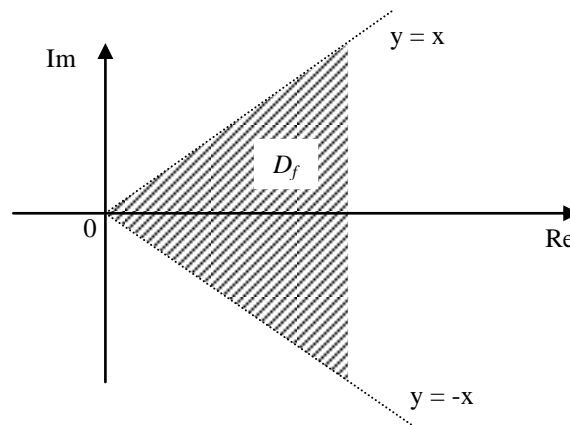
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Exemplo:

Seja

$$s(z) = z^2 + \frac{z^2}{1+z^2} + \frac{z^2}{(1+z^2)^2} + \frac{z^2}{(1+z^2)^3} + \dots$$

Cujo domínio é:



$$D_f \equiv \{z : \text{Re}(z) \geq \text{Im}(z)\}$$

A série é uma progressão geométrica, com razão

$$\frac{1}{1+z^2}$$

Revisões

Seja $1+a+a^2+a^3+\dots$ uma série geométrica com razão $r=a$. A série converge se $|a|<1$, e a soma da série é

$$s_n = \frac{u_1}{1-r} = \frac{1}{1-a}$$

Neste exemplo,

$$|r| = \left| \frac{1}{1+z^2} \right| = \frac{1}{|1+z^2|} < 1$$

Esta relação é de facto verdade, se atender ao domínio da função, e pode ser facilmente demonstrado se z for substituído por $x+jy$.

Nestas condições, a série converge, e a soma é:

$$s(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{\left(1 - \frac{1}{1+z^2}\right)} = 1+z^2, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

Ao investigar a continuidade de $s(z)$ em $z=0$, verifica-se que:

$$\begin{cases} \lim_{z \rightarrow 0} s(z) = \lim_{z \rightarrow 0} (1+z^2) = 1+0 = 1 \\ s(0) = 0 \end{cases}$$

A função $s(z)$, embora sendo definida e limitada em $z=0$, não é contínua nesse ponto, porque

$$\lim_{z \rightarrow 0} s(z) \neq 0$$

Se a função de variável complexa puder ser apresentada na forma cartesiana,

$$f(x, y) = u(x, y) + jv(x, y)$$

então

A função $f(x, y)$ é contínua
 \Leftrightarrow
 \exists um conjunto de 2 funções reais
contínuas nas variáveis x, y

Nota 1: As funções polinomiais são contínuas em todo o plano complexo.

Nota 2: As funções racionais são contínuas em todos os pontos do seu domínio.

Propriedades das funções contínuas

Se f e g são contínuas no ponto z_0 , as funções seguintes também o são:

- $f+g$
- $f-g$
- $f \cdot g$
- $k \cdot f$, $k = \text{constante}$
- f/g , com $g(z) \neq 0$
- Se f é contínua em z_0 e g é contínua em $f(z_0)$, a função composta $g \circ f$ também o é.

Diferenciação de uma função complexa

A classe de funções complexas com maior interesse prático é aquela na qual é possível aplicar o processo de diferenciação.

Definição:

Uma função de variável complexa, $f(z)$, definida num domínio D_f , diz-se diferenciável num ponto $z_0 \in D_f$, sse existir e for único o limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Se o valor desse limite for único, chama-se derivada de $f(z)$ em z_0 .

Nota1: O limite anterior pressupõe que $z \rightarrow z_0$ através duma sucessão de pontos $\in D_f$.

Nota 2: Se o limite anterior existe \Rightarrow É único.

Nota 3: Diferenciabilidade \Rightarrow Continuidade
 Continuidade \nRightarrow Diferenciabilidade

Exemplo:

Seja $f(z) = |z|^2$. Verifique se é limitada, utilizando a definição de limite.

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z \cdot \bar{z} - z_0 \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z \cdot \bar{z} - z_0 \bar{z} + z_0 \bar{z} - z_0 \bar{z}_0}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z}(z - z_0) + z_0(\bar{z} - \bar{z}_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \bar{z} + z_0 \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} \end{aligned}$$

Se $z - z_0 = \rho e^{j\theta}$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z - z_0} = \bar{z}_0 + z_0 e^{-2j\theta}$$

Daqui se conclui que a função tem limite. No entanto, esse limite não é único (depende de θ) e depende da forma como z tende para z_0 .

\Rightarrow A função $f(z)$ não é diferenciável em nenhum ponto do seu domínio, com exceção da origem, onde

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z - z_0} = 0, \quad \forall \text{ percurso pelo qual } z \rightarrow z_0$$

Regras de diferenciação

Se $f(z)$, $g(z)$ e $h(z)$ são diferenciáveis:

- $f(z) = k \Rightarrow f'(z) = 0, \quad k = c^{te}$
- $f(z) = z \Rightarrow f'(z) = 1$
- $f(z) = g(z) \pm h(z) \Rightarrow f'(z) = g'(z) \pm h'(z)$
- $f(z) = g(z) \times h(z) \Rightarrow f'(z) = g(z)h'(z) + g'(z)h(z)$
- $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \Rightarrow f'(z) = \frac{g'(z)h(z) - g(z)h'(z)}{h^2(z)}, h(z) \neq 0$
- $f(z) = g[h(z)] \Rightarrow f'(z) = g'(h)h'(z)$

Exemplo: Calcular a derivada de $f(z)$.

$$f(z) = (2z^2 + j)^5$$

Façamos $f(z) = [u(z)]^5$, em que $u(z) = 2z^2 + j$.

$$f'(z) = 5u(z)^4 u'(z) = 5(2z^2 + j)^4 \cdot 4z = 20z(2z^2 + j)^4$$

Funções analíticas

Se uma função é unívoca e diferenciável
 \Rightarrow
 É uma função analítica (holomorfa ou regular)

Se existe um ponto z_0 do domínio onde que $f(z)$ não é analítica, chama-se a z_0 uma singularidade de $f(z)$.

Se $f(z)$ é analítica em todo o plano complexo, designa-se função inteira.

Condições de analiticidade

Analiticidade \Rightarrow $\begin{cases} \text{Univocidade (fácil de provar)} \\ \text{Diferenciabilidade (nem sempre fácil de provar!)} \end{cases}$

Como a diferenciabilidade nem sempre é fácil de provar, vamos procurar um conjunto de condições que permitam, de forma sistemática, a verificação da diferenciabilidade de uma função complexa.

Seja $f(x, y) = u(x, y) + jv(x, y)$ uma função unívoca no domínio Df .

Para que a função seja diferenciável,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \quad \Delta z = z - z_0$$

O limite anterior deve ser único, qualquer que seja a forma como $z \rightarrow z_0$, $z_0 \in Df$.

Substituindo $\Delta z = z - z_0 = \Delta x + j\Delta y$ na equação, o limite fica

$$\lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) + j(v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0))}{\Delta x + j\Delta y}$$

i) Considerar o caso particular em que $\Delta z = \Delta x + j0$. O limite fica:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + j \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

ii) Considerar o caso particular em que $\Delta z = 0 + j\Delta y$. O limite fica:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{j\Delta y} + j \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{j\Delta y} \\ &= \frac{1}{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{j}{j} \frac{\partial v}{\partial y} = -j \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

como a derivada de $f(z)$ num qualquer ponto $z_0 \in Df$ deve ser único, conclui-se que os limites devem ser iguais:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} \text{CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA UMA FUNÇÃO SER ANALÍTICA,} \\ \text{OU} \\ \text{CONDIÇÕES DE CAUCHY RIENMANN} \end{array}$$

Além disso, se as derivadas parciais

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$$

forem contínuas em Df , estamos perante **CONDIÇÕES NECESSÁRIAS E SUFICIENTES PARA UMA FUNÇÃO SER ANALÍTICA.**

Nestas condições, $f'(z)$ pode ser calculada das seguintes formas:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} & f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} - j \frac{\partial u}{\partial y} \\ f'(z) &= \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y} & f'(z) &= \frac{\partial v}{\partial y} + j \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

Exemplo:

$$f(z) = z^2 = (x + jy)^2 = (x^2 - y^2) + j(2xy)$$

Temos assim:

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right.$$

Além disso, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$ são funções contínuas $\Rightarrow f(z)$ é analítica, e a sua derivada é

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial v}{\partial y} + j \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= 2x + j(2y) \\ &= 2z \end{aligned}$$

Nota: Desde que as funções Complexas sejam analíticas, as regras de derivação dos n.º reais podem ser utilizadas.

Além deste, existe outro processo para a verificação da analiticidade de uma função complexa:

Teorema:

“Se uma função $f(z)$ for analítica, a sua derivada em ordem a \bar{z} é sempre zero.”

$$\frac{df(z)}{d\bar{z}} = 0, \text{ se } f(z) \text{ é analítica}$$

Demonstração:

Seja $f(z) = u + jv$

Partindo das equações de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Pode-se escrever,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{j}{2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{j}{2} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

\Leftrightarrow

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{j}{2} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{j}{2} \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

\Leftrightarrow

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{j}{2} \frac{\partial u}{\partial y} + j \left[\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2j} \frac{\partial v}{\partial y} \right] = 0 \quad [3]$$

Tendo em conta que

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \quad [4]$$

$$y = \frac{1}{2j}(z - \bar{z}) \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2j} = \frac{j}{2} \quad [5]$$

substituindo [4] e [5] em [3], fica

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \frac{\partial u}{\partial y} + j \left[\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \frac{\partial v}{\partial y} \right] = 0$$

\Leftrightarrow

$$\frac{d[u]}{d\bar{z}} + j \frac{d[v]}{d\bar{z}} = 0$$

\Leftrightarrow

$$\frac{d[u + jv]}{d\bar{z}} = 0$$

\Leftrightarrow

$$\frac{df(z)}{d\bar{z}} = 0$$

A derivada de $f(z)$ em ordem a \bar{z} é sempre zero, se $f(z)$ for analítica:

$\Rightarrow f(z)$ é independente de \bar{z} quando é analítica.

\Rightarrow A presença de \bar{z} no argumento da função é sinónimo de não analiticidade

Exemplo:

Funções que não são analíticas:

$$f(z) = |z|^2 = z \cdot \bar{z} \Rightarrow \frac{df(z)}{d\bar{z}} = z \neq 0$$

$$f(z) = \text{Re}(z) = x = \frac{z + \bar{z}}{2} \Rightarrow \frac{df(z)}{d\bar{z}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

$$f(z) = \bar{z} = x - jy \Rightarrow \frac{df(z)}{d\bar{z}} = 1 \neq 0$$

Por outro lado, como $f(z) = u + jv$, utilizando as condições de Cauchy Riemann.,

$$\Rightarrow \begin{cases} u = x \\ v = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \neq -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

A 1ª condição de Cauchy-Riemann não se verifica, pelo que a função $f(z) = \bar{z}$ não é analítica, como já tinha sido verificado.

$$f(z) = \sin(x + j3y)$$

Vamos inspeccionar a presença do termo \bar{z} no argumento da função. Tendo em conta que

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2j}$$

pode-se rescrever

$$\sin(x + j3y) = \sin\left(\frac{z + \bar{z}}{2} + j3\frac{z - \bar{z}}{2j}\right) = \sin\left(\frac{z + \bar{z} + 3z - 3\bar{z}}{2}\right) = \sin(2z + \bar{z})$$

A função $\sin(x + j3y)$ não é analítica.

Funções harmónicas

Se $f(x, y) = u(x, y) + jv(x, y)$, e supondo que $f(x, y)$ é analítica no domínio D_f , então as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são harmónicas se

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

Diz-se que v é a função harmónica conjugada de u . Não se deve confundir conjugada de uma função com função conjugada!

Construção de uma função analítica à partir da parte real ou imaginária

Exemplo:

Sabendo que $f(z)$ é analítica e que $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$ e $f(0) = 1$, calcule $f(z)$.

$f(z) = u(x, y) + jv(x, y)e$, utilizando as equações de Cauchy - Riemann,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x(x \cos y - y \sin y) + e^x \cos y \Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = e^x(x \cos y - y \sin y + \cos y)$$

$$\Rightarrow v(x, y) = e^x(x \sin y + y \cos y) + C(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \Leftrightarrow e^x(x \sin y + y \cos y) + e^x \sin y + C'(x) = -\left(e^x(-x \sin y - (y \cos y + \sin y))\right)$$

\Leftrightarrow

$$C'(x) = 0 \Rightarrow C(x) = k, \quad k = \text{constante}$$

Então

$$v(x, y) = e^x(x \sin y + y \cos y) + k$$

$$f(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y) + je^x(x \sin y + y \cos y) + k$$

$$\text{Se } f(0) = 1 \Leftrightarrow f(0,0) = 1 \Leftrightarrow k = 1$$

$$f(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y) + je^x(x \sin y + y \cos y) + 1$$

Funções elementares de variável complexa

Neste capítulo serão estudadas algumas funções muito utilizadas da análise complexa, e, devido à sua importância, em problemas de engenharia.

Função exponencial complexa e^z

Serve de base para a definição de muitas outras funções de variável complexa.

Definição:

Seja $z = x + jy$,

$$e^z = e^{(x+jy)} = e^x e^{jy} = e^x(\cos y + j \sin y)$$

$$\text{Se } x = 0 \Rightarrow e^z = e^{jy} = \cos y + j \sin y \quad (\text{Fórmula de Euler})$$

Propriedades

$$i) \quad f(x, y) = u(x, y) + jv(x, y) \text{ e } e^z = f(x, y), \text{ então}$$

$$u(x, y) = e^x \cos y$$

$$v(x, y) = e^x \sin y$$

Analisando as derivadas parciais da função, vemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Além disso, todas as derivadas parciais são contínuas.

Será que as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são harmônicas? Verifique.

Como a função e^z também é unívoca, pode-se concluir que é uma função analítica. Sendo o domínio de analiticidade todo o conjunto de pontos pertencentes ao plano complexo, diz-se que $f(z) = e^z$ é uma função inteira, e

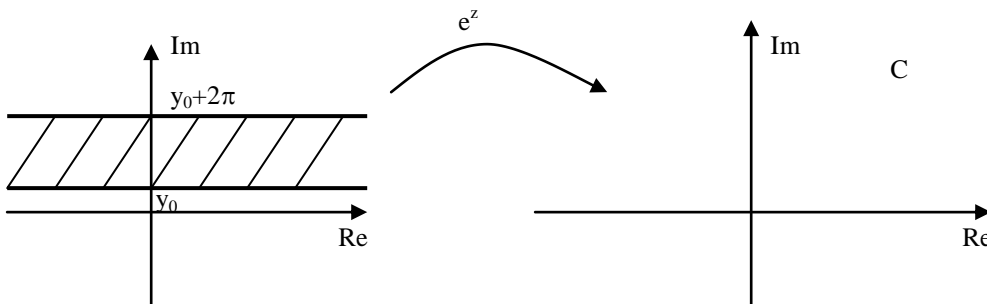
$$\frac{df(z)}{dz} = f'(z) = (e^z)' = e^z$$

Nesta situação é possível utilizar as regras de derivação para números reais.

ii) e^z é uma função periódica, com período 2π .

$$e^z = e^{z+j2\pi} = e^{z+j2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

um incremento de $j2\pi$ em z produz em y um incremento de 2π , isso significa que os valores de $\cos y$ e $\sin y$ mantêm-se inalterados.



Todos os valores que e^z pode tomar são imagens de pontos contidos numa faixa horizontal de comprimento infinito e altura 2π .

iii) Módulo e argumento de e^z

$$\begin{aligned} |e^z| &= |e^{x+jy}| = |e^x(\cos y + j \sin y)| = |e^x \cos y + j e^x \sin y| = \sqrt{(e^x \cos y)^2 + (e^x \sin y)^2} = \\ &= \sqrt{(e^x)^2 (\cos^2 y + \sin^2 y)} = \sqrt{(e^x)^2} = e^x \end{aligned}$$

$$\arg(e^z) = \arctan\left(\frac{e^x \sin y}{e^x \cos y}\right) = \arctan\left(\frac{\sin y}{\cos y}\right) = \arctan(\tan y) = y$$

Funções trigonométricas (sin x e cos x) e hiperbólicas (sinh(x) e cosh(x))

Partindo da Fórmula de Euler,

$$\begin{aligned} e^{jt} &= \cos(t) + j \sin t \\ + e^{-jt} &= \cos(-t) + j \sin(-t) = \cos(t) - j \sin(t) \\ \hline e^{jt} + e^{-jt} &= \cos t + j \sin t + \cos t - j \sin t \\ &= 2 \cos t \end{aligned}$$

Daqui se conclui que,

$$\boxed{\cos t = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}}$$

Por outro lado, subtraindo as duas equações fica,

$$\begin{aligned} e^{jt} &= \cos(t) + j \sin t \\ - e^{-jt} &= \cos(-t) + j \sin(-t) = \cos(t) - j \sin(t) \\ \hline e^{jt} - e^{-jt} &= \cos t + j \sin t - \cos t + j \sin t \\ &= 2j \sin t \end{aligned}$$

Daqui se conclui que,

$$\boxed{\sin t = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}}$$

À partir das definições complexas de $\cos x$ e $\sin x$, são definidas mais duas funções:

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

Das definições de co-seno, co-seno hiperbólico, seno e seno hiperbólico, deduzem-se estas relações:

- i) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
- ii) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$
- iii) $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$
- iv) $\cos(x + jy) = \cos x \cos jy - \sin x \sin jy$

$$\text{mas } \cos jy = \frac{e^{j(jy)} + e^{-j(jy)}}{2} = \frac{e^{-y} + e^y}{2} = \cosh y$$

$$\text{e } \sin jy = \frac{e^{j(jy)} - e^{-j(jy)}}{2j} = \frac{e^{-y} - e^y}{2j} = -\frac{1}{j} \frac{e^y - e^{-y}}{2} = j \sinh y$$

e fica

$$\cos(x + jy) = \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y$$

$$\sin(x + jy) = \sin x \cosh y + j \cos x \sinh y$$

Também são possíveis estas equações:

$$\cosh(z) = \cosh(x + jy) = \cosh x \cos y + j \sinh x \sin y$$

$$\sinh(z) = \sinh(x + jy) = \sinh x \cos y + j \cosh x \sin y$$

Função logarítmica $\ln(x)$

Definição

$$w = \ln z \quad \text{sse} \quad e^w = z$$

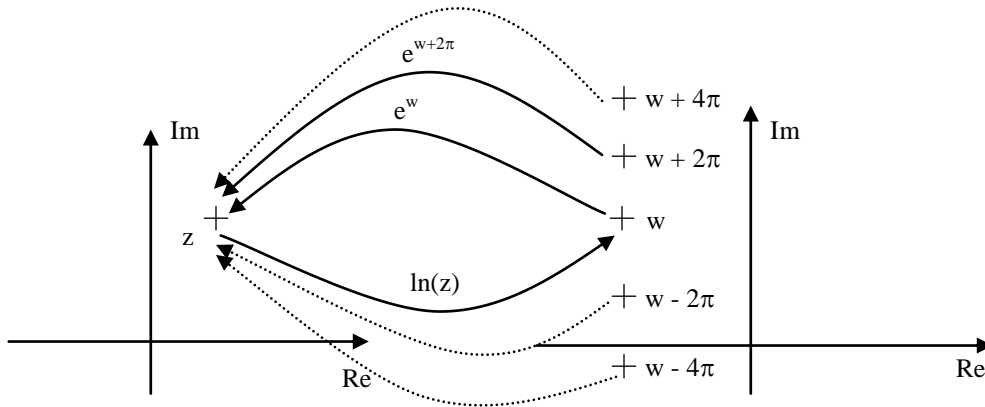
$$\text{Se } z = \rho e^{j\theta} \quad \text{e} \quad w = u + jv,$$

$$\ln z = \ln(\rho e^{j\theta}) = \ln \rho + \ln e^{j\theta} = \underbrace{\ln \rho}_u + \underbrace{j\theta}_v = w$$

$$\text{Se } z = x + jy,$$

$$\begin{aligned}\ln z &= \ln \rho + j\theta = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + j \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)}_u + j \underbrace{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}_v = w\end{aligned}$$

A função logarítmica, tal como a definimos, não é uma função unívoca.



Como a função exponencial é periódica,

$$z = \rho e^{j\theta} = \rho e^{j(\theta+2k\pi)} \Rightarrow \ln z = \ln \rho + j(\theta + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

e $\theta \in [-\pi, \pi]$, porque a função logarítmica é descontínua no semieixo real positivo.

Escolhendo um determinado valor k , é designado um ramo da função logarítmica. Para cada ramo, a função logarítmica é unívoca.

Se $k = 0 \Rightarrow$ Define o ramo principal e $\text{Ln}(z)$ é o valor principal.

A relação entre o valor principal e outros valores é:

$$\ln z = \text{Ln}(z) + j2 + j2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Domínio

$$D_f = \mathbb{C} \setminus \{R_0^-\}$$

Derivada

$$\frac{d(\ln z)}{dz} = (\ln z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \right)}{\partial x} + j \frac{\partial \left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right)}{\partial x} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + y^2} + j \frac{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x} \right)}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + j \frac{x^2 (-yx^{-2})}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + j \frac{-y}{x^2 + y^2} = \\
&= \frac{x - jy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{1}{z}
\end{aligned}$$

Então $(\ln z)' = \frac{1}{z}$. Esta derivada só é válida para os pontos pertencentes ao domínio da função.

Potenciação, z^C

Definição

De C for um número, complexo ou não, e z for um número complexo, define-se a potência de z de expoente C como

$$z^C = e^{C \ln z}$$

Como a função $\ln z$ é plurívoca $\Rightarrow z^C$ é também uma função plurívoca

Valor principal:

$$z^C = e^{C \operatorname{Ln}(z)}$$

Outros valores:

$$z^C = e^{C(\ln \rho + j(\theta + 2k\pi))} = e^{C(\operatorname{Ln}(z) + j2k\pi)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{onde } \begin{cases} \rho = |z| \\ \theta = \arctan(z) \end{cases}$$

Exemplo:

$$j^j = e^{\ln(j^j)} = e^{j \ln j} = e^{j \ln \left(e^{j \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)} \right)} = e^{j^2 \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{Valor principal (k=0): } e^{-\left(\frac{\pi}{2}+0\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

Integração complexa

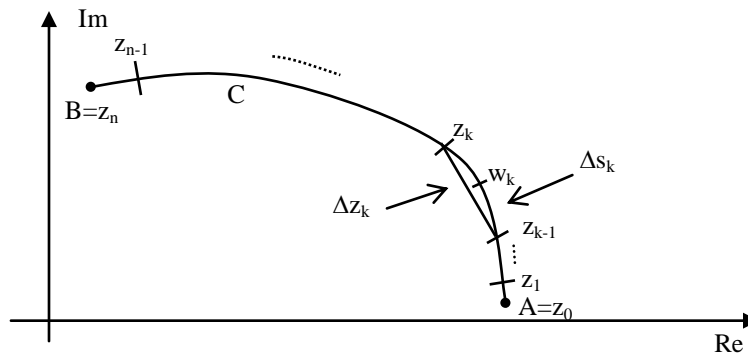
Definição de integral de linha

Seja $f(z)$ uma função complexa contínua, analítica ou não.

$$f(z) = u(z) + jv(z)$$

$$f(x, y) = u(x, y) + jv(x, y)$$

Seja C uma curva que une os pontos A e B.



Subdividindo a curva C em arcos mais pequenos, pelos pontos z_k , ($k = 1, 2, \dots, n-1$), são definidos segmentos de recta, designados por *cordas*, cujo nome é Δz_k .

$$\Delta z_k = |z_k - z_{k-1}|$$

A cada corda está associado um arco, que será designado por Δs_k .

Em cada arco Δs_k , escolhendo um ponto, w_k ,

$$w_k = x_k + jy_k$$

pode-se definir o seguinte somatório:

$$f(w_1)\Delta z_1 + f(w_2)\Delta z_2 + \dots + f(w_n)\Delta z_n = \sum_{k=1}^n f(w_k)\Delta z_k$$

À medida que $n \rightarrow \infty$, existem mais parcelas e $\Delta z_k \rightarrow 0$.

No limite, o somatório será:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(w_k) \Delta z_k = \int_C f(z) dz$$

O limite do somatório, quando n tende para infinito, se existir, é igual ao integral da função $f(z)$ ao longo da linha C .

No caso especial dos pontos A e B coincidirem, o caminho de integração forma uma linha fechada, e o integral é usualmente escrito desta forma:

$$\oint_C f(z) dz$$

Representação

Sendo $f(x, y) = u(x, y) + jv(x, y)$ e $z = x + jy$,

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u + jv)(dx + jdy) = \int_C (udx + judy + jvdx - vdy) = \int_C (udx - vdy) + j \int_C (udy + vdx)$$

Quando é possível representar o caminho de integração por uma equação paramétrica, em que

$$z(t) = x(t) + jy(t), \quad t \in R$$

A integração pode ser realizada directamente através da variável t .

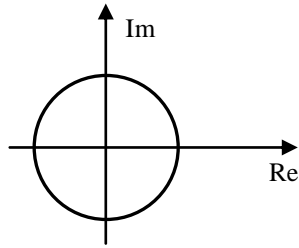
$$\text{Quando } z = z(t) \Rightarrow \frac{dz}{dt} = z'(t) \Leftrightarrow dz = z'(t) dt$$

$$\int_C f(z) dz = \int_B^A f(z) dz = \int_{A'}^{B'} f[z(t)] z'(t) dt$$

Em que A' e B' correspondem ao valor que t toma quando $z=A$ e $z=B$, respectivamente.

Exemplo: Calcular o seguinte integral: $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz$

O caminho de integração é dado pela equação: $|z|=1$
 É uma circunferência de raio unitário, centrada na origem.



$$z = \rho e^{j\theta}$$

Quando $|z|=1 \Rightarrow \rho=1 \wedge \theta \in [0, 2\pi]$

$$\frac{dz}{d\theta} = j\rho e^{j\theta} \Leftrightarrow dz = j\rho e^{j\theta} d\theta$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{j\theta}} j e^{j\theta} d\theta = j \int_0^{2\pi} d\theta = j2\pi$$

Propriedades

i) Já vimos que :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Esta relação pode ser generalizada para n valores :

$$|z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + \dots + |z_n|$$

\Leftrightarrow

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$$

Como z_k é um número complexo, e $f(w_k)\Delta z_k$ é também um número complexo, teremos no limite :

$$\begin{aligned} \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(w_k) \Delta z_k \right| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |f(w_k) \Delta z_k| \\ &\Leftrightarrow \\ \left| \int_C f(z) dz \right| &\leq \int_C |f(z) dz| \\ &\Leftrightarrow \\ \left| \int_C f(z) dz \right| &\leq \int_C |f(z)| |dz| \end{aligned}$$

- ii) Por vezes, é necessário determinar qual o valor máximo que o módulo do integral pode assumir.
Partindo da relação anterior, o integral da direita também pode ser escrito como:

$$\int_C \left(\sqrt{u^2 + v^2} \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

se $f(z) = 1 \Rightarrow |f(z)| = 1$ e

$$\int_C \sqrt{x^2 + y^2} = \int_C |dz| = L$$

L – Comprimento da curva C .

Como foi suposto que $f(z)$ é uma função contínua no caminho de integração, incluindo os pontos A e B, e se $f(z)$ é uma função dependente de $z \Rightarrow$ Existe um majorante do módulo de $f(z)$, M , tal que :

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall z \in C$$

então

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C M |dz| = M \int_C |dz| = ML$$

M – Majorante do módulo da função

L – Comprimento do caminho de integração

$$\text{iii)} \quad \int_A^B f(z)dz = -\int_B^A f(z)dz$$

$$\text{iv)} \quad \int_A^B kf(z)dz = k \int_A^B f(z)dz$$

$$\text{v)} \quad \int_A^B [f(z) \pm g(z)]dz = \int_A^B f(z)dz \pm \int_A^B g(z)dz$$

vi) Se D for um ponto pertencente ao caminho $[A, B]$, então

$$\int_A^B f(z)dz = \int_A^D f(z)dz + \int_D^B f(z)dz$$

Exemplo: Calcular $\int_{|z|=1} \bar{z}dz$.

$|z|=1$ representa uma circunferência de raio unitário ($\rho=1$) centrada na origem.

$$\text{Como } z = \rho e^{j\theta} = e^{j\theta} \Rightarrow \bar{z} = e^{-j\theta} \text{ e } \frac{dz}{d\theta} = je^{j\theta} \Leftrightarrow dz = je^{j\theta} d\theta,$$

Realizando a mudança de variável de z para θ , o cálculo do integral fica:

$$\int_{|z|=1} \bar{z}dz = \int_0^{2\pi} e^{-j\theta} je^{j\theta} d\theta = j \int_0^{2\pi} d\theta = j2\pi$$

Se, por outro lado, o problema fosse reformulado para calcular $\int_{|z|=1} zdz$, utilizando o

procedimento anterior, teríamos:

$$\int_{|z|=1} zdz = \int_0^{2\pi} e^{j\theta} je^{j\theta} d\theta = j \int_0^{2\pi} e^{j2\theta} d\theta = \frac{1}{2} [e^{j2\theta}]_0^{2\pi} = 0$$

É de realçar o facto de no primeiro caso a função a integrar não ser analítica, ($f(z) = \bar{z}$), ao contrário do segundo caso ($f(z) = z$).

Este Exemplo serve de introdução ao seguinte teorema:

Teorema de Cauchy-Goursat:

Se uma função $f(z)$ é analítica em todos os pontos interiores e no caminho de integração fechado C , então

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

Demonstração:

Já foi visto que, sendo a função $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (udx - vdy) + j \oint_C (vdx + udy)$$

Segundo o Teorema de Green, existem 2 funções, $P(x)$ e $Q(x)$, assim como as derivadas $\frac{\partial P}{\partial y}$ e $\frac{\partial Q}{\partial x}$ contínuas em todos os pontos interiores e no caminho C , então

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

(A demonstração deste teorema não é aqui apresentada, mas pode ser vista na pg. 1047 do livro “Advanced Engineering Mathematics”, C. Wylie e L. Barrett).

Partindo deste pressuposto, podemos escrever o integral da seguinte forma, sabendo que $f(z)$ é uma função analítica:

$$\int_C f(z)dz = \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + j \iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy$$

Onde C é o caminho de integração fechado, e R a região delimitada pelo caminho C .

Para a função f ser analítica, esta deve satisfazer as eq. De Cauchy-Riemann,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

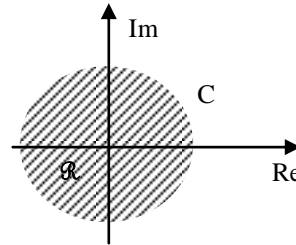
Substituindo as derivadas parciais no integral, fica

$$\int_C f(z)dz = \iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy + j \iint_R \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy = 0 + j0 = 0$$

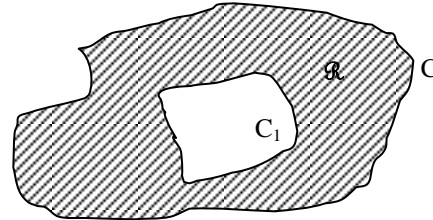
Até agora, os exemplos de integração complexa têm recaído sobre conjuntos simplesmente conexos. Vamos alargar o estudo da integração a conjuntos multiplamente conexos.

Graficamente, os diferentes conjuntos podem ser representados da seguinte forma:

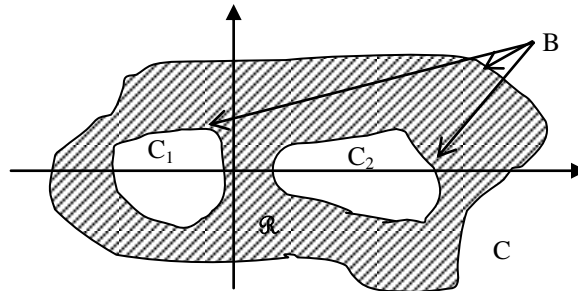
Conjunto simplesmente conexo,
Porque tem uma só fronteira.



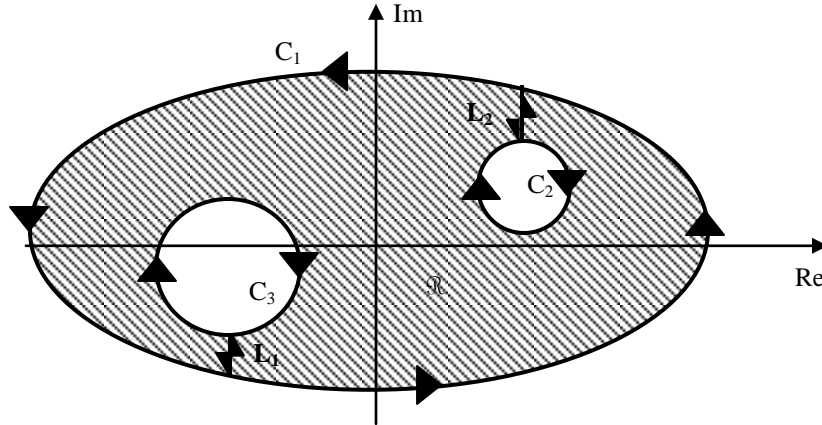
Conjunto duplamente conexo,
Porque tem duas fronteiras.



Conjunto triplamente conexo.
B é a fronteira da região R.



Um domínio multiplamente conexo pode ser transformado num outro simplesmente conexo, mediante a inserção de duplos segmentos, como ilustra o seguinte esquema:



Obtêm-se assim um único caminho fechado, que é constituído pelos segmentos L_1 , L_2 , e as fronteiras C_1 , C_2 e C_3 .

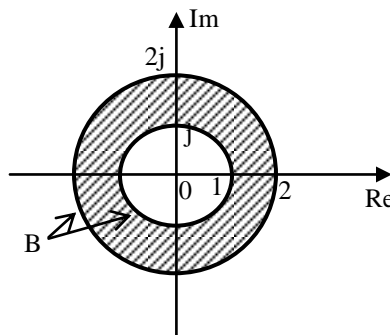
Para que o Teorema de Cauchy-Goursat seja válido, a orientação de todos os caminhos deve ser positiva (os pontos da região \mathcal{R} devem ficar à esquerda, quando se caminha sobre a linha de fronteira). Nessas condições,

$$\int_B f(z)dz = 0$$

A inserção de segmentos de linha para tornar o conjunto simplesmente conexo não afectam o cálculo do integral, já que os integrais de sentido oposto ao longo de cada segmento anulam-se mutuamente.

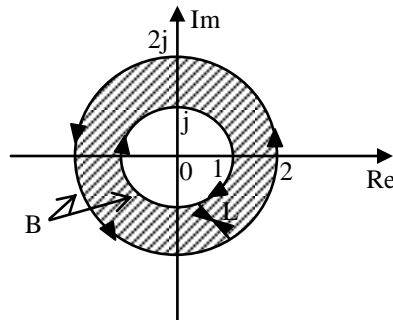
Exemplo:

Calcular $\int_B \frac{dz}{z^2(z^2 + 9)}$, sendo B como mostra a figura



$f(z) = \frac{1}{z^2(z^2 + 9)}$ é uma função analítica, excepto em $z = 0$ e $z = \pm 3j$. As 3 singularidades ficam fora da área delimitada por B , e $f(z)$ é analítica na região delimitada por B .

Pode-se transformar o domínio multiplamente conexo num domínio simplesmente conexo, com a utilização de um segmento L_1 , para unir as duas fronteiras de B .



Segundo o Teorema de Cauchy-Goursat,

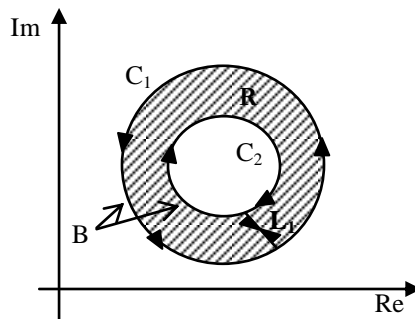
$$\int_B \frac{dz}{z^2(z^2+9)} = 0$$

Daquilo que foi dito anteriormente, sabe-se que

$$\int_C f(z) dz = 0$$

desde que $f(z)$ seja analítica nos pontos interiores e em C .

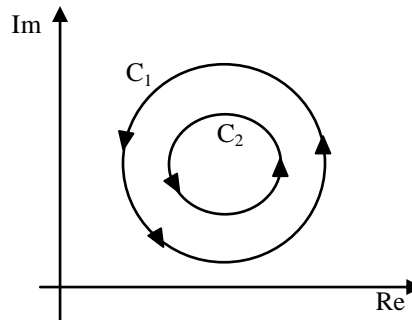
Se a fronteira B for como mostra a figura,



e $f(z)$ for analítica na região R e sobre a fronteira B , o integral fica:

$$\begin{aligned} \int_B f(z) dz &= \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \int_{L_1} f(z) dz + \int_{L_2} f(z) dz = 0 \\ &\Leftrightarrow \\ \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz &= 0 \end{aligned}$$

Se o sentido de integração sobre a fronteira C_2 for invertido,



$$\int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz = 0$$

Ou seja,

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

Os integrais têm o mesmo valor. Isto quer dizer que é possível deformar e reduzir a curva C_1 , até chegar à curva C_2 , sem que a fronteira passe por um ou mais pontos onde $f(z)$ não é analítica (singularidades).

De notar que podem existir singularidades no seio de C_2 , e por isso os integrais podem não ser nulos, mas não invalida a relação anterior.

Formula do Integral de Cauchy

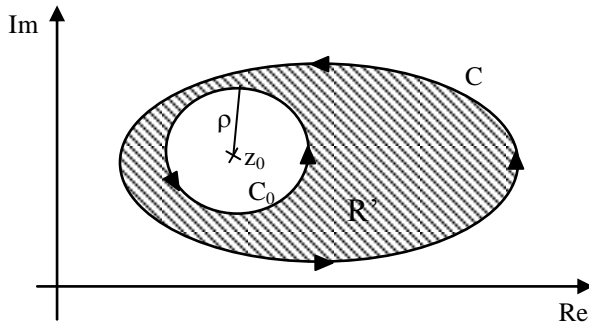
Teorema: Se $f(z)$ for uma função analítica no interior e sobre uma fronteira C simplesmente conexa, com orientação positiva, e se z_0 for qualquer ponto no interior de C , então o valor de f no ponto z_0 é dado pela fórmula

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Demonstração:

Seja C uma fronteira orientada positivamente, com domínio R .

Seja C_0 uma fronteira circular, com centro em z_0 e raio ρ , totalmente contida em R .



Supõe-se que $f(z)$ é analítica sobre C e em R . então $\frac{f(z)}{z-z_0}$ é analítica em R , excepto para $z=z_0$. Em particular, é analítica em todos os pontos de R' , limitado por C e por C_0 .

Pelo Teorema de Cauchy-Goursat,

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{C_0} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{C_0} \frac{f(z_0) + [f(z) - f(z_0)]}{z-z_0} dz = f(z_0) \int_{C_0} \frac{dz}{z-z_0} + \int_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz$$

Se $z - z_0 = \rho e^{j\theta}$, então

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = f(z_0) \int_0^{2\pi} \frac{j\rho e^{j\theta}}{\rho e^{j\theta}} d\theta + \int_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz = j2\pi f(z_0) + \int_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz$$

O teorema fica provado se $\int_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz$ for zero.

$$\text{Sabemos que } \left| \int_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz \right| \leq \int_{C_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z-z_0|} |dz|,$$

Em C_0 , $|z - z_0| = \rho$.

Como $f(z)$ é analítica $\Rightarrow f(z)$ é contínua,

$$\forall \varepsilon, \exists \delta : |z - z_0| \equiv \rho < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Isto é, por mais pequeno que seja ε , existe sempre um raio ρ que satisfaz a relação $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Então,

$$\left| \int_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \int_{C_0} \frac{\varepsilon}{\rho} |dz| = \frac{\varepsilon}{\rho} \int_{C_0} |dz| = \frac{\varepsilon}{\rho} \rho 2\pi = 2\pi\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left| \int_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq 2\pi\varepsilon$$

A análise deste resultado é a seguinte: O integral é independente de ε , mas não pode ultrapassar $2\pi\varepsilon$, que pode ser feito tão pequeno quanto se queira. Isto implica que o módulo do integral é zero, e o próprio integral é também zero.

Então,

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) 2\pi j$$

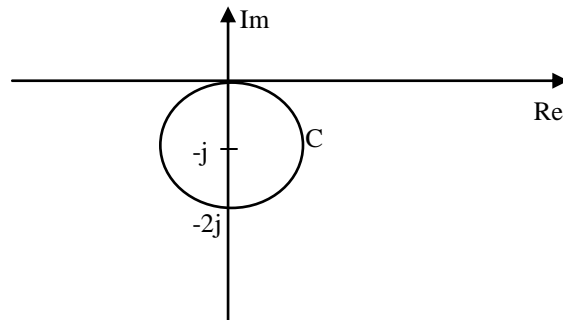
$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0)$$

Formula do Integral de Cauchy

Exemplo:

Calcular $\int_C \frac{3z^2 + 7z + 1}{z + j} dz$, em que C é dado por: $|z + j| = 1$.



A função $f(z) = 3z^2 + 7z + 1$ é um polinómio de 2ª ordem, e por isso é uma função analítica todos os pontos do plano complexo C .

O ponto $z_0 = -j$ faz parte do interior de C .

$$f(z_0) = f(-j) = -3 + 7j + 1 = 7j - 2$$

Então, aplicando a fórmula do Integral de Cauchy,

$$\int_C \frac{3z^2 + 7z + 1}{z + j} dz = f(z_0) j 2\pi = (7j - 2) j 2\pi = -4\pi j - 14\pi = 2\pi(-2j - 7)$$

Derivadas de funções analíticas

Também podemos relacionar o valor da derivada da função f , num determinado valor z_0 , em função do integral dessa função, ao longo de um percurso C .

Supondo que $f(z)$ é analítica em todos os pontos interiores e no caminho fechado C , a fórmula para a derivada $f'(z_0)$ pode ser obtida derivando o integral de Cauchy em ordem a z_0 :

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{1}{2\pi j} \int_C \left(\frac{f(z)}{z - z_0} \right)' dz = \frac{1}{2\pi j} \int_C f(z) \left((z - z_0)^{-1} \right)' dz = \frac{1}{2\pi j} \int_C f(z) \left(-(z - z_0)^{-2} (-1) \right) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{1}{2\pi j} \int_C f(z) \left((z - z_0)^{-2} \right)' dz = \frac{1}{2\pi j} \int_C f(z) \left(-2(z - z_0)^{-3} (-1) \right) dz = \\ &= \frac{2}{2\pi j} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ &\vdots \\ f^{(n)}(z_0) &= \frac{n!}{2\pi j} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \end{aligned}$$

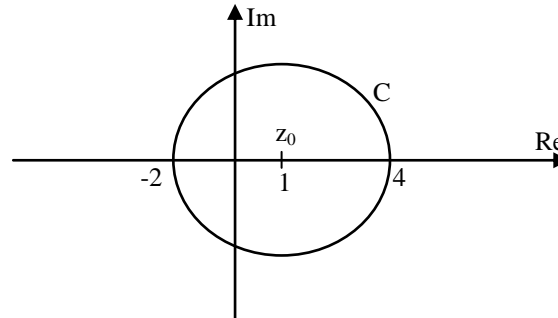
Fórmula geral de Cauchy para a derivada de uma função $f(z)$

Se $f(z)$ é uma função analítica, tem derivadas de qualquer ordem (até n), que são também analíticas.

Exemplo:

Calcular $\int_C \frac{e^z}{(z+1)^2} dz$, em que o contorno C é definido por: $|z-1|=3$.

$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ n=1 \\ f(z) = e^z - \text{função analítica em todo o domínio complexo.} \end{cases}$$



O ponto z_0 pertence ao domínio definido pela curva C .

$$f(z) = e^z$$

$$f'(z) = e^z$$

$$f(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

O integral fica:

$$\int_C \frac{e^z}{(z+1)^2} dz = f'(-1) \frac{2\pi j}{1!} = \frac{1}{e} 2\pi j = 2\pi j e^{-1} = \frac{2\pi j}{e}$$

Teoria sobre Sinais e Sistemas

Introdução

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Teoria dos Números Complexos} \\ \text{Teoria dos Sinais e Sistemas} \end{array} \right. \Rightarrow \text{Base teórica para a Análise de Fourier}$

Objectivo: Representar através de relações matemáticas a realidade associada a sinais e sistemas de transmissão, electrónica,...

Sinal: Função de uma ou mais variáveis independentes e tipicamente tem a si associada informação acerca do comportamento ou natureza de um determinado fenómeno.

Sistema: De uma forma geral, um sistema será um conjunto organizado de unidades interactivas que responde a determinados sinais, produzindo outros sinais.

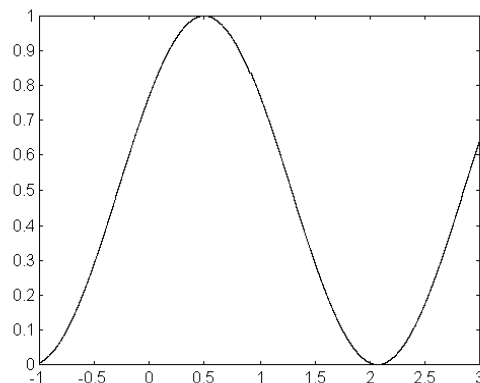
Exemplo de sistemas / sinais:

- 1 – Rectificador de meia onda
- 2 – Sistema electro-óptico de transmissão de voz
- 3 – CD-ROM / DVD

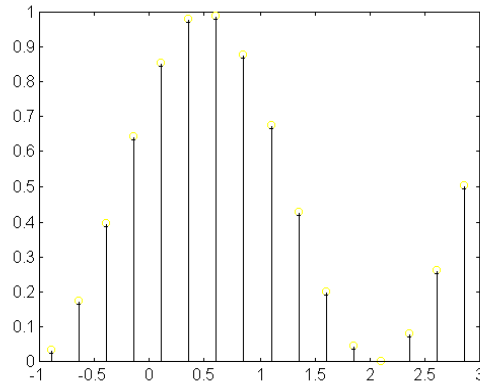
dos Exemplos anteriores, vimos que os sinais podem ser de dois tipos:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sinais contínuos} \\ \text{Sinais digitais} \end{array} \right.$

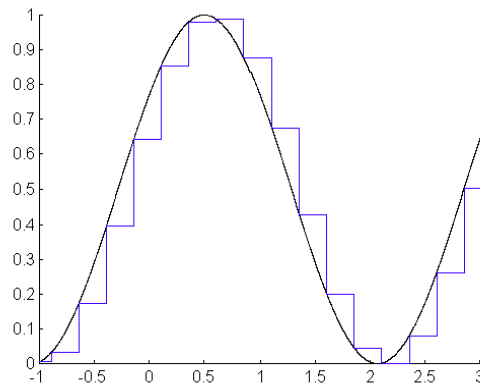
Sinal contínuo, com variável independente contínua:



Amostragem do sinal contínuo anterior \Rightarrow sinal discreto

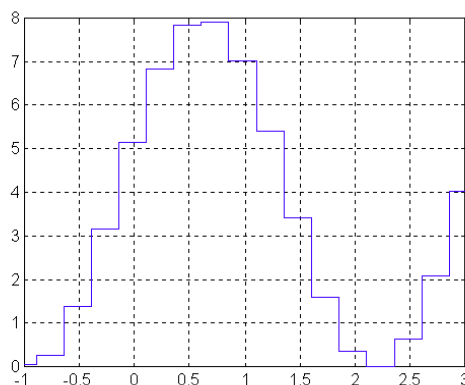


Os valores da sequência são retidos até ao próximo valor, mas durante o tempo de retenção, o valor não se altera \Rightarrow A informação associada ao sinal é discreta: está associada às transições de nível e entre estes, a informação é nula.
O sinal é discreto em termos do fluxo de informação que transporta.

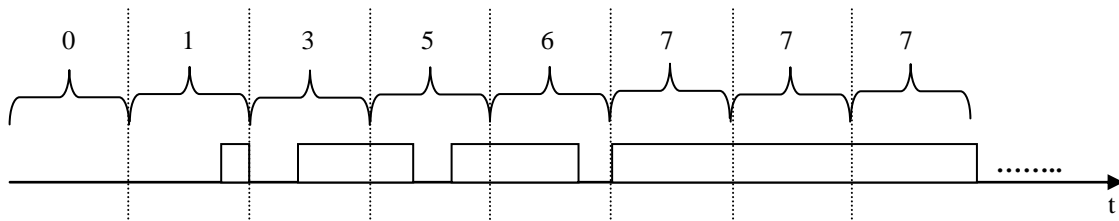


O sinal, embora discreto no tempo, é contínuo em amplitude.

Existem vantagens em quantificar o conjunto discreto de valores \Rightarrow arredondar para o nível de quantificação mais próximo. Com 8 níveis diferentes, temos a seguinte representação:



A seguinte figura apresenta a sequência de dados fluindo, por Exemplo, entre um computador e um terminal. Trata-se de um sinal codificado.



Codificação:

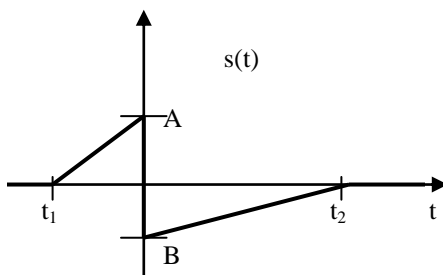
0-----	000
1-----	001
2-----	010
3-----	011
4-----	100
5-----	101
6-----	110
7-----	111

Código binário natural

Às operações de amostragem, quantificação e codificação, é usual chamar-se conversão analógico-digital.

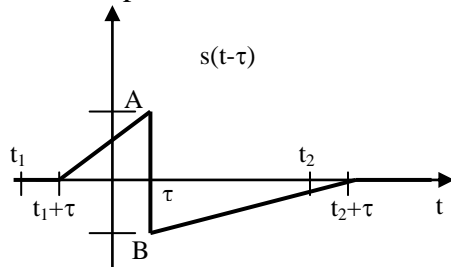
Transformações elementares sobre sinais

Supondo que o sinal $s(t)$ é como se mostra:



$$\begin{aligned} s(t_1) &= 0 \\ s(t_2) &= 0 \end{aligned}$$

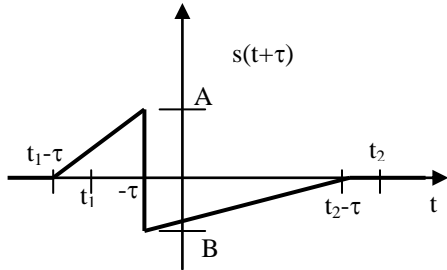
a) Atraso temporal



$$\begin{aligned} s((t_1+\tau)-\tau) &= 0 = s(t_1) \\ s((t_2+\tau)-\tau) &= 0 = s(t_2) \end{aligned}$$

O sinal $s(t-\tau)$ aparece depois do sinal $s(t)$ no eixo temporal \Rightarrow está atrasado τ segundos relativamente a $s(t)$.

b) Avanço temporal

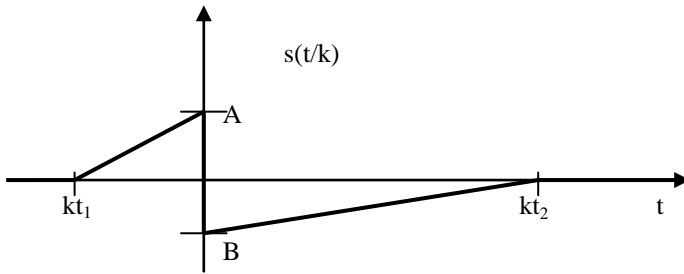
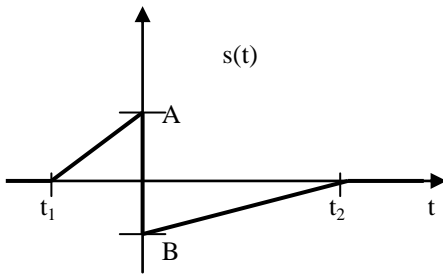


$$s((t_1-\tau)+\tau) = 0 = s(t_1)$$

$$s((t_2-\tau)+\tau) = 0 = s(t_2)$$

O sinal $s(t+\tau)$ aparece antes do sinal $s(t)$ no eixo temporal \Rightarrow está adiantado τ segundos relativamente a $s(t)$.

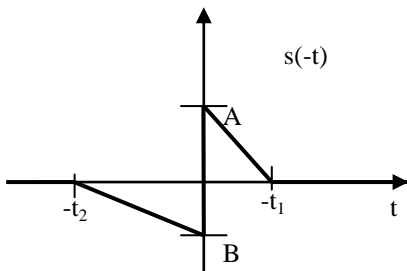
c) Mudança de escala



Se $k > 1 \Rightarrow$ Alargamento temporal

Se $0 < k < 1 \Rightarrow$ compressão temporal

Se $k = -1 \Rightarrow$ Inversão do sinal

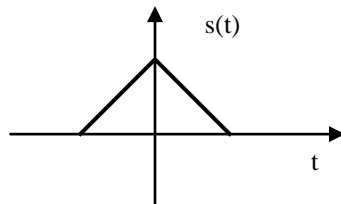


Caracterização dos sinais

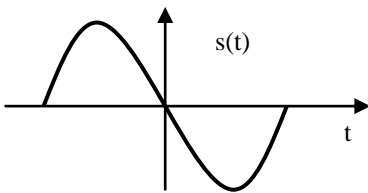
Os sinais podem ser de três tipos:

- Sinais pares
- Sinais ímpares
- Sinais nem pares, nem ímpares

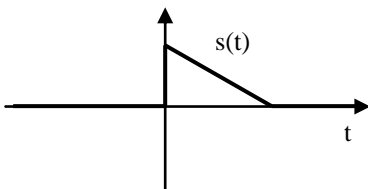
Sinal par: $s(t) = s(-t)$



Sinal ímpar: $s(t) = -s(-t)$



Sinal nem par nem ímpar:

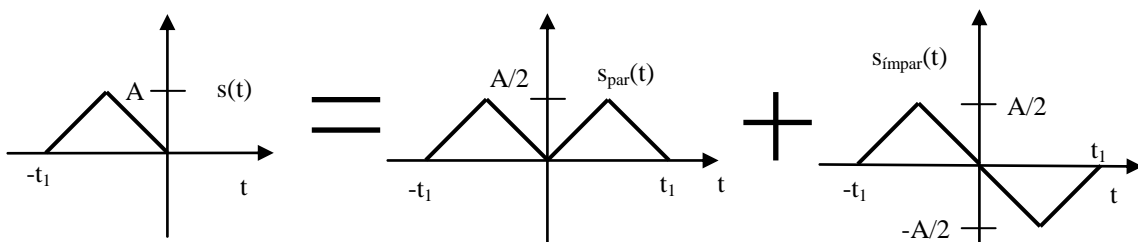


Exemplos:

A função co-seno é uma função par: $\cos(90^\circ) = \cos(-90^\circ)$

A função seno é uma função ímpar: $\sin(90^\circ) = -\sin(-90^\circ)$

Um sinal arbitrário pode sempre ser decomposto nas suas componentes par e ímpar.



$$s(t) = s_{par}(t) + s_{impar}(t)$$

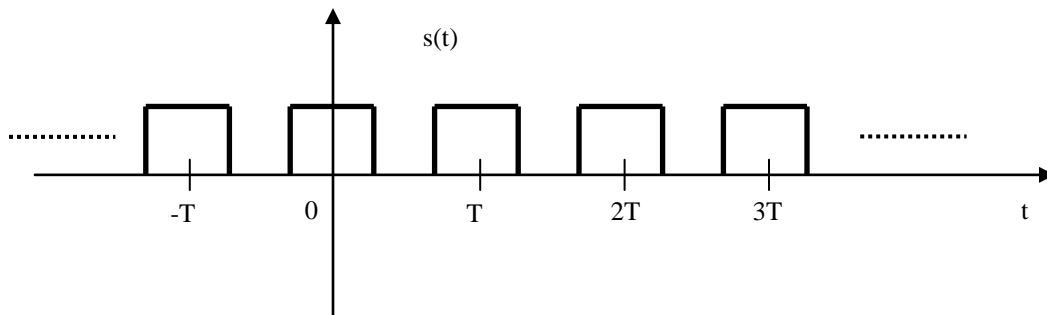
De onde se retira que

$$\begin{cases} s_{par}(t) = \frac{s(t) + s(-t)}{2} \\ s_{impar}(t) = \frac{s(t) - s(-t)}{2} \end{cases}$$

Para além da paridade, um sinal pode ser caracterizado pela sua periodicidade. Se um sinal é periódico, com período T , então

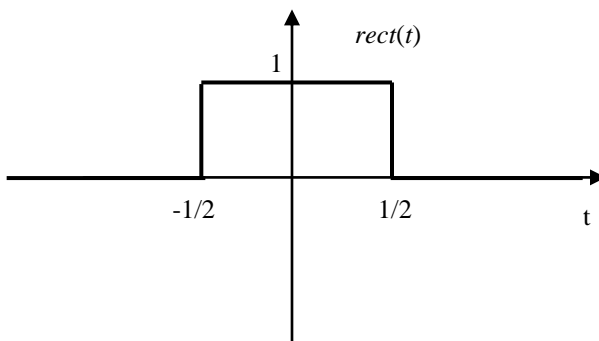
$$s(t) = s(t + kT), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Um Exemplo de sinal periódico é ilustrado na figura seguinte.



Funções (sinais) elementares

Para introduzir a primeira função elementar, é necessário definir o seguinte sinal:



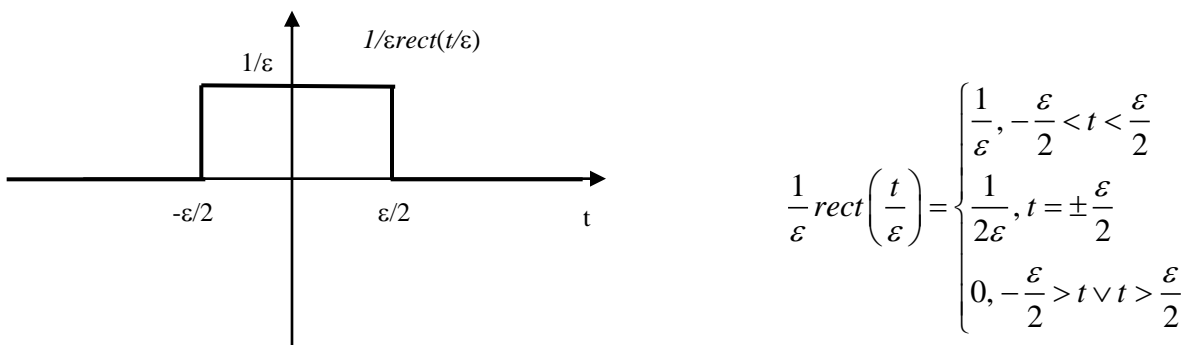
$$rect(t) = \begin{cases} 1, & -1/2 < t < 1/2 \\ 1/2, & t = \pm 1/2 \\ 0, & -1/2 > t \vee t > 1/2 \end{cases}$$

Nota: O valor de $rect(t)$ para $t=1/2$ pode ser visto como:

$$rect\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}^+} rect(t) + \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}^-} rect(t)}{2}$$

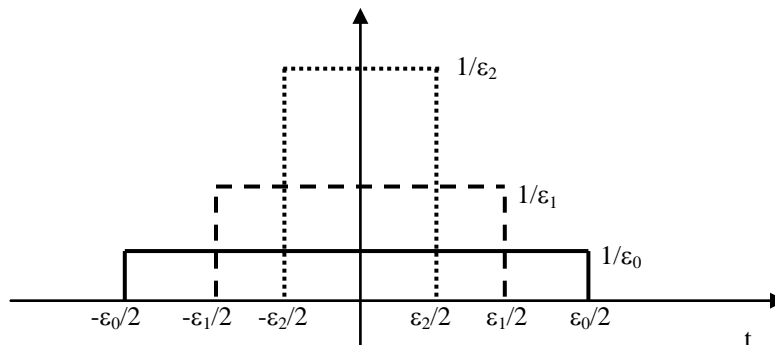
É conveniente defini-lo desta forma, como mais tarde se verá. No entanto, esta definição é frequentemente omitida.

Aplicando as transformações elementares sobre $rect(t)$, obtemos o seguinte sinal:



A área do sinal é: $\frac{1}{\varepsilon} \times \left(\frac{\varepsilon}{2} - \left(-\frac{\varepsilon}{2} \right) \right) = 1$

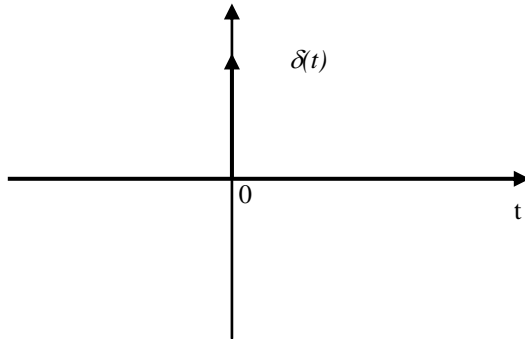
Se a largura temporal do sinal for sucessivamente reduzida, mantendo a área fixa, obtêm-se este gráfico:



No limite,

$$\lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon_n} rect\left(\frac{t}{\varepsilon_n}\right) = \delta(t)$$

Trata-se do Impulso de Dirac, a 1ª função elementar em estudo. É representada e definida por:

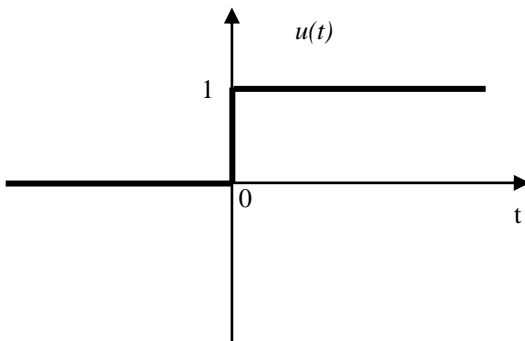


$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

Trata-se de uma função (sinal) com duração infinitesimal, e área unitária.

Este sinal tem a mesma utilidade para o estudo dos sinais e sistemas, como o tem o conceito de massa pontual, ou fonte luminosa pontual, na Física. São conceitos amplamente utilizados, mas que na realidade não existem.

O próximo sinal elementar é o Degrau Unitário, ou de Heaviside:

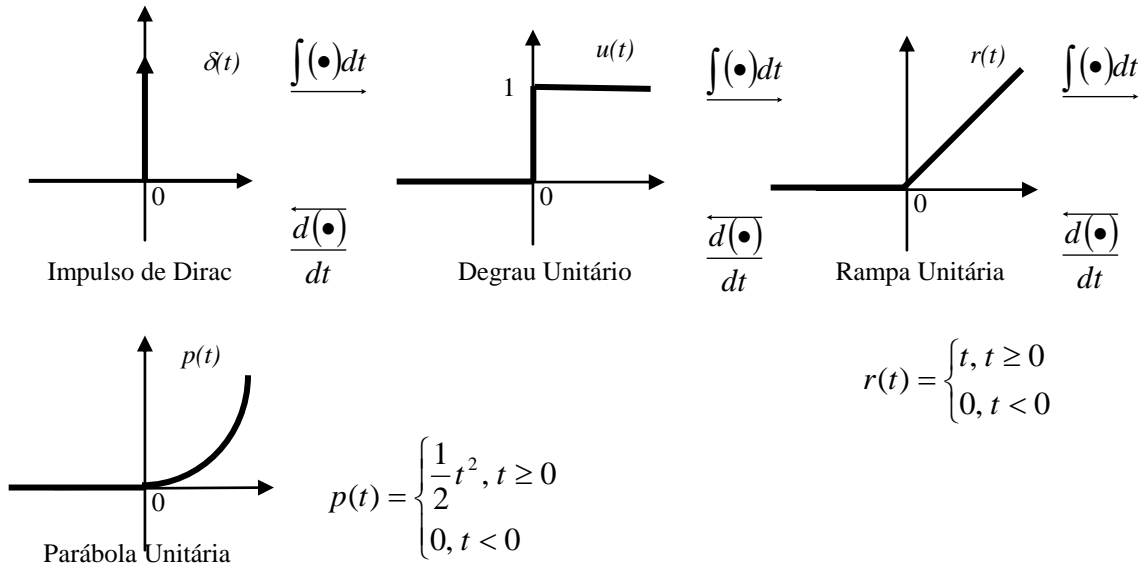


$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 1/2, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Também se define como:

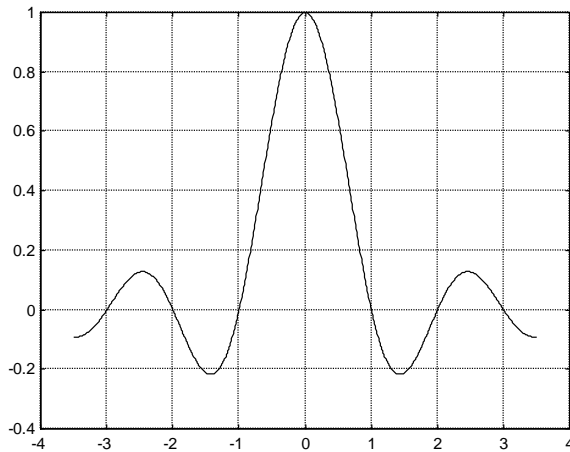
$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

Desta relação (integração) pode observar-se que o Degrau Unitário é obtido à custa do Impulso de Dirac. Utilizando este processo repetidamente, outros sinais elementares são obtidos. O processo inverso (derivação) pode também ser utilizado. A figura que se segue ilustra o procedimento.



É assim possível obter todas as funções singulares à partir da diferenciação ou integração de outras funções singulares.

Outra função particular muito utilizada é a função *seno cardinal*, ou *sinc*.



$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Exemplo:

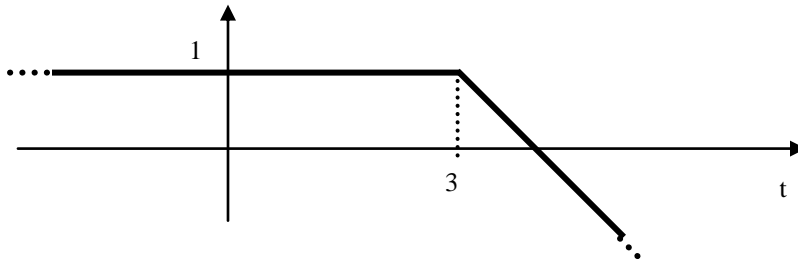
Representar o seguinte sinal: $x(t) = 1 - r(t - 3)$

Resolução analítica: Partindo da definição de rampa unitária,

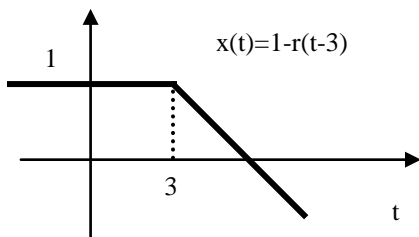
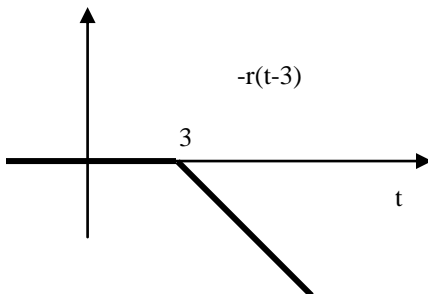
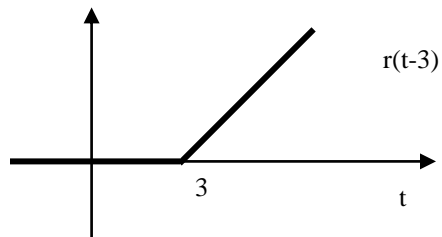
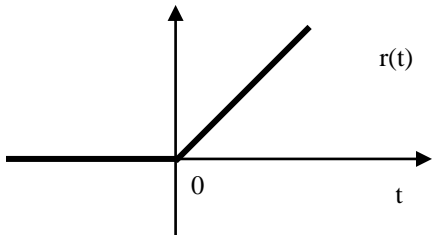
$$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \Leftrightarrow r(t-3) = \begin{cases} t-3, & t-3 \geq 0 \\ 0, & t-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow r(t-3) = \begin{cases} t-3, & t \geq 3 \\ 0, & t < 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$-r(t-3) = \begin{cases} 3-t, & t \geq 3 \\ 0, & t < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1-r(t-3) = \begin{cases} 4-t, & t \geq 3 \\ 1, & t < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x(t) = \begin{cases} 4-t, & t \geq 3 \\ 1, & t < 3 \end{cases}$$

O sinal $x(t)$ representar-se-ia desta forma:



Resolução gráfica: Partindo novamente da definição de rampa unitária,



Convolução

Define-se convolução de dois sinais, $x(t)$ e $h(t)$, como sendo,

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

O integral presente na definição designa-se por Integral de Convolução.

Nota 1: As funções a convoluir dependem da mesma variável independente, t .

Nota 2: A convolução é operada através de uma variável auxiliar, τ .

As etapas necessárias para a execução da convolução são:

1 - Inversão temporal de um dos sinais (rotação).

$$h(\tau) \rightarrow h(-\tau)$$

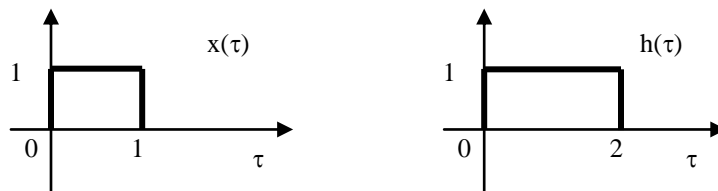
2 – Deslocamento do sinal invertido (translação).

$$h(-\tau) \rightarrow h(t - \tau)$$

3 - Multiplicação de $x(\tau)$ por $h(t - \tau)$.

4 – Integração. Este passo consiste em calcular a área comum aos dois sinais, em cada instante t .

De modo a tornar a operação de convolução mais compreensível, será feito um estudo de todos os passos envolvidos, com a ajuda de dois sinais, $x(\tau)$ e $h(\tau)$.



1 – Inversão temporal de um dos sinais, $h(\tau)$, utilizando como eixo de rotação o eixo das abcissas.



2 – Deslocamento do sinal invertido, ou translação.

$$h(-\tau) \rightarrow h(t - \tau)$$

A questão que se coloca é se o sinal $h(-\tau)$ sofre um avanço ou um atraso, quando é deslocado de t . De notar que, no seio do integral, a variável é τ , e t é uma constante.

Analisando o integral de convolução, podemos verificar que a integração se efectua de $-\infty$ para $+\infty$, i. e., t é crescente. Partindo do sinal original, $h(-\tau)$, iremos analisar analiticamente qual o sentido de deslocação de $h(t - \tau)$.

$$\begin{aligned} h(\tau) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq \tau \leq 2 \\ 0, & \text{restantes pontos} \end{cases} \Leftrightarrow h(-\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \leq -\tau \leq 2 \\ 0, & \text{restantes pontos} \end{cases} \\ \Leftrightarrow h(t - \tau) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq t - \tau \leq 2 \\ 0, & \text{restantes pontos} \end{cases} \Leftrightarrow h(t - \tau) = \begin{cases} 1, & -t \leq -\tau \leq 2 - t \\ 0, & \text{restantes pontos} \end{cases} \end{aligned}$$

$$-t \leq -\tau \leq 2 - t \Leftrightarrow -\tau \geq -t \wedge -\tau \leq 2 - t \Leftrightarrow \tau \leq t \wedge \tau \geq t - 2 \Leftrightarrow t - 2 \leq \tau \leq t$$

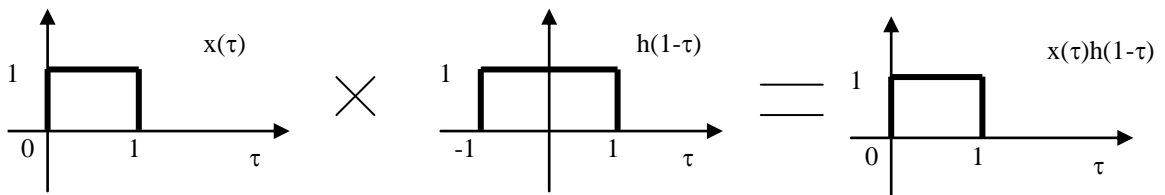
então

$$h(t - \tau) = \begin{cases} 1, & t - 2 \leq \tau \leq t \\ 0, & \text{restantes pontos} \end{cases}$$

Da expressão anterior podemos verificar que, à medida que o valor t cresce, o sinal $h(t - \tau)$ é sucessivamente atrasado no eixo horizontal.

3 – Multiplicação dos dois sinais, em cada instante t .

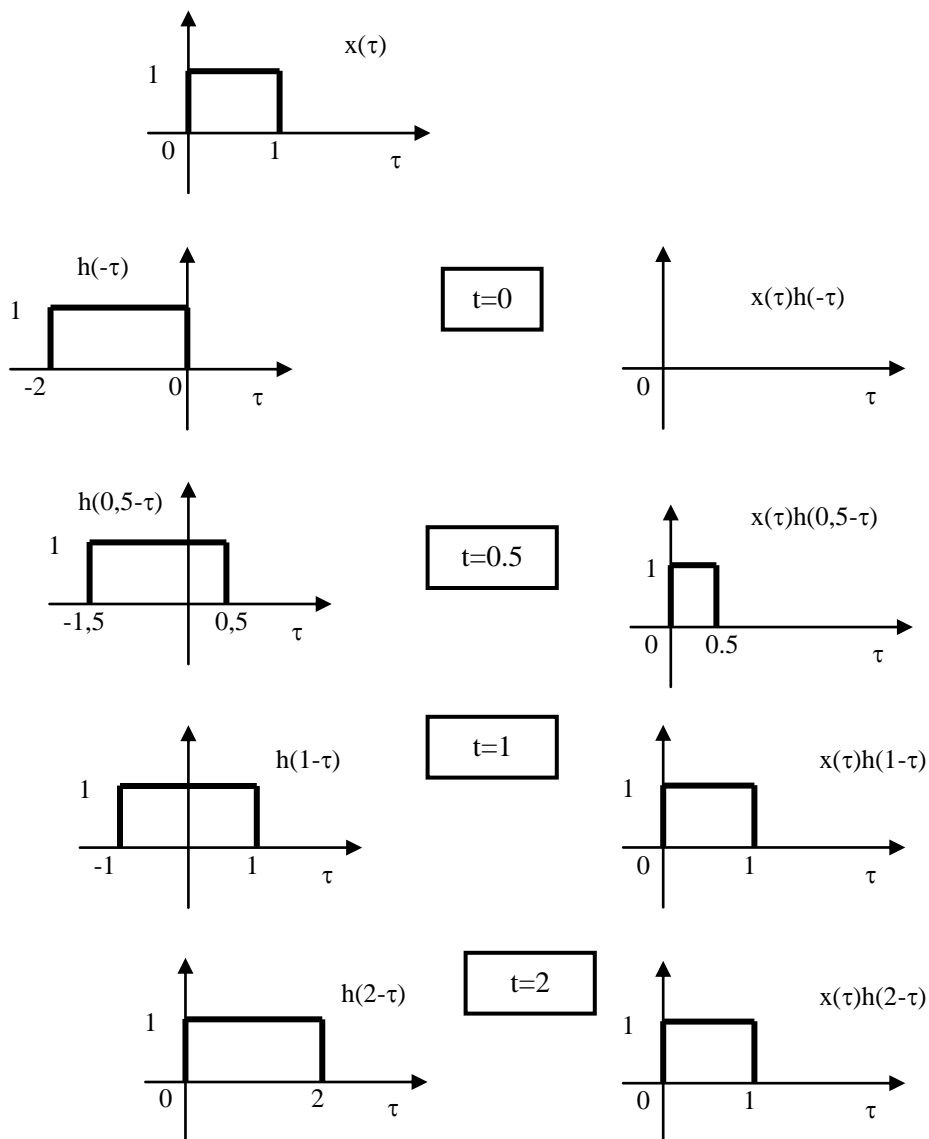
Este passo consiste na multiplicação dos sinais $x(\tau)$ e $h(t - \tau)$, que é efectuada ponto a ponto. Isto significa que o valor de um sinal no instante τ_0 é multiplicado com o valor do outro sinal no mesmo instante, repetindo-se este processo até todos os pontos dos dois sinais terem sido analisados. Um exemplo gráfico desta operação está demonstrado na figura que segue.

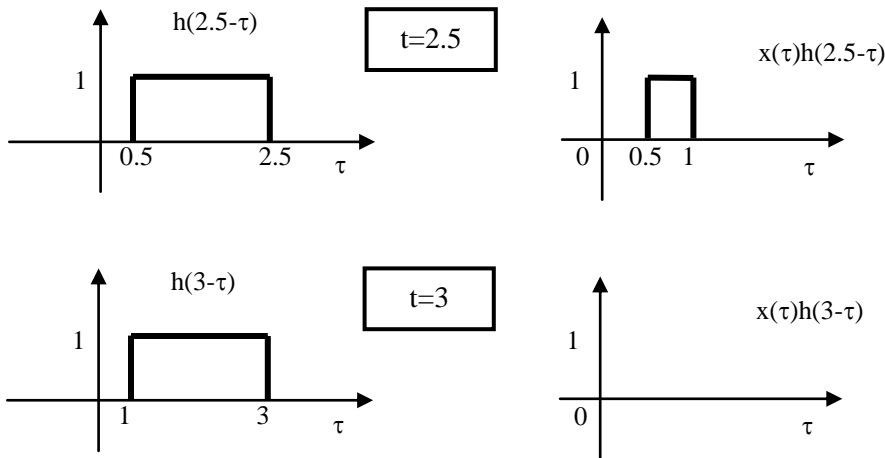


Como pode ser verificado, sempre que existir uma secção de um dos sinais cujo valor é zero, o resultado do produto dos dois sinais é nulo. Além disso, é necessário realizar um produto para cada valor t . No Exemplo anterior, $t=-1$.

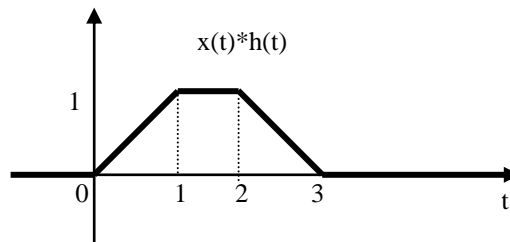
4 – Integração

Calcular o integral do produto do sinal $x(\tau)$ por $h(t-\tau)$ não é mais do que calcular a área do sinal resultante. A área resultante deverá ser calculada para cada valor de t , e depois representado num gráfico em ordem a t . Segue uma descrição gráfica deste procedimento, para os sinais $x(\tau)$ e $h(\tau)$.





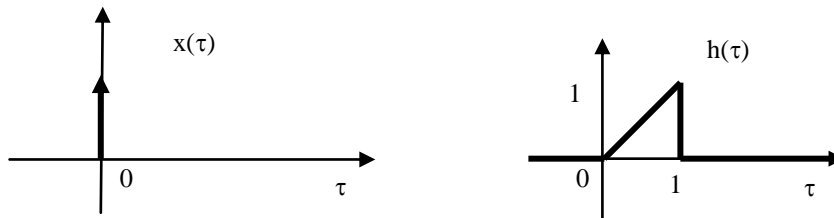
Podemos verificar que, para $t > 3$ e $t < 0$, o resultado do produto dos dois sinais é sempre zero, o que implica que o integral é também nulo nesses intervalos. O resultado gráfico da convolução é obtido calculando a área de cada produto, para cada instante t .



Uma das características da convolução pode ser facilmente verificada através dos gráficos dos sinais convoluídos e do resultado da convolução: *A largura do sinal resultante é igual à soma das larguras dos sinais convoluídos.*

Caso particular:

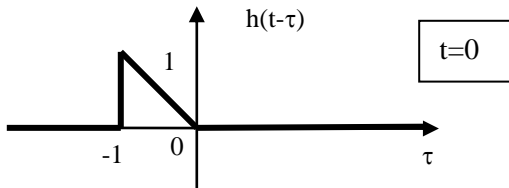
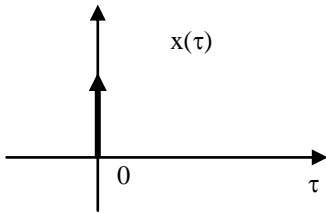
Se um dos sinais a convoluir for um impulso de Dirac, obtêm-se um resultado interessante. É demonstrado neste exemplo:



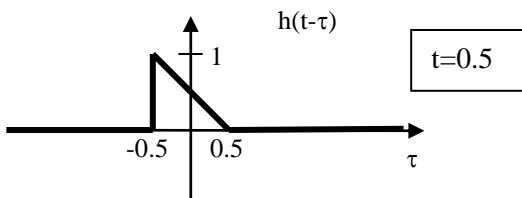
$$x(\tau) = \delta(\tau)$$

$$h(\tau) = \begin{cases} \tau, & 0 \leq \tau \leq 1 \\ 0, & \text{restantes pontos} \end{cases}$$

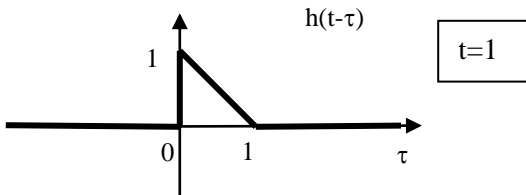
Convolvindo os dois sinais, invertendo e transladando o sinal $h(\tau)$, fica



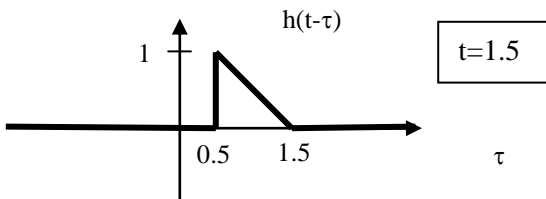
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)h(-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} 0d\tau = 0$$



$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)h(0.5-\tau)d\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) \times 0.5d\tau \\ &= 0.5 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)d\tau = 0.5 \end{aligned}$$

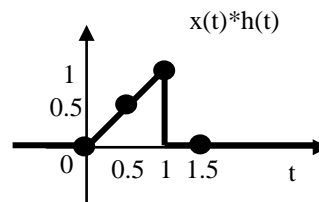


$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)h(1-\tau)d\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) \times 1d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)d\tau = 1 \end{aligned}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)h(1.5-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} 0d\tau = 0$$

O resultado da convolução é:

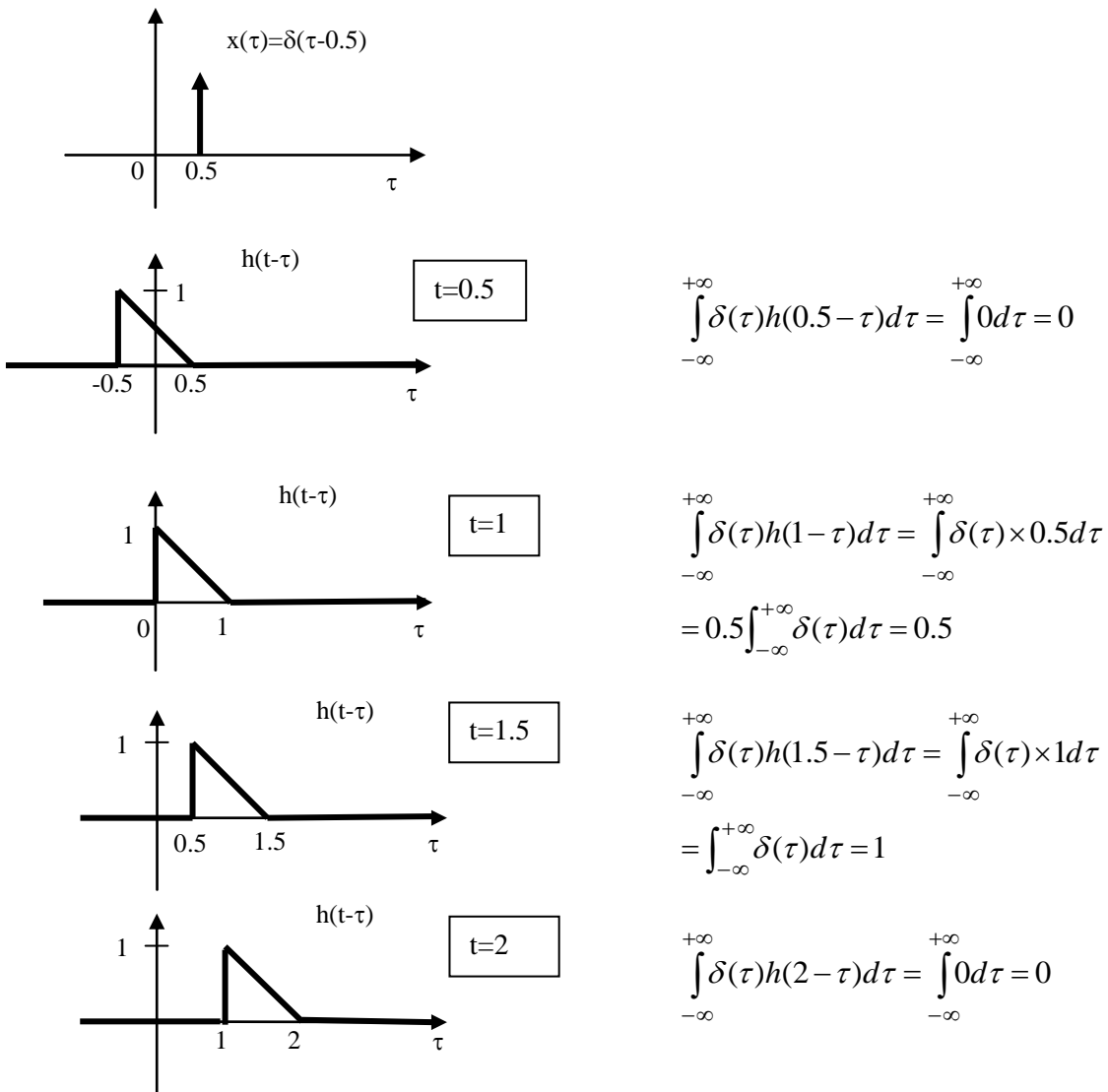


A conclusão que se tira do exemplo é a seguinte:

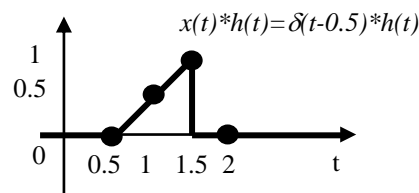
$$\delta(t) * h(t) = h(t)$$

A convolução de um sinal $h(\tau)$ por um impulso de Dirac $\delta(\tau)$ é igual ao próprio sinal $h(\tau)$.

É possível generalizar esta conclusão, se o sinal x for um impulso de Dirac deslocado da origem, $x(t) = \delta(t - t_0)$.



O resultado da convolução é:



A conclusão que se tira do exemplo é a seguinte:

$$\delta(t - t_0) * h(t) = h(t - t_0)$$

Convolver um sinal com um impulso de Dirac produz um réplica do sinal, centrada no impulso.

Também se pode dizer, deste Exemplo, que o impulso de Dirac passa a ser a nova 'origem' do sinal.

Propriedades da Convolução

Comutatividade

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

Associatividade

$$x(t) * [h(t) * j(t)] = [x(t) * h(t)] * j(t)$$

Distributividade

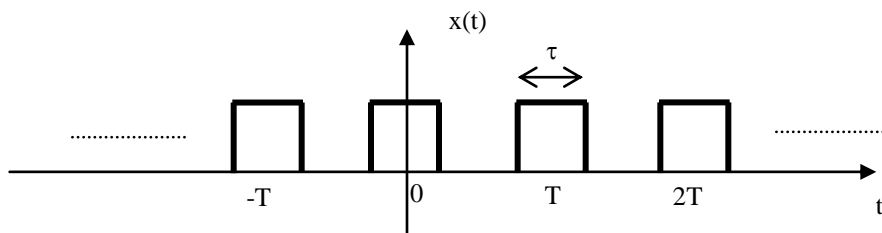
$$x(t) * [h(t) \pm j(t)] = x(t) * h(t) \pm x(t) * j(t)$$

Se $x^1(t) * x^2(t) = \lambda(t)$, então $x_1(t + t_1) * x_2(t) = y(t + t_1)$

Demonstração:

$$x_1(t + t_1) * x_2(t) = [x_1(t) * \delta(t + t_1)] * x_2(t) = x_1(t) * x_2(t) * \delta(t + t_1) = y(t) * \delta(t + t_1) = y(t + t_1)$$

As propriedades da convolução com o impulso de Dirac podem-se aplicar a sinais periódicos. Suponham o seguinte sinal:



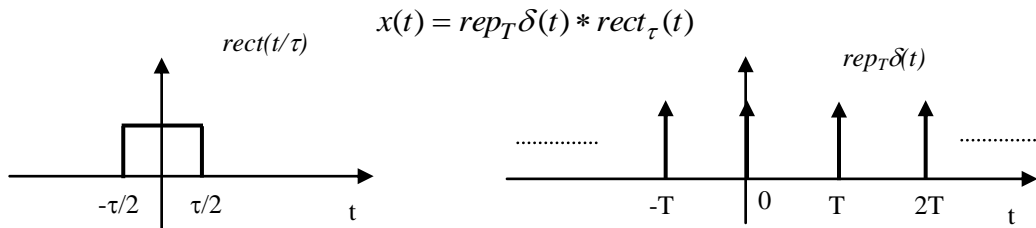
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t-kT}{\tau}\right)$$

Também se pode escrever a expressão de $x(t)$ de outra forma:

$$x(t) = \text{rep}_T \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \text{rep}_T \text{rect}_\tau(t)$$

Tanto uma como outra definição definem analiticamente o sinal $x(t)$, que é formado pela repetição de sinais rectangulares de largura τ , em intervalos regulares de tempo T .

Utilizando as propriedades do impulso de Dirac, é possível ver a função $x(t)$ como a convolução do sinal $\text{rect}_\tau(t)$ com uma repetição de impulsos de Dirac, do tipo $\text{rep}_T \delta(t)$.



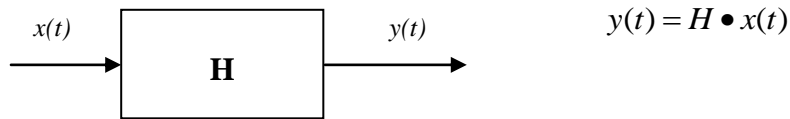
Generalização: se $f(t)$ for uma função periódica, que resulta da repetição a intervalos T de uma função elementar, $f_e(t)$, então:

$$f(t) = \text{rep}_T \delta(t) * f_e(t) = \text{rep}_T f_e(t)$$

Sistemas

Caracterização funcional de um sistema

Um sistema pode ser considerado como um operador que a uma determinada função $x(t)$, excitação, faz corresponder uma outra $y(t)$, designada por resposta.



No âmbito desta disciplina, o objecto de estudo recai principalmente nos chamados sistemas lineares e invariantes no tempo.

Sistemas lineares

“Um sistema diz-se linear se obedecer ao princípio da sobreposição”

Sendo o sistema representado pelo operador H , se o sinal de entrada for:

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t), \quad a, b \text{ constantes}$$

e se

$$y_1(t) = Hx_1(t)$$

$$y_2(t) = Hx_2(t)$$

O sistema diz-se linear se

$$H[ax_1(t) + bx_2(t)] = aHx_1(t) + bHx_2(t)$$

Da expressão anterior, conclui-se que um sistema linear tem como propriedades a distributividade, a comutatividade e a associatividade.

Além disso,

$$aHx_1(t) + bHx_2(t) = ay_1(t) + by_2(t) = y(t)$$

Sistemas invariantes no tempo

“As características de um sistema invariante no tempo são sempre as mesmas, qualquer que seja o instante em que venha a ser excitado.”

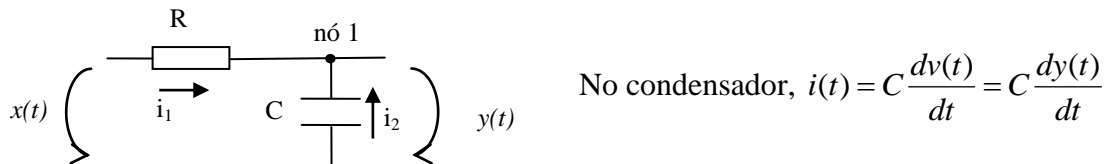
$$\text{Se } y(t) = Hx(t) \Rightarrow y(t \pm t_0) = Hx(t \pm t_0)$$

Então,

“A um avanço / atraso da excitação corresponde o mesmo avanço / atraso da resposta.”

Exemplo:

Caracterizar o circuito RC apresentado quanto à linearidade e invariância no tempo, à partir da equação diferencial que o descreve, quando excitado por um degrau unitário.



Supõe-se que o condensador está totalmente descarregado (não tem qualquer energia armazenada) no instante inicial.

Este problema pode ser resolvido em duas partes:

- i) Calcular a equação diferencial do circuito, e respectiva solução
 - ii) Verificar se o sistema é linear e invariante no tempo (LIT), quando $x(t) = u(t)$.
- i) Aplicando a Lei dos Nós no nó 1,

$$\sum_k i_k = 0$$

$$\frac{x-y}{R} - C \frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow x-y = RC \frac{dy}{dt} \Leftrightarrow x-y = RCy' \Leftrightarrow y + RCy' = x$$

A equação diferencial que rege o circuito é: $y + RCy' = x$

Solução da equação homogénea:

$$y + RCy' = 0 \Leftrightarrow y + RC \frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow y = -RC \frac{dy}{dt} \Leftrightarrow \frac{y}{dy} + \frac{RC}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} + \frac{1}{RC} dt = 0$$

Integrando,

$$K + \int \frac{1}{RC} dt + \int \frac{1}{y} dy = 0 \Leftrightarrow K + \frac{t}{RC} + \ln y = 0$$

Se K for do tipo $-\ln B$, então:

$$\ln y - \ln B = -\frac{t}{RC} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{y}{B}\right) = -\frac{t}{RC} \Rightarrow y = Be^{-\frac{t}{RC}}, \quad B = C \cdot t^e$$

Solução da equação diferencial:

Se $B = B(t)$,

$$y = B(t)e^{-\frac{t}{RC}}$$

Substituindo na equação diferencial,

$$\begin{aligned} y(t) + RCy'(t) = x(t) &\Leftrightarrow B(t)e^{-\frac{t}{RC}} + RC \left(B'(t)e^{-\frac{t}{RC}} + B(t)e^{-\frac{t}{RC}} \left(-\frac{1}{RC} \right) \right) = x(t) \\ &\Leftrightarrow \\ B(t)e^{-\frac{t}{RC}} + RCB'(t)e^{-\frac{t}{RC}} - B(t)e^{-\frac{t}{RC}} &= x(t) \\ &\Leftrightarrow \\ B'(t) = \frac{x(t)}{RC} e^{\frac{t}{RC}} &\Rightarrow B(t) = \int \frac{x(t)}{RC} e^{\frac{t}{RC}} dt + B_1, \quad B_1 = C \cdot t^e \end{aligned}$$

Então,

$$y(t) = B(t)e^{-\frac{t}{RC}} \Leftrightarrow y(t) = \left(\int \frac{x(t)}{RC} e^{\frac{t}{RC}} dt + B_1 \right) e^{-\frac{t}{RC}}, \quad B_1 = C \cdot t^e$$

A solução da equação diferencial é: $y(t) = \left(\int \frac{x(t)}{RC} e^{\frac{t}{RC}} dt + B_1 \right) e^{-\frac{t}{RC}}, \quad B_1 = C \cdot t^e$

$$\text{ii) } \quad x(t) = u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Se $t > 0 \Rightarrow x(t) = 1$. Nesta situação, a solução da equação diferencial fica:

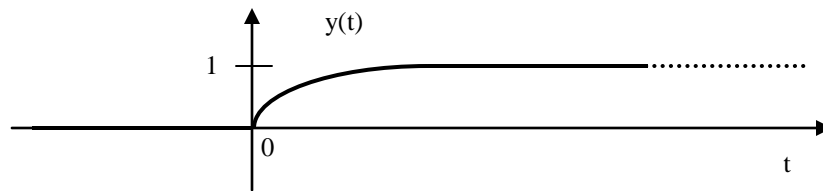
$$y(t) = e^{-\frac{t}{RC}} \left(\int \frac{1}{RC} e^{\frac{t}{RC}} dt + B_1 \right) = e^{-\frac{t}{RC}} \left(e^{\frac{t}{RC}} + B_1 \right) = 1 + B_1 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$B_1 = ?$$

Quando $t = 0 \Rightarrow y(t) = 0$ (O condensador está inicialmente descarregado).

$$0 = 1 + B_1 e^0 \Leftrightarrow B_1 = -1$$

$$\text{então, } y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t > 0 \Leftrightarrow y(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) u(t)$$



O sistema é linear?

Para averiguar esta propriedade, é necessário um sinal de excitação $x(t)$:

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t), \quad a, b \text{ } C^{1e}$$

Para além disso, sabemos pela solução da eq. Diferencial que:

$$y_1(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) x_1(t)$$

$$y_2(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) x_2(t)$$

Partindo da solução da eq. diferencial,

$$y(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) x(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) (ax_1(t) + bx_2(t)) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) ax_1(t) + \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) bx_2(t) =$$

$$= a \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) x_1(t) + b \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) x_2(t) = ay_1(t) + by_2(t)$$

Daqui se conclui que o sistema em causa é linear.

Será o mesmo sistema invariante no tempo?

$$\text{Seja } y_1(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) x_1(t) \text{ e } y_2(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) x_2(t)$$

Se $x_2(t) = x_1(t - t_0)$,

$$y_2(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) x_1(t - t_0)$$

$$\text{Como } y_1(t - t_0) = \left(1 - e^{-\frac{t - t_0}{RC}}\right) x_1(t - t_0) \neq y_2(t),$$

O sistema é variável no tempo. No entanto, se $t \rightarrow +\infty$,

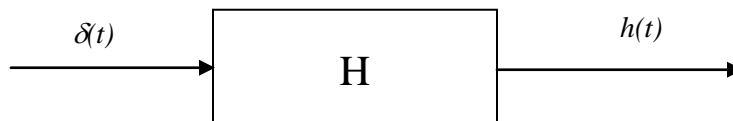
$$y_2(t)_{t \rightarrow +\infty} = \left(1 - e^{-\frac{+\infty}{RC}}\right) x_1(+\infty - t_0) = 1x_1(+\infty) = 1$$

$$y_1(t - t_0)_{t \rightarrow +\infty} = \left(1 - e^{-\frac{+\infty - t_0}{RC}}\right) x_1(+\infty - t_0) = 1x_1(+\infty) = 1$$

e para $t \rightarrow +\infty$, o sistema é invariante no tempo.

A descrição do comportamento dinâmico de um sistema LIT por uma equação diferencial não proporciona de forma explícita a relação entrada / saída de um sistema. É por isso desejável encontrar outro meio mais explícito de definir um sistema.

Seja H um sistema LIT. Se o sinal de entrada for um impulso de Dirac, $\delta(t)$,



Nestas condições, ao sinal de saída

$$h(t) = H \bullet \delta(t)$$

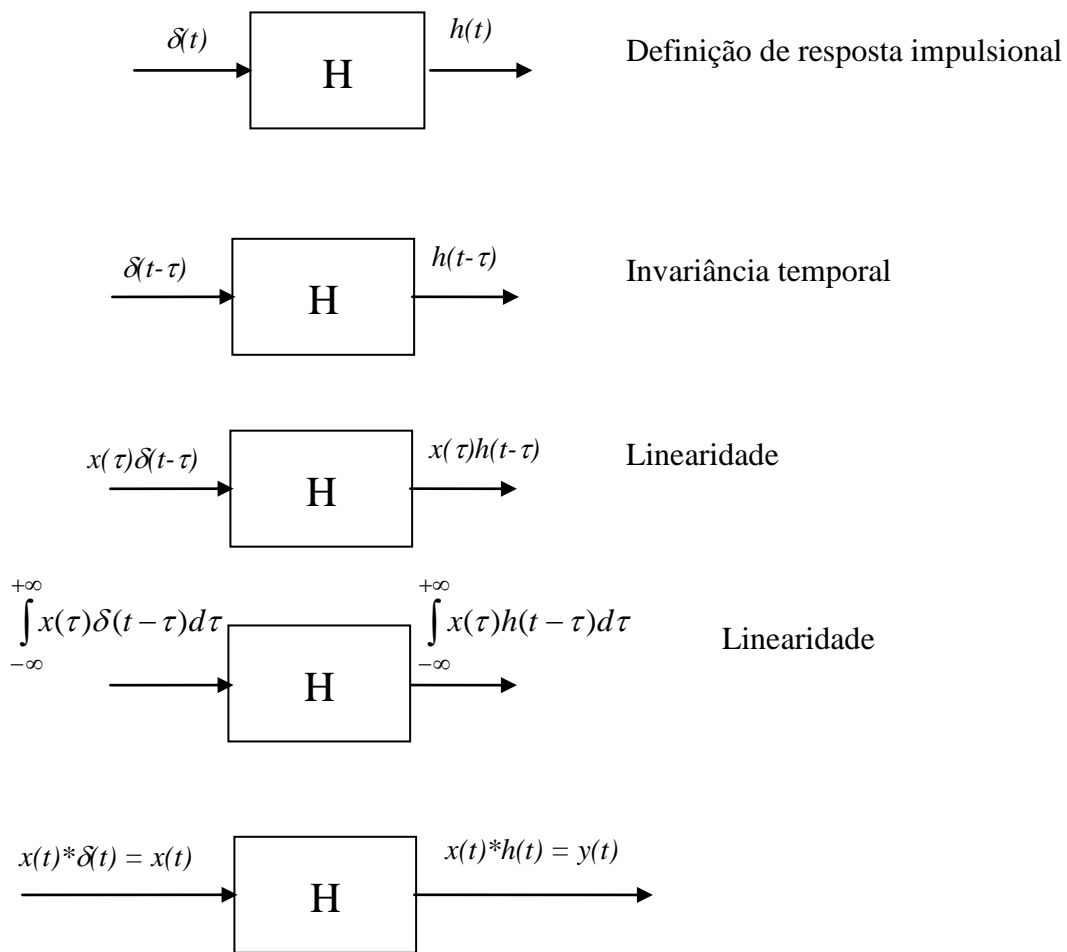
Dá-se o nome de Resposta Impulsional do sistema.

Então, um sistema pode ser descrito:

{ pelo operador H , ou função de transferência
 { pela resposta impulsional, $h(t)$

Tanto um método como outro caracterizam de forma completa o sistema.

Considerando agora que o sistema H é excitado por um sinal qualquer $x(t)$ contínuo, será calculado o resultado à saída, através dos seguintes passos:



Conclui-se que a relação entrada / saída de um sistema LIT, excitado por um sinal $x(t)$ é uma relação convolutiva.

A saída resulta da convolução da entrada com a resposta impulsional do sistema:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Análise de Fourier

Espectro de um sinal

No âmbito da análise de Fourier para funções periódicas, iremos iniciar o estudo do espectro de uma função simples. Considerando como exemplo um sinal $v(t)$ alternado, este será definido por uma função co-seno:

$$v(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

A – Amplitude máxima do sinal
 ω_0 – Frequência angular (rads^{-1})
 ϕ – Ângulo de fase (radianos ou graus)

Da análise da equação se deduz que o sinal tem um período de repetição igual a

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \text{ (s)}.$$

T_0 – Período fundamental (s)

$f_0 = \frac{1}{T_0}$ – Frequência linear, ou frequência fundamental (s^{-1} ou Hz)

É por vezes útil representar o sinal na forma exponencial. Sabendo que:

$$\cos(x) = \text{Re}\left[e^{jx}\right]$$

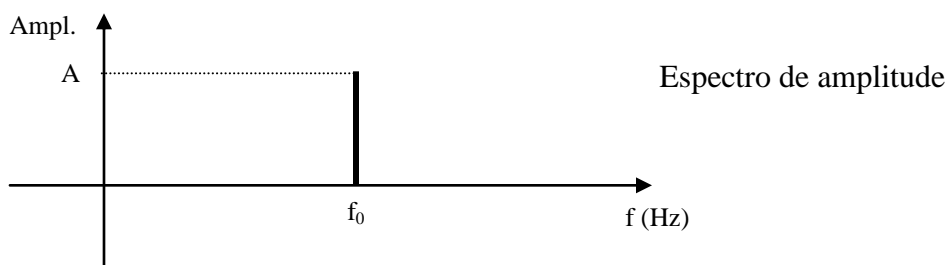
Então,

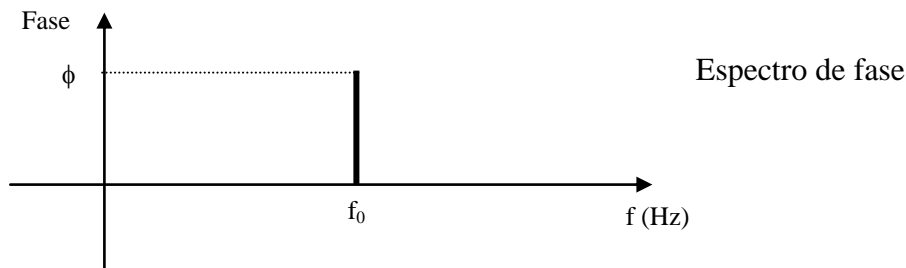
$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = A \text{Re}\left[e^{j(\omega_0 t + \phi)}\right] = \text{Re}\left[A e^{j\omega_0 t} e^{j\phi}\right] = \text{Re}\left[A e^{j2\pi f_0 t} e^{j\phi}\right]$$

A representação complexa fica totalmente especificada através de três parâmetros.

- Amplitude A
- Frequência angular ω_0 , ou frequência linear f_0 .
- Fase ϕ

Para descrever um sinal complexo no domínio da frequência, associa-se a amplitude A e a fase ϕ à respectiva frequência f_0 (ou ω_0), mediante dois gráficos:





Convenções:

- A variável independente é f (frequência)
- Os ângulos de fase são medidos em função de co-senos. Quer dizer que se existirem funções seno na expressão do sinal, terão de ser convertidas:

$$\sin(\theta) = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

- A amplitude é sempre positiva. Por isso, sempre que um sinal tiver amplitude negativa, esta deverá ser substituída por um desvio de fase:

$$-A \cos(\theta) = A \cos(\theta \pm \pi)$$

Exemplo:

Da seguinte expressão,

$$v(t) = 7 - 10 \cos\left(40\pi t - \frac{\pi}{3}\right) + 4 \sin(120\pi t)$$

- Calcular o período fundamental (T_0)
- Representar o espectro de amplitude e fase do sinal $v(t)$.

- Se $v(t)$ é um sinal periódico, então,

$$v(t) = v(t + T) \quad T - \text{período}$$

Como $v(t) = 7 - 10 \cos\left(40\pi t - \frac{\pi}{3}\right) + 4 \sin(120\pi t)$, então

$$v(t + T) = 7 - 10 \cos\left(40\pi(t + T) - \frac{\pi}{3}\right) + 4 \sin(120\pi(t + T))$$

Igualando as duas expressões sob a forma de um sistema,

$$v(t) = v(t+T) \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 7 \\ -10 \cos(40\pi t - \frac{\pi}{3}) = -10 \cos(40\pi t - \frac{\pi}{3} + 40\pi T) \Rightarrow \\ 4 \sin(120\pi t) = 4 \sin(120\pi t + 120\pi T) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 40\pi t - \frac{\pi}{3} + 40\pi T = 40\pi t - \frac{\pi}{3} + 2\pi p \\ 120\pi t + 120\pi T = 120\pi t + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40\pi T = 2\pi p \\ 120\pi T = 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T = \frac{p}{20} \\ T = \frac{k}{60} \end{cases}, p, k \in \mathbb{Z}$$

Solução:

$$T = \frac{p}{20} = \frac{k}{60} \Leftrightarrow k = 3p$$

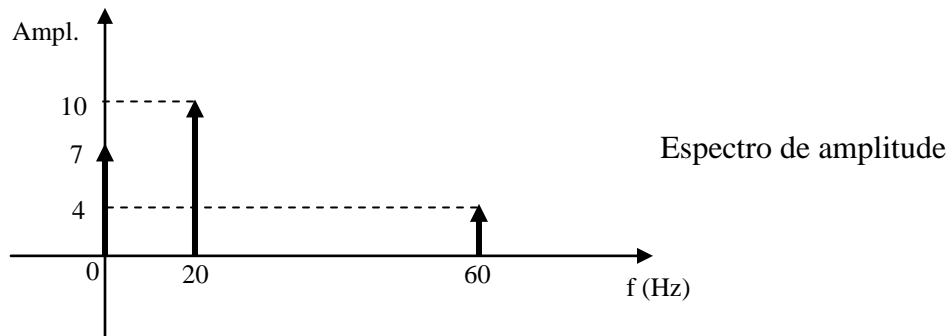
A relação $k=3p$ tem uma infinidade de soluções. No entanto, o período T é, por definição, o menor intervalo de tempo entre dois acontecimentos idênticos. Por isso, é necessário procurar o mínimo múltiplo comum positivo entre k e p , que garante a relação $k=3p$.

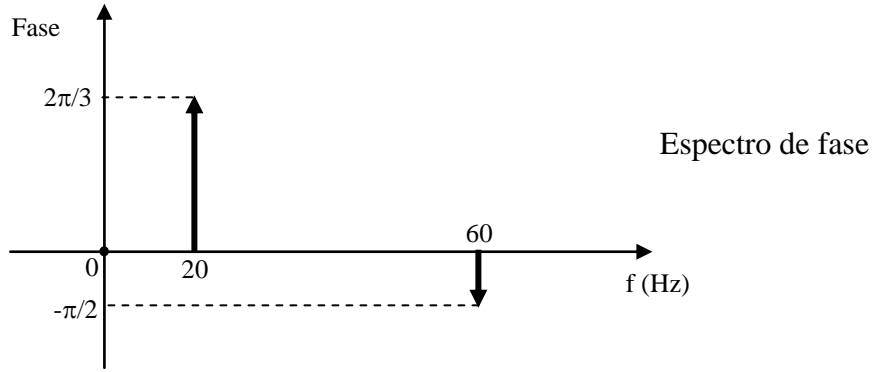
$$k = 3p \Rightarrow k = 3 \wedge p = 1$$

então, $T = \frac{1}{20}$ s.

ii)

$$\begin{aligned} v(t) &= 7 - 10 \cos(40\pi t - \frac{\pi}{3}) + 4 \sin(120\pi t) = \\ &= 7 \cos(2\pi 0t) + 10 \cos(40\pi t - \frac{\pi}{3} + \pi) + 4 \cos(120\pi t - \frac{\pi}{2}) \\ &= 7 \cos(2\pi 0t) + 10 \cos(2\pi 20t + \frac{2\pi}{3}) + 4 \cos(2\pi 60t - \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$





Por vezes, existem situações em que é mais útil outra representação espectral, que envolve *frequências negativas*.

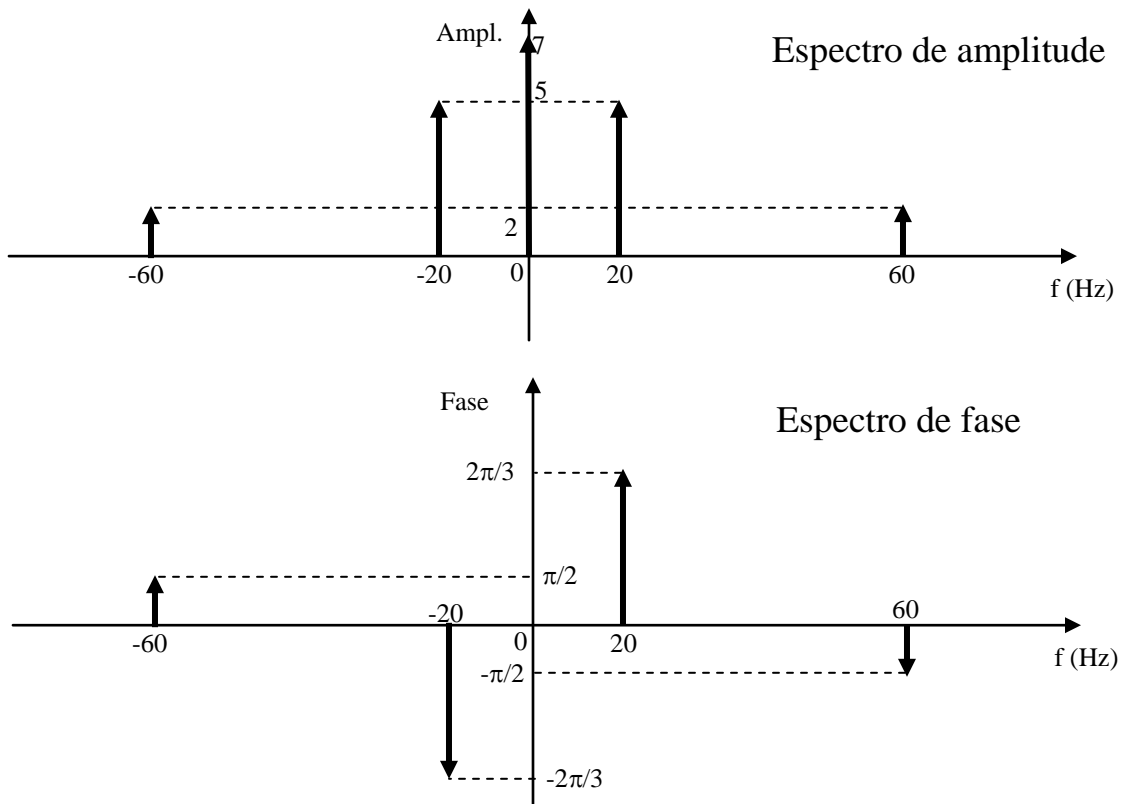
Esta representação é obtida partindo da seguinte relação:

$$\text{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

Sendo $z = Ae^{j(\omega_0 t + \phi)} = Ae^{j\omega_0 t} e^{j\phi}$ e $\bar{z} = Ae^{-j(\omega_0 t + \phi)} = Ae^{-j\omega_0 t} e^{-j\phi}$, então

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{1}{2} (Ae^{j\omega_0 t} e^{j\phi} + Ae^{-j\omega_0 t} e^{-j\phi}) = \frac{A}{2} e^{j\omega_0 t} e^{j\phi} + \frac{A}{2} e^{-j\omega_0 t} e^{-j\phi}$$

e os espectros de amplitude e fase do exercício anterior ficam:



Para a análise de sinais, o espectro de amplitude é o mais utilizado, porque indica que frequências estão presentes no sinal, e em que proporção. No exemplo anterior, o sinal é composto por uma componente DC e duas componentes sinusoidais de frequências 20 e 60 Hz.

Depois deste tema introdutório, será feita uma análise de sinais inversa, i.e., será estudado um processo para decompor qualquer sinal periódico numa soma de componentes sinusoidais, designado por Séries de Fourier.

As séries de Fourier a estudar serão de dois tipos:

- Série Trigonométrica
- Série Exponencial

Série Trigonométrica

Se $f(t)$ for um sinal periódico, pode ser definido por um somatório de componentes sinusoidais, o qual se chama Série trigonométrica de Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nw_0 t) + b_n \sin(nw_0 t)]$$

em que $w_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

Cada componentes sinusoidal tem frequência angular nw_0 , onde w_0 é a frequência angular fundamental.

Os coeficientes de amplitude são assim calculados:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(nw_0 t) dt, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(nw_0 t) dt, n = 1, 2, 3, \dots$$

De notar que o coeficiente a_0 , tal como é definido, corresponde ao dobro do valor médio da função $f(t)$, ao longo de um período.

O intervalo de integração deve ter uma amplitude equivalente a um período, podendo iniciar-se em qualquer instante. No lugar do intervalo $[-T/2, T/2]$, pode ser definido $[0, T]$, ou de uma forma mais genérica, $[k, k + T]$ ($k = C.^{te}$).

Caso particular:

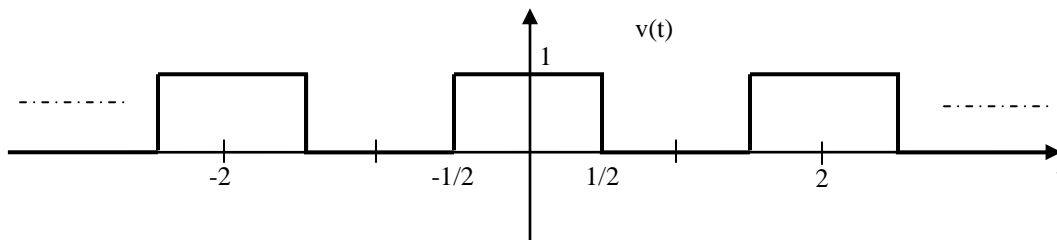
Se $f(t)$ for um sinal par ou ímpar, o cálculo dos coeficientes pode ser simplificado.

$$\begin{cases} \text{Se } f(t) \text{ é um sinal par} \Rightarrow b_n = 0. \\ \text{Se } f(t) \text{ é um sinal ímpar} \Rightarrow a_n = a_0 = 0. \end{cases}$$

O procedimento para calcular uma série trigonométrica é:

1. Desenhar a função periódica, $f(t)$.
2. Determinar o período, T_0 .
3. Calcular a_0 , a_n e b_n .
4. Escrever a série trigonométrica de Fourier.

Exemplo: Desenvolver em série trigonométrica de Fourier o sinal periódico $v(t)$:



Utilizando o procedimento atrás descrito, a Série de Fourier para o sinal $v(t)$ é assim calculada:

1. O sinal $v(t)$ já está devidamente representado.
2. Por definição, o período é o menor intervalo de tempo no qual um sinal se repete. Por isso, o período do sinal $v(t)$ é $T = 2$.
3. Da análise do sinal $v(t)$, verifica-se que é uma função par, e $b_n = 0$. Para se poder calcular a_0 e a_n , é necessário definir o sinal $v(t)$ ao longo de um período. Tomando como intervalo $[-1, 1]$, fica:

$$v(t) = \begin{cases} 0, & -1 < t < -\frac{1}{2} \\ 1, & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-1}^1 v(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-1/2}^{1/2} v(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-1/2}^{1/2} dt = \int_{-1/2}^{1/2} dt = [t]_{-1/2}^{1/2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-1/2}^{1/2} v(t) \cos(nw_0 t) dt = \int_{-1/2}^{1/2} \cos(nw_0 t) dt = \frac{1}{nw_0} [\sin(nw_0 t)]_{-1/2}^{1/2} = \\ &= \frac{1}{nw_0} \left[\sin\left(\frac{nw_0}{2}\right) - \sin\left(-\frac{nw_0}{2}\right) \right] = \frac{1}{n\pi} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right) \right] = \frac{1}{n\pi} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \sin\left(+\frac{n\pi}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}} = \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \quad \left(\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right) \end{aligned}$$

4. Calculados todos os coeficientes, chegou o momento de escrever o sinal $v(t)$ na forma de uma Série de Fourier:

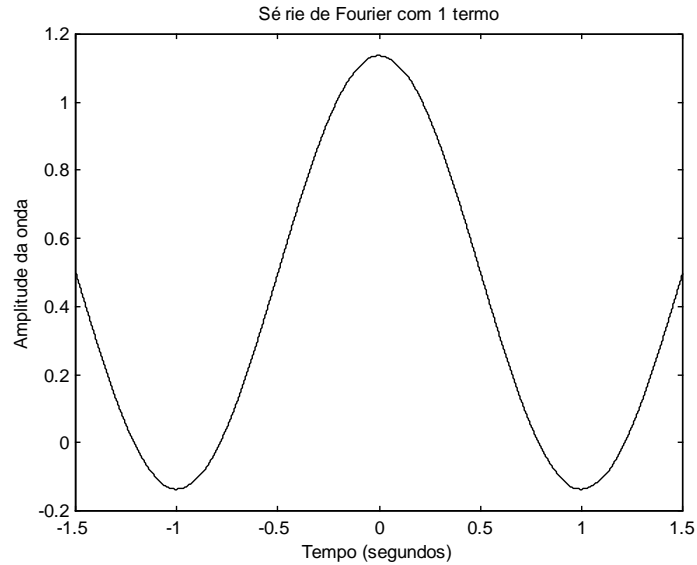
$$v(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nw_0 t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \cos(nw_0 t)$$

Iremos proceder à verificação da validade da expressão obtida, incrementando sucessivamente o valor n do somatório.

$$n = 0 \quad v(t) = \frac{1}{2}$$

é um sinal constante, de amplitude $\frac{1}{2}$.

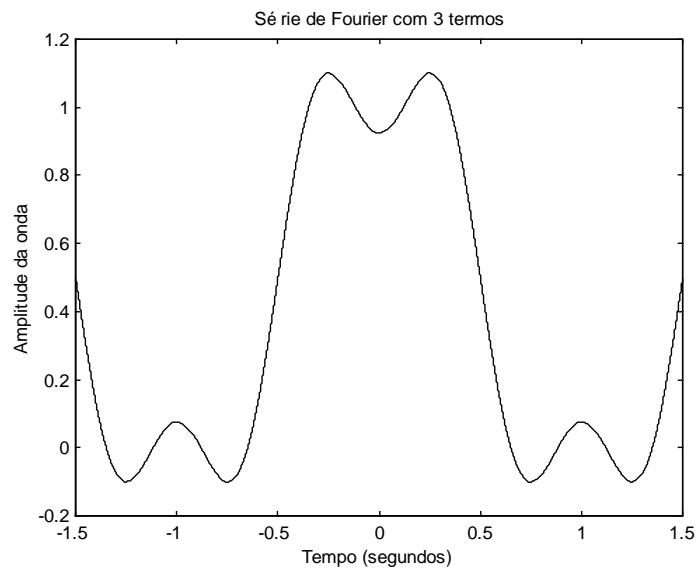
$$n = 1 \quad v(t) = \frac{1}{2} + \text{sinc}\left(\frac{1}{2}\right) \cos(w_0 t) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} \cos(\pi t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(\pi t)$$



$$n = 2 \quad v(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(\pi t) + \frac{\sin(\pi)}{\pi} \cos(2\pi t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(\pi t)$$

O gráfico é idêntico ao anterior, porque $\sin(\pi) = 0$

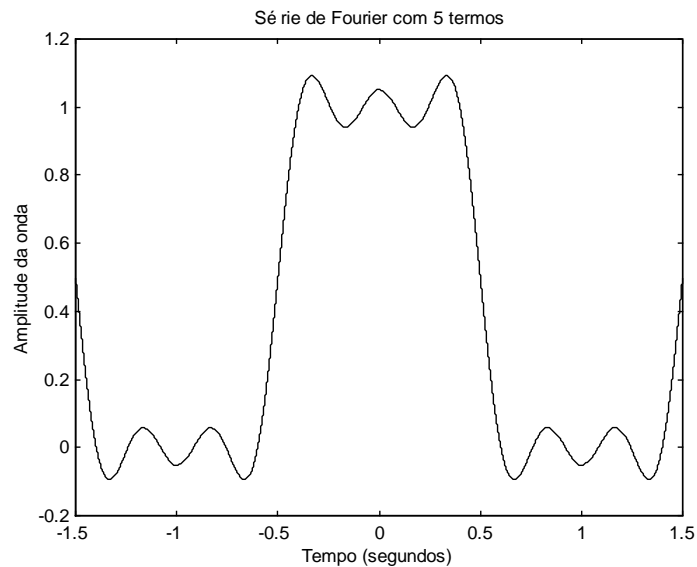
$$n = 3 \quad v(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(\pi t) + \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{\frac{3\pi}{2}} \cos(3\pi t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(\pi t) - \frac{2}{3\pi} \cos(3\pi t)$$



$$n = 4 \quad v(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(\pi t) - \frac{2}{3\pi} \cos(3\pi t) \quad \text{porque} \quad \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{2}\right)}{\frac{4\pi}{2}} = \frac{\sin(2\pi)}{2\pi} = 0$$

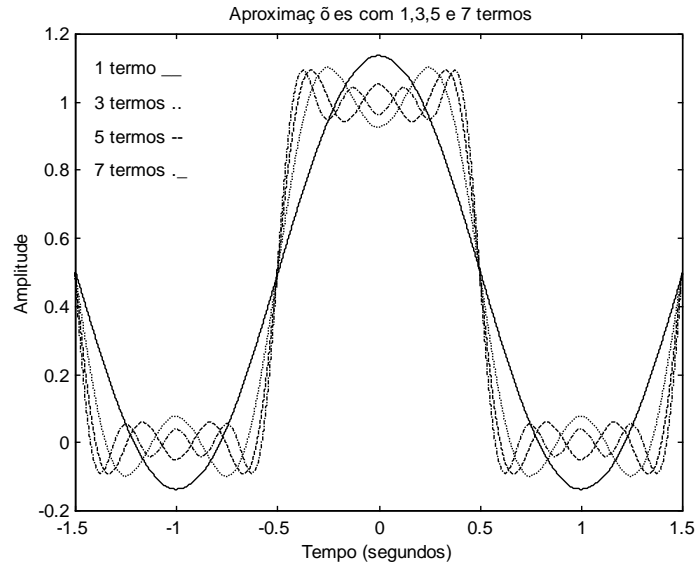
Nesta situação, o gráfico é idêntico ao anterior. Podemos desde já verificar que todas as contribuições do somatório com índice par maior ou igual a 2 serão zero.

$$n = 5 \quad v(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(\pi t) - \frac{2}{3\pi} \cos(3\pi t) + \frac{2}{5\pi} \cos(5\pi t)$$



Verifica-se neste último gráfico o efeito da soma sucessiva de sinusóides, com amplitude e frequência diferentes, de modo a formar uma onda quadrada, com as características do sinal $v(t)$.

Na figura seguinte estão representados os gráficos das primeiras 7 aproximações à onda $v(t)$ por uma série de Fourier.

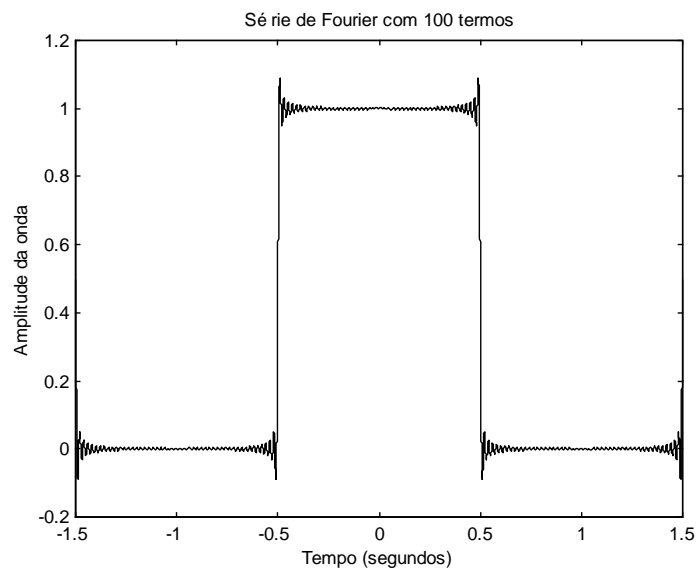


Verifica-se que o valor nos pontos de descontinuidade está de acordo com a definição:

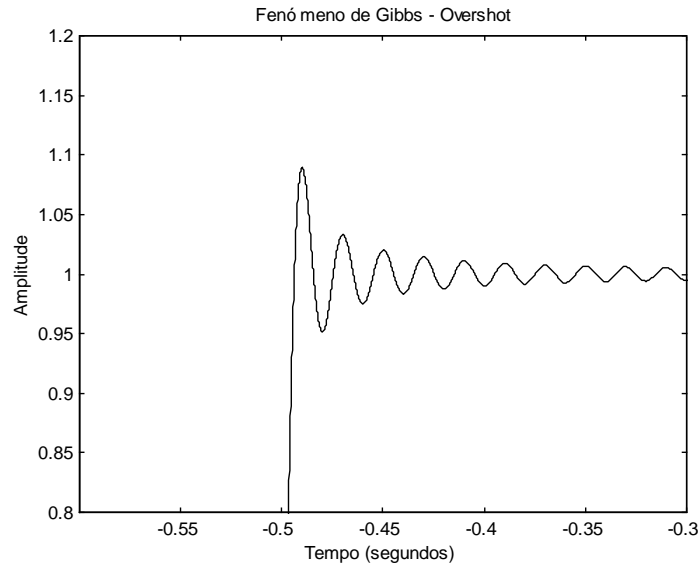
$$\left(\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}^-} v(t) + \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}^+} v(t) \right) \cdot \frac{1}{2} = (0 + 1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$t = 0.5 \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{1}{2}$$

Se o número de termos aumentar, melhor é a aproximação à onda $v(t)$:



De notar que existe um fenómeno junto às descontinuidades da função $v(t)$:



Trata-se do fenómeno de *Gibbs*. Consiste numa sobre elevação do valor da função (*Overshoot*) que se mantém presente, por mais termos somados à Série de Fourier.

Qual será o espectro do sinal $v(t)$?

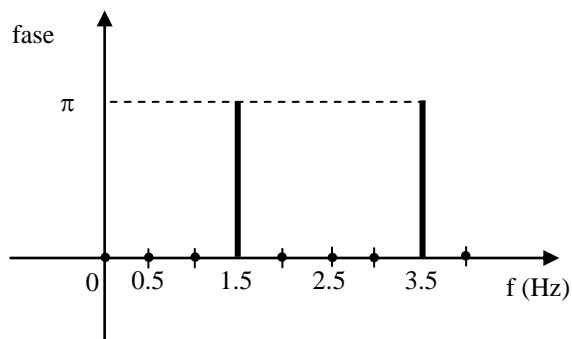
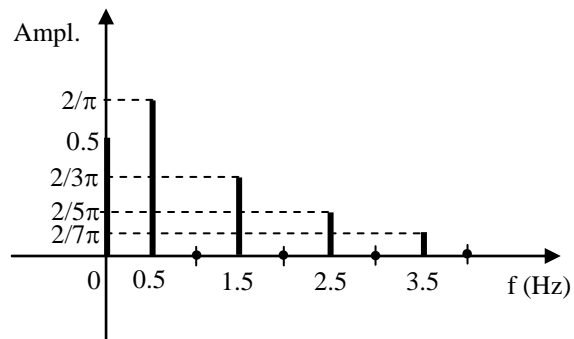
$$\begin{aligned}
 v(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \cos(n\pi t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}} \cos(n\pi t) = \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{ampl.}} \underbrace{\cos(2\pi \cdot 0 \cdot t)}_{\text{freq.}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}\right)}_{\text{amplitude}} \underbrace{\cos\left(2\pi \frac{n}{2} t\right)}_{\text{freq.}}
 \end{aligned}$$

A componente constante do sinal $v(t)$ tem sempre amplitude 0.5 e frequência zero. As restantes componentes do sinal têm amplitude e frequência variáveis, dependentes de n . Como já foi dito atrás, a representação espectral de um sinal é dividida por dois gráficos, amplitude e fase, em função da frequência. O quadro que segue apresenta os cálculos para as primeiras 8 riscas espectrais do sinal $v(t)$:

n	frequência (Hz)	amplitude	fase
0	0	$\frac{1}{2}$	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{\pi}$	0
2	1	0	0
3	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3\pi}$	π
4	2	0	0
5	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{5\pi}$	0
6	3	0	0
7	$\frac{7}{2}$	$\frac{2}{7\pi}$	π

Exercício: Para $n = 3$ e $n = 7$, existe uma variação de fase. Baseado nas convenções sobre representação espectral, tente explicar porquê.

A representação do espectro de $v(t)$ fica:



Exercício: Apresente o espectro de $v(t)$ utilizando uma representação com frequências negativas.

Série Exponencial

A Série Exponencial de Fourier deduz-se a partir da Série Trigonométrica, utilizando a definição exponencial do seno e co-seno.

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \quad [6]$$

$$\cos(n\omega_0 t) = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} \quad [7]$$

$$\sin(n\omega_0 t) = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j} \quad [8]$$

Substituindo a equação [7] e [8] na equação [6], fica:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j} \right] = \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[e^{jn\omega_0 t} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2j} \right) + e^{-jn\omega_0 t} \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2j} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{jn\omega_0 t} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-jn\omega_0 t} \left(\frac{a_n + jb_n}{2} \right) \quad [9] \end{aligned}$$

supondo que:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a_0 = c_0 \\ \frac{a_n - jb_n}{2} = c_n \\ \frac{a_n + jb_n}{2} = c_{-n} \end{cases}$$

a expressão [9] fica:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$$

Esta série pode ser escrita de forma mais compacta:

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_0 t} = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{jn\omega_0 t} = \\ &= c_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad [10] \end{aligned}$$

A expressão [10] é a forma exponencial da série de Fourier.

O coeficiente c_n pode ser calculado sem recorrer aos coeficientes da série trigonométrica:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

É importante referir que as duas formas da série de Fourier aqui estudadas são equivalentes, embora forneçam uma descrição formal do sinal $f(t)$ distintas.

Como já foi visto, existe uma relação entre os coeficientes das séries trigonométrica e exponencial.

$$\begin{cases} c_0 = \frac{1}{2} a_0 \\ c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} a_0 \\ a_n = 2 \operatorname{Re}[c_n] \\ b_n = -2 \operatorname{Im}[c_n] \end{cases}$$

Teorema de Parseval

Se $x(t)$ for um sinal periódico, a sua potência média é definida por:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} |x(t)|^2 dt$$

A potência média do sinal pode ser obtida através dos parâmetros das séries de Fourier:

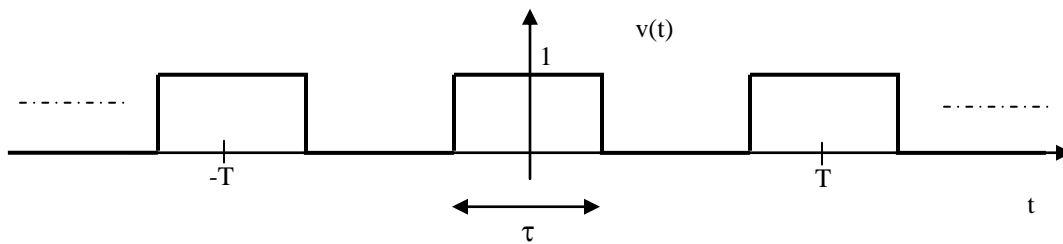
Série Exponencial: $\bar{P} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$

Série Trigonométrica: $\bar{P} = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$

Transformada de Fourier

No capítulo anterior, analisamos a aproximação de um sinal periódico através de uma série de Fourier. Vamos rever a aproximação usando uma série exponencial.

Seja $v(t)$ um sinal periódico:



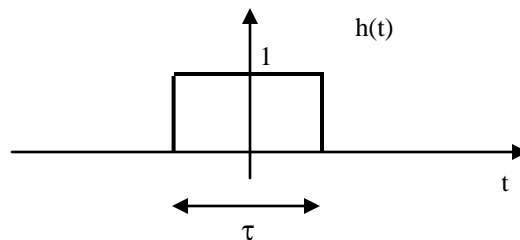
A aproximação por uma série exponencial é:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_n e^{jn\omega_0 t}$$

e

$$v_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \right)$$

Se o sinal a aproximar for este,



Não é possível utilizar uma série de Fourier, já que não é um sinal periódico. No entanto, seria útil estudar este grupo de sinais usando a análise Fourier, devido à sua presença e uso em diversos campos, como a electrónica ou as telecomunicações.

Tal é possível, para sinais com energia limitada no tempo, definindo a **Transformada de Fourier**:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$$

$H(\omega)$ é a representação do sinal $h(t)$ no domínio da frequência.

A definição anterior pode ser invertida, isto é, é possível recuperar o sinal $h(t)$ baseado na transformada de Fourier:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

$h(t)$ é desta forma, a transformada inversa de Fourier de $H(\omega)$.

A transformada de Fourier representa-se pelo operador \mathcal{F} .

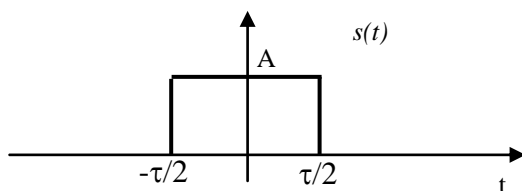
$$\begin{aligned} H(\omega) &= \mathcal{F}[h(t)] \\ h(t) &= \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} h(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(\omega) \\ h(t) &\xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} H(\omega) \end{aligned}$$

Exemplo:

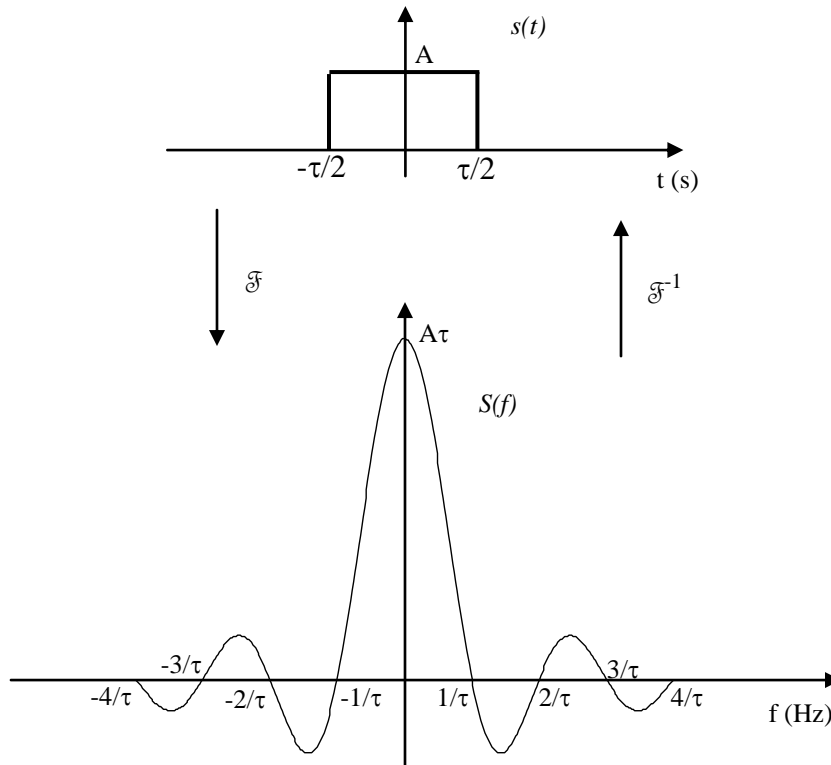
Calcular a transformada de Fourier do sinal $s(t)$:



$$s(t) = \begin{cases} A, & -\tau/2 < t < \tau/2 \\ 0, & \text{restantes pontos} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 s(t) \xrightarrow{F} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} Ae^{-j\omega t} dt = A \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-\tau/2}^{+\tau/2} = \frac{A}{-j\omega} \left[e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2} \right] = \\
 &= \frac{A}{\omega} \left[\frac{e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}}{-j} \right] = \frac{A}{\omega} \left[\frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{j} \right] = \frac{2A}{\omega} \left[\frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{2j} \right] = \frac{2A}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = \\
 &= \frac{2A}{2\pi f} \sin\left(\frac{2\pi f\tau}{2}\right) = \frac{A}{\pi f} \sin(\pi f\tau) = A\tau \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau} = A\tau \text{sinc}(f\tau)
 \end{aligned}$$

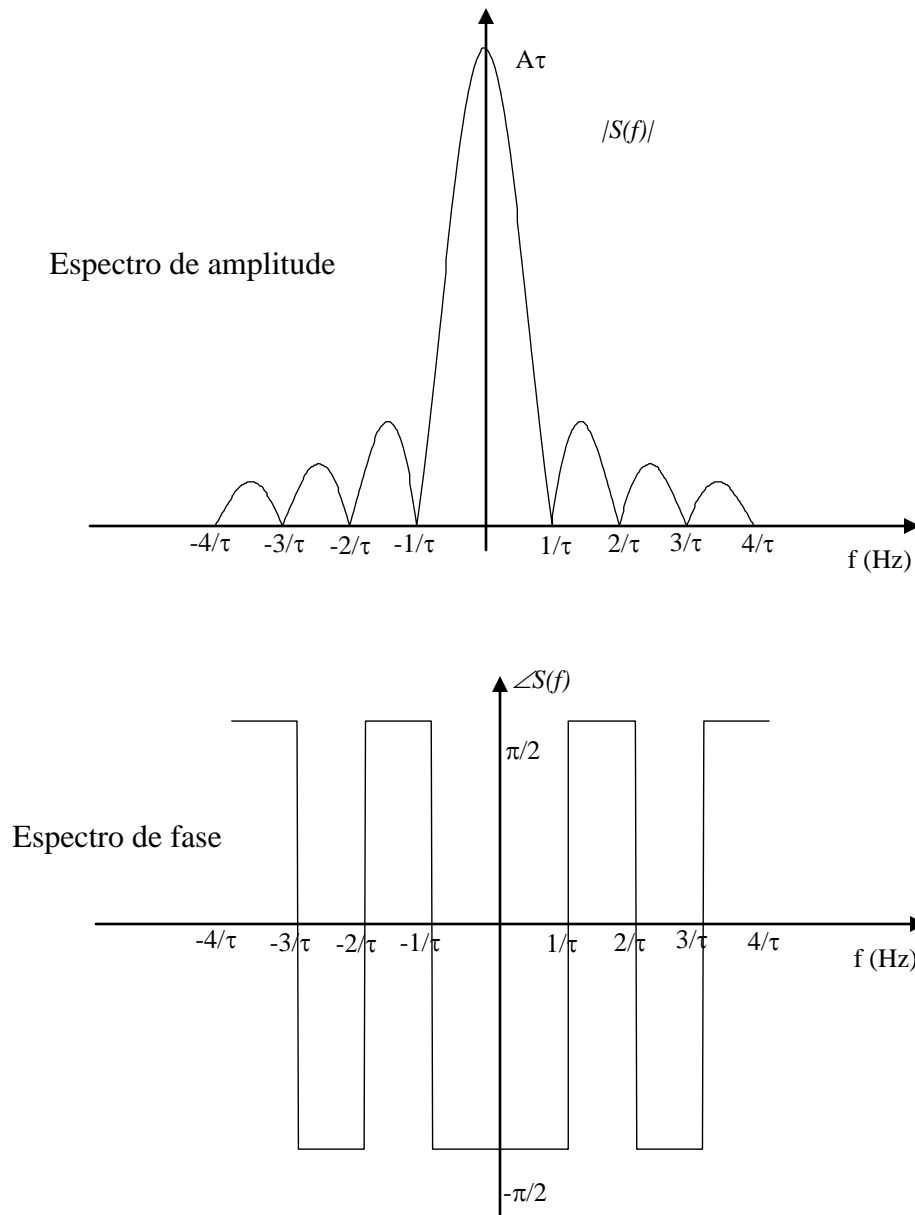
Deste exemplo se conclui que o espectro de um sinal quadrado não periódico é uma função sinc.



Com base na expressão de $S(f)$, são obtidos os espectros de amplitude e fase de $s(t)$.

$$S(f) = A\tau \text{sinc}(f\tau) = A\tau \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau} = \frac{A}{\pi f} \sin(\pi f\tau) = \underbrace{\frac{A}{\pi f}}_{\text{Ampl.}} \cos\left(\underbrace{\pi f\tau - \frac{\pi}{2}}_{\text{Fase}}\right)$$

Mais uma vez, é necessário aplicar a convenção adoptada para a representação espectral de amplitude e fase. Pela expressão anterior, a fase é $-\frac{\pi}{2}$. No entanto, como a amplitude deve ser sempre positiva, a fase deve ser acrescida de π sempre que o sinal $S(f)$ for negativo. Desta análise resultam os seguintes gráficos:



Comparando este exemplo com o realizado com um sinal quadrado periódico, retira-se uma conclusão importante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Funções periódicas - Espectro de frequência discreto (riscas espectrais)} \\ \text{Funções não periódicas - Espectro de frequência contínuo.} \end{array} \right.$$

Propriedades da transformada de Fourier

Foi visto que um sinal pode sofrer determinadas transformações elementares no tempo: avanços, atrasos, mudanças de escala, etc. Quais serão as consequências de tais transformações no espectro do sinal? A transformada de Fourier é uma ferramenta essencial para responder à pergunta.

Seja um sinal $f(t)$ e a sua transformada:

$$F(w) = \mathfrak{F}[f(t)]$$

1. Atraso no tempo

$$\mathfrak{F}[f(t-t_0)] = F(w)e^{-jw t_0}$$

2. Avanço no tempo

$$\mathfrak{F}[f(t+t_0)] = F(w)e^{jw t_0}$$

3. Mudança de escala

$$\mathfrak{F}\left[f\left(\frac{t}{k}\right)\right] = |k| F(kw)$$

$$\mathfrak{F}[f(kt)] = \frac{1}{|k|} F\left(\frac{w}{k}\right)$$

4. Linearidade / sobreposição

Se

$$F_1(w) = \mathfrak{F}[f_1(t)]$$

$$F_2(w) = \mathfrak{F}[f_2(t)]$$

então,

$$\mathfrak{F}[af_1(t) + bf_2(t)] = aF_1(w) + bF_2(w)$$

5. Diferenciação

Seja

$$F(w) = \mathfrak{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

e

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(w)e^{j\omega t} dw$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(w)e^{j\omega t} dw \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(w) \frac{e^{j\omega t}}{dt} dw = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(w) j\omega e^{j\omega t} dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [j\omega F(w)] e^{j\omega t} dw \end{aligned}$$

O termo entre parêntesis rectos no interior do integral é a transformada de $\frac{df(t)}{dt}$.

Esta conclusão é obtida analisando a definição de transformada inversa de Fourier, e deduzindo daí esse resultado.

$$\mathfrak{F} \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = j\omega F(w)$$

Generalizando,

$$\mathfrak{F} \left[\frac{df^{(n)}(t)}{dt} \right] = (j\omega)^n F(w)$$

6. Integração

$$\mathfrak{F} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{j\omega} F(w) + \pi f(0)\delta(w)$$

Se $f(0) = 0$,

$$\mathfrak{F} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{j\omega} F(w)$$

7. Dualidade

Se

$$F(w) = \mathcal{F}[f(t)]$$

Fica,

$$\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-w)$$

8. Convolução / multiplicação

Existe uma estreita relação entre a convolução e a multiplicação de sinais. Esta afirmação é confirmada pela seguinte análise:

Seja $s_o(t)$ um sinal resultante da convolução de $s_i(t)$ por $h(t)$,

$$s_o(t) = s_i(t) * h(t)$$

onde $\begin{cases} s_i(t) \rightarrow & \text{sinal de entrada} \\ h(t) \rightarrow & \text{resposta impulsional do sistema} \end{cases}$

Partindo da definição de transformada inversa,

$$\begin{aligned} S_o(w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_o(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [s_i(t) * h(t)] e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} s_i(\tau) * h(t-\tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s_i(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_i(\tau) H(w) e^{-j\omega \tau} d\tau = H(w) \int_{-\infty}^{+\infty} s_i(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = H(w) S_i(w) \end{aligned}$$

então,

$$s_i(t) * h(t) \xrightarrow{\text{F}} S_i(w) H(w)$$

“A convolução de dois sinais no domínio do tempo corresponde a uma multiplicação das suas transformadas, no domínio da frequência.”

Também seria possível verificar, por um processo semelhante, que

$$f(t)g(t) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \frac{1}{2\pi} F(w) * G(w)$$

Qual a utilidade desta última relação?

A sua utilidade reside no facto de ser um método alternativo para calcular a resposta temporal de um sistema, quando excitado por um sinal de entrada, sem recorrer à operação de convolução. De um modo sucinto, os passos necessários para realizar este processo são:

1. Calcular a transformada de Fourier de $s_i(t)$.

$$S_i(w) = \mathfrak{F}[s_i(t)]$$

2. Calcular a transformada de Fourier de $h(t)$.

$$H(w) = \mathfrak{F}[h(t)]$$

3. Calcular $S_o(w)$

$$S_o(w) = H(w) \cdot S_i(w)$$

4. Calcular a transformada inversa de $S_o(w)$

$$s_o(t) = \mathfrak{F}^{-1}[S_o(w)]$$

Transformada de Fourier de funções especiais

Impulso de Dirac

Utilizando a definição de transformada,

$$\mathfrak{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt \quad [11]$$

É sabido que,

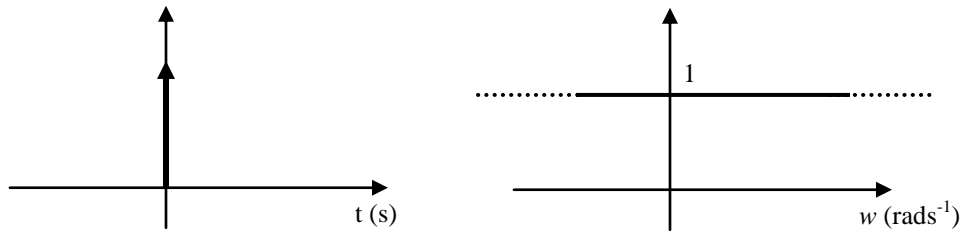
$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

Verifica-se que qualquer valor multiplicado por um impulso de Dirac é diferente de zero apenas quando $t=0$.

$$\delta(t) \cdot e^{-j\omega t} \neq 0, \quad t = 0$$

Simplificando a expressão [11],

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$



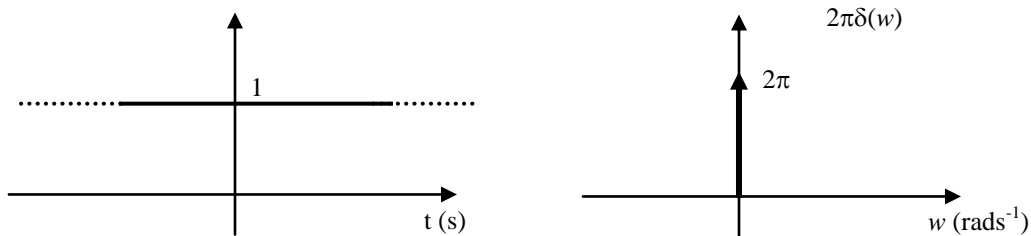
Constante

Seja $s(t) = k$, $k = c \cdot t^e$

$$S(\omega) = \mathcal{F}[s(t)] = \mathcal{F}[k] = 2\pi k \delta(\omega)$$

Se $k=1$,

$$S(\omega) = 2\pi \delta(\omega)$$



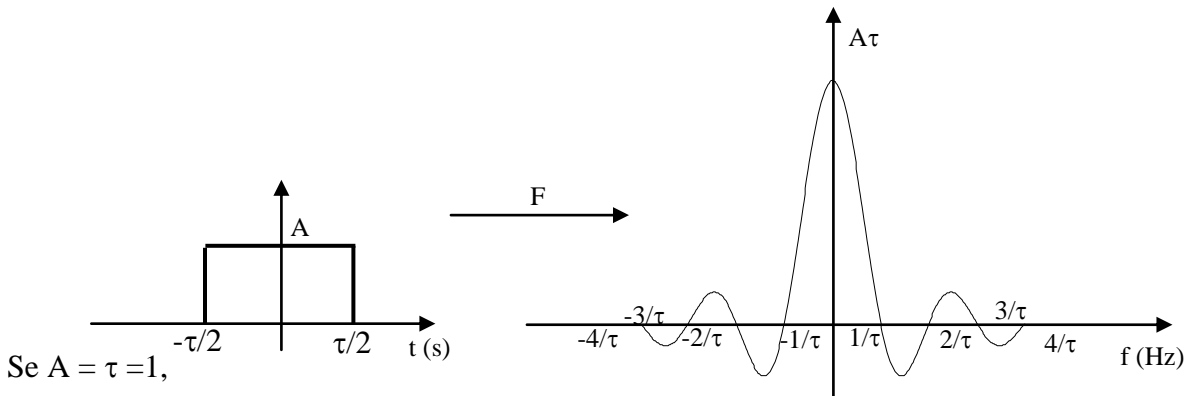
Função rect

Seja $s(t)$ um sinal rectangular com largura τ e amplitude A :

$$s(t) = A \text{rect}_{\tau}(t) = A \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

A transformada de Fourier foi calculada num exercício anterior, e é:

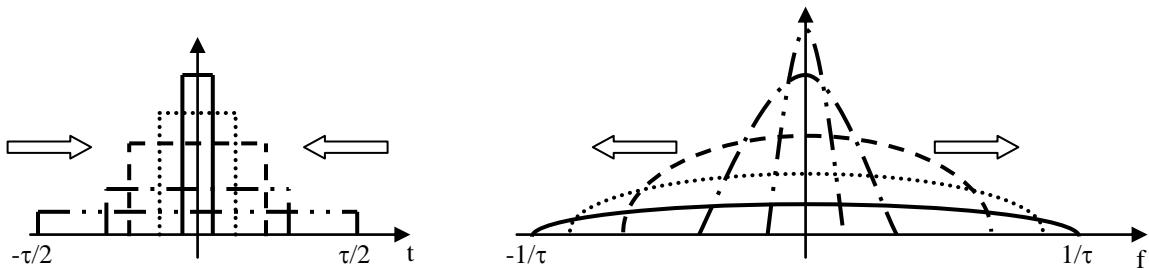
$$\mathcal{F}[s(t)] = S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) e^{-j\omega t} dt = A \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \tau}{2\pi}\right) = A \tau \operatorname{sinc}(f \tau)$$



Se $A = \tau = 1$,

$$\mathcal{F}[\operatorname{rect}(t)] = S(\omega) = \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \operatorname{sinc}(f)$$

Nota: O resultado da transformada do impulso de Dirac pode ser interpretado como o resultado da transformada do sinal rectangular, quando $\tau \rightarrow 0$.



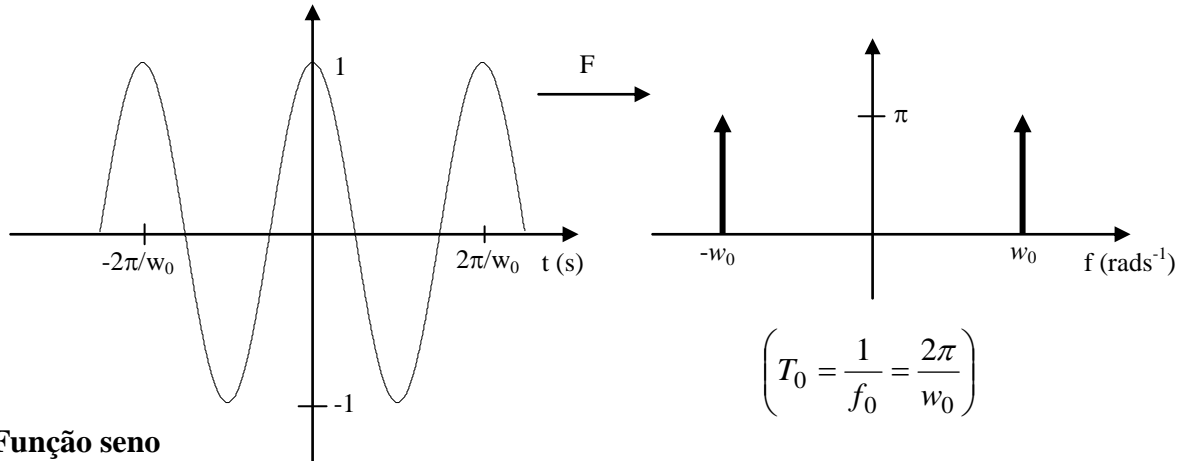
função co-seno

$$s(t) = \cos(\omega_0 t)$$

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jt(\omega_0 - \omega)} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jt(-\omega_0 - \omega)} dt \right] = \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jt(\omega - \omega_0)} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jt(\omega + \omega_0)} dt \right] \end{aligned}$$

$$\text{Como } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} dt = \delta(\omega) 2\pi \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = \delta(\omega - \omega_0) 2\pi,$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2} (2\pi \delta(\omega - \omega_0) + 2\pi \delta(\omega + \omega_0)) = \pi (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$$



Função seno

A transformada da função seno será obtida com base no resultado anterior.

$$\begin{aligned} s(t) &= \sin(w_0 t) = \cos\left(w_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2\pi f_0 \left(t - \frac{\pi T_0}{2 \cdot 2\pi}\right)\right) \\ &= \cos\left(2\pi f_0 \left(t - \frac{T_0}{4}\right)\right) = \cos\left(w_0 \left(t - \frac{T_0}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

A diferença entre as funções seno e co-seno reside num atraso temporal de $\frac{T_0}{4}$. Com base na propriedade de atraso temporal e na transformada da função co-seno, é possível obter a transformada da função seno.

$$\text{Como } \cos(w_0 t) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \pi[\delta(w - w_0) + \delta(w + w_0)],$$

$$\text{Então } \sin(w_0 t) = \cos\left(w_0 \left(t - \frac{T_0}{4}\right)\right) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \pi[\delta(w - w_0) + \delta(w + w_0)]e^{-jw\frac{T}{4}}.$$

A transformada de Fourier do seno é nula, excepto em $\pm w_0$, devido à presença de impulsos de Dirac centrados em $\pm w_0$. É então possível simplificar a expressão, analisando o seu valor nos pontos $\pm w_0$.

Se $w = w_0$:

$$\mathfrak{F}[s(t)] = \pi\delta(0)e^{-jw_0\frac{t_0}{4}} + 0 = \pi e^{-j\frac{2\pi T_0}{T_0}\frac{t_0}{4}} = \pi e^{-j\frac{\pi}{2}} = \pi(-j)$$

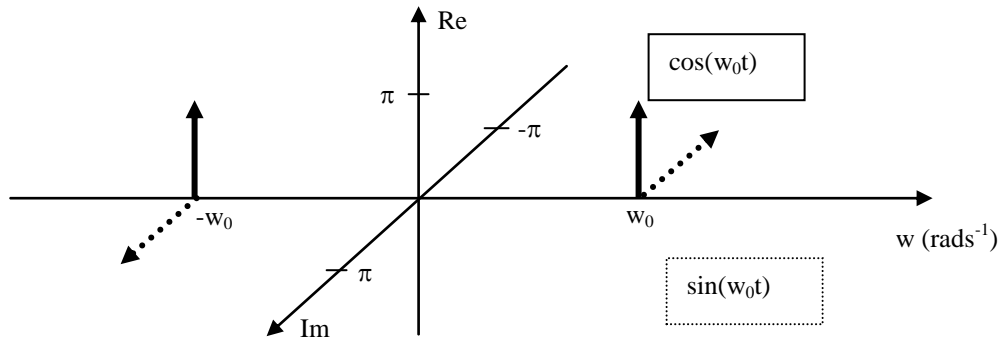
Se $w = -w_0$:

$$\mathfrak{F}[s(t)] = 0 + \pi\delta(0)e^{jw_0 \frac{t_0}{4}} = \pi e^{j \frac{2\pi T_0}{T_0} \frac{t_0}{4}} = \pi e^{j \frac{\pi}{2}} = \pi(j)$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[s(t)] &= \pi\delta(w - w_0)(-j) + \pi\delta(w + w_0)(j) \\ &\Leftrightarrow \\ \mathfrak{F}[s(t)] &= j\pi[\delta(w + w_0) - \delta(w - w_0)] \end{aligned}$$

A diferença entre a transformada das funções seno e co-seno reside no facto de se encontrarem em planos (domínios) diferentes. A transformada do co-seno é real, ao contrário da transformada de Fourier do seno, que é imaginária.



Degrau unitário

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \mathfrak{F}[u(t)] = \pi\delta(w) + \frac{1}{jw}$$

Função periódica genérica

Seja $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - kT)$ ou $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

Então,

$$\mathfrak{F}[f(t)] = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_0)\delta(w - n\omega_0) \quad \text{ou} \quad \mathfrak{F}[f(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(w - n\omega_0)$$

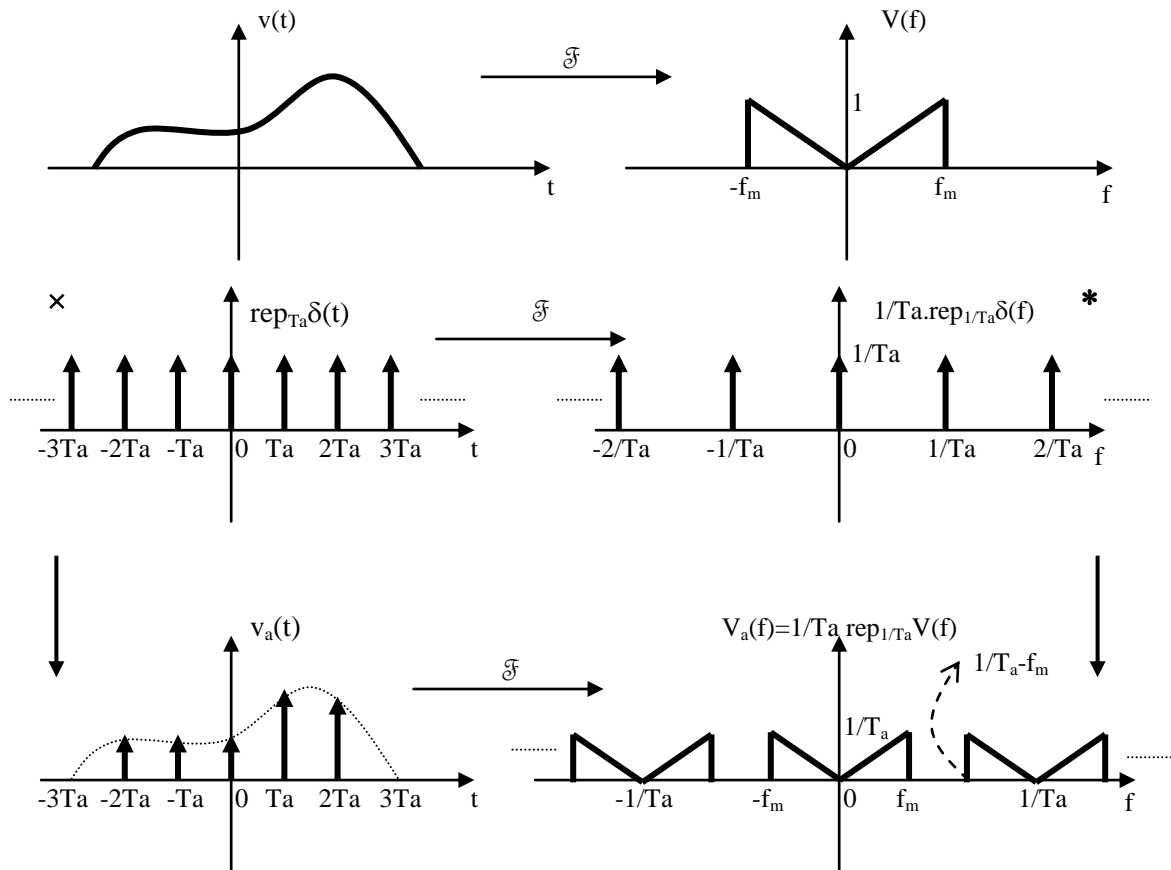
A transformada de Fourier de uma função periódica é uma sequência de impulsos equidistantes localizados nas frequências harmônicas (múltiplas) da frequência fundamental (w_0).

Exemplos de aplicação:

Teorema da amostragem

O estudo do teorema da amostragem será baseado num sinal $v(t)$, cujo espectro na frequência $V(f)$ é limitado, com largura f_m . Iremos verificar qual o efeito da amostragem sobre o espectro $V(f)$, e quais as condições para que o sinal $v(t)$ seja recuperado à partir do sinal amostrado. Todo o processo será visualizado por meio de esquemas, nos domínios do tempo e da frequência.

O primeiro passo consiste em amostrar o sinal $v(t)$, no tempo. Um dos processos para modelar este passo consiste em multiplicar o sinal por uma cadeia de impulsos de Dirac, linearmente espaçados no tempo, com período T_a .



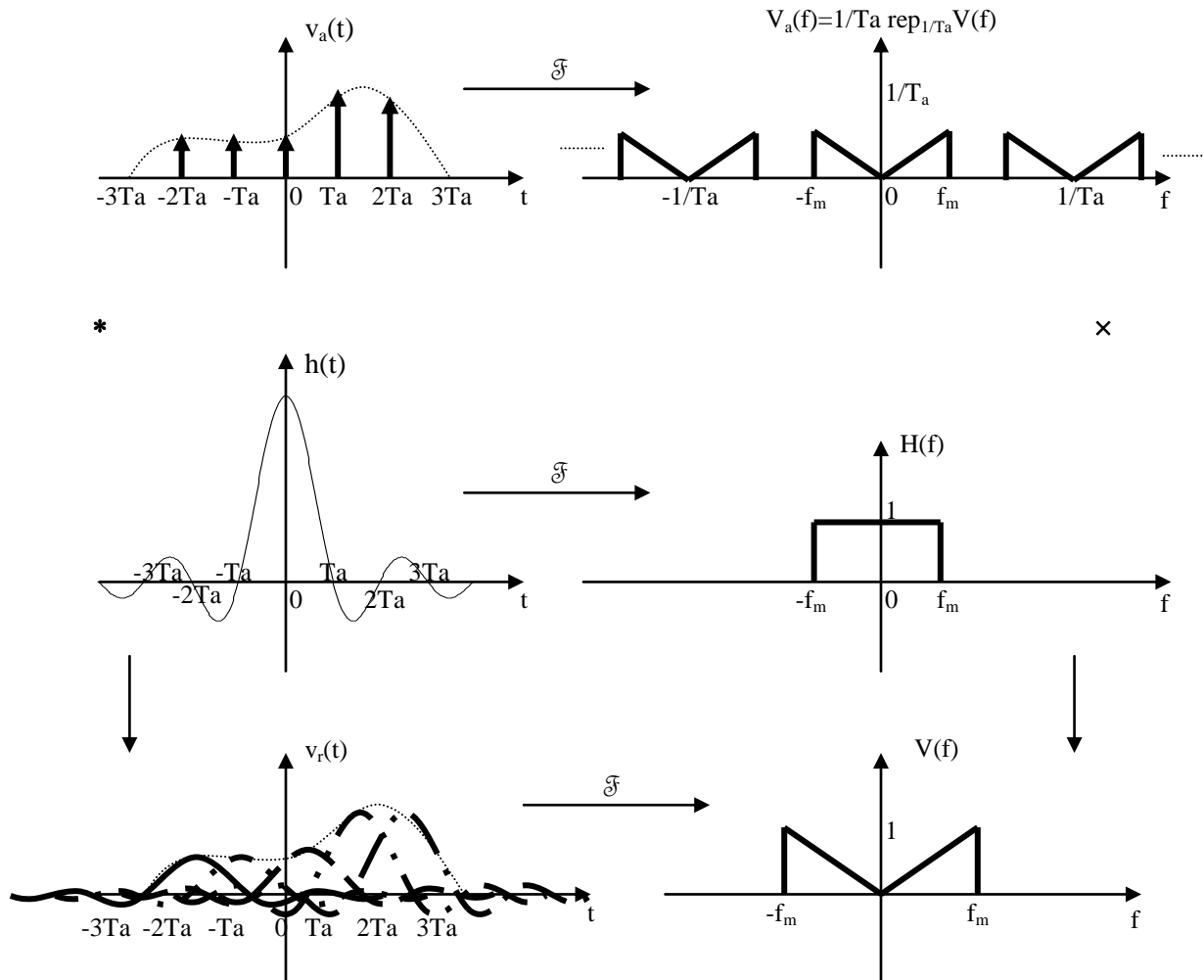
Verifica-se que o sinal amostrado $v_a(t)$ tem como espectro uma repetição do espectro de $v(t)$, em intervalos de frequência $1/T_a$. É fácil verificar no esquema a importância que tem

o período de amostragem na recuperação do sinal : Se $f_m \leq (1/T_a - f_m)$, não existe sobreposição das componentes espectrais, e o sinal $V(f)$ é recuperável. Se $f_m > (1/T_a - f_m)$, a sobreposição das componentes espectrais leva à deformação do espectro original, não sendo por isso possível a recuperação de $V(f)$. Essa relação pode ser apresentada de outra forma,

$$f_m \leq (1/T_a - f_m) \Leftrightarrow 2f_m \leq 1/T_a \Leftrightarrow 2f_m \leq f_a$$

onde f_a é a frequência de amostragem. Significa que para um sinal amostrado ser recuperável, a frequência de amostragem deve ser maior ou igual a duas vezes a largura de banda do sinal.

O sinal $v(t)$ pode agora ser recuperado filtrando o sinal amostrado. Supondo que a frequência de amostragem é suficientemente elevada para não existir sobreposição espectral (*aliasing*), o sinal $v_a(t)$ é colocado à entrada de um filtro passa-baixo, $h(t)$. A saída do sistema $v_r(t)$ é, como já sabemos, resultado da convolução da resposta impulsional $h(t)$ pelo sinal de entrada $v_a(t)$.



No domínio do tempo, existe uma convolução entre $va(t)$ e $h(t)$, o que resulta num conjunto de sinais interpolados, que no seu conjunto formam a função inicial. Por outro lado, existe na frequência um produto entre o espectro $V_a(f)$ e a função de transferência $H(f)$. O sinal resultante tem as mesmas características que o sinal original, de entre as quais se podem salientar a largura de banda e o conteúdo espectral (forma).

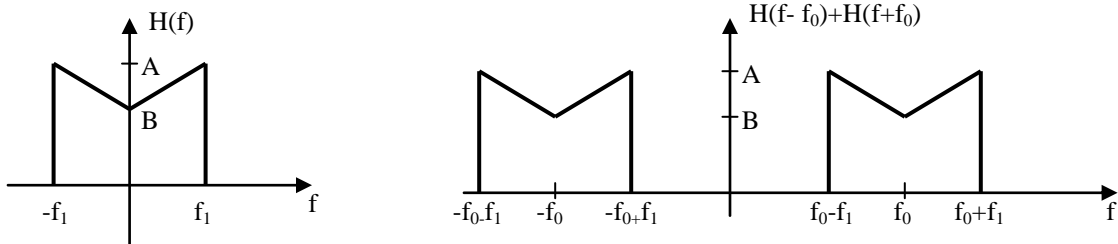
Este exercício é um exemplo da importância que as transformadas de Fourier têm na análise de sinais. Como foi possível verificar, todo o processo se tornou mais fácil de analisar no domínio da frequência.

Modulação

A modulação de sinais consiste em transportar para frequências mais elevadas um sinal de banda base. Tal é conseguido multiplicando o sinal por uma função sinusoidal de frequência elevada. Como consequência, o espectro do sinal de banda base é deslocado ao longo do eixo de frequências, para frequências positivas e negativas.

Sinal banda base: $h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(f)$

Sinal modulado: $h(t) \cos(2\pi f_0 t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(f - f_0) + H(f + f_0)$

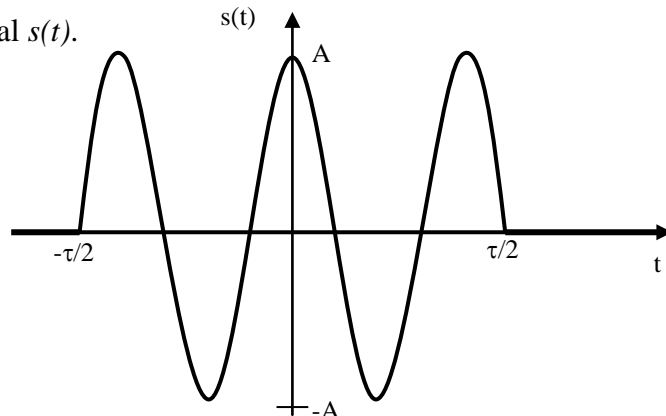


(Supõe-se que $f_0 \gg f_1$)

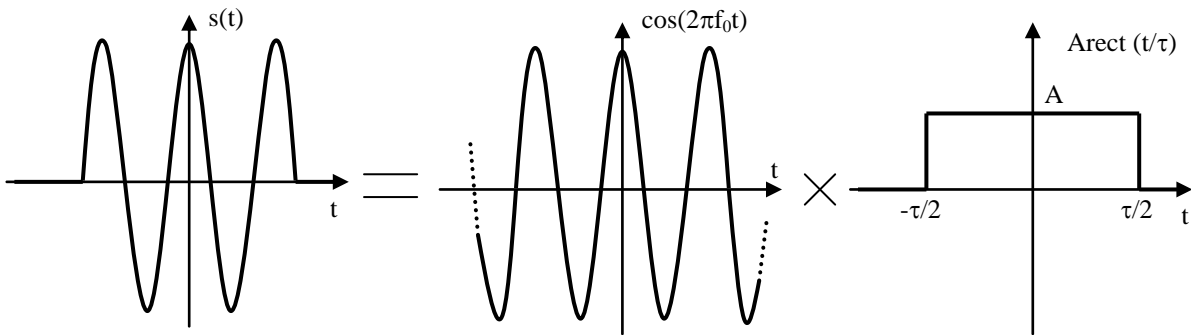
Do esquema anterior verifica-se que:

- Os componentes mais importantes do sinal ficam centrados em f_0 .
- Embora $H(f)$ tenha largura de banda f_1 , o sinal $H(f-f_0)$ tem largura espectral $2f_1$. a modulação duplica a largura espectral do sinal, isto é, a parte negativa do sinal aparece do lado positivo do eixo das frequências (e a componente positiva aparece do lado negativo).

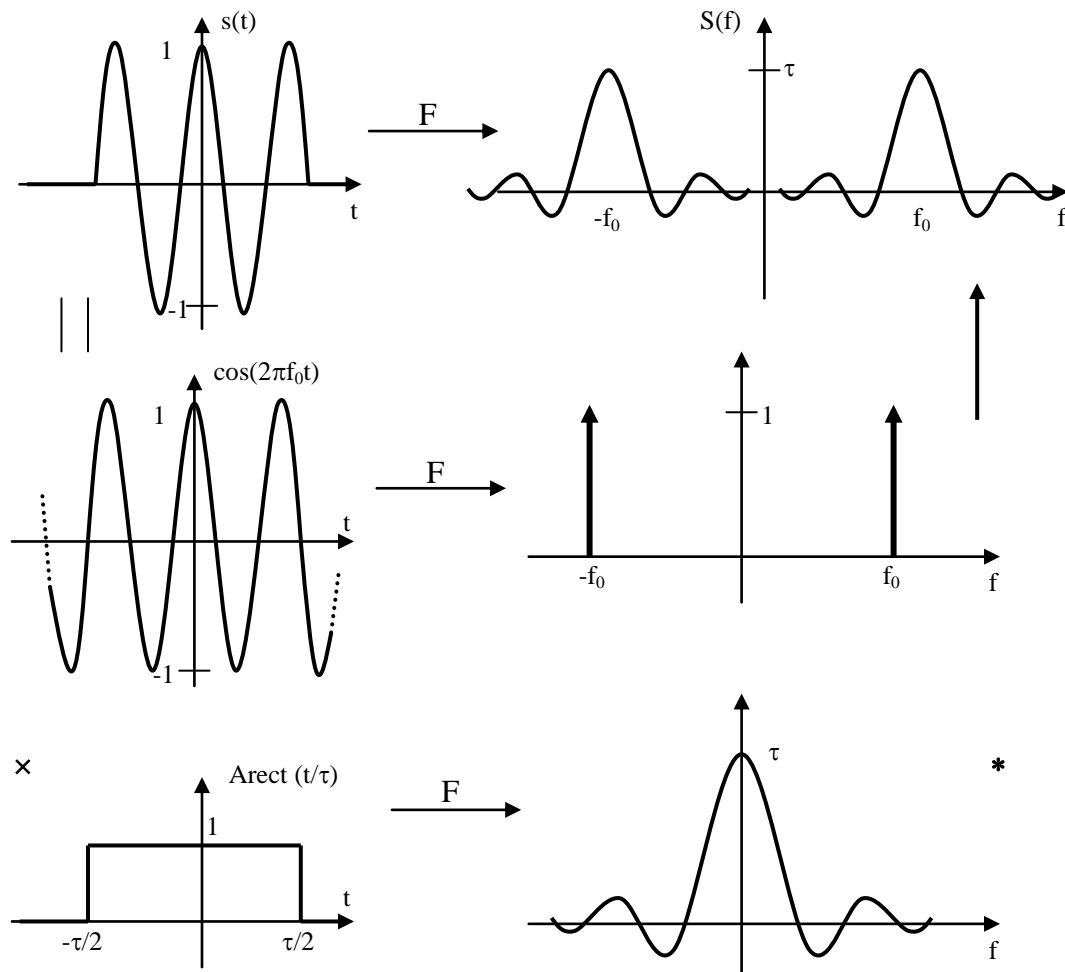
Exemplo 1: Calcular o espectro do sinal $s(t)$.



Um dos processos para calcular o espectro de $s(t)$ é considera-lo como o produto de dois sinais no tempo: Um sinal rectangular e um sinal sinusoidal.

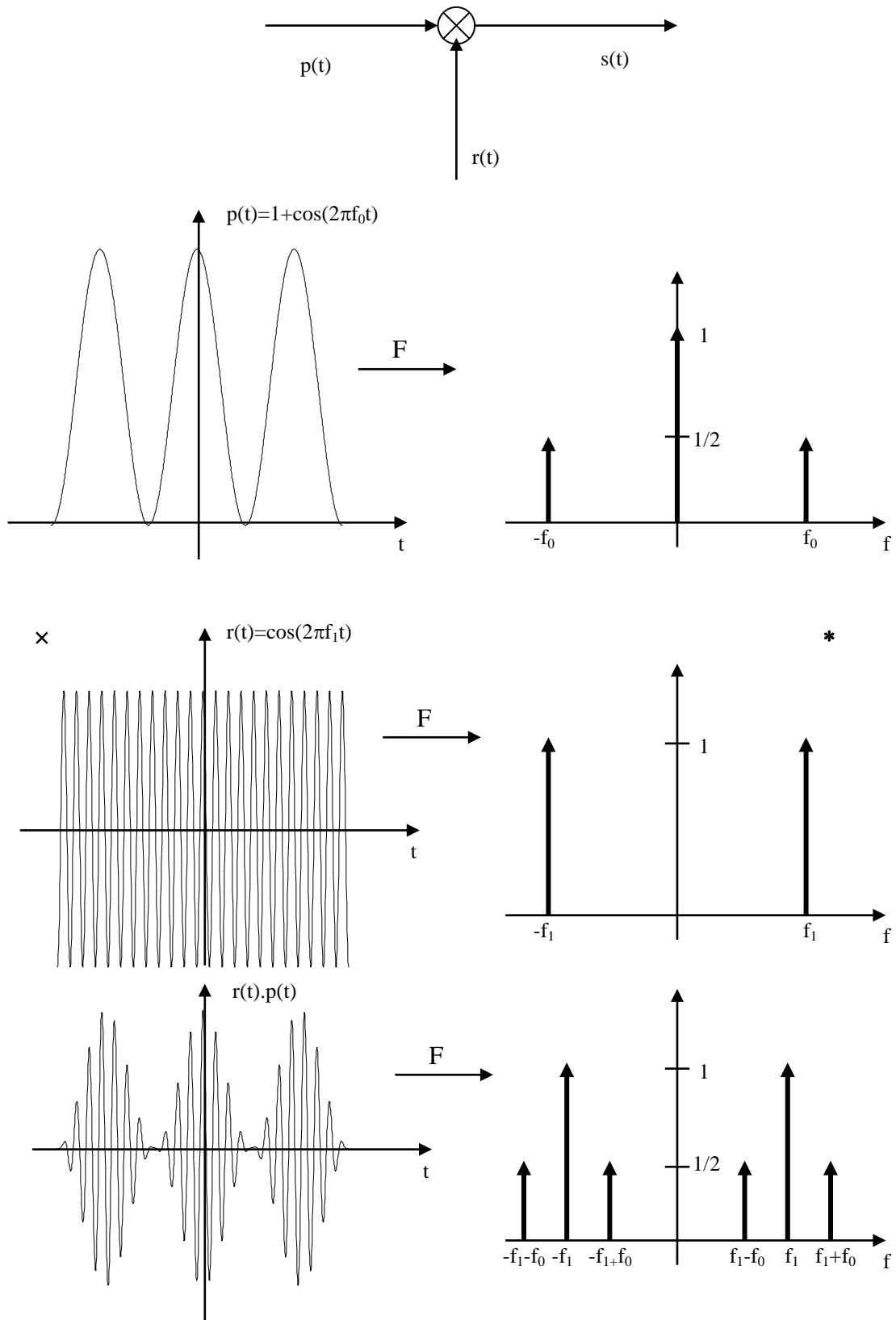


O sinal rectangular e a função sinusoidal têm transformadas conhecidas. A transformada de $s(t)$ será igual à convolução dos espectros das funções rectangular e sinusoidal.



Exemplo 2:

Representar o sinal $s(t)$ e o seu espectro, $S(f)$.



Como exercício, procure um processo para recuperar o sinal banda base, e mostre com base em esquemas as fases mais importantes.

Transformadas de Laplace

Definição

A Transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é definida como:

$$F(s) = \ell[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (t > 0)$$

onde $s = \sigma + j\omega$ é uma variável complexa.

A Transformada de Laplace tem aplicação em sistemas onde o fenómeno em causa se inicia no instante $t = 0$ s (É importante referir que a quase totalidade dos circuitos eléctricos são desse género). É por isso muito utilizada no estudo dos fenómenos transitórios.

Por sua vez, a Transformada de Fourier é utilizada em sistemas sem transições, considerando que estes não variam, ou que são invariantes durante um longo período de tempo.

Propriedades

Linearidade

$$\ell[af(t) \pm bg(t)] = aF(s) \pm bG(s)$$

Diferenciação

$$\ell\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^+)$$

Como extensão desta propriedade,

$$\ell\left[\frac{d^{(n)}f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - s^{n-3} f''(0^+) \dots - f^{(n-1)}(0^+)$$

$f(0^+)$ é o valor que a função toma imediatamente a seguir ao instante inicial.

Integração

Se $f(t)$ tiver transformada de Laplace,

$$\ell[f(t)] = F(s)$$

Significa que:

$$\ell \left[\int_{-\infty}^t f(\xi) d\xi \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s} f^{(-1)}(0^+)$$

onde $f^{(-1)}(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^t f(\varepsilon) d\varepsilon$

Caso particular:

$$\ell \left[\int_0^t f(\varepsilon) d\varepsilon \right] = \frac{F(s)}{s}$$

Diferenciação na frequência

$$\ell [t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^{(n)} F(s)}{ds^n}$$

Aplicando a propriedade de linearidade sobre a expressão anterior,

$$\ell [(-t)^n f(t)] = \frac{d^{(n)} F(s)}{ds^n}$$

Atraso ou avanço no tempo

A um atraso no tempo de a corresponde uma multiplicação na frequência da transformada $F(s)$ por e^{-as} . Um avanço no tempo de a reflecte-se na frequência pela presença de um coeficiente dado por e^{as} .

$$\ell [f(t \pm a)] = F(s) e^{\pm as}$$

Translação na frequência

$$\begin{aligned} \ell [f(t) e^{-as}] &= F(s + a) \\ \ell [f(t) e^{as}] &= F(s - a) \end{aligned}$$

Convolução / multiplicação

$$\ell[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

$$\ell[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j} [F_1(s) * F_2(s)]$$

Teorema do valor inicial

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s)$$

Teorema do valor final

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Transformadas de algumas funções típicas

$$1. \quad u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

$$\ell[u(t)] = \int_0^{+\infty} u(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{+\infty} = \frac{0-1}{-s} = \frac{1}{s}$$

$$2. \quad f(t) = \sinh(at) = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$$

$$\begin{aligned} \ell[f(t)] &= \ell[\sinh(at)] = \int_0^{+\infty} \frac{e^{at} - e^{-at}}{2} e^{-st} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (e^{t(a-s)} - e^{t(-a-s)}) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{t(a-s)}}{a-s} - \frac{e^{t(-a-s)}}{-a-s} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-t(s-a)}}{a-s} + \frac{e^{-t(a+s)}}{a+s} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{a-s} - \frac{1}{a+s} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-a-s-a+s}{a^2-s^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{-2a}{a^2-s^2} \right) = \frac{a}{s^2-a^2} \end{aligned}$$

$$3. f(t) = e^{at}$$

$$\ell[e^{at}] = \int_0^{+\infty} e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t(s-a)} dt = \left[\frac{e^{-t(s-a)}}{-(s-a)} \right]_0^{+\infty} = \frac{0}{-(s-a)} - \frac{1}{-(s-a)} = \frac{1}{s-a}$$

Transformada inversa de Laplace

A transformada inversa de Laplace permite obter uma resposta no tempo, a partir de uma expressão com domínio na frequência. No entanto, a definição de transformada inversa é pouco utilizada.

No seu lugar, é aplicado um processo de decomposição em fracções parciais, que visa decompor uma expressão racional num somatório de funções mais simples, que têm transformada inversa fornecida em tabelas.

Seja $F(s)$ uma transformada de Laplace do tipo racional:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)\dots(s-z_M)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)\dots(s-p_N)}$$

onde os termos z_0, z_1, \dots, z_n e p_0, p_1, \dots, p_m são números reais. $N(s)$ é o numerador e $D(s)$ é o denominador. O grau do numerador é M e o grau do denominador $D(s)$ é N . O grau do denominador é também designado ordem da função $F(s)$. os pólos $F(s)$ são os valores p_i , $i = 1, 2, \dots, N$ e os zeros de $F(s)$ são os valores z_i , $i = 1, 2, \dots, M$.

No seguinte desenvolvimento, iremos supor que $N \geq M$, isto é, o grau do denominador é maior ou igual ao grau do numerador.

A decomposição em fracções parciais será analisada em três situações:

1 – Pólos reais simples

Se a transformada $F(s)$ tiver um polo real simples,

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{k_0}{(s-s_0)} + \dots$$

k_0 é dado por

$$k_0 = (s-s_0)F(s)|_{s=s_0}$$

e

$$\ell^{-1}\left\{\frac{k_0}{s-s_0}\right\} = k_0 e^{s_0 t}$$

Exemplo:

Calcular a transformada inversa de $F(s) = \frac{s-3}{s^2+5s+6}$

O denominador de $F(s)$ pode ser factorizado, e é igual a $(s+2)(s+3)$.

$$F(s) = \frac{s-3}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

$$A = (s+2)F(s)\Big|_{s=-2} = \frac{s-3}{s+3}\Big|_{s=-2} = \frac{-2-3}{-2+3} = -5$$

$$B = (s+3)F(s)\Big|_{s=-3} = \frac{s-3}{s+2}\Big|_{s=-3} = \frac{-3-3}{-3+2} = 6$$

Substituindo os resultados de A e B na expressão de $F(s)$,

$$F(s) = \frac{-5}{s+2} + \frac{6}{s+3}$$

A transformada inversa é:

$$\begin{aligned} f(t) &= \ell^{-1}\{F(s)\} = \ell^{-1}\left\{\frac{-5}{s+2} + \frac{6}{s+3}\right\} = \ell^{-1}\left\{\frac{-5}{s+2}\right\} + \ell^{-1}\left\{\frac{6}{s+3}\right\} = -5\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + 6\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = \\ &= -5e^{-2t} + 6e^{-3t} \end{aligned}$$

2 – Pólos complexos

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{k_1}{(s-\alpha-j\beta)} + \frac{\bar{k}_1}{(s-\alpha+j\beta)} + \dots$$

Aqui utiliza-se um procedimento como no caso anterior. k_1 é dado por:

$$k_1 = (s-\alpha-j\beta)F(s)\Big|_{s=\alpha+j\beta}$$

e

$$\bar{k}_1 = (s-\alpha+j\beta)F(s)\Big|_{s=\alpha-j\beta}$$

A transformada inversa fica:

$$f(t) = \ell^{-1} \left\{ \frac{k_1}{s - \alpha - j\beta} + \frac{\bar{k}_1}{s - \alpha + j\beta} \right\} = k_1 e^{(\alpha + j\beta)t} + \bar{k}_1 e^{(\alpha - j\beta)t}$$

Como k_1 é um número complexo, pode-se escrever na forma polar:

$$k_1 = Me^{j\phi} \quad \Rightarrow \quad \bar{k}_1 = Me^{-j\phi}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= Me^{j\phi} e^{(\alpha + j\beta)t} + Me^{-j\phi} e^{(\alpha - j\beta)t} = Me^{\alpha t} \left(e^{j\phi + j\beta t} + e^{-j\phi - j\beta t} \right) = Me^{\alpha t} \left(e^{j(\phi + \beta t)} + e^{-j(\phi + \beta t)} \right) \\ &= 2Me^{\alpha t} \cos(\phi + \beta t) \end{aligned}$$

Sempre que a transformada $F(s)$ conter um par de pólos complexos conjugados, a transformada inversa $f(t) = \ell^{-1}[F(s)]$ terá um termo sinusoidal.

3 – Pólos reais de ordem múltipla

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s - s_0)^n D_1(s)} = \\ &= \frac{k_0}{(s - s_0)^n} + \frac{k_1}{(s - s_0)^{n-1}} + \dots + \frac{k_{n-1}}{(s - s_0)} + \dots \end{aligned}$$

A expansão em fracções parciais tem n termos. Os valores k_0, k_1, \dots, k_{n-1} são definidos por:

$$\begin{aligned} k_0 &= (s - s_0)^n F(s) \Big|_{s=s_0} \\ k_1 &= \frac{d}{ds} \left[(s - s_0)^n F(s) \right] \Big|_{s=s_0} \\ &(\dots) \\ k_j &= \frac{1}{j!} \frac{d^{(j)}}{ds^j} \left[(s - s_0)^n F(s) \right] \Big|_{s=s_0} \end{aligned}$$

A cada termo da forma $\frac{A}{(s - s_0)^k}$ corresponde um termo do sinal $f(t)$ dados por:

$$\ell^{-1} \left\{ \frac{A}{(s - s_0)^k} \right\} = A \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} e^{s_0 t}$$

Exemplo:

Seja $F(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s^2(s+1)}$. Calcule a transformada inversa, $f(t)$.

$F(s)$ tem 1 polo real simples dado por $(s+1)$, e um polo real múltiplo (s^2).

$$\frac{s^2 + 3s + 1}{s^2(s+1)} = \frac{A_0}{s+1} + \frac{B_0}{s^2} + \frac{B_1}{s}$$

$$A_0 = (s+1)F(s)\Big|_{s=-1} = \frac{s^2 + 3s + 1}{s^2}\Big|_{s=-1} = \frac{1-3+1}{1} = -1$$

$$B_0 = s^2 F(s)\Big|_{s=0} = \frac{s^2 + 3s + 1}{s+1}\Big|_{s=0} = 1$$

$$B_1 = \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} [s^2 F(s)]\Big|_{s=0} = \left(\frac{s^2 + 3s + 1}{s+1} \right)' \Big|_{s=0} = \left(\frac{2s+3}{s+1} - \frac{s^2 + 3s + 1}{(s+1)^2} \right) \Big|_{s=0} = \frac{3}{1} - \frac{1}{1} = 2$$

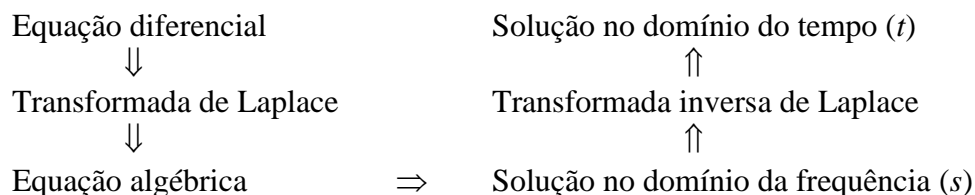
Então,

$$F(s) = \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}$$

A partir deste resultado, torna-se simples calcular $f(t)$, utilizando uma tabela de transformadas:

$$f(t) = \ell^{-1}[F(s)] = -1e^{-t} + 2 + t, \quad t > 0$$

As transformadas de Laplace têm grande aplicação na resolução de equações diferenciais. O processo de resolução substitui os cálculos envolvendo derivadas ou integrais, por operações algébricas, porque todos os cálculos são realizados no domínio da frequência.



Exemplo:

Resolva a seguinte equação: $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = u(t)$, sabendo que $y(0^+) = 1$,

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0^+} = 2 \text{ e } y(t) \xrightarrow{\ell} Y(s).$$

Aplicando as propriedades da diferenciação e da linearidade:

$$\begin{aligned} \ell \left\{ \frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y \right\} &= \ell \{u(t)\} \Leftrightarrow s^2Y(s) - sy(0^+) - \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0^+} + 3sY(s) - 3y(0^+) + 2Y(s) = \frac{1}{s} \\ &\Leftrightarrow \\ s^2Y(s) + s - 2 + 3sY(s) + 3 + 2Y(s) &= \frac{1}{s} \\ &\Leftrightarrow \\ Y(s)(s^2 + 3s + 2) &= \frac{1}{s} - s - 1 \\ &\Leftrightarrow \\ Y(s) &= \frac{1 - s^2 - s}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{-s^2 - s + 1}{s(s^2 + 3s + 2)} \end{aligned}$$

Qual a solução no tempo?

Para calcular $y(t) = \ell^{-1}\{Y(s)\}$, é necessário factorizar o denominador de $Y(s)$, e depois utilizar a decomposição em fracções parciais do denominador.

- Factorização do denominador

$$s(s^2 + 3s + 2) = 0 \Leftrightarrow s = 0 \vee s^2 + 3s + 2 = 0 \Leftrightarrow s = 0 \vee s = -2 \vee s = -1$$

- Decomposição em fracções parciais

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+1}$$

$$A = sF(s) \Big|_{s=0} = \frac{-s^2 - s + 1}{s^2 + 3s + 2} \Big|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$B = (s+2)F(s) \Big|_{s=-2} = \frac{-s^2 - s + 1}{s(s+1)} \Big|_{s=-2} = \frac{-4 + 2 + 1}{-2(-2+1)} = -\frac{1}{2}$$

$$C = (s+1)F(s)\Big|_{s=-1} = \frac{-s^2 - s + 1}{s(s+2)}\Big|_{s=-1} = \frac{-1+1+1}{-1} = -1$$

Substituindo,

$$Y(s) = \frac{1/2}{s} + \frac{-1/2}{s+2} + \frac{-1}{s+1}$$

O cálculo da transformada inversa é realizado com base em transformadas elementares, presentes nas tabelas de transformadas:

$$y(t) = \ell^{-1}\{Y(s)\} = \ell^{-1}\left\{\frac{1/2}{s} + \frac{-1/2}{s+2} + \frac{-1}{s+1}\right\} = \frac{1}{2}u(t) - \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-t}, \quad t > 0$$

Até este ponto, em todos os exemplos dados, a ordem do denominador foi sempre maior que a ordem do numerador. Será agora apresentado um exemplo em que a ordem do numerador é superior à ordem do denominador.

Exemplo:

Calcular a transformada inversa de $F(s)$.

$$F(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{s^2 + 3s + 2}$$

O numerador tem ordem superior à do denominador. É necessário dividir o numerador pelo denominador:

$$\begin{array}{r} s^3 + 5s^2 + 9s + 7 \quad | \quad s^2 + 3s + 2 \\ -s^3 - 3s^2 - 2s \quad \quad \quad s + 2 \\ \hline 0 + 2s^2 + 7s + 7 \\ -2s^2 - 6s - 4 \\ \hline 0 + s + 3 \end{array}$$

e fica:

$$F(s) = s + 2 + \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

Decomposição em fracções parciais da fracção:

$$\frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

$$A = \frac{s+3}{s+2} \Big|_{s=-1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$B = \frac{s+3}{s+1} \Big|_{s=-2} = \frac{1}{-1} = -1$$

Então $F(s) = s + 2 + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$.

$$\begin{aligned} \ell^{-1}\{F(s)\} &= \ell^{-1}\left\{s + 2 + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right\} = \ell^{-1}\{s\} + 2\ell^{-1}\{1\} + 2\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \ell^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = \\ &= \delta'(t) + 2\delta(t) + 2e^{-t} - e^{-2t} \end{aligned}$$

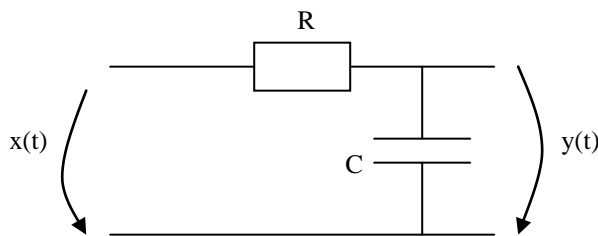
Nota:

$$\begin{array}{ccc} 1 \xrightarrow{\ell^{-1}} \delta(t) & & \\ s \xrightarrow{\ell^{-1}} \delta'(t) & \downarrow & \text{Propriedade da diferenciação} \end{array}$$

Serão a seguir apresentados dois exemplos, que demonstram a aplicação das transformadas de Laplace na procura da solução de circuitos eléctricos.

Exemplo 1:

Obter a solução do circuito quando a entrada for excitada por um degrau unitário. Suponha que $y(0) = 0$.



Equação diferencial: $x(t) = y(t) + RC \frac{dy(t)}{dt}$

Transformando a equação diferencial para o domínio da frequência,

$$X(s) = Y(s) + RC(sY(s) - y(0^+))$$

Se $x(t) = u(t) \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s}$. Como $y(0^+) = 0$,

$$\frac{1}{s} = Y(s) + RCsY(s) \Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s(1 + RCs)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{1 + RCs}$$

$$A = sY(s)\Big|_{s=0} = 1$$

$$B = (1 + RCs)Y(s)\Big|_{s=-1/RC} = -RC$$

Então,

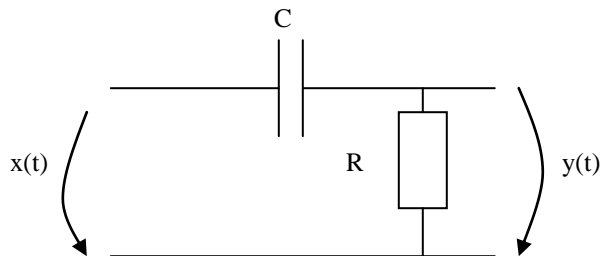
$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{RC}{1 + RCs} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/RC}$$

Aplicando a transformada inversa,

$$y(t) = u(t) - e^{-\frac{t}{RC}} = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t > 0$$

Exemplo 2:

Obter a solução do sistema quando $x(t) = u(t)$. Suponham que o condensador se encontra inicialmente descarregado.



No lugar da equação diferencial do sistema, iremos transformar as grandezas do circuito para o domínio da frequência.

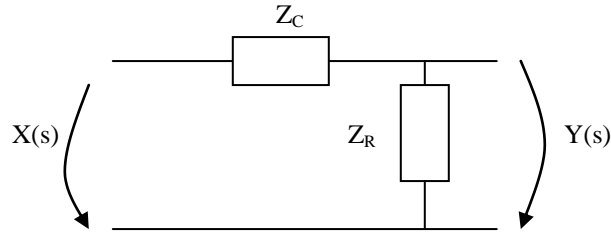
$$x(t) \xrightarrow{\ell} X(s)$$

$$y(t) \xrightarrow{\ell} Y(s)$$

$$R \xrightarrow{\ell} R$$

$$C \xrightarrow{\ell} \frac{1}{sC}$$

Podemos agora considerar os componentes R e C como impedâncias.



$$Y(s) = X(s) \frac{Z_R}{Z_R + Z_C} = X(s) \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = X(s) \frac{sRC}{1 + sRC}$$

Como $X(s) = \frac{1}{s}$,

$$Y(s) = \frac{sRC}{s(1 + sRC)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{1 + sRC}$$

$$A = \left. \frac{sRC}{1 + sRC} \right|_{s=0} = 0$$

$$B = \left. \frac{sRC}{s} \right|_{s=-1/RC} = RC$$

Substituindo,

$$Y(s) = \frac{RC}{1 + sRC} = \frac{RC}{RC \left(\frac{1}{RC} + s \right)} = \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

Aplicando a transformada inversa sobre $Y(s)$,

$$y(t) = \ell^{-1}\{Y(s)\} = \ell^{-1}\left\{ \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right\} = e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t > 0$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] C. Ray Wylie, Louis C. Barrett, “Advanced Engineering Mathematics”, McGraw Hill, 1995
- [2] Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, “Signals and Systems”, Prentice Hall Signal Processing, 2º Edition, 1997
- [3] Simon Haykin, Barry Van Veen, “Signals and Systems”, John Willey & Sons, Inc, 1999
- [4] Alexander D. Poularikas, “The Transforms and Applications Handbook”, CRC Press IEEE Press, 1995
- [5] A..V. Oppenheim, ”Digital Signal Processing”, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- [6] Variáveis Complexas e suas aplicações, Dinalivro Lda.
- [7] Bento José F. Murteira, “Probabilidade e Estatística”, Vol. I e II , McGraw Hill, 1990.
- [8] A. Bruce Carlson, “Communication Systems”, McGraw-Hill, 1986.
- [9] M. Augusta Ferreira Neves, “Livro de Texto 12º Ano”, Porto Editora, 1991

