UNIVERSIDADE DE SALAMANCA

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA,
ORGANIZACIÓN Y MÉTODOS DE EDUCACIÓN

ANÁLISE DAS CAPACIDADES METACOGNITIVAS DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada à Universidade de Salamanca para a obtenção do Grau de Salamanca no Doutoramento de Tecnologia Educativa, sob a orientação do Professor Doutor Juan Francisco Martín Izard

PAULO JOSÉ MARTINS AFONSO

SALAMANCA, 2001

UNIVERSIDADE DE SALAMANCA

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA,
ORGANIZACIÓN Y MÉTODOS DE EDUCACIÓN

ANÁLISE DAS CAPACIDADES METACOGNITIVAS DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada à Universidade de Salamanca para a obtenção do Grau de Salamanca no Doutoramento de Tecnologia Educativa, sob a orientação do Professor Doutor Juan Francisco Martín Izard

O Aluno: Paulo José Martins Afonso

O Orientador: Prof. Dr. Juan F. Martín Izard

SALAMANCA, 2001

RESUMO

Este estudo, de cariz exploratório, pretendeu abordar a temática da metacognição ao nível da formação de futuros professores de Matemática, em contexto de resolução de problemas.

Por outras palavras, pretendeu-se analisar e interpretar processos metacognitivos de futuros professores de Matemática, envolvidos na resolução de seis problemas de processo, seleccionados de uma bateria de problemas desse tipo. Esses futuros professores foram solicitados a pensar alto para que todo o processo de resolução verbalizado pudesse ficar registado em vídeo.

Em concreto, este estudo pretendeu dar resposta ao seguinte problema de investigação: Os tipos de problemas influenciarão os processos metacognitivos de futuros professores de Matemática, enquanto resolvem uma variedade de problemas e permitirão as vídeogravações o registo desses processos metacognitivos?

O estudo contou com a participação de dois grupos de três alunos de um Curso de Formação de Professores de uma Escola Superior de Educação portuguesa e a sua formação baseou-se na resposta a um questionário sobre a resolução de problemas e sobre o trabalhar dessa temática em grupo. Resultou um grupo A, cujos alunos evidenciaram ser bons resolvedores de problemas e gostavam de os resolver em grupo e, um grupo B, cujos alunos evidenciavam ser mais fracos na resolução de problemas e com menos motivação para o trabalhar em grupo esta temática.

Ambos os grupos resolveram os seis problemas de processo, envolvendo cada um deles um estratégia específica de resolução e todas as suas intervenções orais foram registadas em vídeo com posterior transcrição para o papel para se proceder à sua análise. A análise de conteúdo desses registos baseou-se nas quatro categorias do modelo de Lester (1985): Orientação, Organização, Execução e Verificação.

No caso das resoluções escritas dos problemas, estas foram analisadas através da escala holística focada de Charles et al. (1987).

Os resultados obtidos deixa-nos alguma apreensão no que diz respeito ao sucesso da resolução dos problemas. De facto, o grupo A só resolveu correctamente um dos seis problemas e o grupo B, dois.

Em termos gerais, verificou-se que independentemente do tipo de problemas, a categoria onde se registou maior número de intervenções metacognitivas foi a Verificação.

Em termos de desempenho metacognitivo, o grupo B mostrou ser mais reflexivo do que o grupo A, pois interveio metacognitivamente sempre muito mais do que o grupo A, se se exceptuar o problema nº 1.

Os grupos evidenciaram uma diferença importante entre si que consistiu no facto de o grupo A dedicar menor número de intervenções metacognitivas ao nível da concepção de planos de resolução e de selecção de estratégias adequadas à resolução dos problemas (categoria Organização), enquanto que o grupo B dedicou menor número de intervenções metacognitivas ao nível da compreensão dos problemas (categoria Orientação).

Atendendo ao reduzido número de problemas envolvidos, estes resultados carecem, naturalmente, de outros estudos posteriores que venham ou não confirmar esta tendência.

Por estes motivos, podemos dizer que, relativamente ao nosso problema de investigação, parece não haver uma relação muito estreita entre tipos de problemas e desempenhos metacognitivos, contudo, verificou-se que o registo vídeo assumiu um papel insubstituível para a análise e compreensão de todo o processo mental envolvido por cada grupo na resolução dos problemas.

Os resultados, apontam, pois, para a necessidade de realização de estudos posteriores que venham confirmar algumas das conclusões obtidas.

Palavras-chave: estratégias, gravação vídeo, metacognição, problema, processos metacognitivos, resolução de problemas.

Aos meus pais e
à Ana Sofia

AGRADECIMENTOS

- Ao Professor Doutor Juan Francisco Martín Izard, orientador deste estudo, o meu sincero reconhecimento pelos suas pertinentes sugestões, pelos constantes incentivos e pela sua total disponibilidade para orientar a realização deste estudo.

- Aos professores do Curso de Doutoramento de Tecnologia Educativa do Departamento de Didáctica, Organización y Métodos de Investigación da Faculdade de Educação da Universidade de Salamanca, pelos seus preciosos ensinamentos no âmbito da Tecnologia ao serviço da Educação.

- Aos docentes da Secção de Matemática do Departamento de Ciências e Matemática da Escola Superior de Educação, pelos seus incentivos para a realização deste Doutoramento.

- Aos Directores da Escola Superior de Educação de Castelo Branco, nas pessoas dos Professores Luís Costa, José Pires e Ernesto Candeias Martins, por todo o apoio e incentivos concedidos para a frequência deste Curso de Doutoramento.

- Aos alunos que participaram neste estudo, pelo entusiasmo e empenho manifestados desde o primeiro momento.

- Ao Dr. Carlos Reis e restante equipa do Centro de Recursos e Apoio Tecnológico da Escola Superior de Educação de Castelo Branco por todo o apoio concedido a nível técnico para a recolha de dados deste estudo.

- À incansável e sempre disponível Dona Antónia, pela sua inestimável colaboração ao nível da gestão do espaço para a realização do estudo.

- Ao Sr. Abel pelo seu profissionalismo.

- À minha família em geral e aos meus pais em particular, por todo o tempo que deixei de lhes dedicar e pelo apoio que sempre me deram.

- À Sofia, por todas a razões e mais alguma, que sacrificando os seus momentos de lazer, muito dedicou do seu tempo disponível para me apoiar com incentivos indispensáveis para que a vontade de continuar este trabalho não desvanecesse.

ÍNDICE DE CONTEÚDOS

LISTA DE ANEXOS

LISTA DE QUADROS

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1 – Orientação para o Problema

Falar hoje em ensino-aprendizagem da Matemática, nomeadamente ao nível dos primeiros anos de escolaridade, implica que se fale, obrigatoriamente, em resolução de problemas. Esta relação tem vido a ser sustentada nos últimos anos, não só ao nível das propostas curriculares apresentadas pelo Ministério da Educação português mas também nas mais variadas intervenções em que, a este propósito, a Associação de Professores de Matemática (APM) tem vindo a ter.

De facto, consultando os actuais programas de Matemática quer ao nível do 1º Ciclo do Ensino Básico, quer ao nível de outros ciclos de escolaridade, é notória a ênfase que tem sido atribuída à temática da resolução de problemas. A sua importância surge justificada ao nível do programa do 1º Ciclo através, por exemplo, dos seguintes motivos:

"a resolução de problemas coloca o aluno em atitude activa de aprendizagem, quer dando-lhe a possibilidade de construir noções como resposta às investigações levantadas (exploração e descoberta de novos conceitos), quer incitando-o a utilizar as aquisições feitas e a testar a sua eficácia (ME, 1990, p. 126)."

Ao nível do 2º Ciclo do Ensino Básico esta temática chega mesmo a ser encarada como sendo um "*eixo organizador*" (ME, 1991, p.164) do próprio ensino da Matemática.

Portugal atravessa, pois, um momento caracterizado por importantes mudanças ao nível do que deve ser o ensino-aprendizagem da Matemática. Este cenário, em nossa opinião, acaba por reflectir todo um conjunto de reflexões que a Associação de Professores de Matemática tem vindo a manifestar.

Esta renovação curricular ao nível dos programas de Matemática sentida no nosso país, dando-se ênfase à resolução de problemas, também é acompanhada a nível internacional. A título de exemplo, para além de todo o desenvolvimento de investigação nesta área produzido nos Estados Unidos, também a Reforma do Sistema Educativo espanhol reconhece a importância da resolução de problemas como conteúdo do currículo da Educação Obrigatória (Pérez e Pozo, 1994). De facto, de acordo com estes autores,

"o objectivo geral nº 4 do Desenho Curricular Base (DCB) da Educação Secundária Obrigatória (ESO) cita textualmente que no final da Educação Obrigatória, deve-se esperar do aluno «elaborar e desenvolver estratégias pessoais de identificação e resolução de problemas nos principais campos do conhecimento mediante a utilização de hábitos de raciocínio objectivo, sistemático e rigoroso e aplicá-las espontaneamente a situações da vida quotidiana» (p. 78)." (Pérez e Pozo, 1994, p. 14-15).

No sentido de tentarmos perceber esta necessidade de mudança, pensamos ser importante identificar os principais aspectos negativos de como era entendido o processo de ensino-aprendizagem da Matemática anterior a esta reforma curricular.

Concordamos com Fernandes (1989a) quando referira que

"parece não ser polémica que muita da matemática que se ensina nas nossas escolas não é compreendida. Muitos são os alunos que não compreendem o que fazem, limitam-se a escolher fórmulas e/ou outros algoritmos para darem respostas a questões rotineiras cujo enunciado é que vai variando e, como tal, desmotivadoras..." (p. 4).

De facto, o ensino anterior desta disciplina era caracterizado por aspectos rotineiros e pouco motivadores. Concordamos com Stacey e Groves (1999), quando referem que um ensino baseado fundamentalmente em exercícios não pode evidenciar o lado mais apaixonante da Matemática.

Qual de nós não se lembra de após nos terem mostrado a existência da fórmula resolvente das equações de segundo grau, nos terem "massacrado" com uma quantidade enorme de exercícios para aplicação desse algoritmo. Hoje sabemos ver que apenas se incidia na mecanização e na descontextualização da Matemática com a realidade. A Matemática era, pois, rotulada como "*assunto árido*" (Silva, 1992, p. 3) e tedioso (Gardner, 1992), onde os seus objectivos se centravam mais na aprendizagem dos conteúdos em vez de se valorizar o desenvolvimento de capacidades fundamentais à resolução de problemas (Lopes et al., 1990).

Exige-se hoje da escola que seja capaz de cumprir com a importante missão de dotar os seus alunos com um determinado perfil, por forma a conseguirem fazer frente às rápidas mudanças que a sociedade tem vindo a sofrer, fruto da sua evolução tecnológica e técnica. A escola, não pode, pois, demitir-se da importante função de propiciar condições para o desenvolvimento de indivíduos que sejam capazes de pensar de forma flexível, crítica, eficaz e criativa (Loureiro et al., 1992). Capacidades estas, indispensáveis para que consigam vir a resolver as inúmeras situações problemáticas com as quais se confrontam no seu dia a dia.

Apesar de se saber ainda muito pouco sobre a temática da resolução de problemas (Schoenfeld, 1992; Lester, 1994a, 1994b), tem sido uma área da Educação Matemática onde se tem investigado bastante nestes últimos trinta anos (Kilpatrick, 1985; Clement e Konold, 1989). Umas das conclusões que se poderá retirar desse caudal de investigação é que esta temática poderá dotar a disciplina de Matemática com as estratégias suficientes para se enfrentar esse desafio emergente da sociedade (Webb, 1979; Schoenfeld, 1979, 1980; Lester, 1983; Saljo e Wynhamn, 1990; Lester e Charles, 1992).

Fruto desse caudal de investigação, destacamos a publicação, nos Estados Unidos, de três importantes documentos pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM): "*An Agenda for Action*" (1980), "*Curriculum* *and Evaluation Standards for School Mathematics*" (1989) e "Principles and Standards for School Mathematics (2000).

Sendo a Agenda "*um documento cujo objectivo era o de sugerir direcções quanto ao desenvolvimento curricular e quanto à ênfase a dar ao ensino na década de 80* [nos Estados Unidos]" (Lester, 1994a, p. 18), ela esteve na origem desse período ter sido denominado "*a década da resolução de problemas*" (Lester, 1994a, p. 18). É, pois, a partir deste documento que se institui a ideia de que "*a resolução de problemas deveria ser o foco da Matemática escolar*" (NCTM, 1980, citado por Lester, 1994a, p.18).

Relativamente ao segundo documento, os Standards, podemos igualmente destacar que "*a resolução de problemas deveria ser o foco central do currículo de Matemática. Como tal, é um objectivo prioritário do ensino da Matemática e uma parte integral de toda a actividade matemática. A resolução de problemas não é um tópico distinto, mas um processo que atravessa todo o programa e fornece o contexto em que os conceitos devem ser aprendidos e as competências desenvolvidas*" (APM e IIE, 1991, p. 20).

Quanto ao último documento (Principles and Standards for School Mathematics), publicado recentemente (2000) pelo NCTM, pretende ser um recurso e um guia orientador para todos os que tem por função tomar decisões que afectem a Educação Matemática dos estudantes desde o Jardim de Infância até aos do 12º ano de escolaridade. Uma leitura atenta do índice da obra serve para que se perceba que passados 20 anos desde a publicação do primeiro destes três documentos, o National Council of Teachers of Mathematics continua a enfatizar imenso a temática da resolução de problemas, pois ela é contemplada em todos os anos ou níveis de escolaridade, desde o Pré-Escolar até ao 12º ano de escolaridade. O entendimento do que deve ser a resolução de problemas passa por considerar esta temática, não somente como sendo uma meta de aprendizagem mas também como sendo o maior contexto para se fazer Matemática (NCTM, 2000). Considera-se ainda que

> *"através da aprendizagem de resolução de problemas em Matemática, os estudantes adquirirão meios de pensamento, hábitos de persistência e curiosidade e confiança em situações não familiares que os ajudarão também em situações fora do contexto de sala de aula de Matemática" (NCTM, 2000, p. 52).*

A sua importância é de tal ordem que não deve ser entendida como uma parte isolada do programa mas sim uma parte integrada da aprendizagem matemática (NCTM, 2000), porque ensinar a resolver problemas representa dotar os alunos com a capacidade de aprender a aprender, habituando-os a serem eles próprios a procurar as respostas às suas próprias perguntas e inquietações (Pozo et al., 1994).

De facto, concordamos com Pozo et al. (1994) quando referem que a resolução de problemas implica que sejam os alunos a assumir uma atitude activa na procura das suas próprias respostas e do seu próprio conhecimento.

Se a área da resolução de problemas é uma área relativamente recente no cenário da Educação Matemática portuguesa, há que se reflectir no tipo de formação inicial que os professores de Matemática terão tido, têm o necessitarão de ter para enfrentar o desafio com que se confrontarão, que é o de levarem a cabo as sus aulas num ambiente de aprendizagem de resolução de problemas.

De acordo com Stacey e Groves (1999), a resolução de problemas é algo onde os professores de Matemática sentem alguma insegurança no quê e como ensiná-la.

Pensamos, pois, que há que se criar condições ao nível da formação de professores para que estes sintam motivação por esta área da Educação Matemática, dotando-os da confiança necessária para que eles próprios venham a ser bons resolvedores de problemas. Só assim conseguirão interessar também os seus alunos na tarefa, que não é fácil, da resolução de problemas. Concordamos com Jesús (1996), quando refere que resolver problemas implica competências cognitivas de ordem superior, cuja aprendizagem é lenta, difíceis de serem observadas e medíveis.

Para tal, há que confrontar os professores com uma grande variedade de problemas, para que eles mesmos possam tomar consciência dos seus próprios processos de pensamento, podendo aumentar a sua capacidade metacognitiva.

Em nossa perspectiva, há pois que dotar os programas de formação de professores de Matemática, de um conjunto de ferramentas que possibilitem a esses professores o conhecimento e o controle dos seus próprios conhecimentos e capacidades cognitivas. Concordamos, pois, com Vale

(1997), quando refere, por um lado, que os futuros professores devem ser submetidos a uma formação formal sobre resolução de problemas, no sentido de os dotar com capacidades metacognitivas. Concordamos também com esta investigadora quando refere que quanto mais se souber sobre as reacções dos futuros professores de Matemática perante a resolução de problemas, melhor se poderão conceber programas de formação com vista a ultrapassarem-se eventuais dificuldades, no sentido de se melhorar o seu ensino.

Deve-se, pois entender a formação inicial de professores de Matemática como um espaço de aprendizagem propício ao gerar de motivações e a moldar concepções para a prática pedagógica da resolução de problemas.

2 - O Problema em Estudo

Este estudo pretende abordar a formação de professores na temática da resolução de problemas de Matemática numa perspectiva metacognitiva, isto é, onde se contemple o trabalhar de processos metacognitivos.

Em sintonia com Fernandes (1992), pensamos que temos que capacitar os futuros professores de Matemática com una determinada educação para a metacognição, para que depois, estes possam contribuir para que os respectivos alunos se venham a tonar em resolvedores reflexivos diante dos mais variados problemas e das mais variadas actividades.

Assim, como é nossa intenção analisar e interpretar processos metacognitivos de futuros professores de Matemática, na actividade de resolução de vários problemas, colocam-se-nos as seguintes questões: - (1) – será que os tipos de problemas condicionam os processos metacognitivos dos futuros professores? e (2) - como se poderá desenvolver essa análise e essa interpretação?

Um caminho que pensamos ser possível no auxílio dessa tarefa situa-se no âmbito da tecnologia ao serviço da investigação educacional. Para tal, recorrer-se-á à utilização de gravações em suporte vídeo com as posteriores análises por parte do investigador.

De uma forma clara e objectiva diremos que se pretende dar resposta ao seguinte problema de investigação: **Os tipos de problemas influenciarão os processos metacognitivos de futuros professores de Matemática, enquanto resolvem uma variedade de problemas e permitirão as vídeogravações o registo desses processos metacognitivos?**

Assim, o principal objectivo deste estudo é o de investigar se os diferentes tipos de problemas condicionam o perfil metacognitivo de futuros professores de Matemática, tendo em conta cada uma das quatro categorias propostas pelo modelo de Lester (1985): Orientação, Organização, Execução e Verificação.

A relevância deste estudo reside no contributo que pode trazer, no âmbito da investigação em resolução de problemas com futuros professores de Matemática, no sentido da compreensão da eventual relação: tipo de problema/processos metacognitivos que possa surgir. Acreditamos, pois, ser necessário, enquanto formadores de professores, conhecermos como podemos proporcionar a exteriorização de processos metacognitivos de professores em fase de formação.

3 – Definição de Termos

As seguintes definições de alguns termos são baseadas na revisão da literatura da especialidade. Agrupamo-las nos seguintes domínios:

(a) – Resolução de Problemas;

(b) – Metacognição;

(c) – Vídeo.

3.1 – Resolução de problemas

Exercício

Concordamos com Palhares (1997), quando entende a definição de exercício do seguinte modo:

> *"Um exercício é constituído por um conjunto de informações sobre uma situação e sobre uma transformação que é requerida, existe um conhecimento preciso (explícito no enunciado ou implícito na apresentação) sobre qual o procedimento a adoptar para obter uma solução"* (p. 167).

Problema

Entendemos, do mesmo modo que Kantowski (1974) que:

> *"Um indivíduo está perante um problema quando encontra uma questão à qual não consegue responder ou uma situação que não é capaz de resolver usando o conhecimento imediatamente disponível. Tem que pensar num caminho de combinação da informação de que dispõe, no sentido de poder chegar à solução do problema"* (p. 1).

Nesta linha de pensamento, Guzmán (1999) refere que um problema é um autêntico desafio, pois sabemos mais ou menos onde queremos chegar mas desconhecemos o caminho para chegar a esse fim.

Problema de processo

Escolhemos para o desenvolvimento deste estudo os problemas de processo. Problema de processo é um problema que

> *"não pode ser resolvido pela mera aplicação de uma ou mais operações aritméticas elementares; a sua solução somente pode ser encontrada através da utilização de uma o mais estratégias de resolução de problemas" (Fernandes, 1988, p. 7).*

Estratégias heurísticas de resolução de problemas

> *"Estratégias heurísticas são maneiras práticas de resolução para o sucesso na resolução de problemas, sugestões gerais que ajudam o indivíduo a perceber melhor o problema ou a ter progresso no caminhar para a solução. Este tipo de estratégias incluem a exploração de analogias, a introdução de elementos auxiliares no problema ou recorrer a problemas semelhantes, argumentar por contradição, trabalhar do fim para o princípio, desenhar figuras, ..." (Schoenfeld, 1985, p. 23).*

Resolução de problemas

Segundo Charles (1985) citado por Fernandes (1988), resolução de problemas:

"é o processo de *(1) compreender um problema, (2) seleccionar ou coligir os dados necessários para encontrar a solução, (3) escolher e implementar uma ou más estratégias de resolução, (4) responder à(s) questão(ões) colocada(s) pelo problema e (5) avaliar se a resposta é razoável*" (p. 7).

Por sua vez, para Palhares (1997),

"*Resolução de problemas ocorre quando um indivíduo (ou grupo de indivíduos) se confronta com um problema, decide resolvê-lo pelos seus próprios meios e portanto, aplica procedimentos que não estão a priori estabelecidos ou não são a priori conhecidos*" (p. 167).

3.2 – Metacognição

De acordo com Brown (1980) e Sternberg (1986) citados por Almeida e Morais (1992),

"... *para além do conhecimento que cada um tem dos seus processos cognitivos e de reflexão que sobre eles produz, a metacognição é ainda a utilização de estratégias de planificação, controlo, avaliação e auto-correcção quando esses processos estão a ser aplicados na resolução de um dado problema*" (p. 35).

Uma definição mais sintética é apresentada por Flavell (1985) ao entender metacognição como sendo a cognição acerca da própria cognição.

Processos metacognitivos

Associado ao termo de metacognição surge surge o de processo metacognitivo que, segundo Ponte (1991) "*têm a ver com o pensamento acerca do próprio pensamento*" (p. 290).

Neste estudo iremos centrar a nossa atenção na verbalização desses pensamentos acerca do próprio pensamento através da técnica do "pensar alto", denominando essas intervenções de metacognitivas.

3.3 – Vídeo

Cabero (1989) situa o conceito de vídeo em seis perspectivas: (a) tendo em conta as suas propriedades electrónicas; (b) como instrumento associado à televisão; (c) como conjunto de instrumentos tecnológicos; (d) tendo em conta uma perspectiva sociológica; (e) como meio de comunicação e (f) como meio didáctico.

Nesta investigação entende-lo-emos numa dupla perspectiva: como um conjunto de instrumentos tecnológicos e como recurso didáctico. No que respeita à primeira componente, tiramos partido da posição de Herreros (1987, citado por Cabero, 1989) que considera o vídeo como um "*sistema de registo magnético de imagens, sons e sincronismo; com possibilidades de reprodução imediata; capacidade de apagar a mensagem armazenada e regravação; permite a realização de montagens e edição das mensagens...*" (p. 109). Entendê-mo-lo também como recurso didáctico, porque "... *o meio não sirva somente para transmitir informação ou captar informação do mundo circundante, mas também para avaliar a informação e habilidades do aluno, formação de professores, investigação educativa, aprendizagem de sistemas simbólicos, instrumento de pensamento e cultura...*" (p. 115).

Resumidamente, diremos que este estudo encontra-se organizado em cinco capítulos.

Como acabámos de ver, o <u>*Capítulo I – Introdução*</u> – orienta para o problema de investigação, apresenta as razões que orientam este estudo, bem como a definição de alguns termos que irão ser utilizados ao longo do texto.

No <u>*Capítulo II – Enquadramento Teórico*</u> – analisa-se a literatura que consultámos, subdividindo-a em três secções. Na primeira aborda-se o papel que ocupa a resolução de problemas na disciplina de Matemática. Na segunda salienta-se a importância que tem a metacognição no processo de resolução de problemas e, na terceira destaca-se o papel do vídeo na formação de professores.

No <u>*Capítulo III – Metodologia*</u> – descrevemos a metodologia adoptada para o desenvolvimento deste estudo. Descrevemos o processo de selecção dos sujeitos bem como os métodos seguidos para a recolha e tratamento dos dados.

No *Capítulo IV – Resultados* – descrevem-se, analisam-se e interpretam-se os dados recolhidos em função do problema de investigação em causa.

Por fim, no *Capítulo V – Conclusões* – faz-se uma síntese do trabalho realizado, destacam-se as principais conclusões a que se chegou e propõem-se algumas recomendações para futuros estudos.

CAPÍTULO II

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Este capítulo diz respeito à literatura consultada e está dividido em três secções.

Na primeira analisa-se o tema da resolução de problemas, relacionando-o com a disciplina de Matemática e com a formação de professores dessa disciplina.

Na segunda secção aborda-se o tema da metacognição, destacando-se a sua importância no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Na última secção, analisa-se o papel do vídeo na formação de professores e salientam-se alguns trabalhos de investigação sobre a resolução de problemas que contemplam as vídeogravações como instrumento tecnológico de recolha de dados.

1 - Resolução de problemas - sua importância na disciplina de Matemática

Nesta primeira parte da revisão da literatura destacamos a importância da resolução de problemas na disciplina de Matemática. Neste sentido, analisamos alguma investigação que se tem levado a efeito em Portugal sobre esta temática. Abordam-se vários tipos de problemas e estratégias de resolução e salienta-se a necessidade de formação de professores nesta área da Matemática.

Para além dos documentos internacionais a que nos referimos no capítulo anterior, dando conta da importância da resolução de problemas no ensino-aprendizagem da Matemática, Portugal tem vindo a assistir também, nos últimos anos, a alguma investigação nessa área.

Um dos tópicos de investigação tem sido a tentativa de se perceber como é que os professores de Matemática concebem ou utilizam a resolução de problemas nas suas aulas.

A título de exemplo, acompanhámos uma investigação levada a efeito por Gabriel (2001) com quatro professores do 1º Ciclo do Ensino Básico de uma das escolas do interior de Portugal desse nível de escolaridade e constatámos que todos os professores estudados pareciam atribuir bastante importância à resolução de problemas no ensino-aprendizagem da Matemática, contudo:

a) havia algumas ambiguidades no que diz respeito a alguns conceitos relacionados com o tema da resolução de problemas;

b) parecia haver uma tendência nítida para um tipo de ensino ainda muito sustentado na resolução de exercícios,

c) havia alguma necessidade de formação na área da resolução de problemas.

Como salientámos no capítulo anterior, apesar da resolução de problemas ser um dos domínios da Educação Matemática mais investigados nos últimos trinta anos, ainda se sabe muito pouco sobre esse assunto. De acordo com Fernandes et al. (1994):

> *"uma das razões que parece explicar esta situação reside no facto de continuarem a persistir dificuldades em identificar claramente os processos envolvidos e/ou utilizados na resolução de problemas e em descobrir quais*

desses processos são mais facilmente transferíveis e aplicáveis a novas situações e se aplicam a um leque variado de problemas" (p. 39).

Sem pretendermos querer ser exaustivos na análise de todos os estudos realizados em Portugal sobre a resolução de problemas, é nossa intenção assinalar a importância que alguns deles têm ao estudarem os professores de Matemática.

Assim, Fernandes (1988) estudou um conjunto de 68 professores do ensino primário de uma universidade norte-americana, comparando dois modelos de instrução em resolução de problemas. Utilizou o modelo de resolução de problemas proposto por Polya e submeteu os dois grupos de sujeitos a dois tipos de tratamento, sendo que um deles tinha que identificar as estratégias usadas na resolução e reflectiam sobre elas. Concluiu que ambos os tipos de modelos melhoraram o desempenho dos sujeitos do estudo. A grande conclusão desse estudo foi a de que os futuros professores podem aprender a usar correctamente estratégias de resolução de problemas.

Na mesma linha de intervenção, Afonso e Afonso (1994) levaram a efeito um estudo de caso com três finalistas, futuros professores de Matemática do 2º Ciclo do Ensino Básico, onde se pretendia investigar em que medida um ensino explícito de estratégias de resolução de problemas e uma atitude reflexiva intencional enquanto resolvedores, influenciava as suas "performances" aquando da resolução de vários problemas.

Concluiu-se que esse ensino explícito tornou esses resolvedores melhores resolvedores de problemas. Esta melhoria pode também ter sido devida a uma alteração de atitudes face ao processo de resolução de problemas, pois tornaram-se mais reflexivos não só no final das resoluções dos problemas mas também durante o decorrer das mesmas. De facto, passaram a ser mais reflexivas na leitura e compreensão dos problemas, na selecção e implementação de estratégias e na verificação dos processos e soluções encontradas.

No ano de 1993, Boavida, Delgado e Vale levaram a efeito, cada uma delas, um estudo envolvendo professores de Matemática. A primeira investigadora teve por intenção estudar as concepções dos professores do 3º

Ciclo do Ensino Básico relativamente à resolução de problemas e relacionou-as com as concepções que possuíam sobre a Matemática.

As outras duas investigadoras interessaram-se em estudar as concepções dos professores do 2º Ciclo do Ensino Básico sobre a Matemática e a sua relação com a prática pedagógica.

Boavida (1993) concluiu do seu estudo que os sentidos atribuídos pelos professores a "problema" foram diversos. Para uns, problema era sinónimo de exercício. Para outros, problema tratava-se de uma actividade ligada a aspectos isolados do currículo e que se destina a enriquecer o ensino. Para outros, a resolução de problemas é uma via educativa que deve servir de base ao processo ensino-aprendizagem. Face a estes resultados, foi entendimento desta investigadora que o papel da resolução de problemas na prática pedagógica de Matemática é influenciada por estes sentidos que atribuem à resolução de problemas.

Delgado (1993) também verificou que as três professoras que estudou entendem o papel da resolução de problemas na Educação Matemática de maneiras distintas. Uma delas considerou que a resolução de problemas é a essência da Matemática. Como tal, entendia que o ensino dessa disciplina deveria ocorer através da resolução de problemas.

Para outra professora, os problemas constituem um meio de justificar o ensino da Matemática, motivar e reforçar o ensino de certos conteúdos e desenvolver o raciocínio dos alunos. Esta professora não contempla a resolução de problemas nas suas práticas lectivas, de forma significativa.

Para a terceira professora, o fundamental da resolução de problemas reside no caminho envolvido na pesquisa de estratégias de ataque aos problemas.

Em síntese, qualquer das professoras evidenciou possuir consciência entre as suas concepções e a implementação das suas práticas, alegando como principais motivos, o cumprimento do programa, a influência do contexto escolar, entre outros.

Vale (1993) concluiu que os seus dois professores estudados (a) identificam problema e resolução de problemas com Matemática, (b) atribuem grande importância à resolução de problemas que consideram útil para ensinar os estudantes a raciocinar, (c) consideram que a resolução de problemas pode ser un meio para ensinar Matemática, motivando os estudantes, (d) consideram que para ensinar resolução de problemas não é necessário saber muita Matemática, e (e) consideram que ensinar resolução de problemas não é tarefa fácil. Uma vez que estes dois professores foram estudados durante o último ano da sua formação inicial e no primeiro ano como profissionais, pôde-se verificar que não se descobriram divergências entre as concepções como estudantes e depois como professores, relativamente à resolução de problemas. Contudo, existiram divergências entre as concepções sobre o ensino da Matemática e da resolução de problemas com a sua prática. Vale (1993) refere que os professores atribuem grande importância a esta orientação curricular, que consideram motivadora para os estudantes, apesar de eles a entenderem como actividade difícil de concretizar em sala de aula.

Em 1994 destacamos mais três estudos. Um deles, levado a cabo por Borralho, encontrou-se integrado num projecto de investigação sobre a resolução de problemas na Universidade de Aveiro, coordenado por Domingos Fernandes. Este projecto teve por intenção desenvolver metodologias adaptadas ao estudo das várias variáveis inerentes à resolução de problemas, não abdicando do aspecto da avaliação dos alunos e da definição de estratégias de formação de professores.

O estudo pretendeu investigar a relação entre a formação inicial de professores de Matemática, em geral, e a formação desenvolvida nas disciplinas dessa formação inicial, dando-se ênfase à reflexão sobre a actividade do professor, sobre a resolução de problemas e sobre o ensino da resolução de problemas, no surgir de práticas de ensino vocacionadas para o desenvolvimento de capacidades metacognitivas através da resolução de problemas. Estudou três professores do 4º ano da formação inicial, de modo a perceber a influência da formação e os efeitos sobre as práticas.

Em dois dos casos, parece que a relação entre a formação inicial e a prática pedagógica é muito reduzida e prevalecem nas suas práticas os modelos de ensino que os seus "melhores" professores do ensino não superior protagonizaram. A resolução de problemas e a actividade de reflexão sobre as formas de pensamento na resolução de problemas foram assinaladas como importantes no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, mas não levadas à prática.

Salientamos que foram referidas algumas dificuldades de implementação da resolução de problemas nas aulas de Matemática, como sejam: (a) os professores não se considerarem bons resolvedores de problemas, (b) o modelo utilizado (de Lester e Charles) é muito prescritivo, colidindo com a dinâmica da aula, (c) a ausência de experiência dos professores, entre outras.

Salientamos também que um dos três professores estudados referiu que dificilmente iria implementar a resolução de problemas nas suas aulas, pois não era simpatizante dessa temática e, para ele, esse aspecto parece ser uma condição essencial para que um futuro professor possa vir a interessar-se por essa área.

Por seu turno, Ponte e Canavarro (1994) levaram a efeito um estudo que teve por intenção investigar como é entendida a resolução de problemas por parte de professores do 3º Ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário, tanto em termos pessoais como no que respeita à sua prática pedagógica. Alguns dos professores estudados mostraram-se adeptos da temática da resolução de problemas. Contudo, parece haver alguma confusão acerca da terminologia e das ideias. O cumprimento dos programas curriculares é um factor de pressão, bem como a ausência de materiais adequados para a sua implementação.

Alguns dos professores estudados sentem alguma dificuldade em gerir a fase da discussão da resolução de problemas.

Em 1994, Vale pretendeu reflectir sobre a formação em resolução de problemas que propiciava aos seus estudantes da formação inicial de professores de Matemática. Em contexto de sala de aula tentou descobrir a acção e a reacção dos futuros professores quando envolvidos em tarefas de resolução de problemas.

Uma das conclusões do seu estudo apontou para a existência de uma atitude bastante positiva relativamente à resolução de problemas e reforçou a ideia de que é essencial que os estudantes passem pelo processo de aprendizagem em resolução de problemas. Aí adquirem, para além dos conhecimentos necessários, confiança e gosto pela tarefa que estão a realizar. Salientou que seria difícil que sem esta fase, viessem a ensinar a resolução de problemas aos seus alunos.

Em 1995 o tema de se estudarem os futuros professores ocorreu em pelo menos mais dois estudos. Por um lado, Fonseca (1995) pretendeu estudar os processos usados por três futuros professores envolvidos em tarefas de resolução de problemas tentando relacionar esses processos com as concepções por eles explicitadas. Os futuros professores revelaram ter concepções muito semelhantes acerca da Matemática e do seu ensino-aprendizagem e manifestaram gostos significativamente diferentes sobre a disciplina. Eles consideram a resolução de problemas como um meio de motivar os estudantes para a Matemática, mas, enquanto dois deles coincidiam nas suas capacidades como resolvedores, o outro não revela ter essa capacidade e considera mesmo a resolução de problemas uma actividade frustrante. Algumas dificuldades podem dever-se à falta de segurança no domínio dos conceitos matemáticos, à falta de hábito em reflectir e avaliar o trabalho desenvolvido é em saber quando e como utilizar os diferentes conhecimentos.

Por outro lado, Afonso (1995) levou a efeito um estudo exploratório pretendendo analisar se o registo vídeo permitia o desenvolvimento de processos metacognitivos em futuros professores de Matemática, durante a resolução de problemas. Os dezoito participantes no estudo foram divididos em seis grupos de três sujeitos cada, tendo-se filmado três desses grupos enquanto resolviam problemas, assim como, quando estavam num processo de autoscopia.

Em geral, todos os grupos participantes (filmados ou não) desenvolveram a sua capacidade de reflectir sobre o seu próprio pensamento. Os participantes dos grupos filmados indiciaram ter estado mais vezes envolvidos em processos metacognitivos que os dos grupos não filmados. Na maioria dos sujeitos filmados houve um aumento da tomada de consciência da metacognição utilizada, isto é, a relação entre a reflexão sobre a acção e a reflexão na acção passou a ser mais estreita.

Os resultados sugerem, pois, que é possível o registo vídeo ter estado na base desta melhoria metacognitiva que ocorreu com os participantes dos grupos filmados.

Em 1997 destacamos mais três estudos que ocorreram também com futuros professores de Matemática, como sujeitos a investigar.

Vale (1997) averiguou, em contexto de sala de aula, o desempenho e as concepções de futuros professores em relação à resolução de problemas de Matemática. Apesar de ter ocorrido um nível mediano de desempenho, detectaram-se dificuldades na compreensão dos problemas, na generalização e na tomada de decisões. Os sujeitos não eram reflexivos. Eles concederam pouca importância às fases do modelo de resolução de problemas de Polya e entenderam como úteis as estratégias de resolução de problemas.

Por seu turno, Fonseca (1997) estudou os processos utilizados por dois futuros professores em tarefas de resolução de problemas. Para tal, enquanto eles resolviam problemas, pediu-se-lhes para pensarem em voz alta. As principais conclusões permitem dizer que os futuros professores têm dificuldades em usar processos subjacentes ao pensamento matemático. Para além disso, referem que a formação inicial dos professores deve continuar a proporcionar informação acêrca da resolução de problemas.

Num outro estudo, levado a efeito por Leitão e Fernandes (1997) estiveram envolvidos quatro futuros professores de Matemática, resolvendo problemas e trabalhando em grupo. A intenção destas investigadoras foi a de analisarem os processos envolvidos na resolução e identificarem as dificuldades manifestadas e as atitudes expressas sobre a resolução de problemas.

Os professores evidenciaram sucesso na resolução dos problemas e mostraram ser reflexivos nessas resoluções, tendo analisado as soluções obtidas e tentando obter outras soluções.

As investigadoras concluíram que o trabalho de grupo foi uma metodologia bem sucedida e aceite pelos participantes que reconheceram a importância da cooperação, da reflexão e da discussão em grupo e isso favoreceu a interacção entre eles.

Verificamos, pois, que a maioria da investigação nesta área localiza-se ao nível das concepções e das práticas dos professores em formação inicial ou em exercício.

Não obstante esta situação, nem sempre correm bem as primeiras experiências com o uso da resolução de problemas, em contexto de sala de aula, devido, talvez a uma certa falta de formação nesta área por parte dos professores.

Acreditamos, pois, que há que se proporcionar formação aos professores, porque partimos do pressuposto que um professor nunca deve trabalhar o que quer que seja na sala de aula, se não tiver tido formação adequada para esse efeito.

Por outro lado, uma vez que a grande maioria dos alunos costuma ter a tendência de copiar modelos de acção que vê nos comportamentos dos seus professores, também ao nível da temática da resolução de problemas, o professor deveria assumir essa figura de modelo. Para tal, tem que conhecer alguma teoria existente sobre a resolução de problemas, como seja a diferença entre problema e exercício, os vários tipos de problemas e vários tipos de estratégias de resolução, bem como alguns modelos de resolução. Só assim poderá assumir uma postura de resolvedor de problemas merecedora de ser imitada pelos seus alunos.

Acreditamos que "professores bons resolvedores de problemas implicam que os seus estudantes sejam bons resolvedores de problemas".

A comungar esta ideia, Stacey e Groves (1999) salientam que o professor é o elemento fundamental no trabalhar com os seus alunos a temática da resolução de problemas, tal como qualquer outra área da Matemática. Desatacam que é ao professor que compete gerar um clima de confiança e de desafio ao mesmo tempo, bem como ajudar os alunos nos momentos em que se deparem com alguma dificuldade. Salientam, pois, que cabe ao professor o seguinte papel:

> "*. Ajudar os estudantes a aceitar os desafios: um problema não existe como tal, até que se pretenda resolvê-lo.*
>
> *. Criar um ambiente de confiança na turma que prepare os alunos para o enfrentar de situações não familiares e ajudá-los a não sentir-se demasiado angustiados quando bloqueiam.*
>
> *. Permitir que os alunos desenvolvam as suas próprias ideias para encontrar uma solução e ajudá-los, quando necessário, sem dar-lhes directamente a resposta.*
>
> *. Proporcionar um ambiente onde os alunos possam reflectir acerca de (isto é, pensar, discutir e escrever sobre) os processos em que estão envolvidos e, desta forma, aprender a partir da experiência.*
>
> *. Falar com os alunos sobre os processos envolvidos quando se faz e se aplica a Matemática, de modo que possam adquirir o vocabulário que os ajude a pensar a aprender sobre isso. Os alunos aprendem muito mais eficazmente quando o professor direcciona explicitamente a sua atenção para as estratégias e processos implicados na resolução de problemas*" (Stacey e Groves, 1999, p. 15).

Em síntese, concordamos com Martín Izard (1997) quando refere que o professor deveria assumir o papel de mediador das aprendizagens do seus alunos, ajudando-os a construírem o seu próprio conhecimento, proporcionando-lhes os processos necessários para a resolução dos problemas, sem contudo, lhes dar a resposta.

De acordo com Fernandes (1992), Krulik e Rudnick (1980; 1982) desenvolveram orientações relativas à formação de professores em resolução de problemas. Partindo do pressuposto que para se ensinar a resolver problemas, os professores terão que ser preparados para o fazer, sugerem cinco aspectos diferentes que deverão fazer parte do programa de formação que, supostamente, responde a essa necessidade. Em primeiro lugar, consideram que "*é fundamental definir claramente os conceitos envolvidos e que fazem parte da linguagem específica da resolução de problemas*" (p. 83).

Por outro lado, estes autores, também sugerem que os professores devem entender que a resolução de problemas "*é um processo complexo e não apenas um produto. É importante obter respostas correctas aos problemas mas é necessário perceber que estamos a desenvolver processos quando os estamos a ensinar*" (p. 83-84).

Como terceiro aspecto, estes autores recomendam que os professores experienciem situações problemáticas semelhantes às que irão ser trabalhadas com os seus alunos.

O quarto aspecto prende-se com o ensino explícito de estratégias de resolução de problemas e o último aspecto destacado por Fernandes (1992), relativamente às propostas de Krulik e Rudnick (1980; 1982) é a elaboração de uma lista de dez sugestões para o ensino da temática da resolução de problemas "*que vão desde a criação de uma atmosfera de sucesso na sala de aula até à resolução de problemas em pequenos grupos*" (p. 84).

De acordo com Fernandes (1992), LeBlanc (1982), elaborou um modelo de formação de professores em resolução de problemas que é composto por quatro fases. Este modelo tem como pressuposto que

> "*os futuros professores podem ser melhor preparados para o ensino da resolução de problemas: 1) se forem ajudados a desenvolver a sua auto-confiança; 2) se forem ensinados a atender aos processos envolvidos e a utilizarem estratégias de resolução; 3) se aprenderem como lidar com os seus alunos antes e depois de episódios de resolução; e 4) se tiverem*

oportunidade de recolher uma boa colecção de problemas para apresentar aos seus futuros alunos." (p. 86).

Outro investigador (referido por Fernandes, 1992), que partilha o mesmo tipo de ideias, é Kansky (1987). No âmbito da disciplina de Metodologia do Ensino da Matemática, este autor desenvolveu um modelo para o ensino da resolução de problemas para professores de Matemática do Ensino Secundário. Para este investigador, numa disciplina de formação de professores em resolução de problemas era importante ter-se em linha de conta quatro objectivos seguintes:

> "*1) preparar os professores para que se tornem bons "resolvedores" de problemas; 2) preparar os professores para que controlem e se tornem conscientes acerca dos seus conhecimentos e capacidades de resolução de problemas; 3) preparar os professores para que apliquem o seu saber sobre resolução de problemas no desenvolvimento de aulas de Matemática; e 4) preparar os professores para que venham a desejar ensinar os seus alunos a resolver problemas*" (p. 89).

Em sintonia com LeBlanc (1982) e Kansky (1987) estão, também, Lester e Mau (1993) e Lester et al. (1994). Estes descrevem um curso que levaram a efeito na Universidade de Indiana com futuros professores do ensino elementar, onde a Matemática foi ensinada através da resolução de problemas, pretendendo-se que os estudantes estivessem envolvidos no desenvolvimento da sua própria aprendizagem.

O objectivo principal deste curso era o de criar nos estudantes o hábito de "*supervisionar os próprios progressos, avaliar as próprias soluções, controlar as suas debilidades e outras actividades relacionadas com o ser-se reflexivo.*" (Lester e Mau, 1993, p. 8).

A intenção deste curso era de poder contribuir para que os estudantes, através da postura assumida pelos professores, começassem a fazer perguntas a eles próprios, como: "*... como é que isto ajuda? Será que este caminho nos levará a algum lado? Poderia resolver eu isto de uma maneira melhor?*" (Lester e Mau, 1993, p. 8).

Durante cada período de duas horas de aula, os estudantes confrontaram-se com problemas que tinham que resolver em grupo. O papel do professor era o de circular através dos grupos, observando, colocando questões e ajudando os estudantes a reflectir sobre o seu próprio pensamento.

Por conseguinte, o professor assumia a postura de orientador, colocando questões em vez de se limitar a dar pistas.

Depois de se encontrar a solução, o grupo participava na discussão das soluções e pretendia-se chegar às generalizações.

Enquanto que no início do curso os estudantes colocaram aos professores questões do tipo: "*resolve-nos o item 4?*" (Lester e Mau, 1993, p. 8), após duas semanas, as perguntas passaram a ser de outro tipo: "*isto é o que eu fiz para o item 4. Está correcto?*" (Lester e Mau, 1993, p. 8).

No final do curso, os estudantes estavam finalmente a começar a colocar as suas próprias perguntas e a serem capazes de lhes dar resposta. Salientaram que "*estão no ponto em que já não me necessitam*" (Lester e Mau, 1993, p. 10), devido aos professores terem assumido una postura de orientadores e não de facilitadores de respostas.

Assim, proveniente deste fluxo de investigação e dè experimentação, surgem sugestões importantes ao nível do desenvolvimento curricular, nomeadamente a proposição de que o ensino da resolução de problemas deve estruturar-se e deve organizar-se da mesma maneira que qualquer outra área da Matemática (Fernandes, 1991a). Por seu turno, Ponte (1988), entende que a actividade de resolução de problemas ao nível elementar e secundário é "*a única fonte possível de genuína motivação intrínseca para a Matemática*" (p. 17).

1.1 - Problema e resolução de problemas

Segundo Polya (1981), para que se esteja perante um problema há que se procurar conscientemente alguma actuação apropriada para "atacar" uma meta clara, mas dificilmente alcançável. Salienta também que para que haja problema, este tem que gerar dificuldade em quem o tente resolver. Desta última frase resulta ser fácil concluir que uma mesma situação pode ser problema para um indivíduo e não passar de mero exercício para outro (Abrantes, 1989). Depende, pois, se a situação é novidade ou não, se se conhece ou não algum algoritmo imediato de resposta.

Um entendimento de problema na mesma linha de ideias de Polya é sugerido por Lester e Mau (19)3). Para estes investigadores, um problema é uma tarefa para a qual: "*a) o indivíduo ou o grupo confrontado com o problema deseja ou tem a necessidade de obter uma solução, b) não há um procedimento pronto que garanta ou determine a solução e c) o indivíduo ou o grupo deve tentar encontrar a solução*" (p. 232).

No que diz respeito à resolução de problemas, já em 1977, o National Council of Supervisors of Mathematics (NCSM) a entendia como sendo "*o processo de aplicação do conhecimento previamente adquirido em situações novas e pouco usuais*" (NCSM, 1977 citado por Branca, 1980, p. 14).

Passados aproximadamente dez anos sobre esta definição, Charles (1985, citado por Fernandes, 1988), propõe que a resolução de problemas "*é o processo de (1) compreender o problema, (2) seleccionar ou coligir os dados necessários para encontrar a solução, (3) escolher e levar a cabo uma ou mais estratégias de resolução, (4) responder à(s) questão(ões) colocada(s) pelo problema e (5) avaliar se a resposta é razoável*" (p. 7).

1.2 - Tipos de problemas

É opinião de vários investigadores que a resolução de problemas deveria ser trabalhada recorrendo-se a problemas não rotineiros, isto é, problemas desligados da realidade quotidiana dos resolvedores (Lester, 1985; Buchanan, 1987 e Fortunato et al., 1991).

Para Polya (1981) é importante que se conheçam vários tipos de problemas para que, aquando da questão "*que tipo de problema é este?*" (p. 118), se possa mais facilmente tentar encontrar um caminho de resolução mais adequado. Polya (1981) associa sempre à questão anterior esta outra questão: "*o que é que se pode fazer com este tipo de problemas*?" (p. 118).

Este autor sugere uma classificação de problemas baseada no tipo de resolução. Assim, um primeiro tipo de problemas é *problemas para descobrir*. O objectivo deste tipo de problemas é o de encontrar determinado objecto, o desconhecido do problema. Outro tipo de problemas sugerido por Polya (1981) é o dos *problemas para provar*.

Na mesma linha de pensamento Pérez e Pozo (1994), sugerem a existência de dois tipos de problemas. Por uma lado salientam os problemas de carácter dedutivo, como por exemplo os que requerem a demonstração de uma fórmula matemática. Por outro lado salientam os problemas de carácter indutivo, como por exemplo, os que implicam o estabelecer regularidades no comportamento de entidades matemáticas.

Por seu turno, Charles et al. (1987) sugerem a existência de pelo menos quatro tipos de problemas: "*problemas de um passo, problemas de dois ou mais passos, problemas de processo e problemas de aplicação*" (p. 11).

Para Charles e Lester (1986, citados por Fernandes, 1992), os *problemas de um passo* são aqueles que podem resolver-se através de uma das operações básicas da aritmética. Os *problemas de dois ou mais passos* são os que podem resolver-se através de duas ou mais operações básicas da aritmética. À classe dos *problemas de processo* pertencem os que não podem resolver-se através da simples aplicação directa dessas operações. Requerem a procura de pelo menos uma estratégia de resolução. Finalmente, os *problemas de aplicação* são os que, normalmente, exigem a recolha de dados e a tomada de decisões. Estes problemas podem ter mais do que uma solução.

Fonseca (1997), Leitão e Fernandes (1997) e Pallares (1997) definem problemas de processo como sendo problemas que necessitam a utilização de estratégias, isto é, não são susceptíveis de serem resolvidos pela aplicação imediata de um algoritmo de resolução.

Charles et al. (1987) são de opinião que um programa de formação em resolução de problemas deveria contemplar o contacto com vários tipos de problemas. Contudo, no nosso estudo usaremos apenas problemas de processo. Esta opção é intencional, porque é nossa intenção usar problemas que não exijam para a sua resolução de grandes conhecimentos matemáticos, porque pretendemos estudar somente aquilo que seja independente de conteúdos matemáticos (Puig, 1996).

Por outro lado, segundo Fonseca (1997), Lester e Schroeder (1989) entendem os problemas de processo como sendo muito desafiadores. De facto, concordamos com Fonseca (1997) quando refere que este tipo de problemas para além da compreensão, exigem que se planeie um ou vários caminhos possíveis de resolução e se verifique os processos e o produto encontrado.

1.3 – Heurísticas ou estratégias de resolução de problemas

Segundo Polya (1978), Heurística "*era o nome de um certo ramo de estudo, não bem delimitado pertencente à Lógica, à Filosofia ou à Psicologia... hoje praticamente esquecido*" (p. 86). Refere, também, que o seu objectivo "*é o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção*" (p. 86).

Um dos primeiros investigadores a estudar o efeito do ensino das heurísticas foi Schoenfeld. Em 1979, este investigador levou a efeito uma investigação com sete alunos do ensino universitário, trabalhando numa série de problemas que se podiam resolver pela aplicação de uma ou mais heurísticas.

A sua investigação baseava-se em três propósitos:

a) estudar o impacto da instrução de heurísticas no trabalho realizado por alguns estudantes, baseando-se numa série de problemas semelhantes aos dados durante a instrução;

b) verificar se os estudantes que estão a trabalhar nos mesmos problemas (no mesmo período de tempo e tendo acesso às mesmas soluções) mas não recebendo as instruções heurísticas, iriam utilizar ou intuir as estratégias como resultado da sua experiência sobre a resolução de problemas;

c) verificar, comparando os dois grupos, se a instrução explícita de heurística "*vale a diferença.*"

O percurso realizado desde os pré-testes até aos pós-testes é avaliado através de testes baseados na resolução de problemas. É a partir destes testes que se vê se a heurística tem ou não razão de ser.

Dos sete estudantes, quatro foram seleccionados aleatoriamente para formarem o grupo experimental, restando os outros três estudantes para o grupo de controlo. O investigador ensinou explicitamente cinco heurísticas ao grupo experimental, não acontecendo o mesmo com o grupo de controlo. Depois de terem sido ensinados a "pensar alto", resolveram um pré-teste que consistia em cinco problemas, processo este que foi repetido no pós-teste.

As diferenças no tratamento dos dois grupos foram as seguintes: aos quatro estudantes de heurística foi dito em cassete áudio no início da sua primeira sessão prática que a experiência iria tentar mostrar como cinco estratégias específicas os poderia ajudar a resolver problemas. Depois foi-lhes dado as seguintes estratégias: "*1 – Desenhe um diagrama se de todo lhe for possível...; 2 – Se houver um número inteiro, procure um argumento indutivo..., 3 – Considere debater por contradição ou contrapositivo..., 4 – Considere um problema idêntico com poucas variáveis...; 5 – Tente estabelecer sub-objectivos*" (p. 177-179).

Em termos de resultados, Schoenfeld (1979) concluiu que todos os estudantes do grupo heurístico tinham melhorado do pré-teste para o pós-teste, enquanto que no grupo não heurístico somente um conseguiu melhorar.

Estes resultados permitiram a Schoenfeld afirmar que (a) é necessário ensinar explicitamente estratégias de resolução de problemas se se quer que os alunos as utilizem; (b) o facto de se conhecerem estratégias de resolução não garante a sua utilização assim que ela seja exigida; (c) o ensino explícito de estratégias de resolução de problemas promove o desempenho dos estudantes em resolução de problemas.

Outro estudo destinado a averiguar se o ensino de heurísticas é susceptível de melhorar a capacidade de resolução de problemas foi desenvolvido por Sanchez (1993). Este investigador, entendendo o ensino da Matemática numa perspectiva metodológica de descoberta, integra a resolução de problemas nessa contextualização, onde é necessário a identificação do problema e a avaliação de hipóteses. Este investigador define estratégias heurísticas como sendo "*técnicas que têm a probabilidade de conduzir à resolução de muitos tipos de problemas*" (p. 6). Partindo dos trabalhos de Polya (1965), Schoenfeld (1985), Newel e Simon (1972), entre outros, enuncia as seguintes heurísticas:

- "<u>*Representação Gráfica ou simbólica*</u>: *fazer um desenho ou um diagrama que resuma a informação do enunciado; representar com números ou letras as variáveis, etc.;*

- <u>*Problema análogo*</u>: *procurar um problema com uma estrutura semelhante ou equivalente que já tenha sido resolvido ou que seja mais simples;*

- <u>*Casos especiais*</u>: *simplificar o problema fixando-se em casos especiais (dando valores às variáveis, etc.);*

- *Sub-problemas: decompor o problema em partes (considerando, por exemplo, condições ou objectivos parciais) de modo a que a solução progressiva dessas mesmas partes conduza à solução completa problema;*

- *Registo de alternativas e exploração sistemática: procurar todas as possibilidades e analisá-las sistematicamente;*

- *Voltar atrás: começar do fim para o princípio;*

- *Relações intermédias: procurar relações entre os dados e a incógnita (ou entre a hipótese e a tese) que permitam transformá-los ou aproximá-los*" (Sanchez, 1993, p. 6-7).

Este investigador efectuou um estudo em 1989 com 172 estudantes do ensino superior. Formou um grupo experimental constituído por 90 estudantes, onde se ministrou o ensino da descoberta e, um grupo de controlo com 82 estudantes, onde se ministrou o ensino tradicional ou expositivo. Todos formaram grupos de três alunos cada e foram submetidos a vinte aulas de cinquenta minutos.

Contrariamente a Schoenfeld (1979), Sanchez verificou não haver diferenças significantes entre os dois grupos. Uma das razões apontadas por este investigador, baseado nos estudos de Nickerson et al. (1987) reside na suposição de que na tarefa de resolução de problemas matemáticos, "*para além do conhecimentos das estratégias heurísticas gerais, intervém o conhecimento de conteúdos conceptuais e algorítmicos, sem os quais as heurísticas se mostram inoperantes*" (p. 17). Um segundo tipo de razões tem a ver com o facto do tempo de duração desta experiência ter sido curto para que se dominasse, na perfeição, a aprendizagem das estratégias heurísticas.

2 - Metacognição - sua importância no processo de ensino-aprendizagem da Matemática

Nesta segunda parte do enquadramento teórico analisaremos as críticas de que tem sido alvo o ensino da disciplina de Matemática. Salientamos a alteração que se pretende que ocorra ao sugerir-se uma abordagem virada para o "*pensar*" em vez de ser somente virada para o "*conhecimento*".

2.1 – O (in)sucesso na resolução de problemas

"É frequente observar que os nossos alunos seguem as instruções dos professores sem se interrogarem porque o fazem, raramente questionam as suas próprias estratégias de aprendizagem ou avaliam a sua eficiência nas actividades e são incapazes de explicar porque usam determinadas estratégias para resolver um problema" *(Lobo, 1989, p. 4).*

Fruto de um ensino fora de moda, baseado no desenvolvimento de competências de conhecimento e de memorização, em vez do desenvolvimento da compreensão e da aplicação dos conhecimentos adquiridos, talvez os estudantes não tenham criado o hábito de questionarem o que fazem e o porquê de o fazerem assim.

Lester (1985), reforçando esta ideia, refere que há normalmente quatro princípios que guiam a conduta dos estudantes na resolução de problemas:

"(1) a dificuldade do problema é determinada pelo tamanho dos números e pela quantidade de números existentes; (2) todos os problemas matemáticos podem ser resolvidos pela aplicação directa de uma ou mais operações aritméticas; (3) as operações a utilizar são determinadas pelas palavras-chave do problema (estas palavras-chave aparecem, normalmente, na última frase ou perguntas); (4) a verificação ou não dos cálculos depende do tempo disponível" (p. 42).

Talvez seja esta uma das primeiras causas para o insucesso na resolução de problemas – concepções que os estudantes possuem sobre problema e sobre resolução de problemas.

De acordo com Mota e Guimarães (1990), normalmente, para os alunos, um problema tem que ser de palavras, em que é dada a informação necessária e suficiente para a resolução; que tem sempre solução e essa solução tem que ser única e numérica.

Na mesma linha de pensamento, Lambdim et al. (1994), baseados nos estudos de Sowder (1988), apresentam uma lista de estratégias incorrectas usadas pela grande maioria de alunos ao resolver problemas:

"1. Descobrir os números e adicionar (ou subtrair, multiplicar, ou dividir, dependendo dos cálculos mais recentemente trabalhados nas aulas).
2. Tentativa de adivinhar a operação a ser usada.
3. Olham para os números e não sabem muito bem que operação efectuar.
4. Tentam todas as operações possíveis e escolhem a resposta mais razoável.
5. Procuram e ficam presos às palavras-chave ou frases que lhes sugiram as operações a efectuar.
6. Optam por um de dois, quando a resposta deve ser maior ou menor que os números dados. Se a resposta é maior que os dados tentam adicionar e multiplicar e escolhem a resposta mais plausível. Se a resposta é inferior

aos números dados, tentam subtrair e dividir e optam pela resposta mais plausível.
7. Escolhem a operação que lhes parece adaptar-se melhor à história" (p. 41).

Por seu turno, Clement e Konold (1989) apontam como causa do insucesso na resolução de problemas o facto de grande parte dos alunos seguirem em frente sem terem a consciência de que necessitam proceder cuidadosamente nesse processo de resolução. Uma outra causa apontada por estes investigadores é o facto dos estudantes não trabalharem, com alguma frequência, problemas de múltiplos passos, o que tem como consequência a não necessidade, por parte deles, em fazer registos orientadores de trabalho.

Em síntese, as palavras de Gaspar (1987) acabam por reflectir com alguma exactidão o que se passa no ensino e na aprendizagem em geral: "*... muita aprendizagem é superficial, é feita sem uma reflexão profunda. A consideração deste ponto conduz ao reconhecimento da necessidade de treinar os alunos em metacognição*" (p. 44).

De facto, "*uma das principais críticas que se faz hoje ao ensino é que os estudantes não aprendem a raciocinar e a pensar criticamente* (Hurd, 1987, citado por Cruz, 1989, p. 4).

Por outro lado, uma causa que podemos salientar para a existência de alguns receios em se utilizar a resolução de problemas por parte de alguns professores, pode ser o aspecto da avaliação.

Realmente, se se pensa num ensino através da resolução de problemas, obviamente que isso implicará repensar as formas mais tradicionais de avaliação.

Se a resolução de problemas implica trabalho de grupo, implica pensar em voz alta, implica diálogo e metacognição, pensamos não ser correcto utilizar-se apenas os vulgares testes escritos para se avaliar a essência deste processo. Cremos, pois, que não será correcto resumir a avaliação a momentos de aplicação de provas escritas.

Evidentemente que o desejável seria que as tarefas de avaliação fossem o mais coincidentes possível com as tarefas de aprendizagem, onde os testes escritos seriam simplesmente mais um dos instrumentos a utilizar para a recolha de dados para a avaliação (Afonso e Afonso, 1995).

Já em 1985, Lester assinalava como possível causa do insucesso dos estudantes na resolução de problemas, o facto do ensino conceder demasiada importância ao desenvolvimento de capacidades heurísticas em vez das capacidades de gestão necessárias para regular essas actividades. Implicitamente referia-se à necessidade de dotar o ensino da Matemática de um perspectiva metacognitiva.

2.2 – O conceito de metacognição

O conceito metacognição tornou-se num descritor do Educational Resources Information Center (ERIC) apenas em 1980 (White, 1990). Contudo, o seu uso pela primeira vez ocorreu na década de setenta pelo psicólogo John Flavell (Valente et al., 1989a; 1989b).

Apesar do grande número de investigações levadas a efeito, ainda não há ideias muito claras acerca dos diferentes aspectos inerentes ao processo metacognitivo. O tema tem vindo a manifestar-se como sendo muito complexo e delicado.

Brown (1980), Brown e Palincsar (1982) e Costa (1984) citados por Valente et al., (1989b) caracterizam o pensamento metacognitivo através dos seguintes aspectos:

"- *o conhecimento que o indivíduo tem dos próprios processos cognitivos;*

- a tomada de consciência desses processos;

- o controle que o indivíduo tem sobre os seus próprios processos mentais" (p. 47-48.

Na mesma linha de pensamento, Lester e Garofalo (1985) reconhecem que na metacognição estão envolvidos dois processos: (a) conhecimento dos conhecimentos e (b) gestão ou verificação de conhecimentos. Com isto querem dizer que o indivíduo conhece-se a si próprio, conhece as suas capacidades cognitivas e processos e, por outro lado, toma decisões sobre as estratégias que pode implementar na resolução de problemas.

Por sua vez, Noel (1991) identifica três etapas ou aspectos da metacognição: (a) por um lado, o processo mental propriamente dito que diz respeito à consciência que o sujeito possui das actividades cognitivas que está em vias de realizar ou o seu produto; (b) o julgamento expresso ou não pelo sujeito sobre a actividade cognitiva ou o produto mental dessas actividade; (c) a decisão que o sujeito pode tomar no sentido de modificar, ou não as suas actividades cognitivas ou o seu produto, ou outro aspecto da situação, em função do resultado do seu julgamento metacognitivo.

Às etapas anteriores, atribui-lhes os rótulos de "*processo metacognitivo*", "*julgamento metacognitivo*" ou "*produto da metacognição*" e "*decisão metacognitiva*" (Noel, 1991, p. 18-19).

Uma pergunta que poderemos fazer é quais são as vantagens de se ser metacognitivo?

Para Flavell (1979, citado por Cruz, 1989), "*uma pessoa com boa capacidade metacognitiva tem um melhor conhecimento acerca da sua própria capacidade geral numa determinada área e uma melhor avaliação da tarefa apresentada, o que resulta numa melhor realização da tarefa* " (p. 23).

Por sua vez, Valente et al. (1989b) referem que os alunos treinados a desenvolver o pensamento metacognitivo aprendem não só os conteúdos e as competências específicas das áreas curriculares como desenvolvem competências gerais de "*aprender a aprender*".

Sendo a metacognição "*um processo executivo, supervisor das competências e das estratégias cognitivas*" (Salema, 1997, p. 50), pensamos, ser, pois, de maior importância, fazer com que alunos principiantes em resolução de problemas aproximem os seus comportamentos dos comportamentos pensados e reflexivos dos "peritos" nessa área.

2.3 – Relação entre metacognição e resolução de problemas

Novais e Cruz (1987) referem que existe uma relação directa entre metacognição e resolução de problemas. Alegam que, se por um lado a resolução de problemas leva ao treino da metacognição, por outro, a metacognição "*faz aumentar as capacidades cognitivas que envolve*" (p. 115-116).

Na mesma linha de pensamento, Valente et al. (1989a) referem que o ensino da resolução de problemas terá efeitos mais significativos se se utilizarem estratégias metacognitivas. Lobo (1989) sugere algumas dessas estratégias, como sendo: "*registar as dificuldades referidas pelo solucionador; registar as dificuldades do solucionador enquanto ele executa, em voz alta, a actividade; dizer ao solucionador as dificuldades que lhe detectou durante a realização da actividade; recordar ao solucionador as etapas percorridas durante a execução da actividade, caso este necessite*" (p. 24). Para tal, sugere que seja solicitado ao resolvedor a leitura atenta da actividade, para que saliente oralmente as dificuldades sentidas durante a execução da actividade, bem como o modo como conseguiu ultrapassar essas dificuldades e salientar todo o pensamento utilizado durante a execução da actividade.

No estudo levado a efeito por Lobo (1989), envolvendo trinta e sete futuros professores de Matemática e Ciências da Natureza do 2º Ciclo do Ensino Básico, propunha-se determinar a influência da utilização de estratégias metacognitivas por parte desses futuros professores, durante a resolução de problemas, na própria capacidade da resolução de problemas, na capacidade de utilização de processos científicos, no desenvolvimento do pensamento crítico e nas atitudes pessoais em relação ao ensino das Ciências.

No grupo experimental, os alunos, aos pares, resolveram problemas alternando a posição de solucionador e de observador. Foram sugeridas estratégias metacognitivas como: ler com atenção a actividade; registar as actividades referidas pelo resolvedor, entre outras. No grupo de controlo, as actividades foram realizadas em grupos de três/quatro alunos, sem quaisquer directrizes/orientações para a sua execução.

Verificou-se que no grupo experimental houve uma melhoria significativa da capacidade de resolução de problemas, o que não aconteceu com o grupo de controlo. Esta investigadora concluiu que "*a utilização de estratégias metacognitivas no treino de capacidades básicas de pensamento envolvidas no processo de resolução de problemas, tem uma influência positiva no desenvolvimento da própria capacidade de resolução de problemas*" (p. 47).

2.4 - Modelos de resolução de problemas envolvendo uma perspectiva metacognitiva

Polya (1978) apresenta um modelo de resolução de problemas composto pelas seguintes quatro etapas: (a) compreensão do problema, (b) concepção de um plano de resolução, (c) execução desse plano e (d) olhar para trás. Este modelo também foi defendido por Reeves (1987) e este autor sugere que na primeira etapa, o resolvedor deve tentar entender o problema, analisando, para tal, cada componente e a relação que estabelece com a totalidade do problema. Sugere, pois, que se façam algumas análises e sínteses. Para a segunda etapa propõe que o resolvedor se questione se já alguma vez se havia confrontado com algum problema semelhante. Na terceira etapa sugere que o resolvedor deveria questionar-se se ficava satisfeito por ter obtido uma resposta para um problema. No que diz respeito à última etapa, sugere que se verifiquem os procedimentos levados a efeito ao longo da resolução, identificando-se os aspectos que contribuíram para que o processo de resolução tivesse sido aquele e não outro. Sugere também que o resolvedor deveria tentar indagar da possibilidade ou não da resposta poder ser generalizável.

Por seu turno, Bransford e Stein (1984) referem a existência de cinco componentes no processo de resolução de problemas e cujas iniciais dão o nome ao modelo IDEAL: Identify (identificar o problema); Define (definir o problema com precisão); Explore (explorar estratégias para obter a solução do problema); Act (executar o plano delineado); Look e Learn (observar o efeito das actividades realizadas e aprender a partir da avaliação dos resultados dessas actividades).

Lester (1985) associa, de uma maneira que nos parece ter sido bastante feliz, a componente cognitiva do modelo de Polya à componente metacognitiva do modelo de Flavell e Wellman. Na componente cognitiva, Lester (1985) identifica as seguintes quatro categorias: orientação, organização, execução e verificação e na componente metacognitiva atende às variáveis de sujeito, de tarefa e de estratégia. Baseados neste modelo entendemos como intervenções metacognitivas ao nível da orientação as que se prendem com a leitura, análise e compreensão do problema; ao nível da organização, as que se prendam com a identificação de estratégias e concepção do plano de resolução; ao nível da execução as que se prendam com a implementação das estratégias e a monitoração do progresso e, ao nível da verificação, as que se prendam com a avaliação das fases anteriores.

Por sua vez, Schoenfeld (1985) concebe um modelo de resolução de problemas baseado nas seguintes cinco fases: "1 - análise; 2 - desenho; 3 - exploração; 4 - realização e 5 - verificação" (p. 110).

No que concerne à fase da análise, o principal objectivo consiste em compreender o problema, analisar os dados, podendo-se simplificá-lo para a sua resolução. Relativamente à fase do desenho, o importante é a concepção de um plano de "ataque" ao problema. A fase da exploração é caracterizada pelo facto de se poder voltar atrás quando se encontrar um obstáculo e não se consegue facilmente transpor. A fase da realização é caracterizada pela execução do plano que se concebeu na fase do desenho. Por último, a fase da verificação prende-se com o controle do processo de resolução, verificando todos os passos, bem como avaliar a resposta encontrada, podendo surgir outras soluções para o problema.

Borralho (1990) concebe um modelo metacognitivo de resolução de problemas, baseado nos modelos de Schoenfeld (1985) e Lester (1980), com as seguintes nove fases:

"Fase 1 - Ler atentamente o problema" (p. 175). Nesta fase é importante que o aluno leia atentamente o problema com o objectivo de extrair toda a informação necessária do mesmo. Segundo Borralho (1990), o professor nesta fase terá que apelar à atenção dos alunos para essa tarefa.

"Fase 2 - Consciencialização do problema" (p. 175). Esta fase é a que faz do problema um verdadeiro problema para o aluno, porque é na altura em que toma consciência do problema que constata que ele não pode ser resolvido de imediato. Borralho (1990) concede muita importância ao facto de o problema suscitar interesse na sua resolução, portanto é nesta fase que esse sentimento de desejar resolvê-lo deve surgir.

"Fase 3 - Compreensão do problema" (p. 175). Nesta fase, torna-se importante que o aluno identifique o que é pedido, identifique a informação que o enunciado contém e que ele necessita e a que não necessita. Esta é pois a fase em que o resolvedor interpreta a informação do problema no sentido de criar uma imagem interna do mesmo.

"Fase 4 - Análise do problema" (p. 176). Nesta fase o resolvedor terá que relacionar a informação do problema com as experiências anteriores que ele possui em termos de conhecimentos sobre o assunto. Esta é rotulada por Borralho (1990) como uma fase de especificação do que está para trás.

"Fase 5 - Desenvolvimento de um plano" (p. 177). Esta é a fase de concepção do caminho que terá que seguir no sentido de encontrar a resposta ao problema. Borralho (1990) apela aqui para o papel importante que o professor poderá ter nesta fase, no sentido de não deixar desmotivar os alunos, caso estes não estejam a conseguir delinear um plano de resolução.

"Fase 6 - Implementação do plano" (p. 178). Esta é a fase onde o aluno põe em prática o plano que delineou para a resolução do problema. Este investigador refere que uma coisa é a selecção de uma estratégia de resolução para o problema, outra coisa é pô-la em prática. Por isso ele remete esta fase para uma perfeita ligação com a próxima.

"Fase 7 - Avaliação" (p. 179). Esta fase consiste numa análise e crítica às soluções encontradas. Isto pressupõe que haja uma verificação dos passos; haja uma verificação das respostas às condições do problema. Borralho (1990) refere a importância desta avaliação não se verificar simplesmente no fim de toda a resolução, mas sim ao longo da mesma.

"Fase 8 - Identificar aprendizagens" (p. 179). Esta é a fase em que o aluno terá de identificar o que aprendeu de novo com cada novo problema que resolve. Apela-se, pois aqui, à reflexão das aprendizagens efectuadas, contribuindo-se para a criação do hábito de controle das próprias aprendizagens.

"Fase 9 - Identificar dificuldades" (p. 180). Torna-se importante que o aluno saiba identificar as dificuldades sentidas ao longo da resolução do problema, bem como saber explicar o modo pelo qual foi conseguindo superar essas mesmas dificuldades. Esta é uma actividade de cariz meramente metacognitivo para Borralho (1990), pois, desta forma permite-se a "monitoração/gestão dos recursos e heurísticas" (p. 180).

Destacamos também as sugestões propostas por Stacey e Groves (1999) no que diz respeito a algumas etapas da resolução de problemas. Em primeiro lugar, salientam que nunca é pedir demais aos alunos que façam uma leitura cuidadosa do enunciado do problema, porque, segundo eles, muitos fracassos podem dever-se a uma leitura pouco atenta do mesmo. Para estes autores, essa leitura não deveria ser passiva, deveria implicar alguma acção por parte dos resolvedores, como seja a de escreverem ou desenharem a questão com palavras ou ideias próprias. Sugerem ainda que uma nova leitura do enunciado do problema, aquando da existência de algum bloqueio na resolução, é uma medida que consideram muito útil. Salientam também que os resolvedores não deveriam perder de vista as seguintes perguntas, como sendo norteadoras do seu desempenho: "*O que é que sei sobre o problema? e o que é que eu quero fazer?*" (Stacey e Groves, 1999, p. 19).

Depreende-se das ideias dos autores anteriores que os vários procedimentos que um resolvedor deve ter ao resolver um problema, devem ser feitos com alguma ponderação, de forma reflexiva e não pressionada pelo factor tempo. Aliás, concordamos com Guzmán (1999), quando refere que a pressa é sempre má conselheira. Este investigador sugere a necessidade do resolvedor familiarizar-se com a situação problemática, fazendo o levantamento dos dados pertinentes para a resolução da mesma, jogando mentalmente com eles, prevendo possíveis soluções e seleccionando vários opções de caminhos para se chegar a essas soluções.

Stacey e Groves (1989) salientam como sendo também de muita importância, o facto de os resolvedores registarem por escrito a resolução do problema, evitando-se assim, fazer a mesma coisa várias vezes e esquecer-se uma boa ideia que se teve e se esqueceu por não se ter logo registado. Destacam também que tem tanta importância escrever que houve uma ideia que não funcionou ou era impossível, como escrever algo que veio a resultar correcto.

Estes autores destacam ainda que para se evitar situações de bloqueio na resolução de problemas é fundamental que se reflicta sobre o que se sabe e sobre o que se pretende saber. Para tal sugerem que se experimentem algumas estratégias possíveis de resolução, como sejam a tentativa e erro, a procura de regularidades, etc.

Por fim, sugerem a importância de se comprovar o trabalho que tem estado a ser desenvolvido, não deixando essa tarefa apenas para o final.

2.5 – Avaliação dos processos metacognitivos

Charles et al. (1987) numa importante obra sobre avaliação em resolução de problemas sugerem a elaboração de relatórios por parte dos estudantes. Estes investigadores, de entre várias sugestões para avaliar o processo dos alunos em resolução de problemas apresentam as seguintes questões orientadoras da reflexão dos alunos aquando da elaboração do relatório sobre a resolução do problema efectuada, porque acreditam que os relatórios dão informação útil acerca da habilidade dos estudantes em monitorar e avaliar o seu pensamento durante, ou imediatamente após a resolução do problema:

> "*1 - O que fizeste ou pensaste assim que viste o problema? Quais foram os teus pensamentos?;*
> *2 - Utilizaste alguma(s) estratégia(s) de resolução de problemas? Qual ou quais? Quais é que resultaram? Como chegaste à solução?;*
> *3 - Fizeste alguma tentativa que te obrigou a parar e a procurar outro caminho? Como te sentiste?;*
> *4 - Encontraste a solução para o problema? Como te sentiste?;*
> *5 - Verificaste se a tua resposta estava correcta? Tens a certeza que a tua resposta estava correcta?;*
> *6 - Como te sentiste, de uma forma geral, nesta experiência de resolução de problemas?*" (p. 24).

Nesta linha de pensamento, Luz (1996), tirando partido dos estudos de Guzmán (1986) também propõe a utilização de provas escritas sobre os problemas, como sejam por exemplo, a elaboração de relatórios. Sugere que esses relatórios deveriam contemplar a justificação da solução encontrada, bem como a descrição do caminho seguido na resolução do problema, destacando-se as dificuldades e os obstáculos encontrados e as eventuais mudanças de estratégias.

Esta investigadora enfatiza esta estratégia de avaliação, alegando que assim se pode conhecer melhor o processo seguido pelo aluno, podendo-se analisar a sua capacidade argumentativa, a sua capacidade de tomada de consciência ou a sua capacidade para generalizar resultados obtidos.

Por sua vez, Garofalo (1987, citado por Fernandes, 1989b) identifica três actividades que o professor poderá desenvolver:

> "*1) fazer perguntas que levem os alunos a reflectir sobre os seus conhecimentos de matemática e sobre os seus comportamentos e maneiras de pensar, a analisá-los, e a utilizá-los;*
> *2) transmitir aos alunos um conjunto de ideias, de factos e conceitos inerentes ao ensino e à aprendizagem da matemática que parecem influenciar o rendimento de forma significativa nesta disciplina;*
> *3) ajudar os alunos a avaliar e a regular os seus comportamentos e acções*" (p. 5).

Para cada um dos três aspectos mencionados anteriormente, Fernandes (1989b) caracteriza o papel que o professor terá que assumir. Assim, para o 1º caso, o professor pode colocar algumas questões do tipo: "*quais as estratégias* *que mais utilizas para resolver este tipo de problemas?; qual o tipo de erros que usualmente fazes quando resolves problemas?; que poderás fazer para os evitar?; que é que fazes quando tentas resolver um problema de um género diferente do habitual?*" (p. 5).

Para o 2º caso, o professor terá que corrigir ideias incorrectas que os alunos tenham. Segundo Fernandes (1989b), o professor terá de alertar os alunos para situações do tipo: "*há problemas que não podem ser resolvidos pela simples aplicação de uma fórmula, operação ou outro procedimento mecânico; há problemas que se resolvem rapidamente, mas outros demoram muito tempo; há problemas que podem ser resolvidos de maneiras diferentes*" (p. 5).

No 3º caso "interessa que o professor em vez de apresentar a solução de um problema, se empenhe na sua resolução" (p. 5). Isto passa pelo professor explicar aos seus alunos todos os "passos mentais" que seguiu na resolução do problema.

Um outro investigador que estudou o modo como se deve ensinar metacognição foi Schoenfeld (1987). Este investigador sugeriu quatro técnicas que poderão ser utilizadas na sala de aula no sentido de se desenvolverem capacidades cognitivas. A 1ª é a utilização da tecnologia vídeo para mostrar aos alunos gravações de outros alunos a resolverem problemas. Para Schoenfeld (1987), esta actividade permite que os alunos tomem consciência acerca das suas próprias capacidades e recursos metacognitivos. Na 2ª, o professor serve de modelo em termos de comportamento metacognitivo, pois, fala alto, à medida que vai resolvendo os problemas, de modo que os alunos se apercebam dos aspectos metacognitivos envolvidos. Na 3ª técnica, os problemas são discutidos por toda a classe, com o professor servindo de moderador. A actividade do professor é mínima, pois este somente terá que estimular a participação dos alunos, sem ser ele a dar a resposta. Por último, Schoenfeld (1987) sugere a utilização de pequenos grupos de 3 ou 4 alunos que resolvem problemas assumindo o professor o papel de auxiliar dos alunos. Neste caso, os alunos terão que se orientar sempre por três questões-chave: o que estás a fazer?; porque estás a fazer isso?; e em que medida o que estás a fazer te ajuda a resolver o problema?

Clement e Konold (1989) sugerem trabalho em pares, em que os sujeitos vão alternando os papéis de resolvedor e ouvinte, obedecendo às seguintes sugestões orientadoras:

> "*Eu não entendi o problema:*
> *. lê de novo o problema;*
> *. o que é que sei; o que tenho que saber?;*
> *. o que procuro?;*
> *. poderei reformular o problema por palavras minhas?;*
> *. poderei desenhar um diagrama?*
>
> *Eu não sei para onde ir a partir daqui:*
> *. ter-me-ão dado informações relevantes e eu ainda não as usei?;*
> *. poderei resolver parte do problema?;*
> *. será que há alguma informação útil "escondida" no problema?*
>
> *Estará a minha solução correcta?:*
> *. que confiança tenho na solução?;*
> *. qual será a resposta plausível?;*
> *. será que os passos da minha solução são válidos?;*
> *. será que há outro método que poderei usar para comprovar a minha resposta?*
>
> *Estou confuso:*
> *. sê paciente. Tem calma e prossegue lentamente;*
> *. organiza o que tens de uma forma mais precisa*" (p. 29).

Por sua vez, Pérez (1994) sugere algumas técnicas que podem ajudar os resolvedores a entenderem melhor o problema:

> "*Expressar o problema com outras palavras.*
> *Explicar aos colegas em que consiste o problema.*
> *Representar o problema noutro formato (gráficos, diagramas, desenhos, com objectos, etc.).*
> *Indicar qual é a meta do problema.*
> *Assinalar onde reside a dificuldade da tarefa.*
> *Separar os dados relevantes dos não relevantes.*
> *Indicar os dados necessários para a resolução da tarefa.*
> *Assinalar os dados não presentes que seriam necessários para a resolução do problema.*
> *Procurar um problema semelhante que já se tenha resolvido.*
> *Analisar primeiro alguns exemplos concretos, quando o problema for muito geral.*
> *Procurar diferentes situações (cenários, contextos, tarefas, etc.) nos quais se possa apresentar esse problema*" (p. 74).

Estas sugestões de Pérez (1994) podem ser complementadas com as que Stacey e Groves (1999) sugerem:

> "*- O que é que eu SEI sobre o problema?*
> *- O que é que eu QUERO encontrar?*
> *- O que é que eu posso USAR, que me possa ajudar?*
> *- Posso fazer uma CONJECTURA?*

- Posso COMPROVAR o que encontrei?" (p. 18).

A técnica do "*pensar em voz alta*" tem sido outra maneira do investigador e do sujeito investigado poderem analisar com algum detalhe o processo mental envolvido na actividade de resolução de problemas. Esta ideia é defendida por Schoenfeld (1979). Contudo, "*pensar em voz alta*" não é algo com que as pessoas se sintam cómodas. Por isso, este autor refere que é necessário ensinar os resolvedores a "*pensar alto*".

Fernandes et al. (1994) apresentam algumas limitações à técnica do "*pensar alto*":

> *"(a) o pensamento pode inibir a fala; (b) o pensamento pode processar-se de forma rápida e com um certo grau de aleatoridade, de tal forma que a fala pode não acompanhar ou relatar com precisão; (c) os indivíduos podem permanecer em silêncio precisamente quando o seu pensamento está mais activo; (d) um indivíduo pode resolver um problema de forma diferente pelo facto de ter que relatar os seus pensamentos"* (p. 44).

Apesar desta chamada de atenção, cremos que é fácil verificar que se os alunos tiverem adquirido o hábito de pensar em voz alta, os professores poderão aperceber-se do seu raciocínio, isto é, poderão obter pistas sobre qual o caminho seguido na resolução de determinado problema, quais foram as suas limitações e como as conseguiram ultrapassar.

Há, contudo que se levar em linha de conta outra chamada de atenção, desta feita, por parte de Lucas et al. (1980, citados por Fernandes et al., 1994). Estes autores salientam que quando se estabelece um processo de comunicação entre um investigador e um aluno com o objectivo de se estudarem os processos de resolução há quatro fenómenos a considerar:

> *"1. Aquilo que o aluno diz ou escreve.*
> *2. Aquilo que o aluno quer significar ou está a pensar.*
> *3. A forma como o investigador interpreta o que aprende ou percebe.*
> *4. A forma como o investigador faz corresponder uma categoria à interpretação que faz" (p. 42).*

Na análise destes quatro aspectos podem surgir fenómenos como "distorção", "veracidade" e "rigor", pois, uma coisa é o que o aluno pensa, outra coisa é o que ele verbaliza. Outra poderá ainda ser o que o investigador ouve e outra ainda, o que este interpreta.

O que nos parece evidente é que se os sujeitos não ficarem calados, muito do que pensam, numa situação de resolução de problemas, pode ajudar a perceber-se que tipo de capacidade cognitiva e metacognitiva podem possuir.

Há, contudo, que se pensar na melhor forma de se poderem registar esses momentos.

3 – A gravação vídeo na formação de professores e na investigação em educação matemática

Nesta terceira parte do enquadramento teórico salientaremos o importante papel que assume a gravação vídeo na formação de professores em geral e em situações de resolução de problemas em particular.

Desde o início dos anos sessenta que a vídeogravação tem sido uma ferramenta utilizada na formação de professores (Leinhardt, 1990).

Mackey (1967) reconhece que a "*vídeogravação, muito mais que a televisão ao vivo está a revolucionar as nossas técnicas de formação de professores*" (p. 1). A este nível destacam-se duas funções que o vídeo tem assumido: (a) para modelar comportamentos através do desenvolvimento de micro-lições em tópicos de micro-ensino, como sejam a técnica de questionar, a introdução de um novo assunto, entre outras e (b) como fonte de feedback dos professores que auto-criticam ou trabalham com um supervisor na observação da sua própria "performance" na sala de aula.

Esta dualidade de funções do vídeo ao nível da formação de professores foi, também, assinalada por García (1987), numa interessante obra intitulada "*Fundamentos de la formación permanente del professorado mediante el empleo del vídeo*". Este autor refere que dever-se-ía encarar o vídeo não só como meio de apresentação de situações - exemplares ou não - mas também como reprodutor da própria actuação.

Na mesma linha de ideias, Bautista (1994) destaca como dois principais papeis da utilização da gravação vídeo:

> "*em primeiro lugar, ser um instrumento que permite recolher informação visual e sonora de situações e acontecimentos da aula, facilitando a análise das dimensões básicas do ensino: os contextos e as comunicações verbal e não verbal; e, em segundo lugar, permitir o visionamento diferido dessas gravações por todas as pessoas imersas em tais processos de ensino e aprendizagem*" (p. 107).

Já em 1974, Dalgalian referiu que tinha passado a ser inquestionável o papel do vídeo na prática do micro-ensino, por não se reconhecer nenhum instrumento de observação que lhe pudesse servir de "concorrente". Passados catorze anos, Canellas et al. (1988) voltaram a referir que a maior vantagem do vídeo relativamente aos restantes audiovisuais "é a possibilidade de uma apresentação flexível e de um feedback imediato" (p. 108).

Bautista (1994) ao abordar a utilização do vídeo na formação de professores destaca (a) a perspectiva da racionalidade técnica (onde se destacam os processos de micro-ensino e de supervisão clínica, com ênfase para o feedback) e (b) a perspectiva da racionalidade crítica, onde se poderia destacar o processo de autoscopia, tendo em conta a perspectiva do paradigma baseado na indagação (García-Valcárcel, 1996).

3.1 – A perspectiva da racionalidade técnica

3.1.1 – Vantagens técnicas da utilização da gravação vídeo na formação de professores

A importância da utilização do vídeo na formação de professores deve-se fundamentalmente a algumas vantagens de ordem técnico, como sejam as que são apresentadas por Aparici e Mantilla (1987): (a) a câmara de vídeo pode captar a imagem em condições mínimas de luz; (b) a utilização de materiais de baixo custo e reutilizáveis; (c) a possibilidade de visionamento das imagens tal como foram captadas; (d) a simultaneidade e sincronismo da gravação do som e imagem na fita magnética; e) a não morosidade do processo de visionamento, pois pode observar-se de imediato; (f) a facilidade de manipulação do equipamento por parte do utilizador; (g) a possibilidade de se parar a imagem, avançar e retroceder na fita magnética e (h) a possibilidade de se poder visionar em qualquer ambiente sem limitações de luz nem hora marcada.

Não obstante estas vantagens, a utilização do vídeo na formação de professores costuma levantar alguns problemas, nomeadamente ao nível do efeito perturbador que a presença da câmara e/ou da pessoa que filma possa produzir sobre quem está em situação de ser filmado. Este tipo de problemas começou a ser debatido logo no início da introdução desta técnica de formação. Por exemplo, Decaigny (1972) chama a atenção para o facto da atmosfera natural da classe poder ser perturbada pela presença da câmara, dos microfones, dos projectores e do operador. Por isso, este investigador também chama a atenção para que certos aparelhos devam ser dissimulados, ao ponto de se esquecer depressa a sua presença. O formador deve, pois, utilizar a câmara de vídeo o mais discretamente possível (Rauly, 1987), uma vez que após um certo período de ambientação, a perturbação deixa de se fazer sentir devido ao interesse dos alunos na lição (Decaigny, 1972).

Na mesma linha de raciocínio, Giacomantonio (1981) afirma que "... *a presença do aparelho de video-gravação sempre induz, pelo menos no início, a factores de ansiedade naquele que se sente observado...*" (p. 151). Este autor acrescenta um pormenor que consideramos ser de grande importância. Para ele, numa fase posterior à inicial, a câmara em vez de provocar os sentimentos supra referidos, leva a que quem esteja a ser observado se sinta motivado para coordenar melhor as ideias e explaná-las com maior objectividade e rigor.

A confirmar esta ideia, Bertran (1962, citado por Gea, 1983), numa investigação levada a efeito no Centro Audiovisual de Saint-Cloud, em Paris, na qual se aplicou o circuito fechado de vídeo à formação de professores, chegou à conclusão que: "*a utilização do vídeo em tarefas pedagógicas obriga os professores a ser mais concisos na apresentação dos temas, a melhorar os seus métodos, a insistir sobre os pontos e objectivos essenciais da sua lição; oferece ao mesmo tempo a possibilidade de adquirir conhecimentos objectivos sobre si mesmos e ajuda-os a corrigir a sua forma de ensinar*" (p. 97).

3.1.2 – A vídeogravação no processo de micro-ensino

O método de formação de professores designado de micro-ensino foi desenvolvido nos anos sessenta por Dwight Allen e seus colaboradores na Universidade de Stanford, nos Estados Unidos, através do Stanford Center for Research and Development in Teaching (Brown, 1979; Bautista, 1994 e Petrica, 1997).

Neste processo de experiência laboratorial e preliminar à prática profissional (Brown, 1979), a pessoa que está a ser treinada, ensina a um grupo pequeno de alunos (4 ou 5) num certo tempo (15 minutos) e num certo espaço (laboratorial).

Normalmente, a situação de treino é vídeogravada para posterior observação e análise por parte do supervisor e da pessoa observada. O confronto dos futuros professores consigo próprios e a possibilidade de treinarem de diversas maneiras a mesma prática, favorece a modificação de atitudes pedagógicas (Decaigny, 1972).

De acordo com Allen e Ryan (1969), citados por Baustista (1994), os quinze minutos de duração de uma sessão de micro-ensino seriam distribuídos da seguinte forma:

> *"um minuto para iniciar o trabalho, cinco para praticar a destreza que é objecto de aprendizagem por parte do professor (fazer perguntas na turma, recapitular num minuto os temas abordados numa aula...). Cinco minutos para que o supervisor comente ao professor a sua actuação, ou, no caso de se ter gravado em vídeo, comentar durante o visionamento, as realizações do docente e, finalmente, quatro minutos para comentar as avaliações e observações que tenham realizado os alunos"* (p. 108).

Nesta modalidade de treino dos futuros professores, o vídeo poderia constituir um recurso muito poderoso através da apresentação de modelos que mostram destrezas que os formandos tenham que aprender mediante a observação e a imitação dos mesmos. Por outro lado, ao serem gravados, os professores poderiam recolher informação sobre a sua actuação (Bautista, 1994), informação essa que seria propiciadora de feedbacks sobre a sua intervenção pedagógica. Desde os movimentos do professor, passando pelos seus gestos ou interacções, até à ocorrência de alterações orais ou visuais, tudo poderia ser analisado (Villar, 1977, citado por Bautista, 1994).

Portanto, segundo Turney et al. (1976), citados por García (1987), o conceito de feedback em micro-ensino pode definir-se como "*a informação que um estudante recebe na sua intenção de imitar certos padrões de ensino*" (p. 198) e é recebido através de autovisionamento (vídeo-feedback) ou através das sugestões do supervisor ou dos seus colegas.

3.1.3 – A vídeogravação no processo de supervisão clínica

Segundo Petrica (1997), a supervisão clínica foi inicialmente desenvolvida em Harvard, no "*Newton Summer Program*" (p. 31). O seu objectivo geral é o aperfeiçoamento da instrução por parte do professor em situação natural, não laboratorial, com todas as condições inerentes a uma aula normal.

Centraliza a sua atenção no quê, de que modo e em como os professores ensinam. Assim, o seu objectivo específico é "*alterar ou aperfeiçoar directamente os materiais e os métodos durante a interacção do professor com os seus alunos*" (Petrica, 1997, p. 31) para que melhore a sua prática pedagógica.

De acordo com Bautista (1994) e García-Valcárcel (1996), um ciclo de supervisão clínica contempla as seguintes fases: (a) – planificação; (b) – observação e recolha de dados; (c) – análise dos dados observados e (d) – reunião de feedback ou conferência de supervisão. Portanto, a execução do planeado e o que os alunos, futuros professores, fazem ou aprendem são objecto de análise por parte do supervisor e do professor observado.

É no processo de observação que a vídeogravação tem um papel muito importante, pois ajuda os intervenientes no acto de análise comportamental, quando se produz o feedback da acção observada, pois, "*tanto o supervisor como o professor não necessitam recorrer à sua memória durante a última fase do ciclo de supervisão clínica*" (Bautista, 1994, p. 114).

De facto, uma grande vantagem da vídeogravação é a possibilidade do sujeito observado poder tornar-se observador (Jongekrijg e Russell, 1999). Por outro lado, constitui um recurso para o armazenamento permanente da informação gravada, o que poderá ajudar o supervisor a seleccionar os aspectos da cassete de vídeo que melhor se adaptem aos objectivos da supervisão. Contudo, há que ter em conta a sugestão de não se gravar as primeiras sessões, porque costumam ser inconsistentes, devido ao factor novidade (Jongekrijg e Russell, 1999).

3.2 – A perspectiva da racionalidade crítica

3.2.1 – A vídeogravação no processo de autoscopia – ênfase no paradigma baseado na indagação

De acordo com García-Valcárcel (1996), o conceito de professor de hoje tem que ser o de professor reflexivo, dotado de grande capacidade de resolução de problemas. Portanto, "*a implicação do professor em processos de reflexão sobre a sua própria prática é um elemento central da indagação*" (Tom, 1985, citado por García-Valcárcel, 1996, p. 188). Desde esta perspectiva, o vídeo na formação de professores assume a função de proporcionar informação sobre a prática dos docentes, que les permite reflectir sobre o que ocorreu, com a finalidade de poderem melhorar e/ou corrigir algo que tenha estado menos bem.

Estamos de acordo com Bautista (1994) quando refere que o vídeo pode ajudar o professor a reflectir sobre as suas decisões, tomadas "in loco", com os seus alunos. No fundo, permite falar-se em autoscopia, isto é, permite que se gravem os indivíduos em situação de expressão e de comunicação, no sentido de que eles possam observar, analisar e reflectir sobre o seu próprio comportamento, com a intenção de melhorá-lo (Bourron e Denneville, 1991).

Em 1972, Decagny afirma que "*a autoscopia, a confrontação do aluno-mestre com ele próprio, é um factor da formação pedagógica onde não se conhecem ainda todas as consequências*" (p. 69). Dezasseis anos depois, Canellas et al. e Freiberg e Waxman referem que o facto da vídeo-gravação permitir um "feedback" imediato não tem sido muito explorado.

Para Decagny (1972), uma das vantagens da autoscopia é o facto dos alunos poderem adquirir uma atitude crítica do seu próprio comportamento em classe. Por seu turno, Fauquet e Stasfogel (1974) referem que "*a tomada de consciência de si através da autoscopia é a maior das motivações, e sem motivação não existe senão um "saber emprestado" e não reassumido ou uma aprendizagem sem alma de um savoir-faire sem vida*" (p. 318). Por sua vez, Moderno (1984) chega mesmo a afirmar que "*a autoscopia representa a mais profunda mudança qualitativa potencial que afectou a formação de professores nos últimos anos*" (p. 390).

Na mesma linha de ideias, Parra e Parra (1985), dão ênfase à gravação vídeo, afirmando que "*o facto de o professor em treinamento se "ver" e se "ouvir", gravado que está em vídeo-tape, faz uma sensível diferença na correcção das suas limitações e facilita, consequentemente, o seu desenvolvimento*" (p. 11). De facto, uma gravação permite o comentário, a repetição, o controle, a discussão. Podemos observar a mesma sequência de vários pontos de vista, isto é, coisas que um observador único não poderá ver em simultâneo.

Tal como refere Moderno (1984) e outros investigadores (Johnson, 1988; Ferrés, 1988; Cabero, 1989; Laycock e Bunnag, 1991; Bourron e Denneville, 1991), a possibilidade que a autoscopia veio trazer à formação de professores de se poderem auto-criticar e auto-analisar, veio dar mais consistência às críticas do supervisor.

Um outro aspecto importante relacionado com a prática da autoscopia ou "*vídeo-espelho*" (Ferrés, 1988, p. 133), é referido por (García, 1987). Para este investigador "*a autoscopia permite uma tomada de consciência global do comportamento pedagógico, mas não permite uma melhoria significativa dos comportamentos julgados defeituosos*" (p. 202). Inferimos destas palavras que sem um esquema orientador dessa reflexão, não se conduz a nenhuma modificação de conduta pedagógica e "*o visionamento do próprio comportamento só por si mesmo não assegura a mudança*" (García, 1987, p. 202). Justifica-se, pois, a intervenção e ajuda de um supervisor reflexivo que oriente essa reflexão crítica por parte do futuro professor.

Como síntese, podemos dizer que ainda que haja algumas críticas à implementação da perspectiva da racionalidade técnica, por ser baseada, de algum modo, na psicologia condutista, somos de opinião que tanto o processo de micro-ensino como o da supervisão clínica podem continuar a ter espaço na formação de professores de hoje. Para tal, basta que não se implemente a perspectiva da modelação e implementação pura e simples, mas sim a da descoberta de si mesmo enquanto se auto-observa e se auto-analisa. A observação a posteriori sobre a acção ajuda o professor a perceber o que ocorreu durante a acção, que problemas surgiram e como os conseguiu ultrapassar.

O professor jamais pode demitir-se da sua obrigação de querer melhorar a sua "performance", no sentido de caminhar para o conceito de bom professor. Para tal, tem que assumir-se como prático reflexivo, tem que ser muito crítico sobre como planifica, executa e avalia a sua intervenção pedagógica. Neste processo, a ajuda de um professor mais experiente, supervisor, pode orientar esse futuro professor no seu desenvolvimento humano e profissional (Amaral et al., 1996).

É necessário, pois, que o supervisor assuma também uma postura reflexiva para que depois, os eus formandos possam ser capazes de adquirir competência profissional em função da reflexão que tenham realizado sobre a sua própria actuação. Isto é, acreditamos que um supervisor reflexivo incutirá nos seus formandos um espírito de indagação, de reflexão e de análise que serão muito úteis para que estes se transformem em práticos reflexivos permanentes, não apenas durante a acção mas também sobre a acção (Amaral et al., 1996).

Toda a ajuda é pouca quando se pretende aceder a ser-se um bom professor. Por sua vez, a escola melhorará se todos os professores tiverem em conta que a sua metacognição pode ser desenvolvida, isto é, a forma de cada um conhecer a sua forma de conhecer pode ser treinada. Para tal, cada um de nós tem que assumir-se como agente metacognitivo, que reflecte durante e após a sua intervenção pedagógica com os seus alunos. Dizemos mais, deverá reflectir sobre cada uma das suas reflexões.

Estamos em crer que se o professor se habituar a expressar o seu pensamento por meio de palavras, isso, como os seus gestos e as suas pausas, ao serem captados por uma câmara de vídeo, poderão ser indicadores muito úteis sobre a sua própria metacognição. Ao ser analisada poderia contribuir para a melhoria da sua forma de pensar.

Acreditamos, pois, que o vídeo tem que continuar a ser considerado como um recurso importante e útil ao nível da formação de professores.

3.3 – A vídeogravação no processo de resolução de problemas como forma de registo e de promoção do pensar

Da análise da literatura levada a efeito por White (1990), destaca-se que os dois caminhos mais utilizados para medir a metacognição é o auto-relatório e a observação da actividade metacognitiva.

Por seu turno, Fernandes (1991b) defende que a observação é o método "*...provavelmente mais eficaz para nos apercebermos dos processos de pensamento dos alunos enquanto resolvem problemas*" (p. 281).

Associadas ao tipo de instrumentos e à natureza do fenómeno a observar, podemos encontrar quatro classes de observação com eles relacionadas: (a) sistemas de categorias, apanágio dos sistemas fechados de observação, onde existe um número finito de categorias ou "*unidades de observação*" (Evertson e Green, 1986, p. 169) pré-determinadas e mutuamente exclusivas; (b) sistemas descritivos, fazendo parte dos sistemas abertos de observação, que podem ter categorias pré-determinadas ou podem surgir outras, geradas a partir dos dados; (c) sistemas narrativos e (d) registos tecnológicos, fazem igualmente parte dos sistemas abertos de observação e não têm categorias pré-determinadas.

Leinhardt (1990) refere que a vídeogravação tem sido usada mais frequentemente nos seguintes tipos de estudos: (a) processo.produto ou investigação sobre avaliação das interacções professor-alunos, com a vídeogravação como recolha de dados; (b) investigação sobre o processo cognitivo de tomada de decisões do professor; (c) micro-estudos etnográficos sobre os comportamentos dos alunos e dos professores e, (d) estudos laboratoriais sobre interacções situacionais como sejam a persistência numa tarefa.

Iremos enquadrar este estudo na perspectiva defendida pela alínea b), pois, neste tipo de estudo, o professor é vídeogravado durante um período de tempo com posterior análise dessa gravação por parte do investigador, segundo tópicos de observação específicos.

Um dos primeiros estudos relacionados com a resolução de problemas em que o vídeo foi utilizado na recolha de dados, foi o de Lester (1983). Neste estudo, com a duração de dois anos, realizado na Universidade de Indiana intitulado "Mathematical Problem Solving Project" (MPSP), cujo objectivo principal era o de desenvolver materiais de instrução para melhorar o desempenho de alunos do quarto, quinto e sexto grau na resolução de problemas, nomeadamente as habilidades para usar certas heurísticas, ferramentas e outras estratégias de resolução de problemas. Três membros do projecto (MPSP) durante o segundo ano investigaram se as crianças se tornavam capazes de resolver problemas, resolvendo-os sem qualquer tipo de instrução do professor.

Os objectivos específicos desta investigação foram:

(a) - diminuir a espontaneidade da criança;

(b) - consciencializar a criança de que a maioria dos problemas podem ser resolvidos de várias formas;

(c) - diminuir a tendência para encontrar uma solução prematura;

(d) - consciencializar a criança que muitos problemas podem ter mais do que uma solução correcta e outros podem não ter resposta por falta de informação;

(e) - ajudar as crianças a compreender a importância da organização e de alcançar esse "skill";

(f) - aumentar o gosto pela resolução de problemas.

O projecto foi desenvolvido em três fases. A primeira caracterizou-se pelo trabalho levado a efeito por dois grupos de seis alunos do 5º grau. Num grupo, os alunos escolheram trabalhar individualmente ou aos pares. Aos alunos do outro grupo foi-lhes solicitado que trabalhassem em conjunto, no sentido de colocarem questões uns aos outros, partilhando, assim, as suas ideias. Foi-lhes pedido que descrevessem, ao máximo, o trabalho realizado e as sessões foram gravadas em áudio e vídeo. Um membro do projecto estava presente para dar resposta a questões gerais, dando por vezes indicações para iniciar a discussão ou chamar a atenção dos alunos para a informação relevante. Como os objectivos desta fase eram, (a) o desenvolver um esquema para envolver a classe na resolução de problemas com pouca intervenção do professor; (b) determinar o tipo de intervenção do professor mais adequada aos objectivos do estudo e (c) seleccionar um conjunto de problemas adequados, havia em cada sessão dois observadores que reuniam com o professor para apreciarem o trabalho realizado pelos alunos.

A segunda e terceira fases eram constituídas por três partes: (a) apresentação do problema, (b) tentativa de o resolverem e (c) discussão da solução. Estas fases consistiram em duas experiências de ensino a curto prazo. A primeira experiência envolveu uma classe do terceiro grau, quatro do quarto grau e três do quinto grau, de vinte e dois a vinte e oito alunos cada. Os professores destas turmas tinham experiências e estilos diferentes. O objectivo era obter dados sobre o comportamento do professor assim como observar o comportamento dos alunos em grande grupo.

Em termos de conclusão, pôde verificar-se que a habilidade para resolver problemas é facilitada resolvendo problemas e os seis objectivos delineados inicialmente foram atingidos. Este investigador não faz referência à utilização que foi feita das gravações em vídeo.

Também Buchanan (1987) levou a efeito um estudo no qual utilizou o vídeo, em que o objectivo era o de estabelecer diferenças na resolução de problemas matemáticos entre alunos dotados de um terceiro grau e alunos de capacidade média de um quinto grau, gravados durante um período de oito semanas.

Tendo-se formado quatro grupos, um de rapazes dotados do terceiro grau, um de raparigas dotadas do terceiro grau, um de rapazes médios do quinto grau e um de raparigas médias do quinto grau, pôde-se concluir, pela análise global dos vídeos de todas as sessões, que as diferenças na resolução de problemas foram melhor descritas em termos de:

(a) - motivação;

(b) - opinião acerca da matemática;

(c) - estratégias de resolução de problemas;

(d) - meios de alcançar satisfação.

Esta investigadora justifica a utilização dos registos afirmando que "*filmando cada episódio de ensino, o pesquisador é capaz de observar os estudantes a interagirem enquanto resolvem problemas*" (p. 401).

Esta investigadora não se refere ao modo como tecnicamente filmou os grupos mas o estudo tem a vantagem de utilizar uma grelha de como os registos de vídeo foram analisados. A autora descriminava:

(a) - a intervenção oral de cada sujeito do grupo, identificando se era intervenção metacognitiva, divagação, ou comentário directamente relacionado com o problema;

(b) - o comentário do professor.

O estudo de Clement e Konold (1989), já referido anteriormente, também fez uso do vídeo. O estudo envolveu apenas dois estudantes a resolver um problema de processo, em que um dos estudantes assumia o papel de resolvedor e o outro de ouvinte questionador. Mais uma vez, estes investigadores não se referiram aos aspectos técnicos das filmagens nem ao efeito perturbador que, eventualmente pôde ter ocorrido pela presença das câmaras de filmar. A utilização do vídeo significou para os investigadores a possibilidade de poderem reproduzir todo o processo de resolução, mas o estudo também não adianta muito no que diz respeito ao modo como foi feita a análise.

Mais informativo é o estudo de Artzt e Thomas (1990), ao investigarem quais os comportamento cognitivos e metacognitivos de alunos do sétimo grau, enquanto trabalhavam em pequenos grupos a resolução de problemas. Foram gravados em vídeo seis grupos de estudantes.

Três observadores/descodificadores observaram cada cassete com um minuto de intervalo. Cada um deles observou um ou dois estudantes no grupo e registou as seguintes categorias e os respectivos níveis cognitivos ou metacognitivos:

(a) - "ler (cognitivo);

(b) - compreender (metacognitivo);

(c) - analisar (metacognitivo);

(d) - planificar (metacognitivo);

(e) - explorar (cognitivo ou metacognitivo);

(f) - implementar (cognitivo ou metacognitivo);

(g) - verificar (cognitivo ou metacognitivo);

(h) - observar e ouvir (nível cognitivo indeterminado)".

Shigematsu e Katsumi (1993) levaram a efeito uma investigação com 31 alunos do 5º ano. No processo de ensino-aprendizagem, o professor introduz o tópico sobre a forma de resolução de problemas e os alunos compreendem o objectivo do problema através do trabalho sobre alguns exemplos dados pelo professor usando um projector. Seguidamente, os alunos resolvem o problema individualmente e discutem, posteriormente, as suas soluções em turma. Por último o professor sumariza a ideia matemática do dia recorrendo às soluções dos alunos.

No que concerne à metodologia de análise do processo, em primeiro lugar, estes investigadores utilizam um questionário "1" para analisarem a metacognição dos estudantes antes da lição. Seguidamente, grava-se a lição desde o fundo da sala. Após a lição dá-se aos estudantes o questionário "2" para analisarem as suas actividades cognitivas-metacognitivas durante a lição. Os estudantes observam a gravação vídeo cerca de 2 a 3 minutos trabalhando em quatro tempos diferentes: (a) quando foi dado o problema aos estudantes, (b) quando começaram a trabalhar individualmente no problema, (c) quando eles começaram a trabalhar sobre o problema em turma e (d) depois de terem terminado o trabalho sobre o problema da lição. Por fim, usam novamente o questionário "1" para analisarem a metacognição dos alunos após a lição.

Achamos pertinente ilustrar aqui alguns dos exemplos constituintes do questionário "2", pois é o que mais directamente está relacionado com o registo vídeo. Assim, este questionário é aplicado 100 minutos após ter terminado a lição e os alunos respondem ao questionário após cada observação dos quatro tempos descritos anteriormente. Algumas das questões possíveis são:

> "*(1) que tipo de actividades fizeste enquanto observavas o vídeo?;*
> *(2) que tipo de ideias te ocorria enquanto estavas observando o vídeo?;*
> *(3) lembraste-te do que o teu professor te disse enquanto estiveste a observar a cassete de vídeo?;*
> *(4) O que é que o professor disse, se é que disse alguma coisa?*
> *(5) Achaste útil o conselho do professor?*
> *(6) Tens predisposição para te lembrares do conselho do professor?*" (p. 282).

Como conclusão, estes investigadores entendem que os conselhos dados aos alunos, seguindo esta metodologia levam a uma maior interiorização da metacognição, por parte destes. Contudo, reconhecem que isto não é o suficiente para analisar o processo da interiorização da metacognição.

Todos os estudos até aqui referidos foram levados a cabo com alunos. Um estudo feito com professores foi o de DeGuire (1993). Esta investigadora utilizou os registos vídeo num estudo de caso para recolher informação sobre o desenvolvimento metacognitivo de uma professora que "*pensava alto*" à medida que ia resolvendo problemas. No final da última sessão de resolução de problemas houve uma imediata análise/reflexão do registo vídeo por parte da investigadora e da professora investigada. Esta investigadora pôde concluir que alguns dos aspectos da metacognição surgem automaticamente e a professora reconheceu no final que o facto de ter participado nas vídeogravações a ajudou a tornar-se consciente de si própria.

CAPÍTULO III

METODOLOGIA

Neste capítulo descrevemos a metodologia adoptada no estudo, referindo a selecção dos participantes e os os métodos de recolha e análise dos dados.

1 - Opções Metodológicas

Por insuficiência de um quadro teórico sobre a problemática em estudo (análise de capacidades metacognitivas ao nível da formação de professores), bem como de uma teoria sólida sobre resolução de problemas, não formulámos hipóteses que delimitassem o campo de investigação. Como referem Borg e Gall (1983):

> *"Alguns estudos são exploratórios por natureza, não são guiados por hipóteses, pois o investigador não tem suficiente compreensão do fenómeno para fazer conjecturas acerca da relação entre os constructos. Estabelece o propósito da investigação em forma de questão ou objectivo em vez de hipóteses. A pesquisa exploratória tende a estudar muitas variáveis e suas relações em ordem a posterior compreensão do fenómeno" (p. 31).*

Assim, este estudo assume-se como exploratório, pois, esperamos apenas que das suas conclusões resultem pistas para se poderem planear trabalhos de investigação subsequentes (Moore, 1983). Partilhando das ideias de Salomon (1979) e de Moore (1983), a nossa investigação é de cariz exploratória, por ter como objectivo definir melhor o problema em estudo e descrever comportamentos. No que respeita ao tratamento dos dados, utilizámos algumas técnicas instrumentais características de estudos de carácter interpretativo e descritivo, somo sejam a observação descritiva e os registos tecnológicos (Evertson e Green, 1986). Assim, os dados serão analisados numa perspectiva predominantemente qualitativa. Por outro lado, quantificaremos, sempre que possível e se julgar útil (Cruz, 1989) alguns dos dados recolhidos, atendendo às categorias de observação pré-definidas. Essa quantificação é feita através das intervenções metacognitivas registadas pelo vídeo, para cada uma das categorias, não se pretendendo, contudo, fazer qualquer tipo de inferência estatística.

Assim, diremos que este estudo partiu originariamente de um paradigma naturalista de investigação (Guba e Lincoln, 1990), enveredando por uma vertente interpretativa em termos de tratamento dos dados (Erickson, 1986; Leitão e Fernandes, 1997).

Tirando partido do facto dos registos tecnológicos permitirem "*obter um registo permanente de um acontecimento ou fenómeno para o poder estudar com maior profundidade numa etapa posterior*" (Evertson e Green, 1986, p. 172), procuraremos estudar cada grupo bem como estabelecer algumas comparações entre eles, daí que alguns resultados apresentados referem-se a resultados dessa comparação.

2 – Participantes do estudo

Este estudo será realizado com futuros professsores de Matemática (3º ano), que já possuam formação ao nível da temática da resolução de problemas, bem como ao nível da metacognição.

Os estudantes escolhidos são conhecidos do investigador deste estudo, por já terem sido seus alunos na disciplina de Metodologia do Ensino da Matemática. Esta disciplina faz parte do 2º semestre lectivo do 2º ano do plano de estudos da Licenciatura em Ensino da Matemática e Ciências da Natureza de uma Escola Superior de Educação portuguesa. Esta disciplina desenvolve-se fundamentalmente a partir de situações problemáticas, sendo que inicialmente é ensinado aos alunos alguma da teoria sobre resolução de problemas e são analisados e discutidos alguns resultados de investigações nessa área, bem como na área da metacognição.

Para este estudo pretende-se seleccionar dois grupos compostos por três elementos cada, em que um seja constituído por sujeitos que se achem bons resolvedores de problemas e que gostem de trabalhar em grupo e, outro grupo, em que os seus elementos não tenham uma opinião tão favorável quanto às suas capacidades como resolvedores de problemas e que não gostem muito de trabalhar em grupo.

Optámos pelo trabalho de grupo, porque é nossa intenção provocar nos sujeitos do estudo a explicitação de processos cognitivos e metacognitivos internos. Logo, concordamos com Borralho (1997), quando refere que se deve apostar no trabalho cooperativo, na reflexão e na verbalização dos processos cognitivos e metacognitivos que resultam da realização da tarefa proposta.

Leitão e Fernandes (1997) tirando partido dos estudos de Johnson e Johnson (1989) e de Laborde (1994), também salientam que a resolução de problemas em grupo, não só proporciona aos futuros professores um melhor entendimento de como resolver problemas, como permite a exteriorização de várias estratégias e provoca nos sujeitos a "*descentração do seu ponto de vista, porque os obriga a situar a sua solução entre várias outras*" (p. 101).

Estas investigadoras salientam também que Web (1991) considera que o facto de um resolvedor ter que explicar oralmente um pensamento ou raciocínio seu a outros colegas de grupo, obriga a que essa explicação seja estruturada de modo claro e objectivo para que seja facilmente entendida pelos receptores.

A formação desses dois grupos será feita através da análise das respostas de todos os elementos da turma a um questionário concebido para esse efeito (Anexo 1).

3 – Descrição do estudo

Os dois grupos de futuros professores de Matemática irão resolver um conjunto de seis problemas de processo (Anexo 2) que seleccionámos de entre uma bateria de problemas deste tipo, com o critério de que cada um deles pudesse ser resolvido por uma estratégia de resolução concreta, como ilustra o quadro nº 1, seguinte:

Quadro Nº 1 – Relação entre cada problema seleccionado e o tipo de estratégia de resolução adequada à resolução

Título do Problema	Tipo de Estratégia de Resolução
1 – Assembleia dos Comerciantes da Rua	- Tabela de dupla entrada mais esquema ou figura
2 – O Triângulo dos Triângulos	- Decomposição do problema nas suas partes constituintes
3 – As Medidas do Comerciante	- Tentativa e erro
4 – Os Maridos Ciumentos	- Esquema ou figura
5 – A Sequência Numérica	- Descoberta de um padrão ou regularidade
6 – O Jogo das Moedas de Um Escudo	- Trabalhar do fim para o princípio

À medida que os grupos iriam resolver esses problemas, cada um deles estaria a ser filmado, utilizando-se, para tal, uma câmara de vídeo para cada grupo.

Os grupos resolveriam os problemas num mesmo espaço de tempo e na mesma sala, uma vez que esta seria bastante ampla, o que não implicaria interferência na captação do som de um grupo para o outro.

Utilizando-se microfones unidireccionais, as câmaras ficariam fixas nos respectivos tripés, junto a cada grupo, não havendo operador de câmara a exercer essa função durante a tarefa da resolução de problemas. Na eventualidade de substituição da cassete de vídeo, seria o próprio investigador a fazer essa tarefa, para que se reduzirem ao máximo, eventuais efeitos perturbadores da concentração e dinamismo dos grupos.

4 - Orientação do trabalho de grupo

A organização do trabalho do grupo, ao longo do estudo, obedecerá a um conjunto de indicações (Anexo 3), das quais destacamos as seguintes:

- a presença de todos os elementos dos grupos em todas as sessões é considerada importante;
- será pedido aos participantes para "pensarem alto", expondo ao máximo todo o processo mental utilizado na resolução dos problemas;
- será solicitado que o registo escrito dos problemas seja o mais detalhado possível;
- uma outra indicação relaciona-se com o pedido de somente utilizarem a folha de actividade/registo para registarem e efectuarem cálculos dos problemas, utilizando, para tal, apenas uma esferográfica.

5 - Recolha de dados

Para a recolha de dados serão utilizados os seguintes instrumentos:

(a) questionário orientador da formação dos grupos;

(b) os registos vídeo;

(c) as folhas de actividade/registo dos problemas.

5.1 – Questionário

O questionário é composto por duas partes, sendo que a primeira é formada por um conjunto de oito questões relacionadas com alguns aspectos comportamentais no acto de resolver problemas e a segunda parte é formada por um conjunto de sete questões relacionadas com o trabalhar a resolução de problemas em grupo. Para cada uma das quinze questões, há cinco hipóteses de resposta, sendo que a opção 1 significa "Nunca", a opção 2 significa "Quase Nunca", a opção 3 significa "Algumas Vezes", a opção 4 significa "Quase Sempre" e a opção 5 significa "Sempre". Trata-se, pois, de uma escala tipo Likert.

As questões que compõem este questionário têm por detrás o seguinte conjunto de objectivos:

A – Motivação para a Temática da Resolução de Problemas:

1 – Gostar de resolver problemas
2 – Ler com muita atenção o enunciado dos problemas
3 – Compreender muito bem o enunciado do problema antes de avançar para a sua resolução
4 – Dedicar algum tempo à concepção de um plano de resolução
5 – Avaliar com frequência a execução do plano durante a própria execução
6 – Ser persistente na implementação do plano
7 – Avaliar a solução encontrada
8 – Procurar outras soluções para o problema

B – Trabalho de Grupo:

1 - Gostar de trabalhar em grupo a resolução de problemas
2 – Contribuir activamente para o trabalho de grupo
3 – Solicitar ajuda aos colegas de grupo quando necessitar
4 – Auxiliar colegas de grupo que pretendam desistir da resolução
5 – Respeitar as intervenções dos colegas de grupo
6 – Verbalizar, sem receio, o seu pensamento
7 – Ser confiante enquanto resolvedor

5.2 - Registos vídeo

Como já referimos, à medida que os grupos resolvem, pensando alto, os problemas nas respectivas folhas de resolução que lhes serão entregues, serão filmados.

As câmaras ficarão em "auto-gestão" captando sempre o mesmo tipo de plano (plano médio) a fim de se evitar perturbação do trabalho normal dos grupos. Com este tipo de tomada de imagens captar-se-ão pormenores importantes para o estudo, como seja a possibilidade de se poder fazer leitura labial, bem como registar outros tipos de comportamentos que possam fazer suspeitar de intervenções metacognitivas, como por exemplo o abanar a cabeça, o olhar para o teto da sala, etc.

5.3 - Folhas de actividade/registo dos problemas

Para a resolução escrita dos seis problemas, cada grupo somente pode utilizar uma folha para cada problema que será entregue pelo investigador deste estudo, contendo o respectivo enunciado de cada problema.

6 - Análise dos dados

Procuramos aqui dar uma imagem de como se analisarão os dados recolhidos através dos seguintes instrumentos:

(a) questionário orientador da formação dos grupos;

(b) os registos vídeo;

(c) as folhas de actividade/registo dos problemas.

6.1 - Questionário

Os dados provenientes do questionário serão tratados recorrendo-se à contagem das frequências de respostas, por forma a que se consiga classificar cada aluno da turma na categoria (a) de Forte, Médio ou Fraco resolvedor de problemas e (b) Forte, Médio ou Fraco em termos de motivação para trabalhar a resolução de problemas em grupo.

Assim, na primeira parte do questionário, a categoria Fraco contemplará o intervalo de 8 a 19 pontos, a categoria Médio abrangerá o intervalo de 20 a 27 pontos e a categoria Forte situar-se-á no intervalo compreendido pelos valores 28 e 40 pontos.

No que diz respeito à segunda parte do questionário, à categoria Fraco dirá respeito o intervalo de 7 a 17 pontos, à categoria Médio corresponderá o intervalo de 18 a 24 pontos e à categoria Forte corresponderá o intervalo de 25 a 35 pontos.

O Objectivo será, pois, conseguir-se encontrar dois grupos de futuros professores cujas pontuações totais para cada uma das duas partes do questionário estejam situados ao nível dos extremos, isto é, seria desejável obter-se um grupo formado por três elementos com pontuações situadas na categoria Forte em ambas as partes do questionário e outro grupo com pontuações ao nível do Fraco, também nas duas partes do questionário.

6.2 – Registos vídeo

Todo o "pensar alto", isto é, toda a oralização do processo de resolução vídeogravado será transcrito para uma grelha de registo/análise adaptada do estudo de Buchanan (1987), no sentido de permitir identificar quais das intervenções são de nível metacognitivo. A grelha de registo/análise contém uma coluna por cada elemento do grupo, onde se registam as respectivas intervenções orais e uma coluna de observações onde registamos as categorias a que se referem os processos metacognitivos identificados pela observação dos registos vídeo, após feita a respectiva análise de conteúdo. As grelhas preenchidas para cada problema e para cada grupo estarão no Anexo 4.

A análise das transcrições dos registos vídeo será feita atendendo às quatro categorias do modelo cognitivo-metacognitivo de Lester (1985): Orientação, Organização, Execução e Verificação.

A caracterização das quatro categorias encontram-se resumidos no seguinte quadro:

Quadro Nº 2 - Resumo das categorias de Lester:

CATEGORIAS	
Orientação - intervenções que se prendam com a leitura, análise e compreensão dos problemas.	Organização - intervenções que se prendam com a identificação de estratégias e concepção do plano de resolução.
Execução - intervenções que se prendam com a implementação das estratégias e a monitoração do progresso.	Verificação - intervenções que se prendam com a avaliação das fases anteriores.

Os procedimentos para a análise serão os seguintes: após a observação de cada um dos problemas vídeogravados transcreveremos na íntegra todas as intervenções orais de todos os sujeitos filmados para a grelha de Buchanan (1987) e registaremos na coluna das observações quais dessas intervenções diziam respeito à metacognição, designando qual a categoria cognitiva a que cada uma dessas intervenções metacognitivas diz respeito. Num momento posterior voltaremos a observar cada um desses registos vídeo acompanhando essa observação com a leitura das transcrições anteriormente realizadas por nós, voltando a preencher novamente a coluna das observações, com o objectivo de tentarmos ser o mais coerentes possível na interpretação das intervenções orais (validação intra-observador).

6.3 - Análise dos registos escritos

No sentido de se analisarem os registos escritos do problemas resolvidos pelos grupos, para se verificar qual o nível de sucesso dessas resoluções, utilizaremos a escala holística focada, traduzida e adaptada de Charles et al. (1987). De acordo com esta escala, os registos escritos da resolução dos problemas podem ser classificados atendendo a uma classificação que oscila entre o zero e os quatro pontos (Anexo 5), dependendo do nível de resolução efectuado.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS

Neste capítulo tentaremos dar resposta às nossas questões de investigação: - (1) – será que os tipos de problemas condicionam os processos metacognitivos dos futuros professores?; - (2) - como se poderá desenvolver essa análise e essa interpretação?, bem como ao problema de investigação que as orienta: **Os tipos de problemas influenciarão os processos metacognitivos de futuros professores de Matemática, enquanto resolvem uma variedade de problemas e permitirão as videogravações o registo desses processos metacognitivos?**

A resposta a esse problema obriga a que nos debrucemos sobre a segunda questão de investigação em primeiro lugar. Por esse motivo, e após descrevermos o procedimento da formação dos grupos, iremos analisar o comportamento de cada grupo para cada um dos problemas que resolveram. Só depois iremos verificar se existe ou não algum tipo de relação entre os tipos de problemas e as manifestações metacognitivas dos grupos de trabalho.

1 – Formação dos grupos de trabalho

Após os trinta alunos da turma terem respondido ao questionário, procedemos à análise das respectivas respostas e, em função do critério explicitado no capítulo anterior, elaborou-se o quadro seguinte (quadro nº 3) com o escalonamento dos alunos da turma pelas categorias de análise (Forte - **F**, Médio - **M** e Fraco - **f**). Atribuímos nomes aos sujeitos que não correspondem aos seus verdadeiros nomes.

Da análise a esse quadro, salienta-se a existência de cinco possibilidades de enquadramento dos alunos da turma em possíveis grupos. Verifica-se, contudo, que não houve nenhum aluno que se situasse ao nível da categoria Fraco (f) em ambas as partes do questionário.

Em função dos resultados obtidos decidimos seleccionar para o nosso estudo final, três dos elementos do grupo (Forte mais Forte) e os três elementos do grupo (Médio mais Médio). Quanto a este grupo não havia dificuldades para a selecção dos sujeitos, porque apenas três deles se encontravam nessa categoria. No que respeita ao outro grupo, o critério para a selecção dos três sujeitos, no total nos doze que se situaram nesta categoria, residiu nos seguintes aspectos. Optámos por não seleccionar a Ana, por receio que pudesse manifestar-se indisponível, uma vez que costuma ser uma aluna que manifesta algumas lacunas ao nível da assiduidade e da pontualidade e rejeitámos também a Bela por ter o estatuto de trabalhador-estudante, o que poderia inviabilizar a sua presença nas sessões previstas para a resolução dos problemas. Por isso, atendendo a um critério de segurança, decidimos seleccionar as três alunas que imediatamente se seguiam na tabela, isto é, seleccionámos para o grupo A as alunas Carla, Dina e Elsa e para o grupo B os alunos Guiomar, Helena e Ivo.

Quadro Nº 3 – Análise das respostas ao questionário

NOMES	1ª Parte	2ª Parte	F + F	F + M	M + F	M + M	M + f	TOTAL
Ana	30 (F)	31 (F)	X					61
Bela	29 (F)	32 (F)	X					61
Carla	33 (F)	27 (F)	X					60
Dina	30 (F)	30 (F)	X					60
Elsa	32 (F)	27 (F)	X					59
Fernanda	30 (F)	29 (F)	X					59
Graça	29 (F)	29 (F)	X					58
Henrique	30 (F)	27 (F)	X					57
Isabel	28 (F)	28 (F)	X					56
Joana	30 (F)	25 (F)	X					55
Lurdes	28 (F)	27 (F)	X					55
Mónica	28 (F)	26 (F)	X					54
Natália	28 (F)	24 (M)		X				52
Olga	26 (M)	33 (F)			X			59
Paula	26 (M)	32 (F)			X			58
Rute	26 (M)	28 (F)			X			54
Sofia	25 (M)	29 (F)			X			54
Teresa	27 (M)	26 (F)			X			53
Vânia	27 (M)	26 (F)			X			53
Zélia	25 (M)	28 (F)			X			53
Amélia	22 (M)	31 (F)			X			53
Bruna	26 (M)	26 (F)			X			52
Cândido	25 (M)	27 (F)			X			52
Daniela	25 (M)	25 (F)			X			50
Elvira	24 (M)	26 (F)			X			50
Filomena	23 (M)	25 (F)			X			48
Guimoar	24 (M)	24 (M)				X		48
Helena	24 (M)	24 (M)				X		48
Ivo	24 (M)	22 (M)				X		46
Joaquim	25 (M)	17 (f)						42

		1ª Parte	Média	2ª Parte	Média
f	fraco	**(8 - 19)**	(1 - 2,4)	**(7 - 17)**	(1 - 2,4)
M	Médio	**(20 - 27)**	(2,5 - 3,4)	**(18 - 24)**	(2,5 – 3,4)
F	Forte	**(28 - 40)**	(3,5 - 5)	**(25 - 35)**	(3,5 - 5)

As três alunas do grupo A situaram-se no total do questionário com uma pontuação na ordem dos 59 e 60 pontos, enquanto que os alunos do grupo B obtiveram uma pontuação na ordem dos 46 e 48 pontos, revelando-se alguma homogeneidade no seio de cada grupo.

2 – Análise das transcrições das resoluções registadas em vídeo e seu cruzamento com a análise das folhas de resolução dos problemas

Após a transcrição das intervenções dos sujeitos de cada grupo na resolução dos seis problemas (Anexo 4), procedemos à respectiva análise de conteúdo, em função das quatro categorias de análise: (Orientação, Organização, Execução e Verificação), identificando-se as respectivas intervenções metacognitivas para cada categoria: (IMO, IMOrg., IME e IMV).

De seguida, passamos a descrever esses processos de resolução para cada problema e para cada grupo, analisando-se também as respectivas folhas onde cada grupo resolveu os problemas, à luz da escala holística focada de Charles et al. (1987).

2.1 – Grupo A

Este grupo mostrou-se bastante empenhado na tarefa proposta, evidenciando vontade em cumprir as regras estipuladas para a realização da mesma. Eis o seu comportamento para cada um dos seis problemas.

2.1.1 – Problema nº 1 - *A Assembleia dos Comerciantes da Rua*

O grupo começou por ler o problema em voz alta e após essa primeira leitura, um dos seus elementos sugeriu de imediato que se utilizasse um esquema para resolver o problema.

Não havendo reacção a esta sugestão, o grupo passou a uma nova leitura, em voz alta, do enunciado do problema. De seguida, um dos seus elementos sugeriu que se registassem por escrito os dados do problema, isto é, sugeriu que se começasse por registar as profissões dos sujeitos do problema.

Enquanto outro elemento do grupo procedia a esse registo, o terceiro resolvedor sugeriu a utilização de uma tabela como estratégia de resolução, mostrando alguma convicção de que seria uma estratégia adequada **(IMOrg.)**.

Entretanto, o elemento do grupo que estava a proceder aos registos dos dados sentiu a necessidade de voltar a fazer uma nova leitura do enunciado do problema, no sentido de extrair novos dados.

Surgiu um novo apelo para que se registassem por escrito os nomes dos sujeitos do problema **(IMOrg.)**. De seguida procedeu-se, durante alguns minutos, ao levantamento e consequente registo, por escrito, dos dados do problema, ao mesmo tempo que o grupo tentava compreendê-lo. Nesta tarefa, um dos elementos do grupo associou, por lapso, o nome do Oliveira à profissão de merceeiro, tendo sido imediatamente corrigido pela chamada de atenção de outro elemento do grupo **(IMV)**.

Verificaram que o enunciado não possuía os dados todos de que eles gostariam de ter **(IMO)**.

O grupo manifestou explicitamente a sua vontade em que os registos fossem claros e que não gerassem dúvidas de interpretação, inclusive, para eles, aquando da resolução **(IME)**.

Umas das primeiras dúvidas ou obstáculos que o grupo encontrou foi o facto de não se saber quem era o merceeiro nem tão pouco a posição que ele ocupava na assembleia dos comerciantes da rua **(IMO)**. Em consequência, também não poderiam saber quem era o Nogueira, porque este estava sentado à direita do merceeiro.

Verificando os poucos registos que o grupo já havia feito, um dos seus elementos detectou que havia um erro de registo, pois havia-se registado a função de merceeiro quando deveria ser a de carniceiro **(IMV)**.

Nesta tentativa de compreensão do problema, salientou-se uma vez mais o desconhecimento da posição pertencente ao merceeiro **(IMO)**.

Começaram a surgir eventuais hipóteses onde seria possível encontrar-se o merceeiro **(IMO)**, descobrindo-se que os sujeitos ocupam a posição de sentados **(IMO)**. Isto levou a um esboço ténue de nova tentativa de leitura do enunciado **(IMO)**, que acabou por ser interrompida por uma nova sugestão de se fazer uma tabela contendo os nomes das profissões, cruzados com os nomes dos sujeitos. Seria, portanto, uma tabela de dupla entrada **(IMOrg.)**.

Começaram a preencher a tabela com os dados que possuíam, nomeadamente o facto de saberem que o Oliveira era o carniceiro e o Pinheiro não era o padeiro.

Houve uma tentativa de confirmação, por parte de um dos elementos do grupo, de que o Pinheiro não era de facto o padeiro **(IMO)**, o que o levou a uma nova leitura oral do enunciado.

Surgiu a sugestão de que o Nogueira poderia ser o merceeiro, mas esta ideia não teve força suficiente para convencer o grupo.

Entretanto fez-se uma análise à tabela, no sentido de se eliminarem algumas das possibilidades de resposta, por não serem possíveis de ocorrer **(IME)**.

Surgiu um novo momento dedicado a mais uma leitura oral do enunciado do problema, pois o grupo ainda não tinha interiorizado muito bem toda a informação nele contida.

Por parte de um dos elementos do grupo houve uma exteriorização de um pensamento absurdo que estava a ter, que se prendia com o facto de a ordem dos nomes poder ter a ver com a ordem das profissões **(IMO)**. De imediato essa ideia foi rejeitada por outro elemento do grupo **(IMO)**.

Começaram a tentar resolver, efectivamente, o problema, sugerindo duas possibilidades para o Nogueira **(IME)**, que poderia ser a de padeiro ou a de leiteiro **(IME)**.

Surgiu a questão de se saber se o facto da posição ocupada por cada sujeito poderia ser pertinente ou não **(IMO)**. Isto implicou uma nova leitura oral do enunciado do problema o que resultou numa nova tentativa de sugestão de que, o estar ao pé poderia estar relacionado com as profissões **(IMO)**. Uma vez mais, esta sugestão foi rebatida por outro elemento do grupo **(IMO)**.

Nova leitura oral do enunciado ocorreu, e na tentativa de interiorização dos dados do problema, surgiu a questão sobre o posicionamento do Nogueira **(IMO)**.

De uma forma algo emotiva, um dos elementos do grupo concluiu que o Nogueira não poderia ser o merceeiro, uma vez que estava à direita dele **(IMO)**. Esta intervenção provocou uma reflexão de outro elemento do grupo, levando-o a concordar com essa conclusão **(IMO)**.

O grupo passou, de seguida, a centrar a sua atenção no Pinheiro, salientando-se uma vez mais que ele não poderia ser o padeiro **(IMO)**.

Passaram novamente ao Nogueira, salientando, outra vez, que poderia ser o padeiro ou o leiteiro **(IME)**.

De seguida questionaram-se sobre o que sabiam relativamente ao Pereira **(IMO)**. Esta curiosidade levou-os uma vez mais a terem que ler oralmente o enunciado do problema.

Surgiu uma tentativa de verificação do que já havia sido registado pelo grupo, destacando-se a descoberta de um erro, pois o enunciado dizia que o Oliveira estava sentado à esquerda, e havia sido colocado à direita do Pereira **(IMV)**. Após nova leitura, parecia que afinal o registo estava bem, mas efectivamente estava mal feito **(IMV)**.

No sentido de pretenderem avançar um pouco mais na resolução, o grupo voltou a ler o enunciado do problema, voltando-se a destacar que já se tinham apercebido que o Nogueira não poderia ser o merceeiro **(IMV)**. Daqui resultou um comentário lembrando que não se sabia quem era o merceeiro **(IME)**.

O grupo voltou a direccionar a sua atenção para a leitura do enunciado, e um dos seus elementos questionou sobre quem estava à frente do Pinheiro **(IMO)**.

Como prova de que o enunciado ainda não estaria bem interiorizado pelo grupo, um dos seus elementos perguntou onde estaria o Nogueira, sendo que, após a leitura do enunciado, se verificou que ele estava sentado à direita do merceeiro **(IMO)**. Mas logo de seguida, o mesmo elemento do grupo perguntou onde estaria o merceeiro **(IMO)**, chegando à conclusão que não conheciam a sua posição **(IMO)**.

De seguida, um dos elementos do grupo tentou resolver o problema supondo que o Pinheiro seria o merceeiro. Esta tentativa de resolução foi logo interrompida por outro elemento do grupo que referiu que não tinham certezas sobre se seria aquela a ordem das profissões **(IME)**. Perante este comentário, o elemento anterior sugeriu que se resolvesse o problema por tentativas.

Por sua vez, o terceiro elemento do grupo interveio pondo um ponto de ordem à mesa, focalizando o centro de interesse para o Pinheiro, pois, segundo ele, a partir daí já saberiam os outros **(IMOrg.)**. Esta sugestão implicou uma nova leitura do enunciado na parte respeitante ao Pinheiro. Como o enunciado relaciona o Pinheiro com o Pereira, questionou-se logo sobre o que se sabia do Pereira **(IMO)**, vindo ao decima que ele não era carniceiro, pois essa profissão era pertença do Oliveira **(IMO)**.

Ao ler-se novamente o enunciado, voltou a tomar forma a ideia de que a ordem dos nomes poderia ter que ver com a ordem das profissões. Sugeriu-se, pois, que tentassem ir por aí **(IMOrg.)**. Esta observação levou a que um dos elementos do grupo manifestasse um comentário, como que a querer dizer que não tinha pensado nessa hipótese **(IMO)**.

O grupo centrou-se uma vez mais no merceeiro e ao verificarem o que já tinham feito, concluíram que já não estava bem **(IMV)**. Sugeriu-se, então que se voltasse a colocar por escrito os nomes deles **(IMOrg.)**. Foi isso que fizeram e, passados alguns registos, questionaram novamente qual seria a posição do Nogueira **(IME)**. Outro elemento do grupo, como estava concentrado no Pinheiro, voltou também a questionar-se sobre a posição do Nogueira **(IME)**.

Após nova leitura do enunciado, voltaram a enfatizar o facto de não saberem qual seria o merceeiro **(IMV)**.

A confusão aumentou, ao ponto de um dos elementos do grupo já não saber quem é que estava à direita de quem **(IME)**. Esta situação levou a nova leitura do enunciado, o que implicou a sugestão de se começar novamente pelo Pinheiro **(IMOrg.)**.

Voltou-se a perguntar onde estaria o Nogueira **(IME)**, sendo que o enunciado tinha essa resposta. Daí concluiu-se que o merceeiro só poderia ser ou o Pereira ou o Pinheiro **(IME)**. Isto levou o grupo a questionar-se se havia mais alguma profissão que o Pereira não pudesse ocupar **(IME)**. Um dos elementos do grupo referiu mesmo que gostaria de saber mais qualquer coisa sobre o Pereira **(IMO)**. Na tentativa de dar resposta a essa sua dúvida, este elemento voltou a ler o enunciado e começou a fazer algumas perguntas a si próprio, como por exemplo, "*este está à direita de quem?*" **(IMO)**.

Por causa da questão do estar à direita, um dos elementos do grupo chamou a atenção para o registo escrito, isto é, se se deveria colocar em cima ou em baixo para que essa questão da lateralidade ficasse correcta **(IME)**.

Houve uma primeira sugestão de associar o Nogueira à profissão de leiteiro, o que provocou sorrisos a todo o grupo e levou a que um do seus elementos pedisse para se explicar porquê **(IME)**.

Salientou-se, de seguida, e uma vez mais, que o merceeiro tanto poderia ser o Pinheiro como o Pereira **(IME)**.

De imediato voltaram a centrar-se no Nogueira e apresentaram possíveis locais onde ele poderia estar **(IMOrg.)**. Isto levou a que testassem as posições que já tinham distribuído pelos sujeitos **(IMV)**.

Voltando novamente a destacar que o merceeiro seria o Pereira ou o Pinheiro, salientaram que a essa conclusão já haviam chegado **(IMV)**.

Surgiu a sugestão de o Pinheiro poder ser merceeiro, mas foi logo interrompida por outra sugestão de que ele também poderia ser o leiteiro. Entretanto salientaram que se ele não fosse o merceeiro não podia estar à direita **(IME)**. Por isso teria que estar noutra posição **(IME)**. Entretanto, houve uma chamada de atenção para o facto de o Nogueira não poder ser o merceeiro **(IMV)**. Esta intervenção levou a que outro elemento do grupo tomasse consciência que o Pereira podia ser merceeiro, padeiro ou leiteiro **(IMV)**. Por sua vez, o terceiro elemento do grupo perguntou se o Pinheiro podia ser tudo **(IMO)**, ao que lhe responderam que sim, excepto carniceiro.

Chegou-se à conclusão errada que o Nogueira ficaria sempre à direita do merceeiro, independentemente de estar em cima ou em baixo **(IME)**.

De repente surgiu novamente a questão de se saber o porquê de um dos elementos do grupo ter associado o Pinheiro à profissão de leiteiro **(IMV)**. Esta pergunta teve como resposta o simples facto de que tinha ocorrido essa ideia a um dos elementos do grupo **(IMV)**. Não encontrou outra justificação. Esta resposta gerou por parte de outro elemento do grupo a verbalização de que também lhe tinha ocorrido essa ideia **(IMV)**.

No momento em que um dos elementos do grupo sugeriu que o Pereira seria um dos três lugares que sobravam para além do carniceiro, outro elemento questionou-o sobre a importância que isso tinha **(IMV)**. Como resposta, obteve uma justificação muito confusa do colega para tentar validar a sua sugestão **(IMV)**, mas acabou por dizer que não era capaz **(IMV)**.

De imediato, o colega que havia feito a interpelação chamou novamente este colega para a resolução, com a nítida sensação de não o deixar desistir. Para tal chamou a atenção de que só teriam que se preocupar com três das quatro profissões, porque uma já estava preenchida **(IMOrg)**.

O grupo tentou arranjar novo fôlego para encarar a resolução deste problema e surgiu a sugestão de se registar por escrito o que é que cada um poderia ser **(IMOrg.)**. Daqui resultou que o Pereira podia ser merceeiro, padeiro ou leiteiro; o Nogueira podia ser padeiro ou leiteiro, isto é, os três poderiam ser leiteiros, dois deles poderiam ser merceeiros e dois deles poderiam ser padeiros.

De seguida foram ver quem ficava à direita de quem **(IMOrg.)**. Ao analisarem o que já havia sido escrito, a letra P suscitou a dúvida se seria de Pereira ou de Pinheiro **(IMV)**.

Surgiu a sugestão de Pereira ficar à esquerda do Nogueira mas não passou disso mesmo, porque um dos outros dois elementos do grupo estava a chegar à conclusão que se o Pinheiro estava a direita do merceeiro, não era o merceeiro. Por isso seria o leiteiro. Esta ilação carecia de fundamentação.

Gerou-se nova confusão, onde já os nomes se trocavam e as afirmações pareciam gerar dúvidas, levando o grupo a verificar o que havia sido dito **(IMV)**, nomeadamente o facto do Nogueira só poder ser ou padeiro ou leiteiro **(IMV)**.

Quando um dos elementos sugeriu que para o Pereira só sobrava o merceeiro, outro colega corrigiu-o, referindo que também poderia ser o Pinheiro **(IMV)**.

Surgiu um hipótese de o Nogueira ser padeiro **(IMOrg.)**, a qual foi, de imediato, questionada por outro colega **(IMV)**. O terceiro elemento do grupo entrou na conversa e sugeriu que, por exclusão, lhe parecia que sim **(IME)**. Esta justificação não deixou convencido o elemento do grupo que havia questionado o porquê desta sugestão, abanando a cabeça em sinal de não concordância.

Um dos elementos do grupo mostrou vontade de iniciar um processo de verificação **(IMV)**, processo esse que foi continuado por outro colega. Começaram pelo Nogueira, concluindo que poderia ser uma de duas possibilidades **(IMV)**, surgindo novamente a questão sobre quem estava à direita do merceeiro **(IMO)**.

Após nova leitura do enunciado do problema e de algumas tentativas de proposta de profissão para o Nogueira, um dos elementos do grupo questionou-se sobre o facto de não serem capazes **(IME)**, chegando mesmo a sugerir o abandono da resolução deste problema. Contudo, outro elemento do grupo interveio, alegando que achava que estavam perto da solução, por isso deveriam continuar a tentar resolver este problema **(IME)**.

Surgiu então nova leitura do enunciado do problema e, numa tentativa de nova verificação do que já haviam feito, chegou-se à conclusão que quanto ao Oliveira não havia dúvida, pois desde o início sabiam que ele era o carniceiro **(IMV)**.

Apresentou-se uma vez mais a possibilidade de quer o Pereira, quer o Pinheiro poderem ser o merceeiro.

Surgiu então um novo desabafo de um dos elementos do grupo referindo que achava que eles não poderiam... mas não disse o assunto **(IMV)**.

De seguida, cruzando-se nova leitura do enunciado com a observação do que já haviam registado, chegou-se à conclusão que se o Pinheiro fosse o leiteiro, o Nogueira não poderia estar à sua direita **(IMV)**. Esta conclusão levantou algumas dúvidas **(IMV)**, tendo que voltar a ser explicada **(IMV)**. A justificação consistia em que o Nogueira tinha que ficar à direita do merceeiro e não do leiteiro.

Entretanto surgiu o reparo que consistiu no seguinte: ao associarem a profissão de padeiro ao Pereira, não poderia sobrar a de leiteiro para o Pinheiro **(IMV)**, porque um deles teria que ser o merceeiro. O contrário também foi salientado como sendo verdade, isto é, se o Pinheiro fosse o leiteiro, o Pereira não poderia ser o padeiro.

Quando um dos elementos do grupo sugeriu a possibilidade de o Pinheiro não ser o leiteiro **(IME)**, outro colega referiu que o enunciado já sugeria isso **(IMV)**, o que não é verdade.

A confusão nesta altura voltou a ser enorme e questionou-se que apesar de ser verdade que o Pinheiro não poderia ser leiteiro se o Pereira fosse o padeiro, a recíproca poderia não verificar-se. Mas quem fez esta reflexão não sabia muito bem se estava a ser correcta ou não **(IMV)**. Por isso perguntou aos outros dois elementos do grupo se estavam a perceber **(IME)**. Surgiu então um novo desabafo de desalento evidenciando a incapacidade para darem resposta a este problema **(IMV)**.

Surgiram novas tentativas de associarem as profissões aos nomes dos sujeitos. Um dos elementos do grupo corrigiu a sua própria ideia de dizer que se o Pinheiro fosse o leiteiro, o Nogueira já não poderia estar à direita do merceeiro **(IMV)**. Esta reflexão implicou que outro elemento do grupo voltasse a referir que o Pinheiro não poderia ser o leiteiro se o Pereira fosse o padeiro. Este comentário levou a que o colega o questionasse do porquê **(IME)**. Gerou-se alguma discussão sobre este assunto até que o terceiro elemento do grupo referiu que um deles deveria ser o merceeiro. Experimentaram essa possibilidade **(IMOrg.)** mas na explicação do que poderia acontecer, um dos elementos do grupo acabou por referir que já se tinha perdido **(IMOrg.)**. Na nova explicação que surgiu voltou a salientar-se que o Pereira também poderia ser ele o merceeiro **(IMV)**. De imediato essa possibilidade foi rebatida por outro elemento do grupo, alegando que o Pereira sendo padeiro, o Pinheiro teria que ser o leiteiro **(IMV)**.

Salientou-se que estavam a seguir a ordem das profissões **(IME)**, porque não estavam a ver outra maneira de resolver o problema **(IME)**.

Após nova leitura do enunciado, questionou-se se a frase do Pinheiro não poderia querer dizer algo **(IMO)**, concluindo-se que se ele não era padeiro seria o leiteiro.

Tiraram partido desta conclusão e foram verificar os registos escritos que já possuíam na sua folha de resolução. Salientaram uma vez mais que um deles teria que ser o merceeiro e o outro o padeiro para que o Nogueira estivesse à frente **(IME)**. De imediato essa posição de estar à frente foi corrigida para estar à direita **(IMV)**.

De seguida salientou-se se não poderia ser o Pereira a estar mais à direita **(IME)**. Esta possibilidade foi logo rebatida, pois o enunciado dizia que o Pereira estava em frente ao Pinheiro. Não obstante esta explicação, voltou-se novamente a perguntar como é que se sabia qual deles seria o merceeiro **(IME)**. A esta pergunta surgiu a sugestão de tentarem fazer por experimentação **(IMOrg.)**, tentando-se todas as hipóteses **(IMOrg.)**. Sugeriu-se então que o tentassem **(IMOrg.)**.

Após várias sugestões, como por exemplo, a de dizerem que o Pinheiro não era o padeiro e que o Nogueira não era o merceeiro, associaram o Nogueira à profissão de leiteiro. Contudo, houve logo uma chamada de atenção para que não se começasse por aí mas sim pelo Pereira, salientando que este poderia ser o merceeiro **(IMOrg.)**.

Ao assinalar-se isso na tabela, um dos elementos do grupo referiu-se ao tamanho dos símbolos que estavam a ser utilizados para esse registo **(IME)**, mostrando que não estava a perceber **(IMV)**. Face a este reparo, o outro elemento do grupo optou por explicar o seu raciocínio oralmente, em vez de ir logo procedendo a alguns registos escritos. Dessa explicação surgiu uma nova profissão para o Nogueira que era de ser padeiro, que de imediato passou novamente a leiteiro.

Passaram aos registos escritos na tabela, excluindo então outras possibilidades quer par o Nogueira, quer para a profissão de leiteiro, pois já estavam ocupadas.

Após esse preenchimento, passaram a fazer uma nova verificação do que já estava registado. Começaram por confirmar que o Oliveira era o carniceiro **(IMV)**. Olhando para o enunciado do problema dizia-se que estava à esquerda do Pereira mas o esquema que tinham efectuado não evidenciava isso **(IMV)**. Nisto, surgiu novamente um comentário sobre o assunto da lateralidade. Perguntou-se onde estava a direita e a esquerda no esquema **(IMV)**, isto é, como é que viam isso **(IMV)**. Esta pergunta provocou como resposta que estavam a supor que eles estavam por ordem **(IMV)**.

Verificaram, de seguida que o Nogueira estaria à direita do merceeiro **(IMV)**.

Por fim, no que diz respeito ao Pinheiro e ao Pereira, concluíram que o esquema não dava para ver muito bem a posição relativa entre eles **(IMV)**.

Surgiu uma tentativa de justificação da colocação posicional do Nogueira **(IMV)**, dizendo-se que o Nogueira também estava à frente do Pinheiro **(IMV)**, ainda que o que se pretendia dizer, de facto, é que também estava à sua direita e não à frente. Portanto, o grupo decidiu colocar o Nogueira o mais à direita possível, ainda que um dos seus elementos chamasse a atenção para que o Nogueira só estivesse à direita de um deles **(IMV)**. Esta chamada de atenção teve uma resposta incorrecta de outro elemento do grupo, ao dizer que pelo facto do Pereira e do Pinheiro estarem em frente um do outro, o Nogueira estaria sempre à direita dos dois. Houve, pois a justificação de que foi intencional colocarem o Nogueira o mais à direita possível **(IMV)**.

Como um dos elementos do grupo parecia não estar muito de acordo, decidiu verificar se isso estava correcto **(IMV)**. Passaram a nova verificação e constataram que não contemplaram a possibilidade do Pereira poder ser leiteiro **(IMV)**.

De repente deixaram de falar no Pereira para dizerem que o Pinheiro não poderia ser leiteiro e sugeriu-se que a justificação por escrito era a de que eles estavam uns ao lado dos outros e que o Nogueira estaria o mais à direita de Pereira e de Pinheiro **(IME)**.

Questionou-se se seria necessário escrever-se a justificação da resposta encontrada **(IME)**, ao que um dos elementos respondeu que sim.

Contudo um dos elementos do grupo verbalizou que não estava muito convencido da resposta encontrada **(IMV)**.

Quando outro elemento do grupo tentou justificar o facto de terem optado pela ordem dos nomes, o elemento que tinha mostrado não estar muito convencido da resposta salientou que haveria outras hipóteses **(IMV)**, ao que o primeiro respondeu que não estava a ver outras hipóteses possíveis **(IMV)**.

Outra hipótese sugerida seria a de fazerem corresponder outro nome ao merceeiro. Entretanto, depois, questionou-se qual é que ficaria na direita, porque o enunciado era explícito quanto ao que não poderia ser padeiro, levando o grupo a concordar com a primeira hipótese encontrada **(IMV)**, isto é, tirando partido da suposição que eles estavam por ordem na mesa da assembleia **(IMV)**.

Sugeriu-se, então, que se registasse por escrito a conclusão a que chegaram **(IME)**, lançando-se novamente a questão se seria necessário explicar todo o raciocínio envolvido **(IME)**.

Para além das tabelas e dos esquemas que já havia registado, o registo escrito final foi o seguinte: "*Supusemos que as profissões estão por ordem. Como o Oliveira está à esquerda do Pereira, este não é carniceiro, logo ou é merceeiro ou leiteiro. O Pinheiro não podia ser padeiro nem carniceiro e o Nogueira não podia ser merceeiro porque estava à direita dele.*

Se o Pereira e o Pinheiro estão à frente um do outro e um deles tem que ser o merceeiro e se o Nogueira tem de estar à direita do merceeiro, logo o Nogueira tem de ser o último da tabela" (Anexo 6)

À medida que este registo ia sendo feito ainda surgiram algumas dúvidas, como a de não se saber porque é que o Nogueira não poderia ser o merceeiro **(IME)**, salientando-se também a existência de alguma confusão

(IME), como por exemplo o de não se saber a quem é que o Nogueira teria que estar à direita **(IME)** ou porque é que teria que ser o último **(IME)**.

Houve ainda tempo para corrigirem o português **(IMV)** e para dizerem que haviam bloqueado **(IME)**. Contudo entenderam que estava resolvido e decidiram passar para outro problema **(IMV)**.

Em termos de intervenções metacognitivas, o quadro nº 4 sintetiza as intervenções que conseguimos identificar para cada categoria de análise:

Quadro Nº 4 – Registo de frequências de Intervenções Metacognitivas do Grupo A no Problema Nº 1

	CATEGORIAS				
	Ori.	Org.	Exec.	Verif.	Total
1º Problema	29	18	40	58	**145**
%	20	12,4	27,6	40	**100**

Constata-se que este problema provocou um desencadear de intervenções metacognitivas ao nível de todas as categorias de análise. Destaca-se a categoria Verificação como sendo aquela onde o grupo interveio reflexivamente em maior quantidade, com cerca de 40% do total das intervenções metacognitivas. No extremo oposto situou-se a categoria Organização com apenas 12,4% das intervenções metacognitivas.

Classificação desta resolução:

O grupo acabou por não acertar na resolução do problema, porque não teve em linha de conta a questão da lateralidade. Um erro que os prejudicou imenso foi o de pensarem que pelo facto de o Pereira estar em frente ao Pinheiro, estando o Nogueira à direita de um, estaria também à direita do outro.

Por isso, atendendo à escala holística focada, esta resolução tem uma pontuação de três pontos **(3)**, uma vez que "*o grupo implementou uma estratégia que o podia ter levado à solução correcta, contudo compreendeu mal uma parte do problema*".

2.1.2 – Problema nº 2 – *O Triângulo dos Triângulos*

O grupo começou por ler oralmente o enunciado do problema e, após essa leitura, decidiu começar de imediato a contar os triângulos mais pequenos que havia. Encontraram dezasseis triângulos desse tipo.

De seguida tentaram obter os triângulos seguintes, havendo um comentário sobre a dificuldade de os encontrarem **(IME)**. Identificaram que os próximos teriam que ter quatro unidades, ou seja quatro triângulos dos mais pequenos já encontrados.

Foi nesta altura que um dos elementos do grupo questionou sobre se seria isso que se pretendia com o problema **(IMO)**, levando-o a ler oralmente a pergunta do enunciado.

De seguida passaram para os triângulos formados por nove triângulos menores, o que implicou uma nova dúvida sobre se seriam apenas os dezasseis triângulos pequenos que se pedia **(IMO)**.

Esta pergunta teve como resposta que no triângulo podiam-se encontrar outros triângulos para além dos mais pequenos **(IMO)**.

Esta sugestão voltou a fazer com que o outro elemento do grupo perguntasse se tinham a certeza disso ou não **(IMO)**.

Após a resposta afirmativa passaram para a pesquisa de triângulos formados por nove dos mais pequenos **(IMOrg.)**, tendo obtido apenas um.

De seguida identificaram o triângulo maior de todos, que era o exterior.

Entretanto, a atenção do grupo passou novamente para os triângulos médios, questionando-se se não poderiam aceitar alguns que estavam a identificar no interior do triângulo maior **(IME)**. Deste tipo de triângulos foram encontrados mais quatro.

Como não individualizaram os triângulos, questionou-se se não poderia haver outro deste género **(IME)**, ao que foi respondido que já estava contado **(IMV)**.

Contabilizaram os triângulos encontrados dos vários tipos, resultando um total de vinte e dois triângulos. Salientaram que achavam que não haveria mais do que estes **(IMV)**.

Finalmente, um elemento do grupo salientou que pensava que se teria que fazer triângulos até se preencher a área da figura toda **(IMOrg.)**.

Fizeram a confirmação, voltando a encontrar os quatro triângulos médios **(IMV)** e voltaram a concluir que dava para encontrar triângulos de uma unidade, triângulos de quatro unidades... **(IMV)**.

O registo escrito desta resolução apresenta para além do desenho de cada um dos tipos de triângulos existentes, o número de triângulos encontrados para cada tipo, como mostra o Anexo 6.

Em termos de intervenções metacognitivas, o quadro nº 5 sintetiza as intervenções que conseguimos identificar para cada categoria de análise:

Quadro Nº 5 – Registo de frequências de Intervenções Metacognitivas do Grupo A no Problema Nº 2

	CATEGORIAS				
	Ori.	**Org.**	**Exec.**	**Verif.**	**Total**
2º Problema	4	2	3	4	**13**
%	30,8	15,4	23	30,8	**100**

Este segundo problema, comparativamente com o primeiro, gerou muito menos intervenções metacognitivas em todas as categorias de análise. Apesar disso, a categoria Organização voltou a ser a de menor frequência absoluta e, à categoria Verificação juntou-se a categoria Orientação com maior número de intervenções metacognitivas.

Classificação desta resolução:

O grupo acabou por não acertar completamente na resolução do problema, porque não foram encontrados os triângulos todos. Esqueceram-se que poderiam encontrar mais triângulos recorrendo a pequenas translações de alguns que já conheciam.

Por isso, atendendo à escala holística focada, esta resolução tem uma pontuação de três pontos **(3)**, uma vez que "*o grupo implementou uma estratégia que o podia ter levado à solução correcta, contudo ignorou uma condição.*" Podiam ter numerado os triângulos encontrados e ser-lhes-ia mais fácil identificar os que faltavam.

2.1.3 – Problema nº 3 – *As Medidas do Comerciante*

Antes propriamente do grupo começar por ler oralmente o enunciado do problema, surgiu o comentário de que era mais um problema de comerciantes.

Após um elemento do grupo ter lido oralmente a parte do enunciado relacionado com as medidas, sublinhou as palavras "*dez*" e "*medidas*".

Continuou a ler oralmente o enunciado até ao fim, e outro colega sugeriu que seria melhor lê-lo uma vez mais **(IMO)**.

Antes de proceder a essa nova leitura, o terceiro elemento do grupo salientou que ia colocar por escrito as figuras respeitantes às medidas, num gesto de querer identificar os dados do problema **(IMO)**.

Continuou-se a ler o enunciado e concluíram que se tratavam de dez medidas.

Após nova leitura, concluíram que uma medida de leite seria igual a duas de água. O grupo interpretou, pois, esta parte ao contrário. Contudo, ficou claro que se gastou mais água do que leite.

Voltou-se a evidenciar que uma medida de leite seriam duas de água e que uma de água seriam duas de azeite. Mais uma vez, partiu-se de uma conclusão não acertada. Como conclusão mais geral, salientaram que uma medida de leite seria quatro de azeite.

De seguida um dos elementos do grupo concluiu que se se partisse de uma medida de água, seriam duas de azeite e meia de leite. De imediato outro colega de grupo refutou essa possibilidade, chamando a atenção para o facto de só haver medidas inteiras **(IMV)**.

Após uma nova leitura de parte do enunciado, concluiu-se que teria que se gastar umas das medidas **(IMO)**.

Perante este comentário surgiu, por parte de um dos elementos do grupo, a sugestão de se gastar uma das medidas, sem referir, contudo, qual o critério da sua escolha. Ora, isso provocou logo que outro colega lhe dissesse que não podia saber se era essa medida. Aproveitou para sugerir que se tinha que relacionar o dois com o quatro **(IMOrg.)**. Esta nova sugestão provocou com que o colega anterior reflectisse que teria que ver quantos litros gastava se escolhesse determinada medida **(IMO)**.

Voltou-se a ler oralmente o enunciado do problema e chegou-se à conclusão que se fosse a de dois, teriam que ter uma de quatro e outra de oito, o que não é possível para esta última. Referiu-se que o mesmo aconteceria para a medida cinco **(IMV)**. Este comentário é revelador de que o grupo ainda não tinha percebido muito bem o problema, pois, ainda não estavam a relacionar a medida que iria ficar vazia com a distribuição dos líquidos pelas restantes.

Após ter surgido a possibilidade de se escolher a medida vinte, verificou-se que para o sessenta também não dava **(IMV)**, sendo uma vez mais revelador da ausência de compreensão sobre o que era pedido neste problema.

Surgiu uma intervenção alegando que haveria duas hipóteses mas passou-se de imediato à leitura da pergunta do enunciado. Esta leitura levou a que um elemento do grupo se questionasse sobre se seriam todas as medidas **(IMO)**.

Sem que desse resposta ao colega, outro elemento do grupo continuou a ler o enunciado e identificou como frase chave para a resolução do problema a que se referia a duas vezes mais água **(IMO)**.

Nisto, o terceiro elemento do grupo, num trabalho mais individual, salientou que se gastariam determinados litros ou se gastariam quatro litros. Esta sugestão foi questionada por um outro colega **(IMV)**. Ao explicar o que estava a sugerir teve uma intervenção muito confusa, pois, tanto falou em gastar-se seis litros, como falou em quarenta e dois e em sete litros. Isto levou a que o colega anterior acabasse por referir que não possuíam medidas nem de sete nem de quarenta e dois litros **(IMV)**.

Interveio o outro elemento do grupo, que estava afastado desta discussão e sugeriu que o quarenta e dois fosse a soma da água com o azeite e com o leite.

Uma vez que o grupo estava num impasse, voltou-se a ler oralmente a pergunta do enunciado. Dessa leitura surgiu um novo dado para a compreensão do problema, ao destacar-se que o enunciado, ao referir-se ao que contém, referia-se ao líquido que estaria no seu interior **(IMO)**. De imediato surgiu a dúvida de se saber qual seria a medida a gastar **(IMO)**.

Ao voltar um elemento do grupo a sugerir que havia duas hipóteses, outro colega salientou que achava que não era assim **(IMV)**. Antes achava que eram duas de leite, quatro de água e outras tantas de azeite. Esse elemento voltou a ler uma parte do enunciado e referiu que não começava a resolver como os colegas estavam a sugerir. Antes preferia começar pelo gastar mais água do que leite **(IMOrg.)**.

Após algumas tentativas de caminhar para a correcta selecção da medida que ficou vazia, surgiu uma intervenção reflectindo sobre como se estava a pensar, alegando que deveria ser ao contrário **(IMV)**. Justificou que só se gastava uma medida e gastava duas vezes mais de leite e quatro vezes mais de água, o que voltava a ser incorrecto.

De qualquer das formas, outro colega de grupo sugeriu que se passasse ao registo escrito, sugerindo-se que se gastasse a medida dos seis litros, sendo doze de água e vinte e quatro de azeite.

Voltou-se a ler o enunciado para se salientar a relação entre os líquidos, pois ainda não estava clara essa relação.

Surgiu a sugestão de se começar primeiro pelo leite mas houve de imediato uma intervenção a deitar por terra tudo o que estavam a pensar, dizendo-se que não se havia gasto nada daquilo **(IMV)**.

Ao pretender-se mudar o assunto para o azeite, um colega de grupo, como que a aconselhar alguma calma, referiu que já iriam passar para esse líquido e para a relação que estabelecia com os outros **(IME)**. Contudo, o outro elemento do grupo deixou escapar a seguinte reflexão: *"então gastou muito azeite!"* **(IMO)**.

Após nova leitura e observação do que já havia sido escrito, certificou-se que uma medida de água equivalia a duas de leite **(IMV)**. Contudo o colega acabou por referir que havia registado ao contrário, isto é, uma de água equivalia a duas de azeite, o que não poderia ser **(IMV)**.

Isto obrigou a que tivesse que haver nova leitura do enunciado e fez com que o que havia dito a relação correctamente passasse a seguir o raciocínio errado do colega **(IMV)**. Verifica-se que o grupo confundiu a capacidade das medidas com a relação estabelecida entre elas e isso deixou-os um pouco baralhados. A confusão era de tal ordem que até se acabou por dizer que uma de leite era quatro de água, intervenção imediatamente corrigida para quatro de azeite **(IMV)**.

Contudo pareceu chegar-se a um consenso de que, ter quatro de azeite implicava dois de água e um de leite. Assim, a medida de um litro teria leite, a de dois teria água e da de quatro teria azeite. Contudo, surgiu uma chamada de atenção para o facto de o enunciado referir que apenas uma medida ficava vazia **(IME)**, sugerindo-se de imediato, e sem se reflectir, que seria a de quatro a ficar vazia.

Surgiu uma nova alusão ao facto de haver duas hipóteses, mas tratou-se apenas de uma reflexão mais individual **(IME)** do que de grupo, porque ela não teve consequências imediatas.

Um outro elemento sentiu necessidade de voltar a ler oralmente o enunciado e exteriorizou a sensação de que achava este problema complicado **(IMO)**. Nisto, o elemento do grupo que se havia referido às duas hipóteses tentou explicar a este colega o entendimento do enunciado do problema, referindo-se à relação entre os três líquidos. De qualquer das formas, este retribuiu, dizendo que não sabia se o que estavam a fazer estava bem ou não **(IMV)**. Pôs em causa a afectação de uma medida a um dos líquidos **(IMV)**, mas o colega justificou, dizendo que tinha que ser assim, por causa da relação entre os líquidos **(IMV)**. Para isso tentou que o colega associasse este problema a um outro que haviam resolvido nas aulas, parecido com este, no que diz respeito à forma como aquele havia sido resolvido **(IMOrg.)**.

De seguida voltou-se a sugerir que havia duas possibilidades de se gastar uma medida, o que de imediato teve o reparo de outro colega, alegando que no enunciado do problema estava explícito que era só uma medida **(IMV)**.

Após uma tentativa de explicação de como seria um caso ou o outro, questionou-se porque é que não poderia ser, por exemplo, a medida cinco **(IME)**. A razão recaiu no facto de dizerem que não havia medidas de dez nem de vinte litros.

De qualquer das formas este elemento do grupo continuou a manifestar a sua insatisfação com a resposta encontrada **(IMV)**.

Como os outros dois elementos do grupo comungavam da opinião de que havia duas hipóteses de resposta, avançaram para a sua redacção por escrito.

Quando houve uma intervenção no sentido de que era um quarto para a água, houve logo uma intervenção que corrigiu essa incorrecção, substituindo a quantidade de um quarto para a quantidade metade **(IMV)**.

Após o registo das duas possíveis resoluções, continuou a haver um elemento do grupo que chamou a atenção para o facto de não terem ficado a saber o que tinha cada uma de todas as dez medidas **(IMV)**. Perante esta observação ainda houve quem dissesse que sim, que se sabia o que continha cada uma das três medidas envolvidas em cada uma das duas possibilidades de resposta encontradas, mas o colega voltou a chamar a atenção para as restantes medidas **(IMV)**. Como nova resposta, obteve que para as outras medidas não havia valores exactos que dessem para se verificar a relação entre os líquidos **(IMV)**.

Referiu-se, pois, que as outras medidas sobrantes não conseguiam dar para haver a relação entre os líquidos **(IMV)**, pois só dava para o caso das medias um, dois e quatro, por um lado, e para o caso das medidas, seis, doze e vinte e quatro, por outro **(IMV)**.

Como registo escrito, o grupo, para além de apresentar as medidas desenhadas, apresentou as suas duas respostas encontradas: por um lado, a de ser quatro litros de azeite, dois litros de água e um litro de leite e, por outro, vinte e quatro litros de azeite, doze litros de água e seis litros de leite (Anexo 6).

Em termos de intervenções metacognitivas, o quadro nº 6 sintetiza as intervenções que conseguimos identificar para cada categoria de análise:

Quadro Nº 6 – Registo de frequências de Intervenções Metacognitivas do Grupo A no Problema Nº 3

	CATEGORIAS				
	Ori.	**Org.**	**Exec.**	**Verif.**	**Total**
3º Problema	10	3	4	23	**40**
%	25	7,5	10	57,5	**100**

Relativamente aos dois problemas anteriores, este problema provocou um número total de intervenções metacognitivas superior ao segundo e inferior ao primeiro. Contudo, a distribuição das intervenções pelas quatro categorias de análise voltou a ser semelhante aos problemas anteriores, pois a categoria Verificação voltou a ter a maior frequência absoluta, e a categoria Organização voltou a ser a de menor frequência absoluta.

Classificação desta resolução:

O grupo acabou por não acertar na resolução do problema, porque não usou uma estratégia correcta, devido a não ter conseguido entender o problema. Nunca ponderaram com muita convicção que todas as medidas teriam que ter líquido, à excepção de uma que ficava vazia. Limitaram-se apenas a encontrar trios de medidas na base da relação das suas capacidades de um para o dobro e para o quádruplo desta inicial.

Por isso, atendendo à escala holística focada, esta resolução tem uma pontuação de dois pontos **(2)**, uma vez que "*o grupo usou uma estratégia inapropriada e encontrou uma resposta incorrecta, contudo o trabalho mostrou alguma compreensão do problema*".

2.1.4 – Problema nº 4 – *Os Maridos Ciumentos*

O grupo começou por ler oralmente uma parte do problema e essa leitura foi interrompida pela sugestão de se desenhar o rio. Contudo, houve logo outra intervenção para que se lesse primeiro o enunciado do problema **(IMO)**.

Voltou-se, então a ler oralmente o resto do enunciado do problema, e sugeriu-se de imediato a estratégia da tentativa e erro para dar resposta ao problema **(IMOrg.)**, começando, por exemplo, um casal na primeira viagem. De seguida, sugeriu-se que deveria haver sempre uma mulher no barco mas essa ideia não teve continuidade.

Como passageiros da primeira viagem colocaram um casal, ficando a respectiva mulher na margem de destino. Entretanto questionou-se o que ocorreria se fosse o marido a ficar na margem **(IME)**. Esta dúvida foi solucionada pela própria pessoa que a colocou **(IME)**.

Entretanto, chegou-se à conclusão que tinha que ser o marido a ficar na margem de destino, o que foi contrariado pela intervenção de outro elemento do grupo, alegando-se que se assim fosse, a esposa viria a ter com os outros homens **(IMV)**.

Como contra-argumento foi referido que a esposa viria buscar outra mulher e ao viajarem para a margem de destino ela ficaria junto do marido que lá tinha ficado **(IMOrg.)**. Esta justificação levou a que o terceiro elemento do grupo solicitasse que se explicasse isso outra vez **(IMV)**.

Foi então que se exemplificou que primeiro iria o casal Silva, o que provocou que o outro elemento do grupo já passasse a perceber **(IMV)**.

Continuou-se a implementar essa estratégia, deixando, portanto o marido Silva na margem de destino, regressando a sua esposa para a margem de origem para vir buscar a mulher Fonseca.

Decidiu-se tornar os registos perceptíveis e, como tal, optou-se por identificar os homens e as mulheres respectivamente por "h" e por "m" e os nomes das famílias por "S", "F" e "C" **(IME)**.

Continuou-se na implementação da estratégia e deixaram na margem de destino o casal Silva, regressando a mulher Fonseca. Antes de avançarem com os nomes dos passageiros da viagem seguinte reflectiu-se sobre se até ali estava tudo dentro do permitido **(IMV)**. Foi então que um dos elementos do grupo decidiu enviar na viagem seguinte, para a margem de destino, o casal Fonseca. Essa sugestão foi interrompida por uma chamada de atenção de outro elemento do grupo, ao assinalar que na margem de origem já estava um homem com duas mulheres, o que na sua óptica, não poderia ser **(IMV)**.

Isso levou a que se voltasse a ler o enunciado do problema tendo-se interpretado que a presença dos maridos junto das respectivas mulheres era imprescindível **(IMO)**, porque se estes estivessem presentes, poderia haver outros homens também juntos **(IMO)**.

Deu-se então continuidade à resolução, e o grupo não se apercebeu que no barco já havia andado a viajar a mulher Silva da margem de destino, onde se encontrava o seu marido, para a margem de origem, onde estavam os outros maridos.

Ao viajar o casal Fonseca para a margem de destino, irreflectidamente, surgiu uma intervenção de reprovação dessa situação **(IMV)**, que de imediato foi esclarecida, pois tratava-se de um casal.

Continuaram a resolução e, de seguida, sugeriu-se que o marido Fonseca ficava na margem de destino junto ao casal Silva e a mulher Fonseca regressava para vir buscar a mulher Costa. Uma vez mais, o grupo não se apercebeu que o marido Costa iria ficar sem a sua esposa que ia no barco em direcção aos outros homens, ficando ele sozinho na margem de origem.

Por último, sugeriram que a mulher Costa viesse buscar o respectivo marido para que, na última viagem fossem encontrar os outros dois casais à margem de destino.

Um dos elementos do grupo sentiu a necessidade de justificar por escrito o esquema que haviam feito **(IME)**, mas outro sugeriu que só seria necessário melhorar esse mesmo esquema **(IMV)**.

De qualquer das formas foi sugerido que se deveria explicar o porquê de ir primeiro uma mulher **(IME)**.

Assim, acabou por se registar o seguinte: "*como pode ficar um homem junto com outras mulheres (desde que estejam lá os respectivos maridos), tem de ser uma mulher a fazer a travessia primeiro*" **(IME)**.

Ao pretender-se acrescentar que essa viagem deveria ser feita com outra mulher, isso foi logo corrigido para ser com o seu marido **(IMV)**, alegando-se que uma mulher poderia estar com o marido e com outra mulher **(IME)**. Em boa verdade, isto não poderia acontecer, pois o grupo estava a ir contra o enunciado.

Nisto, voltou a insistir-se que a viagem teria que ser feita com outra mulher **(IMV)**, ao que foi novamente dito que teria que ser com o respectivo marido **(IMV)**.

Voltou-se novamente a perguntar se seria necessário explicar-se tudo **(IME)**, ao que voltou outra vez a responder-se que seria necessário explicar melhor o esquema **(IMV)**.

Fizeram-se algumas correcções no esquema, como por exemplo, retirar da margem de origem o casal Silva, porque este ia em viagem, verificaram-se as viagens e deu-se por encerrada a resolução.

O registo escrito ilustra perfeitamente todas as viagens efectuadas, conforme se pode ver no Anexo 6.

Em termos de intervenções metacognitivas, o quadro nº 7 sintetiza as intervenções que conseguimos identificar para cada categoria de análise:

Quadro Nº 7 – Registo de frequências de Intervenções Metacognitivas do Grupo A no Problema Nº 4

	CATEGORIAS				
	Ori.	Org.	Exec.	Verif.	Total
4º Problema	3	2	8	11	**24**
%	12,5	8,3	33,3	45,9	**100**

Uma vez mais, a resolução deste quarto problema veio evidenciar aquilo que parece ser o padrão de intervenções metacognitivas deste grupo, ao nível das quatro categorias de análise. A categoria Verificação voltou a obter uma percentagem de intervenções metacognitivas a rondar os 46% do total de intervenções e a categoria Organização voltou a ser a detentora da frequência absoluta de intervenções mais baixa.

À semelhança do que aconteceu com o primeiro problema, a categoria Execução registou uma frequência absoluta superior à verificada na categoria Orientação, invertendo, a este nível, o que ocorreu com os problemas nº 2 e nº 3. Observa-se, pois uma alternância em termos de posições relativas das categorias Orientação e Execução.

Classificação desta resolução:

O grupo acabou por não acertar na resolução do problema, porque não respeitou uma das condições do enunciado, que era o de que as mulheres só poderiam estar sozinhas ou na companhia de outras mulheres, a menos que os respectivos maridos também estivessem presentes. Ora, quando a mulher Silva, por exemplo, regressa sozinha para vir buscar a mulher Fonseca, os respectivos maridos ficaram sem estar junto delas, o que não era permitido.

Por isso, atendendo à escala holística focada, esta resolução tem uma pontuação de três pontos **(3)**, uma vez que "*o grupo implementou uma* *estratégia que o podia ter levado à solução correcta, contudo ignorou uma condição".*

2.1.5 – Problema nº 5 – *A Sequência Numérica*

O grupo começou por ler oralmente o enunciado do problema, surgindo logo de imediato uma pergunta evidenciando a não compreensão do que acabara de ser lido **(IMO)**. Sugeriu-se, então, que havia necessidade de se ler de novo **(IMO)**.

Em vez de se efectuar essa nova leitura optou-se por explicar logo o enunciado do problema, evidenciando-se que a sequência numérica do Bruno resultava sempre das adições dos últimos dois números da sequência numérica do Artur. Isto levou a que um dos elementos do grupo tomasse, de facto consciência, que o Bruno dizia a soma do que o outro dizia **(IMO)**.

Questionou-se qual seria o próximo número a ser dito e sugeriu-se que se desse continuidade à sequência **(IMOrg.)**, descobrindo-se que os números da sequência do Artur eram os números triangulares. Contudo, este comentário não implicou reacções dos colegas. Em vez disso, um deles estava preocupado em saber qual seria o número que o Bruno iria dizer quando o Artur dissesse o 231. Por sua vez, o outro estava a tentar perceber como funcionava a sequência do Artur, descobrindo que do primeiro para o terceiro número havia um diferença de três valores, depois de cinco e avançou a ideia de que a seguir ao quinze, o Artur iria dizer o vinte e um. Foi então que o primeiro dos colegas perguntou se se teria que fazer a sequência toda até ao fim **(IMOrg.)**.

Em paralelo, o outro elemento do grupo tentava aumentar a sequência do Bruno, avançando como próximo número o trinta e seis.

Sistematizou-se que quando o Artur dissesse o vinte e um, o Bruno diria o trinta e seis **(IMV)**.

Depois, com recurso à máquina de calcular, acrescentaram à sequência do Artur o número vinte e oito e à do Bruno o número quarenta e nove, colocando esses valores por escrito na folha de resolução.

Seguidamente avançaram com o trinta e seis e o quarenta e cinco como sendo os dois próximos números da sequência do Artur.

Entretanto surgiu, como que a querer fazer um ponto da situação, a pergunta de qual deles é que iria dizer o número duzentos e trinta e um **(IME)**.

Obtida a resposta a esta questão, deu-se continuidade à resolução iniciada para o Artur. Surgiu, de seguida o número sessenta e seis, o número setenta e oito, o número noventa e um e o número cento e cinco, mas já havia sido registado antes destes o número cinquenta e cinco. Continuando a socorrerem-se da calculadora, registaram ainda, nessa sequência, os números cento e vinte, cento e trinta e seis, cento e cinquenta e três, cento e setenta e um, duzentos e dez e o número duzentos e trinta e um.

De seguida centraram-se na sequência do Bruno e começou-se por se verificar se o vinte e um mais seis seria o trinta e seis **(IMV)**. Perante este erro de cálculo, foi sugerida por outro elemento do grupo a alteração de vinte e um mais seis para vinte e um mais catorze **(IMV)**. Mas, uma vez mais, esta reflexão não estava correcta. Teve que ser o terceiro elemento do grupo a referir que o correcto era vinte e um mais vinte e oito iria dar o quarenta e nove **(IMV)**.

Continuaram, depois, a acrescentar números à sequência do Bruno, recorrendo para tal, uma vez mais à máquina de calcular. Assim, foram aparecendo os seguintes números: sessenta e quatro, oitenta e um, cem, cento e vinte e um, duzentos e dez. Contudo, este número foi incorrectamente calculado, porque ele nunca resulta da adição de sessenta e seis com o setenta e oito. Em sua substituição deveria estar o cento e quarenta e quatro. De qualquer das formas, isso foi um erro menor, porque como a sequência do Bruno estava a ser encontrava em função da sequência do Artur, como a seguir sabiam que teriam que adicionar o setenta e oito ao noventa e um, foi fácil recuperar essa sequência, propondo para a sua continuação o número cento e sessenta e nove. Seguiu-se-lhe o cento e noventa e seis, o duzentos e vinte e cinco, o duzentos e cinquenta e seis, o duzentos e oitenta e nove, o trezentos e vinte e quatro, o quatrocentos e, finalmente, o quatrocentos e quarenta e um.

Perante o recordar da pergunta, sugeriu-se como resposta o quatrocentos e quarenta e um **(IME)**.

Após terem encontrado este número, surgiu nova intervenção no sentido de registarem que teriam que dizer que o Artur dizia os números triangulares. **(IMOrg.)**.

Curiosamente, quem no início havia falado pela primeira vez em números triangulares, vinha agora mostrar alguma dúvida quanto a esse assunto **(IMV)**.

O terceiro elemento do grupo aproveitou para perguntar se não deveriam de ter ido à procura de um termo geral para a sequência **(IMOrg.)**. Enquanto essa pergunta surgia, outro elemento do grupo desenhava os triângulos respeitantes aos números um, três, seis e dez.

Surgiu uma sugestão quanto ao possível termo geral da sequência dos números triangulares, que consistiu no quociente entre o produto de n pela soma de n com um, a dividir por dois. Tentou-se testar este algoritmo **(IMV)** para n igual a quatro e surgiu a exteriorização de uma reflexão que chamou a atenção para a não necessidade de se falar em números triangulares **(IMV)**. Em paralelo testou-se então o algoritmo para o n igual a quatro e surgiu o valor dez como resultado, que é o quarto número triangular. Uma vez mais o outro elemento que havia desenhado os números triangulares voltava a enfatizar a não necessidade de se recorrer a eles **(IMV)**.

Agora sim, o colega de grupo que estava a testar a fórmula apenas referiu que se poderia dizer que detectaram a sequência de números triangulares. Uma vez mais o colega de grupo voltou a dizer que os números três, quatro, cinco e seis não era números triangulares **(IMV)**. Esta intervenção deveu-se ao facto de se ter centrado nas diferenças existentes entre os números da sequência do Artur em vez de ser nos próprios números da sequência, como salientou o colega com quem estava a manter diálogo **(IMV)**. Como conclusão, aquele elemento do grupo acabou por concordar, apesar de continuar a dizer que isso não foi relevante para a resolução do problema **(IMV)**.

Uma vez mais, o colega voltou a insistir que isso era uma informação importante, pois estava descoberta a fórmula **(IMV)**. Mesmo assim, não se chegou a acordo.

O terceiro elemento do grupo entrou na conversa e fez um ponto da situação dizendo que também se conseguiria resolver o problema sem recurso aos números triangulares **(IMV)**. Foi este o conforto que o colega necessitava e voltou a insistir na ideia dos números triangulares serem dispensáveis para a resolução do problema **(IMV)**.

O diálogo continuou, sendo que um dos colegas insistia em que assim descobriam uma relação entre os números **(IMV)** e o outro continuava a dizer que o problema se resolveria na mesma sem eles **(IMV)**.

Em seguida tentou-se recordar a relação para a sequência do Bruno **(IME)**. Surgiu então como hipótese o ser a soma de n com um. A ideia do mais um foi logo posta em causa **(IMV)**, concordando-se que não estava bem dito **(IMV)**, porque se assim fosse, não dava certo **(IMV)**.

Quando um dos elementos registou por escrito que: "*ou seja, o próximo número a dizer era sempre*", outro sugeriu que bastava o esquema estar bem sugestivo **(IME)**.

Tentou-se então redigir algo que fosse elucidativo da relação encontrada para os números do Artur, tendo-se salientado que o esquema era facilmente compreendido **(IMV)**, apesar de outro elemento do grupo colocar um pouco isso em causa **(IMV)**.

Como elemento de comparação, salientaram que o investigador também havia distribuído uma sequência. Inferimos que estavam a querer dizer que era facilmente percebida **(IMV)**.

Voltou a haver um ponto de ordem à mesa, quando um dos elementos do grupo alertou para o facto de que o que era importante saber-se era o critério para descobrir o número a dizer pelo Bruno **(IMV)**.

Sugeriu-se, então a hipótese de ser o quociente do produto de n pela soma de n com dois, a dividir por dois. Esta sugestão não teve aceitação **(IMV)**. Por isso quando se referiu que já estava feito, esse elemento do grupo que criticou esta hipótese voltou a fazê-lo **(IMV)**.

Terminaram esta resolução testando o registo escrito **(IMV)** que acabou por ficar da seguinte forma: "*Como verificamos que os números do Artur tinham uma relação, ou seja*" e escreveram a expressão matemática do quociente do produto de n com a soma de n mais dois sobre dois (Anexo 6).

Em termos de intervenções metacognitivas, o quadro nº 8 sintetiza as intervenções que conseguimos identificar para cada categoria de análise:

Quadro Nº 8 – Registo de frequências de Intervenções Metacognitivas do Grupo A no Problema Nº 5

	CATEGORIAS				
	Ori.	Org.	Exec.	Verif.	Total
5º Problema	3	4	4	26	**37**
%	8,1	10,8	10,8	70,3	**100**

Este quinto problema destacou uma vez mais a tendência que este grupo tem para intervir metacognitivamente ao nível da categoria Verificação, pois do total das intervenções metacognitivas expressas neste problema, cerca de 70% ocorreram ao nível desta categoria.

Pela primeira vez, a categoria Orientação obteve uma frequência absoluta inferior à categoria Organização, ainda que fosse apenas de um intervenção.

Classificação desta resolução:

O grupo acertou na resolução do problema, apesar de não ter sabido tirar partido do facto de conhecer o algoritmo para a sequência dos números triangulares. Também lhes faltou descobrirem que a sequência do Bruno era a dos números quadrados. Teria sido, pois, menos moroso, tirar partido dos respectivos algoritmos. Contudo, descobriram as regularidades existentes em cada uma das sequências e, por exaustão, conseguiram encontrar o número pretendido, resolvendo, portanto, o problema.

Por isso, atendendo à escala holística focada, esta resolução tem uma pontuação de quatro pontos **(4)**, uma vez que "*estratégias apropriadas foram seleccionadas e implementadas. A resposta correcta foi dada em termos da informação do problema*".

2.1.6 – Problema nº 6 – *O Jogo das Moedas de Um Escudo*

O grupo começou por ler oralmente o enunciado do problema. De seguida procedeu-se ao registo escrito dos dados do problema, como sejam as quantias com que cada jogador acabou o jogo, o tipo de moedas com que jogaram e o número de partidas envolvidas.

Voltou-se a ler o enunciado do problema e retirou-se outro dado importante que tinha que ver com o dobrar das quantias de dinheiro daqueles que não perderam as partidas. Contudo, esta interpretação correcta só ocorreu com um dos três elementos do grupo. Um dos colegas interpretou que não era só o perdedor que ganhava e o outro interpretou que se uma de três pessoas perdesse, havia uma outra que ficava com o dinheiro das outras duas. Isto levou a que o elemento do grupo que tinha interpretado correctamente o enunciado tivesse que o explicar aos colegas, salientando que se houvesse um que perdesse, os outros é que dobravam o dinheiro que tinham e não que o que perdeu **(IMO)**.

Após ter-se chegado a um acordo sobre a interpretação do problema, voltou-se a fazer uma nova leitura do enunciado. Finda essa leitura surgiu a sugestão de estratégia de resolução que consistiu em resolver-se o problema debaixo para cima **(IMOrg.)**.

Voltou-se a ler o enunciado e sugeriu-se a utilização de uma tabela **(IMOrg.)** onde colocaram os nomes dos jogadores.

Distraidamente, um dos elementos do grupo perguntou qual era a quantidade de dinheiro com que cada jogador tinha iniciado o jogo **(IMO)** a que prontamente um colega respondeu que isso era o que tinham que procurar **(IMO)**, o que provocou alguns sorrisos.

Sugeriu-se então uma vez mais que se resolvesse o problema de baixo para cima **(IMOrg.)**. Quem estava a construir a tabela questionou o que teria que colocar na outra entrada da mesma **(IME)**, tendo recebido como resposta que teria que colocar o nome das partidas. Nisto surgiu a pergunta sobre o que estariam a jogar **(IMO)**, sem que tivesse havido resposta.

Após leitura de uma parte do enunciado chegou-se à conclusão que todos teriam que ter começado o jogo com dinheiro, sugerindo-se que se trabalhasse por hipóteses **(IMOrg.)**. Começou-se por se propor que o Mário tivesse perdido na última partida, ficando com os mesmos oito escudos. Ignoraram a situação de que se alguém dobra o dinheiro, é porque quem perde vai ter de perder também dinheiro.

Uma intervenção incorrecta que houve foi a de o Ricardo passar de nove para sete escudos **(IME)**. De imediato foi corrigida essa intervenção, chamando-se a atenção para o dobrar. Para tal, o Ricardo tinha que ter antes quatro escudos e cinquenta centavos e Orlando tinha que ter cinco escudos, o que não era possível face às condições impostas pelo enunciado **(IMV)**.

Entretanto, um elemento do grupo continuou a entender que quem perdesse uma partida ficaria com o mesmo dinheiro que possuía **(IMO)**.

Chamou-se de novo a atenção para o facto de só poder haver números inteiros de escudos **(IME)**, o que levou a que tivesse que haver uma alteração quanto à pessoa que deveria ter perdido **(IMV)**, propondo-se o Ricardo, tendo antes o Mário quatro escudos e o Orlando cinco.escudos.

Surgiu um comentário revelando que assim já seria fácil saber-se quem havia perdido anteriormente **(IME)**, contudo, verificou-se depois que isso não era possível.

Esta situação levou a que um dos elementos do grupo perguntasse se poderiam perder dois jogadores ao mesmo tempo **(IMO)**, havendo outro colega que respondeu que sim.

Sugeriu-se de seguida que o Mário teria antes dois escudos, ficando depois com quatro. Contudo houve nova chamada de atenção, salientado que ele poderia ter perdido **(IMV)**, o que depois voltou a ser corrigido, isto é, afinal o Mário não poderia ter perdido **(IMV)**.

Quando um elemento do grupo voltou a ler uma parte do enunciado, outro colega corrigiu a palavra perdeu para a palavra ganhou, atribuindo ao Mário dois escudos **(IMV)**.

De seguida surgiu a sugestão de quer o Ricardo quer o Orlando terem empatado, o que não estava contemplado no enunciado. De qualquer das formas este elemento do grupo acrescentou que, assim, teriam ambos que dar dinheiro **(IME)**, o que também não está previsto do enunciado. Estas reacções mostraram que o grupo não havia entendido muito bem o enunciado, até porque um deles perguntou se poderiam ter perdido os dois **(IMO)**.

Perante esta pergunta voltou-se novamente a sugerir que, se assim fosse, ambos teria que repor o dobro **(IMO)**, o que foi mais uma prova da não compreensão do problema. Somente um dos elementos do grupo chamou a atenção para que esses não teriam que dar dinheiro **(IMV)**, o que também não é verdade, porque se um perdesse teria que dobrar os haveres dos outros. Se assim fosse poderiam ficar assim até ao fim, foi o que um dos elementos do grupo comentou **(IMV)**.

De seguida surgiu uma nova sugestão para abordar o problema, que consistiu em propor que todos começassem com o mesmo dinheiro **(IMOrg.)**, tendo sido redondamente negado pelos outros dois colegas de grupo, voltando-se, para tal a ler a pergunta do enunciado.

Surgiu imediatamente a seguir a sugestão de no início o Mário começar com um escudo, o Ricardo com nove escudos e o Orlando com cinco escudos, passando a registar por escrito essa sugestão.

Voltou novamente a salientar-se o facto de que todos teriam que ter dinheiro, sob pena de não poderem começar a jogar **(IMO)**.

Perante um pedido de esclarecimento desta última intervenção, voltou-se a ler a parte do enunciado onde se salientava que se jogava com moedas de um escudo e, aproveitou-se para se referir que sem moedas não poderia haver jogo **(IMO)**.

Voltou-se a ler o enunciado e de seguida perguntou-se porque é que não poderiam começar com zero escudos **(IMO)**.

De imediato chamou-se a atenção para o que poderia acontecer se perdessem logo, mas voltou a formular-se a mesma questão **(IMO)**.

Somente após a explicação de que qualquer valor a multiplicar por zero era zero, é que o colega se convenceu que não podia ser assim.

Então passou a sugerir-se que um deles teria que começar com um escudo mas essa sugestão foi interrompida por uma chamada de atenção de que teriam que começar pelo Ricardo **(IMOrg.)**.

Seguiu-se outra chamada de atenção, cuja finalidade foi a de sugerir-se para se verificar o que já havia sido registado, no sentido de se verificar se havia erros ou não **(IMV)**.

Voltou a ler-se parte do enunciado e aquando da reflexão de um dos elementos do grupo que dizia que em determinada altura, na primeira partida, ninguém havia ganho, de imediato tomou consciência de que isso não podia ser, pois alguém havia de ter ganho **(IMV)**. Mesmo assim, outro colega de grupo sentiu a necessidade de saber onde é que isto estava escrito **(IMO).**

Perante a explicação que se seguiu, o terceiro elemento do grupo achou por bem sugerir que o melhor era ninguém ter perdido.

Seguiu-se a sugestão de que poderiam ter começado da seguinte forma: o Mário com um escudo, o Ricardo com nove escudos e o Orlando com cinco escudos, mas de imediato foi feita nova chamada de atenção no sentido de que se deveria começar pelo fim **(IMV)**. Esta chamada de atenção recebeu do colega a informação complementar de que depois, para se fazer a confirmação já se poderia partir do início **(IMOrg.)**.

Procedeu-se, então, à tentativa de resolução começando-se pelo fim, mas voltou a questionar-se porque é que tinha que se começar por aí **(IMV)**.

Foi então referido que tinha que se partir daquilo que era conhecido, que era o dinheiro com que tinham terminado o jogo.

De seguida, um dos elementos do grupo entendeu referir que o que estava a dar problemas era o Orlando **(IME)**, aproveitando para sugerir que seria melhor ele ter perdido para continuar com os dez escudos.

Nisto, outro colega perguntou quem havia perdido numa das partidas **(IME)**, obtendo como resposta que haviam perdido dois dos jogadores.

Seguiu-se a tarefa de, por tentativas, tentarem avançar na resolução do problema, verificando-se que uns tinham que perder, mas depois já tinham que ganhar. Verificou-se uma vez mais que não podia haver somas não inteiras de escudos **(IMV)**, ou seja, mostraram uma vez mais que estavam a trabalhar um pouco ao acaso. Voltou a falar-se de que nada impedia que pudesse perder ou empatar mais do que um jogador ao mesmo tempo **(IME)**.

Numa tentativa de começarem a sistematizar os registos que haviam feito, começou-se por dizer que o Mário teria começado com um escudo. Contudo, uma vez mais, alertou-se para o facto de ter que se dizer que se começou do fim para o princípio **(IMV)**. Essa estratégia foi então registada na folha de resolução.

Continuou-se a efectuar o processo de verificação, tendo-se salientando que o Ricardo nunca tinha ganho, por isso estava sempre com o mesmo dinheiro na tabela de registo. Claro que o grupo não percebeu que se não tivesse ganho nunca, é porque teria perdido e, como tal, teria que ter muito menos dinheiro.

Quanto ao Orlando, salientou-se em primeiro lugar que este só teria perdido uma vez, mas depressa se corrigiu para passar a ter ganho apenas uma vez **(IMV)**.

No que concerne ao Mário, salientaram que este havia ganho três partidas.

Após esta verificação, um dos elementos do grupo, como que tendo pouca segurança da estratégia seguida, interveio dizendo que isto era apenas uma das várias possibilidades de se ter atacado este problema **(IMV)**.

Inclusivamente chegou-se a sugerir que outra possibilidade seria, por exemplo, o Mário ter começado com quatro escudos e ter perdido sempre e apenas ganhar na última partida.

Não obstante esta sugestão, num olhar mais crítico, o elemento do grupo que se havia referido à questão das possibilidades questionou o grupo se na primeira partida teriam perdido todos os jogadores **(IMV)**. Obteve como resposta que haviam todos empatado. Daí que a tabela de registo continuasse a contemplar o mesmo dinheiro para cada jogador no início do jogo e no final da primeira partida.

Seguiram-se outras possibilidades de início do jogo e foi referido que não seria necessário dizer mais nada, porque tudo eram meras hipóteses **(IME)**.

Por fim efectuaram o último registo escrito que consistiu no seguinte texto: *"Esta é uma possível solução para o problema, haveriam muitas outras... Por exemplo a mais simples era terem todos iniciado com o dinheiro que findaram por empatarem em todas as partidas."*

Antes já haviam registado por debaixo da tabela com os valores das partidas outro texto: "*Uma vez que as somas têm de ser inteiras, o Ricardo nunca ganhou, assim sendo, iniciou o jogo com nove escudos. O Orlando que concluiu o jogo com dez escudos só pode ter ganho uma vez (para as somas darem inteiras), logo começou com cinco escudos. O Mário pode ter começado com um escudo e ter ganho três vezes. Numa das jogadas houve um empate dos três jogadores*" (Anexo 6).

Em termos de intervenções metacognitivas, o quadro nº 9 sintetiza as intervenções que conseguimos identificar para cada categoria de análise:

Quadro Nº 9 – Registo de frequências de Intervenções Metacognitivas do Grupo A no Problema Nº 6

	CATEGORIAS				
	Ori.	Org.	Exec.	Verif.	Total
6º Problema	13	7	9	16	45
%	28,9	15,6	20	35,5	100

Por fim, este último problema voltou a mostrar a tendência de intervenções metacognitivas deste grupo, isto é, a maior frequência absoluta das intervenções metacognitivas voltou a incidir na categoria Verificação e a de menor frequência absoluta voltou a ser a categoria Organização.

Classificação desta resolução:

O grupo não acertou na resolução do problema, como aliás se pode ver nos textos que redigiram. Esses mesmos textos acabam por ser um espalho de que o grupo nunca se encontrou com a verdadeira compreensão do problema. Interpretaram-no mal e resolveram-no em função dessa incorrecta interpretação. Como principal erro estratégico, salienta-se o facto de não terem optado por tentar perceber o que terá ocorrido na última partida para que os valores finais tivessem sido aqueles que o enunciado oferecia. Se o tivessem feito teria sido fácil verificarem que somente o Ricardo poderia ter perdido essa última partida, pois era o único que possuía um número ímpar de escudos, logo, nunca poderia ter ganho essa última partida, devido ao facto de antes não poder ter somas não inteiras de escudos.

Por isso, atendendo à escala holística focada, esta resolução tem uma pontuação de dois pontos **(2)**, uma vez que *"o grupo usou uma estratégia inapropriada* e *encontrou uma resposta incorrecta"*.

Em jeito de síntese, poderemos dizer que este grupo evidenciou alguma coerência ao nível da exteriorização das suas reflexões, aquando da resolução dos problemas que lhes foram propostos. De facto, em todos os problemas, independentemente do sucesso ou insucesso da resolução, manifestaram intervenções de índole metacognitiva relacionadas com todas as categorias em análise, sendo que a categoria Verificação foi sempre a que obteve maiores valores a esse nível, contrapondo-se aos valores da categoria Organização. No que respeita às outras duas categorias, dependendo do tipo de problemas, alternavam a sua posição relativa. Em alguns dos problemas o total de intervenções metacognitivas da categoria Orientação era superior ao da categoria Execução e noutros havia a permuta dessas posições.

Podemos, pois concluir, que no caso deste grupo, independentemente dos problemas, verificou-se uma certa regularidade ao nível da distribuição das categorias de análise, no que diz respeito à comparação dos valores absolutos das intervenções metacognitivas respectivas.

Quanto a haver problemas que tenham provocado mais intervenções metacognitivas do que outros, isso poderá estar relacionado, talvez, com o nível de dificuldade sentido pelo grupo na resolução desses problemas. Contudo, parece-nos poder retirar um indicador interessante deste estudo relativamente a este grupo, que reside no facto do problema de lógica, que exigia bastante raciocínio lógico, ter servido melhor para se poder conhecer os elementos do grupo ao nível da sua prestação metacognitiva, pois foi o problema que gerou mais intervenções deste nível em todas as categorias em estudo.

Outro dado importante que poderemos retirar da análise dos dados, é que este grupo merecerá no futuro ser estimulado, em termos de formação, no que diz respeito à categoria Organização, dado que foi a categoria em que o grupo verbalizou menos intervenções metacognitivas. Valerá, talvez a pena sensibilizar, no futuro, este grupo para a necessidade de terem que pensar mais na concepção dos planos de resolução dos problemas, na selecção das estratégias mais adequadas e não avançarem logo para a resolução propriamente dita dos problemas. A confirmar esta nossa ideia, estão os resultados da aplicação da escala holística focada (Charles et al., 1987) às resoluções efectuadas por escrito, onde se destaca, pela negativa, que só tenham conseguido resolver completamente bem, um dos seis problemas propostos. De facto, num total possível de 24 pontos da escala holística focada, este grupo obteve apenas 17 pontos.

2.2 – Grupo B

Este grupo também se mostrou bastante empenhado na tarefa proposta, evidenciando vontade em cumprir as regras estipuladas para a realização da mesma. Na resolução dos problemas, demorou, em média, mais tempo do que o grupo A. Eis o seu comportamento para cada um dos seis problemas.

2.2.1 – Problema nº 1 - *A Assembleia dos Comerciantes da Rua*

O grupo começou por ler o problema em voz alta e após essa primeira leitura, um dos seus elementos exteriorizou o seu gosto pessoal por este tipo de problemas **(IMO)**.

De seguida, um colega de grupo questionou se este problema não poderia ser resolvido com recurso a um grelha **(IMOrg.)**. Esta questão obteve resposta favorável dos colegas e levou a que se registasse uma tabela na folha de resolução contendo os nomes dos quatro sujeitos do problema, bem como das profissões.

O elemento do grupo que estava a fazer o registo perguntou se eram quatro os sujeitos do problema **(IMO)**, obtendo um sim como resposta.

Começou-se por colocar-se uma cruz na cela respeitante ao Oliveira e à profissão carniceiro, o que impedia que o Oliveira pudesse ter outra profissão para além daquela. Para tal, sugeriu-se utilizar um círculo para colocar nos sítios da tabela onde não havia cruzamento de nomes com as respectivas profissões **(IME)**. Em vez disso, optou-se por colocar traços na tabela. Também se concluiu que para a profissão de carniceiro já não poderia haver mais nenhum pretendente. Por isso, também foram colocados tracinhos no resto da coluna respeitante a essa profissão.

Voltou a ler-se o início do enunciado do problema para se confirmarem os nomes dos intervenientes. Ao ler-se que o Oliveira estava sentado à esquerda do Pereira, isso, aparentemente não dizia nada para um dos elementos do grupo **(IMO)**. Para outro colega, isso também não trazia nada de importante **(IMO)**.

Ao ler-se que o Nogueira estava à direita do merceeiro, logo se concluiu que o Oliveira não seria o merceeiro. De imediato foi recordado que o Oliveira já não poderia ser mais nada para além de carniceiro **(IMV)**.

Ao ler-se a parte do enunciado relacionada com o Pinheiro, concluiu-se que ele não seria padeiro, o que levou a mais um preenchimento da tabela, colocando-se um traço na cela onde se cruzava o Pinheiro com a profissão de padeiro.

Acrescentou-se que, não sendo padeiro já só tinha duas hipóteses **(IME)**. Contudo, esta reflexão não foi tida em linha de conta, porque outro colega de grupo, ao ler que o Nogueira estava à direita do merceeiro, para ele, essa frase deveria ser a chave do problema **(IMO)**. Este elemento, ao descodificar que o Oliveira estava sentado à esquerda do Pereira e que o Nogueira estava à direita do merceeiro, concluiu que o Pereira teria que ser o merceeiro **(IME)**. Esta conclusão mereceu que um colega lhe tivesse pedido para a justificar **(IMV)**, mas não obteve justificação. Ele próprio reiniciou a leitura do enunciado, quando o colega acrescentou que o Pinheiro não seria o padeiro.

Continuou-se a ler o enunciado e perguntou-se se não haveria informação relativamente ao Pereira **(IMO)**. A esta pergunta outro elemento do grupo salientou que todas as frases do enunciado davam informação **(IMO)**.

Após nova leitura sugeriu-se que se esquematizasse por escrito o problema **(IMOrg.)**.

Entretanto, o colega que havia sugerido a profissão de merceeiro para o Pereira voltou a fazê-lo. Inclusivamente, aconselhou o grupo a experimentar a resolução a partir desse facto consumado **(IMOrg.)**.

Olhando-se para o esquema, associou-se o Oliveira à figura de presidente **(IME)** e associou-se a letra C ao carniceiro **(IME)**.

Voltou-se a ler o enunciado e, ao mesmo tempo, tentou-se associar essa leitura com a questão da lateralidade esquerda-direita do esquema **(IME)** da folha de registo e de quem estaria ao lado de quem **(IME)**.

De seguida sugeriu-se a atribuição da profissão de leiteiro ao Pinheiro, uma vez que se estava a partir do pressuposto que o Pereira era o merceeiro e que o Pinheiro não poderia ser nem padeiro nem carniceiro **(IME)**.

Como consequência, sugeriu-se que se fizesse a verificação **(IMV)**.

Começou-se por se confirmar a situação do Oliveira como estando bem. Voltou a partir-se da suposição de que Pereira seria o merceeiro e confirmou-se que o Pinheiro não seria o padeiro **(IMV)**. De seguida atribuiu-se ao Nogueira a profissão de padeiro, alegando-se que este estava à direita do merceeiro, isto é, após ter-se observado o esquema que já possuíam na folha de resolução. Um dos elementos do grupo achou mesmo que não conseguia ver outra maneira **(IMV)**.

Outro motivo pelo qual foi atribuída a profissão de padeiro ao Nogueira prendeu-se com o facto de ele não poder ser o merceeiro por estar à direita dele. Esta justificação foi a confirmação do que já haviam descoberto, quer por parte de um dos colegas **(IMV)**, quer por parte de outro **(IMV)**.

O nível de confiança de pelo menos um dos elementos do grupo era de tal ordem elevado que este sugeriu passar para a resolução de outro problema **(IMV)**. Contudo, um dos outros dois elementos do grupo preferiu verificar uma vez mais, pois não se sentia muito confiante **(IMV)**, apesar de um colega seu achar que estava certo **(IMV)**. Para tal decidiu confirmar de novo **(IMV)**.

O terceiro elemento do grupo lembrou-se de perguntar se seria necessário legendar a tabela **(IME)**, ao que foi respondido que a legenda estava feita **(IMV)**.

Entretanto o colega de grupo voltou a insistir na necessidade de se voltar a confirmar a resolução **(IMV)**.

Foi o que aconteceu e ficou fora de questão que a situação do Oliveira estava correcta **(IMV)**.

Ao falar-se no Nogueira foi salientado que afinal não sabiam ainda quem era o merceeiro **(IMV)**. Contudo, uma vez que o Pinheiro estava sentado à frente do Pereira, voltou a entender-se que o Pereira só poderia ser o merceeiro, levando o grupo a entrar em concordância, o que fez com que dessem por terminada a resolução.

Quanto à folha de registo escrito, esta apresenta apenas a tabela preenchida e os esquemas elucidando as posições relativas dos sujeitos do enunciado. Não justificam, contudo, esse mesmo preenchimento, como ilustra o Anexo 7.

Em termos de intervenções metacognitivas, o quadro nº 10 sintetiza as intervenções que conseguimos identificar para cada categoria de análise:

Quadro Nº 10 – Registo de frequências de Intervenções Metacognitivas do Grupo B no Problema Nº 1

	CATEGORIAS				
	Ori.	Org.	Exec.	Verif.	Total
1º Problema	7	3	9	15	**34**
%	20,6	8,8	26,5	44,1	**100**

Este primeiro problema mostrou que o grupo interveio metacognitivamente ao nível das quatro categorias de análise e, à semelhança do grupo A, também obteve o valor mais elevado na categoria Verificação e o valor mais baixo na categoria Organização. De facto, as intervenções ao nível da Verificação estiveram perto de atingir os 45% do total por nós identificado. Pelo contrário, a percentagem de intervenções metacognitivas ao nível da Organização não chegou a atingir os 9%.

Igualmente, à semelhança do grupo A, a categoria Execução obteve um valor mais elevado do que a categoria Orientação, apesar deste grupo B se ter aproximado mais da resposta certa para o problema.

Classificação desta resolução:

O grupo acabou por acertar na resposta correcta do problema, contudo, a sua estratégia não ficou muito bem clara, isto é, a atribuição da profissão de merceeiro ao Pereira não terá sido muito bem justificada. Por outro lado, a folha de resolução também não ajuda em nada a perceber-se os porquês das tomadas de decisão que tiveram que efectuar.

Por isso, atendendo à escala holística focada, esta resolução tem uma pontuação de três pontos **(3)**, uma vez que "*a resposta correcta foi dada e há alguma evidência que houve uma selecção de estratégias apropriadas. Contudo, a sua implementação não está bem clara*".

2.2.2 – Problema nº 2 – *O Triângulo dos Triângulos*

O grupo começou por ler oralmente o enunciado e após essa leitura, interpretou-se o problema como tendo-se que se resolver por partes, isto é, identificar os triângulos grandes, os médios e os pequenos **(IMOrg.)**.

Começou-se por se identificar o maior de todos, que era o triângulo que envolvia a figura, tendo-se registado na folha de resolução essa descoberta.

Surgiu, de seguida, um comentário de um dos elementos do grupo dizendo que achava que já havia resolvido este problema numas das aulas **(IMO)**, tendo obtido a concordância de outro colega **(IMO)**.

De seguida sugeriu-se que tentassem encontrar os mais pequenos mas optou-se por deixar esses para o fim **(IMOrg.)**. Em vez disso decidiram começar por identificar os triângulos maiores **(IMOrg.)**.

Concluíram que só havia um grande e decidiram ir procurar os médios. Após terem encontrado alguns, surgiu o comentário de que eram muitos **(IME)**. Este comentário foi reforçado por outro colega de grupo **(IME)**, referindo que achava que seriam muitos **(IME)**.

Um dos elementos do grupo sentiu a necessidade de possuir um lápis para ir eliminado os que ia encontrando **(IME)** e após lhe ter sido sugerido que o fizesse com a caneta, este elemento referiu que preferia o lápis para depois poder apagar.

Sugeriu-se, então que se utilizassem tracinhos à medida que iam encontrando as figuras que procuravam **(IMOrg.)**.

Começaram a identificar alguns triângulos médios, mas como não havia um critério de registo que fosse claro quanto aos triângulos que já haviam encontrado, tinha que surgir a pergunta de se saber se este ou aquele triângulo já havia ou não sido contabilizado **(IMV)**. Esta pergunta foi feita mais do que uma vez **(IMV)**. Ao identificar-se um mais pequeno do que aqueles que estavam à procura, de imediato foi referido que esses ficariam para o fim **(IMV)**.

Dada a confusão que se instaurou, houve necessidade de voltarem a começar de novo, sugerindo-se um caminho que tentariam levar até ao fim **(IMOrg.)**, pois, reconheceu-se que a tarefa estava a ser um pouco complicada **(IMOrg.)**.

Recomeçou-se a identificação dos triângulos médios e chegou-se a um ponto em que tomaram consciência que estariam a entrar em ciclos **(IME)**, duvidando do escasso número encontrado **(IME)**.

Foi então que surgiu a sugestão de se iniciar antes pelos mais pequenos, passando-se, de seguida, para os médios **(IMOrg.)**, porque entendiam que com os pequeninos não haveriam tantos problemas **(IMOrg.)**.

Foi fácil, pois encontrarem dezasseis triângulos mais pequenos.

Um dos elementos do grupo, como que renovando a sua confiança para atacar o que restava da resolução, exteriorizou a frase de que agora é que era **(IME)**.

Os restantes já eram incluídos na categoria de triângulos médios **(IME)**, independentemente de haver dentro desta categoria uns mais pequenos que outros **(IME)**.

Voltou a haver um recordar de que provavelmente já teriam resolvido este problema ou um semelhante e lembravam-se que, na altura, teria havido triângulos grandes, médios e pequenos **(IME)**.

Começaram, então a identificar os triângulos médios, havendo uma ou outra dúvida, sobre se já haviam ou não contabilizado um ou outro **(IMV)**, nem que para tal tivessem que virar a figura e ver se já estava contabilizado ou não, o que aparecia **(IMV)**. Chegou-se à conclusão que esse já estava contabilizado **(IMV)**, salientando-se que já iam em oito médios. Entretanto, surgiu novo comentário, alegando que parecia que um já estava a ser contado duas vezes **(IMV)**. Este reparo levou a que quem tinha dito o número oito reforçasse a ideia de que de facto tinha encontrado oito triângulos médios e não estava a conseguir detectar mais nenhum **(IMV)**.

No final acabaram por detectar mais dois triângulos médios, perfazendo um total de dez nesta categoria. Este encontrar de triângulos por partes, isto é, sem serem todos de uma vez, levou a que um elemento do grupo rotulasse este problema como que traiçoeiro, utilizando a expressão: "*este aqui!...*" **(IMV)**, o que provocou sorrisos no grupo.

Confirmou-se que de facto eram dez triângulos médios **(IMV)** e solicitou-se que houvesse outro colega de grupo que confirmasse também **(IMV)**.

Quando um colega seu acedeu a fazê-lo, alertou-o para que não se esquecesse dos existentes numa das partes da figura **(IMV)**, perguntando-lhe mesmo se havia encontrado já ou não um triângulo concreto **(IMV)**.

Esse colega acabou por encontrar apenas nove e o terceiro colega do grupo prontificou-se a ser ele a fazer agora a verificação **(IMV)**, tendo-se voltado a encontrar os dez triângulos médios.

Ainda se questionou se um deles havia sido contemplado ou não **(IMV)** mas acabou por se concluir que sim. Constatou-se, pois que eram efectivamente dez **(IMV)** e o elemento do grupo que apenas tinha encontrado nove acabou por referir que não tinha contabilizado um existente no meio da figura **(IMV)**.

Deram, pois, por terminada a resolução do problema.

Quanto à folha de registo, esta apresenta apenas alguns pontos nos triângulos da figura original, evidenciando que o grupo os tentou contar. Para além disso, existe o registo de que encontraram um triângulo grande, dez triângulos médios e dezasseis triângulos pequenos, sem saber quais são esses mesmos triângulos (Anexo 7).

Em termos de intervenções metacognitivas, o quadro nº 11 sintetiza as intervenções que conseguimos identificar para cada categoria de análise:

Quadro Nº 11 – Registo de frequências de Intervenções Metacognitivas do Grupo B no Problema Nº 2

	CATEGORIAS				
	Ori.	**Org.**	**Exec.**	**Verif.**	**Total**
2º Problema	2	8	10	17	**37**
%	5,4	21,6	27	46	**100**

Em termos da distribuição das intervenções metacognitivas pelas categorias de análise, verifica-se que, à semelhança do que havia acontecido com o problema nº 5 do grupo A, a frequência absoluta de menor valor correspondeu à categoria Orientação. Não deixa de ser curioso o facto de em ambos os casos, quer o grupo A com o 5º problema, quer este grupo com este problema, terem resolvido correctamente os problemas. Será legítimo extrair a ilação de que problemas que se interpretem facilmente, terão probabilidade forte de resolução correcta?

Independentemente desse motivo poder ser válido e ser merecedor de reflexões mais profundas em estudos posteriores, o grupo voltou a manifestar uma elevada percentagem de intervenção ao nível da categoria Verificação, o que leva a que também se possa concluir que essa tarefa poderá não depender do problema estar bem ou mal resolvido.

Classificação desta resolução:

Apesar do grupo não responder concretamente à pergunta do problema, isto é, apesar de não ter dado como resposta um total de vinte e sete triângulos, quer a folha de registo, quer esta análise, deram para perceber que encontraram todos os triângulos que se pretendia. Apesar de tudo, ainda houve uma certa confusão, fruto do grupo não ter conseguido encontrar uma estratégia de identificação clara e precisa de cada um dos triângulos em jogo. Para tal, bastaria, por exemplo, numerarem os triângulos mais pequenos e tirar partido dessa numeração para os outros tipos de triângulos. De qualquer das formas, apesar de terem tido mais trabalho, acabaram por encontrá-los todos.

Por isso, atendendo à escala holística focada, esta resolução tem uma pontuação de quatro pontos **(4)**, uma vez que "*estratégias apropriadas foram seleccionadas e implementadas.*" Apesar da resposta ao problema não ter sido explicitamente dada, foi-o, pelo menos, implicitamente.

2.2.3 – Problema nº 3 – *As Medidas do Comerciante*

Após um elemento do grupo ter começado por ler oralmente o enunciado até à parte em que era referido que cada medida só continha um só líquido, foi interrompido por um dos colegas, ao manifestar o seu desagrado sobre problemas como este **(IMO)**, comparando-o com outro que já havia resolvido noutra altura **(IMO)**.

Por outro lado, outro colega referiu que não, porque segundo ele, seria mais parecido com um outro que tinha a ver com múltiplos **(IMO)**. Ao mesmo tempo manifestou um voto de confiança para o sucesso nesta resolução **(IMO)**.

Passado este momento de associação do problema a outro semelhante voltou a solicitar-se a continuação da leitura do enunciado **(IMO)**.

Quando se leu a pergunta do enunciado, voltou novamente a surgir a associação do problema a outro **(IMO)**, por parte de um dos elementos do grupo, com a concordância de um colega seu **(IMO)**. Referiu-se que este problema fazia lembrar um outro que teria que ver com o deserto e com o consumir de copos de água **(IMO)**.

Continuaram a ler o enunciado e surgiu um novo problema a que associaram este. Tratava-se agora de um problema que envolvia o assunto dos ovos **(IMO)**. Esta sugestão fez com que outro colega de grupo também se lembrasse desse problema dos ovos **(IMO)**.

Entretanto, sugeriu-se que o problema fosse resolvido do fim para o início **(IMOrg.)**. Ao mesmo tempo, outro elemento do grupo tentou lembrar-se de como havia resolvido o tal problema dos ovos **(IMOrg.)**. Por sua vez, o terceiro elemento do grupo mostrou ter mais certezas que, de facto, este problema seria parecido com o dos ovos **(IMO)**, o que levou um dos outros colegas a dizer que assim fosse, seria fácil de resolver **(IMO)**.

Surgiu, então, a sugestão de se desenharem as medidas **(IMOrg.)** para se poder passar à resolução propriamente dita. Tentou-se uma vez mais recordar o modo como se havia resolvido o problemas dos ovos **(IMO)**, levando o terceiro elemento do grupo a recordar-se também desse problema **(IMO)**.

Partiu-se então para a resolução do problema, sugerindo-se o registo das dez medidas **(IMOrg.)**.

Quando estavam a levar a efeito essa tarefa, um dos elementos do grupo reconheceu que pensava que pudesse estar relacionado com a questão dos múltiplos mas não tinha bem a certeza **(IMV)**.

Após terminada a fase do registo escrito das medidas, passou-se a nova leitura do enunciado, constatando-se a existência dos três líquidos e que apenas uma única medida havia ficado vazia **(IMO)**.

De seguida leu-se a parte do enunciado onde se estabelecia a relação entre os líquidos, tendo-se chegado à conclusão que o líquido que se gastou menos foi o leite, gastando-se duas vezes mais água e duas vezes mais azeite do que água **(IMO)**.

Decidiu-se atribuir o valor de "x" ao leite **(IME)**, com posterior registo escrito.

Ao tentar associar-se duas vezes "x" à água, surgiu a questão se seria possível o recurso a uma equação para se resolver o problema **(IMOrg.)**, sendo que a resposta foi afirmativa.

Atribuiu-se então a letra "y" à água e a letra "z" ao azeite.

Ao perguntar-se ao investigador se se poderia utilizar uma equação, obtiveram como resposta que um dos conselhos desta tarefa seria o de evitar o recurso a cálculos algébricos. Houve alguma manifestação de desagrado, pois entendiam que com uma equação seria fácil resolver este problema **(IMOrg.)**. Esqueceram-se, contudo que estavam a pretender introduzir três variáveis em vez de relacionarem os líquidos numa relação de dobro e de quádruplo.

Não obstante saber-se que era aconselhável o não recurso aos cálculos algébricos, o elemento do grupo que havia perguntado se isso era possível ainda propôs que se recorresse à seguinte equação: $x + y + z = 10$ mas logo de seguida perguntou a que é que se referia o "x" **(IME)** e, imediatamente a seguir a isso, teceu um comentário que não se percebeu muito bem, ainda que resultasse de uma reflexão interior **(IMO)**: "*Ah, mas tu estás a dizer isto aqui? Mas eu acho que eram três. Eu acho que na minha opinião...*".

Entretanto voltou a centrar a sua atenção na equação que tinha proposto, por serem dez as medidas em causa **(IMOrg.)**. Passado um tempo já substituía na equação o "y" por "2y" e já perguntava se se igualava a um **(IMOrg.)**. Claro que outro colega de grupo referiu logo que isso não estava correcto **(IMV)**, levando o primeiro a referir que o problema residia exactamente aí **(IMV)**. Aproveitando este diálogo, o terceiro elemento do grupo referiu também que a equação anterior não estava correcta, pois não se deveria igualar a dez **(IMV)**.

Esta situação de impasse levou a que um elemento do grupo sentisse necessidade de voltar a ler a pergunta do enunciado **(IMO)**.

Só nesta altura se chegou à conclusão que os números das medias representavam a quantidade de líquido que poderiam conter **(IMO)**. Esta descoberta levou outro colega de grupo a pensar que assim seria fácil resolver o problema **(IMO)**. Contudo fez uma sugestão de estratégia de resolução muito pouco feliz, pois sugeriu que deveriam igualar a equação a um e ver quanto cabia a cada líquido **(IMOrg.)**. Como esta sugestão teve a concordância de um outro colega, sugeriu de seguida que se deveria igualar a equação a dois, depois a quatro e depois a cinco e assim sucessivamente **(IMOrg.)**. Esta sugestão voltou a ter a aprovação de um colega que sugeriu que se experimentasse essa ideia **(IMOrg.)**. Antes de o fazer, tentou justificar o porquê desta sua sugestão, que consistia em descobrir que quantidade de cada um dos três líquidos continha cada medida **(IMOrg.)**.

Eis que entretanto o terceiro elemento do grupo chamou a tenção para o facto de o enunciado ser explícito no que dizia respeito ao que cada medida podia conter, pois estava escrito que cada medida só podia conter um líquido **(IMV)**.

Esta chamada de atenção alertou um dos outros colegas para o facto de estarem a misturar os líquidos **(IME)**, tendo o terceiro chegado também a essa conclusão **(IME)**.

Só neste preciso momento é que um dos três elementos do grupo exteriorizou a ideia de que havia passado a perceber o problema **(IMO)**.

Um dos seus colegas sentiu necessidade de lhe perguntar se ainda se lembrava como havia resolvido o problemas dos ovos **(IMO)**. Face à tentativa de explicação por parte do colega, fez-se algum tipo de luz na sua mente ao ponto de dizer que então se deveria encontrar um número que originasse duas vezes mais água do que leite **(IMOrg.)**. Sugeriu, então o número doze e, quando um dos elementos do grupo referiu que o doze dava para trio, outro colega deu mostras de não ter entendido **(IME)**. Paralelamente, o terceiro elemento do grupo tentou lembrar-se de como se resolvia o problema dos ovos **(IMOrg.)**. Voltou então a sugerir-se que ter-se-ia que encontrar um número que possibilitasse haver duas vezes mais água do que leite **(IMOrg.)**, decidindo-se deixar para o fim a descoberta da medida que estaria vazia **(IMOrg.)**.

De seguida, tentou-se encontrar o tal número que satisfizesse o critério da relação entre os líquidos. Utilizou-se, para tal a medida de dois litros para o leite e a de quatro litros para a água.

Surgiu, depois, a dúvida se se teriam que somar as quantidades de líquido **(IMOrg.)**. Tentou-se saber qual era a soma de todas as quantidades **(IME)**, pensando-se que pudesse ser por aí que passava a resolução do problema **(IMOrg.)**.

Utilizando-se a calculadora, verificou-se que a soma era cento e vinte e nove e foi a partir de aqui que houve uma sugestão de se retirar deste total uma das medidas **(IMOrg.)**. Esta sugestão teve a concordância de outro elemento do grupo **(IMOrg.)**.

A ideia parecia ser animadora, pois como estavam a tentar retirar a medida de um litro, o facto de resultar como total um número par de litros parecia agradar-lhes **(IMOrg.)**. Contudo, voltou-se a chamar a atenção que a água era "2y" **(IMOrg.)**.

Implementou-se de seguida a estratégia de excluírem a medida de um litro e sugeriu-se que os cento e vinte e oito litros resultantes teriam que ser divididos em partes, por forma a respeitar-se a relação entre os líquidos **(IMOrg.)**.

Esta sugestão foi mal interpretada por um dos elementos do grupo, pois, alegando que cada medida só poderia conter um líquido, dizia que, assim, estar-se-ia a misturar os líquidos **(IMV)**.

Este comentário obrigou o colega que havia proposto esta sugestão de resolução a justificar o seu pensamento, alegando que se poderiam juntar medidas por forma a resultar um total de um líquido que se pretendesse **(IME)**. Utilizou como exemplo o valor seis para o leite, juntando as medidas de quatro e de dois litros **(IME)**. De seguida procurou o valor doze para a água e referiu que para o azeite teriam que encontrar o dobro de doze.

Como, por acaso até existiam as medidas doze e vinte e quatro, foi, de alguma forma fácil, convencer os colegas sobre o seu raciocínio. Continuou a sua reflexão, salientando que como ainda sobravam muitas medidas, dever-se-iam juntar para continuar a encontrar os valores necessários para que a relação entre os líquidos se mantivesse **(IMOrg.)**. Perguntou se um dos seus colegas estava a conseguir acompanhar o seu raciocínio **(IMOrg.)** e concluiu dizendo que uma das medidas teria que ficar vazia **(ImOrg.)**.

Após ter convencido o colega, foi ele próprio que sugeriu que se encontrasse metade do valor cento e vinte e oito, julgando que estaria a encontrar o valor para o azeite. De seguida voltou-se a dividir o valor sessenta e quatro por dois, encontrando-se o valor da água e questionou-se como seria para o caso do leite **(IME)**.

Por um lado foi dito que para o leite já não daria certo **(IME)**, pois dava dezasseis e não havia nenhuma medida com esse valor **(IME)**, a não ser que fossem as medias doze e quatro.

Surgiu então uma nova reflexão apontando para a possibilidade de não ter que ser a bilha de um litro a ficar vazia, poderia ser outra **(IMOrg.)**.

De imediato sugeriu-se retirar a medida de quatro litros, mas antes de se proceder à sua experimentação, enfatizou-se que este problema teria que ser resolvido pela estratégia da tentativa e erro **(IMOrg.)**.

Entretanto surgiu nova dúvida, pois na opinião de um dos elementos do grupo, não fazia sentido as medidas terem todas líquido, quando era dito que uma teria que ficar vazia **(IMO)**. Esta dúvida mereceu, por parte de um do colegas, o comentário de que isso era para detectar depois **(IMO)**, porque uma coisa era a capacidade das medidas, outra era estarem ou não com líquido no seu interior.

Voltou-se, de seguida, a insistir na estratégia da tentativa e erro **(IMOrg.)**, sugerindo-se que se continuasse para a medida dois, uma vez que para a medida um já havia sido feito e não dava **(IMV)**. Contudo, logo imediatamente a seguir, preferiu-se retirar a medida de cinco litros com o pretexto de se obter uma soma par de líquidos **(IMOrg.)**. Chegaram ao valor 124, deste passaram para o valor 62, que seriam de azeite, e deste para o valor 31, que seria o valor para a água.

Ao sentirem a necessidade de dividir o 31 por 2, concluíram que a medida cinco também não resultava **(IMV)**. Logo, a medida cinco passou a estar fora de questão **(IMV)**.

Verbalizou-se, então uma reflexão, que referia que quanto maior fosse a medida a retirar melhor poderia ser **(IMOrg.)**.

Experimentou-se retirar a medida quinze, encontraram-se os valores 114 e 57. Verificaram novamente que para o 57 também já não dava **(IMV)**. Ainda não seria, pois, com a medida quinze **(IMV)**.

De seguida surgiu o comentário de que se haviam acabado os números ímpares **(IME)**. Mesmo assim, pensou-se que deveria ser um número elevado **(IMOrg.)**.

Numa tentativa de mudarem de estratégia, sugeriu-se optar pela multiplicação em vez de ser pela divisão **(IMOrg.)**, pois pairava no ar a ideia de que não estariam a saber resolver correctamente o problema **(IMV)**, pois, apesar de parecer que pudesse ser como estavam a resolver, não sabiam se seria exactamente assim **(IMV)**.

Isto levou a que se voltasse a insistir na ideia da multiplicação, começando-se por multiplicar o trinta e oito por dois. Ao encontrar-se o valor setenta e seis, retirou-se esse valor ao total de cento e vinte e nove e obteve-se o valor cinquenta e três. Concluiu-se, de imediato, que este valor também não servia para a resolução correcta do problema **(IMV)**.

De repente experimentou-se com a medida seis e utilizou-se a operação de subtracção. Ao encontrar-se o valor cento e vinte e três, voltou a utilizar-se a operação de divisão e concluiu-se uma vez mais que também não dava.

Experimentou-se, de seguida, a medida doze e verificou-se que também não dava.

Voltou a chamar-se a atenção que o quinze também não dava **(IMV)** e sugeriu-se a medida de vinte e dois. Logo se imaginou que também não iria dar, porque era uma medida muito elevada **(IME)**.

Seguiu-se a medida trinta e oito, mas ao encontrar-se o valor noventa e um, também foi rejeitada. Passou-se à medida vinte quatro e também não resultou e, num acto de alguma frustração, um dos elementos do grupo referiu que não estava a ver como é que se poderia resolver este problema **(IMOrg.)**.

Voltou-se a ler o enunciado e decidiu-se experimentar através do método da junção das medidas **(IMOrg.)**.

Começou-se pelo valor seis, que era o resultado das medidas quatro e dois e passou-se para o valor doze. Nisto recordou-se que de leite teria que haver "*menos de duas vezes*" **(IME)**. Daqui, surgiu o comentário de se achar que seria mais fácil começar-se pelo leite **(IMOrg.)**.

Com alguma motivação redobrada, registaram novamente os nomes do líquidos na folha de resolução e enfatizou-se a ideia que a resolução deste problema teria que passar pela junção das medidas **(IMOrg.)**.

Atribuiu-se ao leite o valor dois, à água o valor quatro e ao azeite o valor seis, sem terem notado que seis não era o dobro de quatro. Arrumadas que estavam a s medias de 2, 4 e 6 litros, atribuíram, de seguida, a medida cinco ao leite e verificaram que não existiam uma medida de dez litros para a água **(IMV)**. Quando se tentou sugerir a possibilidade de junção de medidas

(IMOrg.), duvidou-se se isso seria possível **(IME)**, alegando-se que, com esse procedimento estar-se-ia a aumentar o número de medidas existentes.

Nisto, houve um novo reparo, salientando-se que se deveria saber o que continham todas as medidas. Portanto não poderiam contemplar apenas três medidas **(IMV)**, ainda que com essas parecia que estava certo **(IMV)**. A questão residia no sobrar de medidas **(IMV)**, pois havia ainda sete medidas por trabalhar **(IMV)**.

Sentiu-se num dos elementos do grupo algum receio em juntar medidas, devido a pensar-se que faltariam no fim **(IMOrg.)**. Contudo a justificação deste resolvedor voltou a dar mostras de não possuir um completo entendimento do problema, pois referiu que ao juntar-se a medida cinco com a medida quatro daria nove e, portanto já não daria as dez medidas **(IMOrg.)**.

Este elemento teve, então, que receber uma explicação de outro colega de que o dez era o dobro de cinco, levando, contudo o colega anterior a dizer que isso não era o problema **(IME)**.

O nível de confiança era tão baixo que o elemento do grupo que estava a relacionar o cinco com dez, também evidenciou que não sabia se era assim ou não **(IME)**.

Voltou-se a ler o enunciado e a opção de se poderem juntar medidas passou a ter mais força **(IMOrg.)**, pois, o valor dez poderia resultar da junção das medidas quatro, cinco e um. Contudo, num acto de verificação, outro colega salientou que se estavam a utilizar medidas que já estavam ocupadas com líquido **(IMV)**.

Este reparo fez com que voltasse a ser posta em causa a junção das medidas, alegando-se que no fim já não resultariam as dez medidas **(IMV)**.

Voltou-se a optar pelas medidas 2, 4 e 6, constatando-se a utilização em mais do que uma vez da medida seis **(IMV)**.

Sugeriu-se nova estratégia, começando-se por atribuir os trinta e oito litros ao azeite e questionando-se quanto teria que ser de água. Surgiu o valor dezanove mas ao pretender-se dividi-lo por dois também já não dava **(IME)**. Por outro lado também foi referido que não havia nenhuma medida com a capacidade para dezanove litros **(IME)**. Contudo, outro colega de grupo voltou a sugerir a junção de duas medidas para se obter o valor dezanove **(IME)**. Esta sugestão voltou a ser criticada, porque com a junção das medidas já não resultariam as dez medidas **(IMV)**.

Colocou-se a hipótese de não haver necessidade de unir as medidas **(IMOrg.)**, mas de seguida já se entendia que era necessário haver essa junção **(IMOrg.)**.

Voltou novamente a surgir o comentário de que só no final é que se podia descobrir qual a medida que ficaria vazia **(IME)**.

Sugeriu-se, de novo, que se optasse pela junção das medidas **(IMOrg.)**, até porque parecia a um dos elementos do grupo que a resolução estava a ir no bom caminho e não percebia porque é que não estava a resultar **(IMV)**. Outro colega acrescentou que contrariamente ao início, agora não estava a ver muita lógica no problema **(IMV)**.

O terceiro elemento do grupo sugeriu que a medida de um litro continha leite, a de dois litros continha água e a de quatro litros continha azeite. Salientou-se que neste caso as coisas resultavam mas o problema eram as restantes **(IME)**, porque a seguir, ao escolher-se a medida de cinco litros, **(IMOrg.)** teria que se encontrar uma medida de dez litros e ela não existia **(IMOrg.)**.

O desespero era de tal ordem que se perguntou se se podia retirar líquido das medidas **(IMOrg.)**. Um colega negou logo essa possibilidade.

Sugeriu-se, de seguida, a medida cinco, mas depois saltou-se para a medida doze e para a medida seis. Aqui houve nova chamada de atenção, salientando-se que a medida seis já estava ocupada **(IMV)**.

Ignorando essa possibilidade da medida seis já estar ocupada, um elemento do grupo voltou a insistir na relação de um litro para o leite, dois para a água e quatro para o azeite e teve a concordância de outro colega **(IME)**. De seguida optou-se por se deixar a medida cinco vazia, porque haviam visto que não dava **(IME)** e encontrou-se um novo trio de medias: a de seis para o leite, a de doze para a água e a de vinte e quatro par ao azeite.

Detectou-se então o problema das medidas 22, 38 e 5 **(IME)** e um elemento do grupo achou que não se estava a responder à pergunta do enunciado **(IMV)**. Obteve como resposta que já sabiam o que continham seis das medidas e que depois era só somar tudo.

Voltou-se novamente a chamar a atenção para a questão de serem dez medidas **(IMOrg.)**, alegando-se que se fosse por junção de medidas, seria fácil **(IMOrg.)**. A preocupação num dos elementos do grupo residia no facto de achar que no final tinha que haver dez medidas **(IMOrg.)**.

Verificou-se novamente que seis já estavam ocupadas e que apenas faltavam quatro medidas **(IMV)**, sendo que uma ficaria vazia e, portanto, só faltavam três **(IMV)**.

Se se optasse pela de quinze já não dava **(IMV)**, logo, voltou a tomar forma a possibilidade de junção de medidas mesmo que houvesse necessidade de se repetirem **(IMOrg.)**, uma vez que entendiam que se tinham que utilizar todas as medidas **(IMOrg.)**.

Voltou-se a ler a pergunta do enunciado e um dos elementos do grupo referiu que não estava a perceber **(IMO)**.

Voltou-se novamente a ler a pergunta do enunciado e chegou-se à conclusão que as medidas teriam que estar cheias, não se podendo retirar líquido delas.

Voltou a fazer-se o ponto da situação, confirmando-se que a grande parte das medidas já estavam bem preenchidas e não se sabia como atacar as que faltavam **(IMV)**.

Voltou a pensar-se que se calhar o melhor era retirar-se a medida trinta e oito **(IMOrg.)** mas chegou-se à conclusão que não dava e sugeriu-se que fosse a de quinze **(IMOrg.)**, que de imediato voltou a ser substituída pela de cinco.

Voltaram-se a encontrar os valores 124 e 62, fruto da subtracção do valor cinco ao valor cento e vinte e nove e da divisão desse resultado por dois, pois havia uma sensação que deveria ser por essa via **(IME)**. Na tentativa de se encontrar o valor sessenta e dois sugeriu-se utilizar a medida de valor trinta e oito, o que levou com outro colega de grupo referisse que também achava que deveria ser assim **(IME)**.

Verificou-se ainda que para se obter o 62 ter-se-ia que juntar à medida 38 a medida de valor 24, voltando um elemento do grupo a referir que pensava que fosse assim que se tivesse que se resolver o problema **(IME)**.

Atribuíram o líquido de azeite às medidas 38 e 24 e verificou-se que ainda faltavam distribuir outros 62 litros de líquido **(IME)**.

Encontrou-se o valor 31 como sendo metade de 62 e verificava-se que não dava **(IMV)**, pois sobrava uma medida.

Optou-se pela medida de vinte e dois e verificou-se que não dava **(IMV)**.

Surgiu o comentário de um dos elementos do grupo alegando que já estava a perceber **(IMO)** e voltando a insistir na medida 22, perguntou quanto faltava para o valor 31. Esta sugestão voltou a sofrer uma contrariedade, porque assim teriam que utilizar a medida de um litro **(IMV)** que, inicialmente estavam a deixar vazia.

Este reparo não causou moça, e deu mais força para que se optasse pela possibilidade de junção das medidas **(IMOrg.)**, tendo o apoio de outro colega **(IMOrg.)**.

Então concluíram que para a água seriam as medidas 22, 6, 2 e 1 e as que sobrassem teriam leite. Contudo, ao pretender-se dividir o trinta e um por dois verificou-se que não dava certo **(IME)**, o que provocou uma expressão de desagrado de um dos elementos do grupo **(IME)**. Gostariam que tivesse dado o valor quinze.

Sugeriu-se utilizarem-se as medidas que sobravam **(IMOrg.)**, que eram as medidas 4, 5 e 15. Esqueceram-se, contudo da medida 12, pois foi dito que já havia sido utilizada, sem o ter sido.

Concluiu-se, pois, que ainda não estava bem, porque deveria dar um número inteiro e o 31 a dividir por 2 não dava **(IMV)**. Esta constatação levou a que se voltasse a perguntar qual era a medida que tinham deixado vazia **(IMV)**.

Como a confusão era muita, referiu-se que afinal a medida cinco já havia sido usada **(IMV)**, sem ter sido. Como tal, o valor devia ser o 19 **(IMV)**, o que já daria o 38 **(IMV)**.

Recomeçou-se, então por se atribuir ao leite as medidas de quatro e de quinze litros, o que levou a que houvesse um comentário de um dos elementos do grupo no sentido de dizer que achava que já estavam perto de encontrar a solução **(IME)**. Outro colega de grupo também partilhou dessa ideia **(IME)**, contudo achou que dever-se-ia escolher outra medida. Por isso, sugeriu que se deveria recomeçar a resolver o problema, mas sem se utilizarem os valores que tinham estado a usar **(IMOrg.)**. Começou por referir que o quatro não podia ser **(IMV)**.

Obtendo a concordância de outro colega, este sugeriu que ao 129 se retirasse o valor 2. Contudo, depressa verificou que isso iria fazer com que se encontrassem valores decimais, ainda que entendesse que isso poderia ser **(IME)**. Como sugeriu retirar os valores 38 e 24 do total de 127, o colega anterior referiu que passou a não entender o seu raciocínio **(IME)**.

Utilizou a máquina de calcular, encontrou o valor 64,5 e concluiu que não poderia ser **(IMV)**. Esta situação levou a que este resolvedor referisse que seria preferível retirar-se logo uma medida no início para resultar um total de litros em número par **(IMOrg.)**.

Surgiu um pedido de verificação das operações, no sentido de ver se se encontrava um número par **(IMV)**.

Voltou a sugerir-se retirar a medida de um litro, mas depressa salientaram que a de um já tinham feito **(IMV)** e não daria certo por causa do valor dezasseis **(IMV)**.

Surgiu uma intervenção de grande convicção quanto ao facto de no início se ter logo que retirar uma das medidas **(IMOrg.)**. Por isso sugeriu-se tirar a medida cinco e voltou a referir-se que já se tinha feito isso **(IMV)**.

Sugeriu-se retirar a medida quatro, mas como dava o valor de 125, também foi rejeitado por não dar valor inteiro **(IMV)**.

Finalmente voltou a sugerir-se a retirada da medida de um litro e efectuaram-se as operações por escrito, encontrando-se os valores de 128 e 64. De seguida questionou-se sobre quais seriam as medidas para perfazer o valor 64 **(IME)**. Como resposta surgiram as medidas de 38, 24 e 2 litros. De imediato solicitou-se que se anulassem essas medidas da lista de medidas **(IME)**.

De seguida obteve-se o valor 32 e voltou-se a questionar quais seriam as medidas que perfaziam esse valor **(IME)**, sentindo-se a necessidade de se saber quantas medidas teriam que ser usadas **(IME)** e quais é que já não estavam disponíveis **(IME)**. Chegou-se, pois, uma vez mais à conclusão que já não dava **(IMV)**, porque já havia medidas usadas e a de um litro também já não podia conter qualquer líquido **(IMV)**, porque havia sido destinada a ficar vazia **(IMV)**. Entretanto, descobriu-se que juntando-se as medidas de 5, 15 e 12, dava o valor 32.

De seguida dividiu-se o valor 32 por dois e obteve-se o valor 16. Contudo começaram a verificar que o valor 12 já tinha sido usado **(IMV)**, isto é, ao questionar-se se as medidas 12 e 4 ainda estavam disponíveis **(IMV)**, chegou-se à conclusão que já não dava, o que provocou outra expressão de desespero **(IME)**.

A vontade de que assim não fosse era tanta que um dos elementos do grupo referiu que ainda não haviam usado essas medidas **(IMV)**. Conformando-se com a realidade, questionou-se quanto à medida 22, se esta já havia sido utilizada ou não **(IMV)**. Como esta medida ainda estava disponível sugeriu-se que fosse essa a que devia ficar vazia. Isto implicou logo que outro colega lembrasse que assim ter-se-ia que utilizar a medida de um litro **(IMV)**, entendendo que fazia uma certa lógica **(IMV)**.

Optando-se por se ter em linha de conta a medida de um litro e deixando-se vazia a media de 22 litros, decidiu-se avançar para o encontrar do valor 16, que seria a junção das medidas 12 e 4 litros. Referiu-se que a medida 12 já estava ocupada **(IMV)**, o que era revelador que estavam muito confusos e estavam a trabalhar com várias possibilidades em simultâneo, confundindo os valores utilizados e por utilizar, o que levou a que se concluísse que com a medida de 22 litros também não dava **(IMV)**.

Uma vez mais voltou a sugerir-se a possibilidade de se utilizarem outros números **(IMOrg.)**, começando-se por se adicionar as medidas de 22 e 15 litros, dando um total de 37 litros, o que também já não servia **(IMV)**.

Sugeriu-se, de seguida, a junção das medidas de 22, 6 e 4 litros, dando um total de 32 litros, o que agradou ao grupo, pois já tinham seleccionado estas para o valor 32 e as medidas 38, 24 e 2 litros par um total de 64 litros.

De seguida, um dos elementos do grupo questionou se agora necessitavam do número 32 **(IME)**, tendo como resposta que seria o número 16 **(IME)**.

Neste ponto voltou a verificar que as coisas estavam novamente complicadas **(IME)**, porque com os números resultantes não se conseguia obter esse valor.

Esta situação obrigou a que se tivesse que pensar em permutar algumas medidas para se obterem outros valores **(IMOrg.)**. Para tal, sugeriu-se que se registassem por escritos os números que faltavam **(IME)**.

Voltou-se a identificar o valor 16 como sendo o mais problemático **(IMV)**, e um dos elementos do grupo afirmou que um deles teria sempre que ser o primeiro **(IMV)**, ainda que não tivesse dito qual o valor em causa. Contudo era o 16 que estava a levantar graves problemas **(IMV)**.

Entendeu-se que este valor era muito baixo, por isso seria melhor tentar-se com números menores **(IMOrg.)**.

Surgiu nova reflexão de que já não se estava a entender nada do problema **(IMV)**, apesar de sentirem que estavam perto **(IMV)**, muito perto mesmo **(IMV)**.

Não se tirando o um e tirando-se o cinco ou o quinze, havia quase que uma certeza num dos elementos do grupo que uma delas estaria vazia **(IMOrg.)**.

Assim, sugeriu-se uma vez mais que se seleccionasse a medida de quinze litros para ficar vazia. Entretanto, outro colega de grupo solicitou ao terceiro elemento que colocasse por escrito o valor da que faltava encontrar-se **(IME)**, que era o valor de dezasseis litros. Perguntava-se quais as medidas que ainda não estavam ocupadas para ver se dava para perfazer os dezasseis litros **(IME)**.

Um elemento do grupo, como constatou que sobravam as medidas de um e de quatro litros, e como a soma dava cinco, interpretou esse valor, dizendo que por esse motivo é que de deveria começar por escolher a medida cinco **(IMOrg.)**.

De imediato, os colegas de grupo começaram a identificar os valores que se iriam obter, isto é, o 124, o 62 e o 31 e concluíram que era pior **(IMV)**.

Com a sugestão de se retirar a medida de quinze litros, originava o encontrar do valor 57, que também não dava **(IMV)**.

Como um dos elementos do grupo estava a testar valores com a máquina de calcular, outro colega interessou-se em saber o que estava a fazer **(IME)**. Este respondeu-lhe que achava que a resolução estava mais ou menos, pois sentia que a resolução correcta não devia estar muito longe do que estavam a tentar fazer **(IMV)**.

O colega também concordou que estariam perto do resultado correcto **(IMV)**, apesar do terceiro elemento do grupo achar que a resolução estava um pouco complicada **(IMV)**.

Um comentário posterior que surgiu de um dos resolvedores é que achava que se teria que fazer um jogo entre os valores fornecidos **(IMOrg.)** e sugeriu que a primeira situação passava pr se juntarem as medidas de 38, 24 e 2 litros, porque se assim não fosse não se saberia como utilizar a medida de trinta e oito litros **(IMOrg.)**.

Nisto, outro colega questionou-se sobre que número deveria ser usado agora para renovar o processo de resolução **(IME)**.

Optou-se por se juntar, de seguida, a medida de 22 litros à de 38, em vez de ser a de 24 litros e, como constataram que a soma dava um número aparentemente sugestivo, entenderam voltar a registar por escrito todos os valores das medidas **(IME)**.

Voltou-se a ler a parte do enunciado que relacionava os três líquidos e voltou a entender-se que em primeiro lugar deveriam pensar no azeite, porque era o valor mais elevado, porque depois bastava dividir esse valor por dois para se saber a quantidade de água. Foi constatado que era assim que as coisas tinham estado a ser feitas pelo grupo **(IMV)**, e voltando-se a dividir por dois ia dar o leite **(IMV)**.

Também se voltou a mencionar que por meio de multiplicações também se poderia resolver o problema.

Centraram a atenção nos valores das medidas que haviam registado na folha de resolução e começaram por eliminar as medidas de 1, de 38, de 15, de 5 e de 12 litros, questionando-se sobre quais as sobrantes **(IME)**. Constataram que ainda sobravam as de 24, 6 e de 2 litros, o que inviabilizava uma vez mais o poder-se encontrar o valor 16 **(IMV)**.

Como consequência, tentou-se inverter a pesquisa dos líquidos começando-se pelos dezasseis litros para o leite, que poderia ser formado pelas medidas de 12 e 4 litros. Contudo, baralhando-se uma vez mais os processos de resolução entendeu-se que essas medidas já estavam ocupadas **(IMV)**, levando ao desespero, de que nunca poderia dar certo **(IMV)**. Teve que ser um colega de grupo a fazer ver a este outro resolvedor que agora estavam a recomeçar a resolução, por isso ainda não havia medidas ocupadas, daí que se voltasse a concordar que as medidas de 12 e 4 litros poderia ser as do leite.

Aventou-se, entretanto a ideia de que poderia haver mais hipóteses e começaram a apresentar outras possíveis combinações de números como por exemplo o de 5, 6 e 4, sendo imediatamente postas de parte **(IMV)**.

Voltou-se a apostar na combinação anterior para o dezasseis, pela junção das medidas de 12 e de 4 litros, por se achar que estava bem **(IMV)**.

Chegou-se à conclusão que não se poderia escolher mais nenhuma para começar, porque se fosse, por exemplo a de quinze litros já não dava **(IMOrg.)**. Outro colega de grupo concordou com esta observação, pois, segundo ele, já tinha tentado ver e também não dava **(IMV)**.

Sugeriu-se, pois, que se procedesse por tentativas, utilizando-se também a medida de um litro **(IMOrg.)**, ainda que isso obrigasse à escolha de outra medida para ficar vazia **(IMOrg.)**, isto é, não teria que ser forçosamente a medida de um litro. Contudo, esta sugestão originou que se levasse em linha de conta que os valores a encontrar já teriam que ser outros **(IMV)**.

Voltou-se novamente a associar as medidas de 12 e 4 litros para resultar um total de dezasseis litros de leite e, de seguida associou-se as medidas de 24, 6 e 2 dois litros para um total de trinta e dois litros de água. Após este desenvolvimento, surgiu um comentário antevendo eventuais problemas para o azeite **(IMV)**. Experimentou-se associar primeiro as medidas de 38 e de 20 litros, depois substituiu-se a de 20 pelas medidas de 15 e de 5 litros e constatou-se que não resultava, porque gastando-se todas as medidas, apenas resultava um total de 58 litros de azeite e não os 64 que se procuravam.

Perante esta nova desilusão, um dos elementos do grupo ainda referiu que estava a tentar ver se conseguia arranjar um número que desse **(IMOrg.)**, utilizando, para tal a medida de seis litros, que também não resultou **(IMV)**.

Procedeu-se, de seguida à contagem das medidas já utilizadas e concluiu-se que fazia falta mais uma, porque a utilização de seis delas parecia que estavam a resultar certo. O problema residia nas restantes quatro medidas **(IMV)**.

Sugeriu-se voltar a decompor-se o valor 32 e questionou-se sobre quais as medidas que sobravam para se poder perfazer o valor 64 **(IME)**.

Contudo, verificou-se que não resultava, nem que se utilizassem as medidas de 2 e de 14 litros, nem as de 6, 5 e 4 litros. Por isso um dos elementos do grupo entendeu ser melhor começar-se pelos litros de leite

(IMOrg.). Por seu turno, outro dos resolvedores foi mais de opinião de se experimentar com outra medida **(IMOrg.)**, em substituição da medida de um litro.

Esta sugestão voltou novamente a esbarrar no comentário do colega anterior que referiu que já se tinha experimentado com outras medidas e que não tinha dado resultado **(IMV)**. O colega anterior retorquiu, dizendo que se deveria experimentar com as medidas todas **(IMOrg.)**.

Enquanto que dois dos elementos do grupo voltaram a experimentar o valor de 31 litros, o terceiro elemento, sem justificar muito bem, referiu que com outras medidas se ultrapassaria o valor total de 129 litros.

Os resolvedores anteriores, encontraram, então, os valores de 31, 62 e 124 litros e ao encontrar-se este último valor, voltou a referir-se que já não estava bem **(IMV)**. Um deles ainda perguntou o porquê de se multiplicar por dois, porque não havia entendido **(IMV)**.

O terceiro elemento do grupo voltou a referir que continuava a não perceber este problema **(IMV)** e decidiram abandoná-lo e partir para outro.

Quanto à folha de registo, ela é o espelho da imensa confusão e dificuldade que este grupo sentiu com a resolução deste problema. De facto, são muitas as tentativas falhadas, sem que houvesse uma resposta certa para o problema (Anexo 7).

Em termos de intervenções metacognitivas, o quadro nº 12 sintetiza as intervenções que conseguimos identificar para cada categoria de análise:

Quadro Nº 12 – Registo de frequências de Intervenções Metacognitivas do Grupo B no Problema Nº 3

	CATEGORIAS				
	Ori.	**Org.**	**Exec.**	**Verif.**	**Total**
3º Problema	26	74	52	86	**238**
%	10,9	31,1	21,9	36,1	**100**

Este foi de todos os problemas resolvidos pelo grupo B, o que proporcionou a verbalização do maior número de intervenções metacognitivas. Tal como no problema anterior, o menor valor correspondeu à categoria Orientação, como que confirmando uma certa desorientação que o grupo sentiu na compreensão deste problema. Por outro lado, a categoria Verificação voltou uma vez mais a obter a maior frequência absoluta de intervenções.

Verifica-se que o grupo sentiu muitas preocupações nesta problema ao nível da proposição de possíveis estratégias de resolução, pois a percentagem de intervenções ao nível da categoria Organização situou-se perto dos 30%. Contudo, como já referimos, o grupo não compreendeu muito bem o enunciado deste problema

Classificação desta resolução:

O grupo acabou por não acertar na resolução do problema, porque não usou correctamente a estratégia seleccionada. Inicialmente sentiram-se muito perdidos, evidenciando não terem consigo compreender muito bem o problema. Numa fase posterior limitaram-se a trabalhar por tentativas sem um critério muito bem definido, porque foram muitas as vezes em que baralharam e cruzaram várias tentativas de resolução em simultâneo, sem obterem sucesso. Contudo, terão em ocasiões pontuais, estado muito perto da resolução do problema que, a acontecer, poderia dever-se a uma questão de sorte. Nunca colocaram a hipótese de após eliminarem uma das medidas, o total do líquido restante ter que ser dividido em sete partes para que depois pudessem procurar as respectivas medidas.

Por isso, atendendo a escala holística focada, esta resolução tem uma pontuação de três pontos **(3)**, uma vez que "*o grupo implementou uma estratégia que o podia ter levado à solução correcta. Contudo, ignorou uma condição*".

2.2.4 – Problema nº 4 – *Os Maridos Ciumentos*

Mal um elemento do grupo leu o título do problema, outro comentou imediatamente a seguir que se calhar tratava-se de um problema relacionado com o ter que se atravessar um rio **(IMO)**.

O colega retomou a leitura do enunciado e mal acabou de ler as duas primeiras palavras, foi interrompido pelo terceiro elemento do grupo que referiu que gostava muito deste tipo de problemas **(IMO)**. Este último retomou a leitura oral do enunciado e quando leu que só podiam atravessar duas pessoas de cada vez no barco, foi a vez do primeiro elemento do grupo o comparar também a um problema, o problema dos canibais **(IMO)**.

Passado este período inicial de associação de ideias, retomou-se a leitura oral do problema deste o seu início. Finda essa leitura, o grupo começou logo por desenhar o rio na sua folha de resolução, salientando-se as margens, a água e o barco, este último representado por uma seta.

Surgiu nova comparação deste problema com outros parecidos, envolvendo, num caso, um passarinho e alpista e noutro os canibais **(IMO)**.

Retomou-se a resolução do problema, que passou por se registar na folha de resolução o nome dos elementos dos três casais envolvidos.

Leu-se novamente uma parte do problema e começou-se por colocar no barco um casal para efectuar a primeira viagem até à margem de destino. De seguida, deixou-se a esposa nessa margem e o marido regressou até à margem de origem.

Numa tentativa de controlar se a resolução não estava a ir contra os dados do problema, um dos resolvedores salientou que na margem de origem ficariam três homens e duas mulheres **(IME)**.

Nisto, outro elemento do grupo voltou a ler a parte do enunciado relacionada com a questão dos ciúmes dos maridos e salientou que não poderia viajar a mulher de um com o marido de outra mulher **(IME)**.

De seguida, sugeriu-se que viajaria outro casal fincando na margem de destino as duas esposas e regressava o marido desta última, aproveitando-se para se fazer esse registo **(IME)**. Um dos elementos do grupo chamou logo a atenção para a questão de isso não poder ser assim **(IMV)**, sendo imediatamente interpelado para que justificasse o porquê de não poder ser **(IMV)**. A justificação foi a de que se deveria levar um homem, porque se assim não fosse já ficaria uma mulher na presença de dois homens **(IMV)**.

Para uma melhor sistematização da resolução, o grupo decidiu recorrer às iniciais dos respectivos elementos dos casais. Assim, viajaria na primeira viagem a M1 com o H1 até ao destino, regressando o H1.

Na terceira viagem o barco já transportaria os homens H1 e H2, ficando na margem de destino o H1 com a sua esposa e regressando o H2. Neste momento, um dos elementos do grupo salientou que se havia deixado a M2 na margem de origem sem a presença do respectivo marido **(IMV)**, o que não era permitido acontecer. Entretanto, outro colega questionou-se do porquê de isso não poder acontecer **(IMV)**. Foi o terceiro elemento do grupo que interveio para referir que o H2 ao regressar já não estaria correcto **(IMV)**. Portanto a intervenção deste resolvedor ainda complicou mais a discussão, porque esse H2 vinha ter com a sua esposa à margem de origem. Voltou a manifestar-se o elemento do grupo que havia perguntado a razão pela qual isso não seria possível e foi ele próprio que relembrou que a mulher dele estaria à sua espera. De qualquer dos modos, este resolvedor voltou a ser alertado para o facto da M2 estar na presença de outro homem, que não era o seu marido **(IMV)**. Ao intervirem novamente os outros dois elementos do grupo, ficou claro que não obstante a M2 estar na presença de outro homem, ele estava também com a respectiva esposa, portanto não estaria sozinha com esse homem **(IMV)**.

Aparentemente, o colega passou a concordar também com a situação proposta pelos outros dois elementos do grupo, mas ao voltar a ler parte do enunciado do problema, renovou a sua chamada de atenção, pois o enunciado dizia que as mulheres só poderiam ficar sozinhas ou na companhia de outras mulheres e, o que se verificava é que a M2 estava junto a outro homem **(IMV)**.

Voltou-se a ler outra parte do enunciado e enfatizou-se a ideia que as mulheres não poderiam estar com outros homens, a não ser que os respectivos maridos também estivessem presentes **(IMO)**.

Um dos elementos do grupo desdramatizou a situação referindo, uma vez mais, que esse homem também tinha na sua presença a sua mulher, logo não haveria problema **(IMV)**. Outro resolvedor ainda acrescentou que isso estava correcto, pois alegou que destes problemas percebia ele **(IMV)**. Verifica-se, pois, que estes dois resolvedores não estavam a levar em linha de conta o problema do ciúme referenciado no enunciado.

Teve que ser novamente o terceiro elemento do grupo a voltar a ler o enunciado para reforçar a ideia que na margem de origem já se encontravam duas mulheres e apenas um homem **(IMV)**. Contudo, voltou-se novamente a rebater esta ideia através do facto de se dizer que esse homem tinha junto de si a sua mulher **(IMV)**, portanto essa M2 estaria também na presença de outra mulher **(IMV)**, como se isso impedisse o ciúme do H2.

O elemento do grupo mais crítico resignou-se aos outros dois e deu-se continuidade à resolução do problema. Na quinta viagem viajaria o H2 com a sua esposa para a margem de destino, deixando lá a esposa e regressando novamente o marido.

Na margem de destino ficara o H1 com a sua esposa e a M2, salientando-se que isso era possível **(IME)**.

Na sétima viagem coube a vez de viajar o H3 com a respectiva mulher, ficando na margem de origem somente o H2.

Na margem de destino ficou a M3, e o H3 regressou para vir buscar o H2. Um dos elementos do grupo havia sugerido que ele vinha buscar a mulher, mas logo foi corrigido para este H2 **(IMV)**. A última viagem foi feita pelo H2 com o H3 em direcção à margem de destino.

Surgiu, por parte do resolvedor que se havia mostrado mais céptico nesta resolução, a vontade de querer verificar o processo seguido **(IMV)**.

Um colega que havia feito os registos reconheceu que deveria ter colocado desde o início as iniciais dos passageiros, em vez de ter escrito simplesmente que eram três homens e três mulheres **(IMV)**. O colega anterior voltou a insistir para que o deixassem voltar a ler o enunciado para ver se entendia o que havia sido feito **(IMV)**, porque, referiu que tinha ficado com a impressão de que as mulheres só podiam ficar sozinhas ou na companhia de outras mulheres e, por isso quando se deparou com duas mulheres e um homem achou que estivesse mal **(IMV)**.

Imediatamente a seguir a este desabafo, um dos seus colegas de grupo perguntou-se se ela não tinha reparado que essa mulher estava na presença de outra mulher **(IMV)**, pois não poderia era ficar sozinha com outro homem **(IMV)**, nomeadamente no barco **(IMV)**.

Esta ideia também foi reforçada pelo terceiro elemento do grupo que também achava que não estavam a resolver mal o problema **(IMV)**.

De qualquer das formas, o resolvedor que mostrou algumas dúvidas referiu que era aí que não tinha a certeza se estavam a resolver bem **(IMV)**, levando a que novamente voltasse a ouvir de um colega que ela não estava sozinha, mas sim na companhia de outra mulher **(IMV)**.

Estas insistências na explicação de que nada estava mal, levaram a que este resolvedor mais crítico se deixasse convencer pelos colegas, dizendo que agora é que tinha passado a entender **(IMO)**, porque ao ler o problema anteriormente tinha tido outra interpretação do mesmo **(IMV)**.

Nisto, outro dos seus colegas de grupo aconselhou a que também lesse a parte do enunciado anterior à que acabou de ler **(IMV)**, que se prendia com o facto dos maridos estarem presentes, porque aí estava a mulher e o respectivo marido.

Passou-se então à verificação e questionou-se uma das letras do registo escrito, mas foi esclarecida a dúvida **(IMV)**. Como a dúvida continuou **(IMV)**, um dos resolvedores interpretou que ela residia na não compreensão do significado das letras **(IMV)**.

Contudo, esse colega referiu que a dúvida não era isso mas sim a parte da presença das mulheres com outros homens **(IMV)**. O terceiro elemento do grupo também interveio para ajudar a defender a ideia que achava que não havia problema nenhum **(IMV)**.

De qualquer das formas voltou-se a verificar as viagens e quem viajava e, quando se chegou à identificação do H3 na presença de M2 e M3 numa das margens, voltou novamente a intervir o resolvedor que havia sido mais céptico. Neste caso, referiu que agora já estava a perceber, porque uma mulher estava na presença de outra mulher **(IMV)**. Após a conclusão da verificação de todos os passos, interveio novamente para referir que percebeu a resolução. Antes é que não a entendia como sendo possível **(IMV)**.

Um dos elementos do grupo concluiu dizendo que este problema era fácil **(IMV)** e o colega voltou a referir-se que antes pensava que não podiam ficar duas mulheres com um homem **(IMV)**.

Quanto à folha de registo deste problema, ela apresenta de uma forma bastante clara, o caminho seguido pelo grupo. Apenas no início da resolução existem umas alterações de texto para siglas, respeitantes aos intervenientes nas viagens, para facilitar a própria resolução (Anexo 7).

Em termos de intervenções metacognitivas, o quadro nº 13 sintetiza as intervenções que conseguimos identificar para cada categoria de análise:

Quadro Nº 13 – Registo de frequências de Intervenções Metacognitivas do Grupo B no Problema Nº 4

	CATEGORIAS				
	Ori.	Org.	Exec.	Verif.	Total
4º Problema	6	0	4	36	**46**
%	13	0	8,7	78,3	**100**

Pela análise das intervenções metacognitivas exteriorizadas pelos sujeitos do grupo B ao nível deste problema, verificamos, pela primeira vez a ausência de intervenções ao nível de uma das categorias, a categoria Organização. A razão que pensamos ter estado por detrás deste situação terá sido o elevadíssimo grau de confiança na sugestão da estratégia inicialmente proposta. À semelhança do que aconteceu no grupo A com este problema, verifica-se não ser propício ao suscitar de intervenções metacognitivas ao nível da concepção de planos ou estratégias de resolução (categoria Organização).

Uma vez mais a grande percentagem das intervenções metacognitivas surgiu ao nível da Verificação (78,3%).

Classificação desta resolução:

O grupo acabou por não acertar na resolução do problema, porque não deu importância às várias chamadas de atenção que um dos seus elementos insistentemente manifestou. Fundamentalmente, dois dos elementos do grupo não entenderam que pudesse haver ciúmes, bastando para tal, um dos homens não ter a sua mulher na sua presença e sabendo que estaria na presença de outros homens, mesmo que eles tivessem as suas mulheres presentes. O ciúme continuava a existir.

Por isso, atendendo à escala holística focada, esta resolução tem uma pontuação de três pontos **(3)**, uma vez que "*o grupo implementou uma estratégia que o podia ter levado à solução correcta, contudo ignorou uma condição*".

2.2.5 – Problema nº 5 – *A Sequência Numérica*

O grupo começou por ler oralmente o enunciado do problema até ao fim. Após essa leitura, um dos elementos referiu que seria necessário fazer-se uma sequência de números para se encontrar a resposta ao problema **(IMOrg.)**, associando este problema à procura de um termo geral **(IMOrg.)**. Logo de imediato, um colega de grupo perguntou se se poderia utilizar essa simbologia matemática **(IMOrg.)**, recebendo um sim como resposta de outro colega.

Um dos elementos do grupo tentou comparar este problema a um outro que já havia resolvido, denominado o jogo do 23 ou do 20 **(IMO)**, obtendo a concordância de outro resolvedor **(IMO)**. Entendeu-se que seria do mesmo género desse problema, só que desta vez seria para se encontrar o valor 231 **(IMO)**. Por esse motivo, foi sugerido que se deveria procurar um algoritmo **(IMOrg.)**.

Voltou-se a ler oralmente uma parte do problema e confirmou-se que este problema era realmente parecido como o outro que estavam a referir **(IMO)**.

De seguida começou-se a descodificar o critério que presidia à elaboração da sequência numérica do Artur. Observou-se que do primeiro para o segundo número havia uma diferença de dois valores e essa diferença ia aumentando sempre uma unidade à medida que a sequência ia progredindo. Por esse motivo, um dos elementos do grupo associou essa evolução das diferenças entre os números como sendo n + 1.

Relativamente à sequência do Bruno, verificou-se que do primeiro para o segundo número havia uma diferença de três valores, depois passava a ser de cinco valores e continuava de dois em dois valores à medida que a sequência avançava. Efectuaram-se estes registos na folha de resolução e a atenção em verificar esse processo levou a que houvesse necessidade de se corrigir um dos valores que estava a ser verbalizado **(IMV)**.

Concluiu-se, pois, que a sequência numérica existente dos valores das diferenças entre os números do Artur aumentava sempre uma unidade, enquanto que a do Bruno aumentava duas unidades **(IMO)**. Esta conclusão levou a que um dos elementos do grupo, despropositadamente, entendesse que como a sequência do Bruno aumentava sempre mais duas unidades, quando o Artur referisse o 231, o Bruno diria o 233 **(IMOrg.)**. Os dois colegas de grupo concordaram com este raciocínio e foi o próprio proponente do mesmo que verificou que não estava correcto, pois tinha é que se contar com o número anterior **(IMV)**. Esta correcção voltou a obter a concordância dos colegas de grupo.

De seguida começaram a dar continuidade à sequência numérica do Bruno, aparecendo por escrito os seguintes valores: 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196. Após a escrita deste último número, um dos elementos do grupo manifestou o sentimento de que estariam muito perto do que pretendiam **(IME)**. Por isso, encontraram o próximo número, que foi o 225 e o mesmo resolvedor perguntou qual era o número de referência **(IME)**, obtendo como resposta de outro colega que eles apenas estavam a trabalhar na sequência do Bruno e que só a seguir é que iriam trabalhar na do Artur **(IME)**.

Por último, apareceu o valor 256 e um dos resolvedores exteriorizou a ideia de que deveria haver outro caminho mais curto, sem ter se que efectuar estes passos todos **(IMOrg.)**. Contudo, outro colega referiu ser necessário proceder desta forma **(IMOrg.)**.

Centraram a atenção no Artur e começaram a dar continuidade à sua sequência numérica aparecendo como próximo valor, o número 21. Retomou-se a ideia que esta sequência das diferenças numéricas aumentava sempre uma unidade **(IME)** e foram aparecendo por escrito mais dois números, o 28 e 36.

Em paralelo, um dos elementos do grupo questionou-se se a lei geral seria n + 2 **(IMOrg.)**, e como o resto do grupo continuava a encontrar números, como por exemplo o 45, o resolvedor anterior sugeriu que continuassem a desenvolver a ideia deles, porque ele estava a pensar noutra maneira de se poder resolver este problema **(IME)**. Por isso questionou-se a ele próprio que teria que encontrar-se o número relacionado com o 231 **(IMOrg.)**, chamando a atenção do grupo para não se perder de vista esse objectivo **(IMOrg.)**.

Contudo, os outros dois elementos do grupo continuaram a descobrir números para a sequência do Artur, surgindo o 55, o 66, o 78 o 91 e o 105. O outro elemento voltou a intrometer-se neste processo e referiu que seria o 256, que já havia encontrado par o Bruno **(IMV)**. Esta intervenção conseguiu convencer outro dos resolvedores, ao ponto de este último também entender que o que estavam a fazer era desnecessário **(IME)**. O terceiro elemento do grupo também acabou por concordar que bastaria fazer-se pelo processo que já havia sido feito para se encontrar o 256 **(IME)**.

Sugeriu-se que deveria ser o n anterior mais um, por isso seria necessário saber-se qual o número anterior **(IMOrg.)**, porque entendiam que deveria de haver uma maneira mais rápida de resolver o problema **(IMOrg.)**. Contudo ainda se acrescentou um novo número à sequência do Artur que foi o 136.

Voltou-se a dizer que isso seria desnecessário **(IME)**, porque deveria de haver uma fórmula que desse para resolver o problema **(IMOrg.)**. Contudo, um dos elementos do grupo sugeriu que se devia continuar no caminho que estavam a desenvolver **(IME)**, enquanto que outro referiu que o problema era descobrir o tal n **(IMO)**.

Sugeriu-se que pudesse ser o produto do n anterior por n + 1, mas depressa se deu conta que não podia ser assim **(IMV)**. Outro colega, não obstante, referiu que estava a perceber o raciocínio do colega **(IME)**.

Questionou-se, de seguida, se poderia ser o 2n + 1 **(IMOrg.)**, voltando-se a concluir que também não poderia ser **(IMV)**.

Seguiu-se a proposição de ser o quociente da soma de 2n + 1 sobre 2, mas outro colega referiu que não tinha percebido muito bem esta proposição **(IMOrg.)**. Contudo, após a ter percebido entendeu dizer que achava que não daria certo. Por isso sugeriu que se experimentasse com um exemplo **(IMOrg.)**.

Experimentou-se para o valor 15 e constatou-se que o algoritmo não resultava **(IMV)**.

O grupo entrou numa indecisão sobre qual seria o potencial algoritmo que servisse para resolver o problema, rejeitando a última sugestão que consistia em ser 2n – 1, por também não resultar **(IMV)**, porque não deu para se encontrar o valor que se procurava, que era o 28. Confirmou-se, pois que não dava este valor **(IMV)**. Verificou-se que o 15 só daria o 28 se ao produto dele por dois se retirassem duas unidades. Logo, sugeriu-se que se experimentasse para outro valor. Fez-se para o 21 e verificou-se que já não dava o valor esperado, pois obteve-se o número 40. Gerou-se uma ligeira confusão sobre o valor do número esperado, pois foi referido que seria o 20, tendo sido imediatamente corrigido para 36 **(IMV)**. Isto levou a que se rejeitasse a opção de se subtrair duas unidades.

Sugeriu-se, de seguida, a opção de se utilizar a potenciação, contudo, houve logo um colega de grupo que pediu que se explicasse isso melhor **(IMOrg.)**, enquanto que o terceiro entendia que não poderia ser **(IMV)**.

Chamou-se a atenção que não se poderiam esquecer que estavam a trabalhar na ordem de n igual a 25 **(IME)**. Entretanto, sem se perceber porquê, experimentaram para n igual a 28, multiplicando-o por dois e subtraindo duas unidades ao produto encontrado, verificando-se que o resultado não era o pretendido.

Contudo, um dos elementos do grupo referiu que lhe parecia que já estava a perceber **(IMO)**, alegando que deveria ser através de uma divisão **(IMOrg.)**.

Então, na procura do valor 28, sugeriu-se que fosse n x (n + 1), mas também não deu certo.

Foi então que se perguntou se o 231 seria o valor de n a procurar **(IMO)**, obtendo-se uma resposta favorável.

Contudo, outro dos resolvedores continuava empenhado na obtenção de uma fórmula que transformasse o 15 no valor 28 **(IMOrg)**. Aventou-se a hipótese de isto poder ser uma progressão geométrica **(IMOrg.)**, mas não teve seguimento por parte dos colegas.

Experimentou-se elevar o n ao quadrado, utilizando novamente o 15 e verificou-se que também não dava certo **(IMV)**.

Surgiu, de seguida, outro possível algoritmo, que era o quociente do quadrado de n + 1 sobre 2. Esta ideia de se elevar um número ao quadrado pareceu começar a ter alguma aceitação **(IMOrg.)**, porque detectou-se que a sequência do Bruno resultava de se elevarem os números ao quadrado, por isso não poderia ser o quadrado de n +1 **(IMV)**.

Voltou-se a experimentar a fórmula anterior para o valor 15 e voltou a não dar resultado certo.

Sem se perceber muito bem o teor da intervenção, sugeriu-se que a fórmula deveria conter algo de novo, que não tinha **(IMOrg.)**. Só depois se comentou que não poderia utilizar-se o valor 1 na fórmula **(IMV)**. Sugeriu-se, de seguida, que não se utilizasse na fórmula o n + 1 **(IMOrg.)**.

Testou-se a possibilidade de ser 2n e também não deu certo **(IMV)**, voltando-se a sugerir que fosse 2n – 2, porque com esta fórmula obtinha-se o 28 a partir do 15. Contudo testou-se nova fórmula: 2n – (n + 1) mas também não resultou **(IMV)**, levando o resolvedor a dizer que tinha quase a certeza que seria 2n **(IMOrg.)**, não sabendo, contudo, se seria menos dois ou não **(IMOrg.)**. Concluiu-se, de seguida que se fosse menos três também não dava **(IMV)**.

Para um dos elementos do grupo parecia haver qualquer coisa que não dava para perceber, como que tivesse detectado o ponto chave do problema **(IME)**. Contudo, leu oralmente alguns dos novos valores da sequência do Artur e verificou que seria útil registarem-se os valores das suas diferenças **(IME)**.

Após novas tentativas de sugestão de possíveis caminhos de resolução, um dos elementos do grupo tomou consciência dizendo que não poderia continuar a tentar adivinhar ao acaso, teria que ser com algum critério **(IMOrg)**, porque lhe parecia que o problema seria fácil **(IMO)**, porque era igual a um que haviam resolvido na aula **(IMO)**.

Então, voltou-se a confirmar que o n + 1 já não dava **(IMV)** e, de repente este resolvedor foi questionado por outro colega para explicar uma conclusão a que tinha chegado **(IME)**, obtendo como resposta que havia sido apenas por lógica **(IME)**.

Entretanto o terceiro elemento do grupo voltou a exteriorizar que para se encontrar o valor procurado ter-se-ia que adicionar dois números consecutivos **(IMOrg.)**. Para tal, sugeriu que se começasse por números mais pequenos **(IMOrg.)**, constatando-se que o 16 era quatro ao quadrado, o 9 era três ao quadrado e o 4 era dois ao quadrado. Daí que um colega seu sugerisse que poderia ser n ao quadrado mais qualquer coisa.

Um dos elementos do grupo começou por registar na folha de resolução o resultado de elevar ao quadrado os valores de n até ao quinto termo e outro sugeriu novo algoritmo: n ao quadrado mais duas unidades, tendo verificado que não resultava **(IMV)**. Só mais tarde concordou com o raciocínio do colega **(IMV)**, mas aquele recordou que tinha que se elevar o n ao quadrado **(IME)**.

Enquanto que um dos elementos chamou a atenção do grupo para se concentrarem na sequência do Artur **(IME)**, outro referiu que estava agora a ver uma estratégia que ainda não tinha pensado antes **(IMV)**.

Ao sugerir-se que a sequência do Artur poderia estar associada ao algoritmo: quociente da soma do quadrado de n com 1 sobre 2, comentou-se logo de seguida que já haviam testado essa fórmula **(IMV)**, ou então o que estava elevado à potência de expoente dois era o n + 1 **(IMV)**.

Testou-se para n igual a 3 e solicitou-se que se fizesse n vezes, o que deixou na dúvida um dos resolvedores, por não saber exactamente o que era para fazer **(IMV)**. Contudo o colega de grupo verificou que a fórmula já havia falhado para n igual a 3 **(IMV)**.

De seguida sugeriu-se a seguinte fórmula: o quociente do produto de n pela soma de n ao quadrado mais um, a dividir por dois. Testou-se para o 1 e deu certo **(IMV)**. Testou-se também para o n igual a 3 e voltou a não dar certo **(IMV)**. Contudo, voltou a referir-se que havia a sensação de estarem perto da solução **(IME)**.

Ao sugerir a introdução do número três, um colega questionou se seria 3n **(IMOrg.)**. Testou-se e aconteceu novo fracasso.

A sugestão seguinte foi ser 3n – 1. Contudo, essa ideia foi logo rebatida, porque falhava logo para o primeiro termo **(IMV)**.

Então seguiu-se nova sugestão: a de ser n ao quadrado menos 1, que voltou também a ser rejeitada, por falhar logo para o primeiro termo **(IMV)**.

Esta situação levou a que um dos elementos do grupo tivesse o desabafo de achar que isto deveria ser muito fácil e admirava-se como é que não estavam a conseguir resolver **(IME)**.

Um colega pretendeu testar os valores e o outro resolvedor referiu que já havia feito isso **(IMV)**. Contudo, este primeiro insistiu em que tinha vontade de voltar a tentar **(IMOrg.)**, encontrando, de seguida, novo fracasso **(IMV)**.

Um outro elemento do grupo pensou em testar a fórmula de ser n vezes n menos uma unidade mas também não deu certo **(IMV)**.

Entretanto, o colega que tinha decidido voltar a rever o processo, descobriu que multiplicando um número pelo seu sucessor e dividindo por dois dava para encontrar os valores: 1, 3, 6 e 10, levando um colega seu a querer verificar se isso era assim ou não **(IMV)**. Após a confirmação registou-se a fórmula na folha de resolução. Contudo, o terceiro elemento do grupo ainda não tinha percebido como é que isso funcionava **(IMV)**, utilizando a soma de um com um, o que levou o colega que havia descoberto a fórmula a questionálo sobre o porquê desse 1 **(IME)**. O outro respondeu-lhe que esse 1 era o valor de n **(IME)**. Foi então que se aplicou a fórmula e resultou o primeiro termo da sequência do Artur.

Perguntou-se, de seguida, sobre qual seria o valor de n para dar o 231 **(IMOrg.)**, porque assim já seria fácil **(IMOrg.)**.

Por tentativas e com recurso à máquina de calcular descobriram que encontrava o 231 quando o n assumia o valor de 21 **(IMV)**. Isso levou a que se elevasse esse 21 ao quadrado para se encontrar o valor procurado do Bruno **(IMOrg.)**.

Como resultado surgiu o valor 441 e um dos elementos do grupo referiu que antes já tinham encontrado esse valor **(IMV)**, mas outro colega disse que não **(IMV)**. Logo, o primeiro acabou por referir que tinha dado quatrocentos e tal, não precisando se foi o 441 **(IMV)**.

Foi então que se deu o problema por terminado.

Quanto à folha de registo escrito, esta revela nitidamente as etapas que o grupo utilizou na sua tentativa de resolver correctamente o problema. Começou por detectar os padrões existentes nas sequências numéricas do Artur e do Bruno, depois identificaram a continuidade de cada sequência até bem próximo do resultado final e, por último verifica-se alguma da confusão que houve na procura do algoritmo da sequência do Artur que, após ter sido encontrado foi aplicado, bem como o da sequência do Bruno, tal como se pode ver no Anexo 7.

Em termos de intervenções metacognitivas, o quadro nº 14 sintetiza as intervenções que conseguimos identificar para cada categoria de análise:

Quadro Nº 14 – Registo de frequências de Intervenções Metacognitivas do Grupo B no Problema Nº 5

	CATEGORIAS				
	Ori.	Org.	Exec.	Verif.	Total
5º Problema	10	33	21	37	**101**
%	9,9	32,7	20,8	36,6	**100**

Analisando-se o quadro anterior, verifica-se a tendência deste grupo para que a categoria Orientação seja uma vez mais a que possui a menor frequência absoluta de intervenções metacognitivas. Verifica-se, pois uma diferença percentual considerável para qualquer uma das outras categorias, onde se destaca novamente a da Verificação, ainda que com valores mais próximos às categorias Organização e Execução do que noutros problemas anteriores.

Classificação desta resolução:

O grupo acertou na resolução do problema. Contudo, inicialmente tentou resolvê-lo sem se recorrer à procura das respectivas leis gerais de cada sequência. Por exaustão quase que encontraram a resposta correcta ao problema. Contudo, o grupo, num gesto de grande sentido crítico, sentiu que havia necessidade de se procurar um caminho de resolução que fosse mais rápido, que consistia na procura das referidas leis gerais. De entre várias tentativas frustradas, conseguiram encontrar o que procuravam. Aplicaram essas leis e encontraram a resposta correcta para o problema.

Por isso, atendendo à escala holística focada, esta resolução tem uma pontuação de quatro pontos **(4)**, uma vez que "*estratégias apropriadas foram seleccionadas e implementadas. A resposta correcta foi dada em termos da informação do problema*".

2.2.6 – Problema nº 6 – *O Jogo das Moedas de Um Escudo*

O grupo começou por ler oralmente o enunciado do problema. De seguida surgiu logo a sugestão de se construir uma tabela. Enquanto um dos elementos do grupo estava a fazer a tabela na folha de registo, outro resolvedor estava a reler o problema em silêncio. Colocaram na tabela o nome dos três jogadores, o número de cada partida e uma coluna para o total de dinheiro com que cada jogador acabou o jogo.

Sugeriu-se que se resolvesse numa parte da folha de resolução abaixo da tabela, para a poderem guardar para os registos finais sem correcções **(IME)**.

Começou-se por se supor que o Mário pudesse ter perdido a primeira partida, contudo, os restantes elementos do grupo ainda sentiram necessidade de voltar a ler partes do enunciado do problema.

Contudo, o resolvedor que havia proposto que o fosse o Mário a perder a primeira partida avançou que, se assim fosse, os outros dois jogadores iriam dobrar os seus haveres. Entretanto, um dos outros dois elementos do grupo referiu que quem perdia é que dobrava o dinheiro **(IMO)**, tendo o apoio do terceiro elemento do grupo.

Então, o primeiro resolvedor deu como exemplo que se ele perdesse, os outros dois elementos do grupo dobrariam o dinheiro que tinham **(IMO)**. Entretanto, o outro resolvedor voltou a afirmar que quem perdia é que dobrava o dinheiro **(IMO)**, porque o colega de grupo estava a interpretar ao contrário **(IMO)**. O terceiro elemento do grupo interveio também e referiu que o normal era que quem ganhasse ficasse com o dinheiro de quem perdesse **(IMO)**.

O primeiro resolvedor voltou a dar outro exemplo, que consistiu no facto de que se ele tivesse um ponto e os outros tivesses dois pontos, ao perder, continuava com um ponto e os outros dobravam para quatro pontos **(IMO)**. Verifica-se, pois, que este resolvedor não considerou que ao perder, tinha que perder também dinheiro em valor equivalente ao dinheiro com que os outros ficavam.

Entretanto, o segundo resolvedor continuou a remeter a sua justificação para o que estava escrito no enunciado do problema **(IMO)**, dando o exemplo que se tivesse dois e perdesse ficava com quatro **(IMO)**. Esta justificação levou o terceiro elemento do grupo a intervir, chamando a atenção que se vai buscar dinheiro a quem perde.

O primeiro resolvedor voltou a ler parte do enunciado do problema e com um novo exemplo, mostrou qual deveria ser a interpretação do problema. Contudo, voltou a ser confrontado com a opinião contrária do segundo resolvedor **(IMO)**, obrigando o primeiro resolvedor a justificar o significado da palavra haveres, como sendo o dinheiro dos outros dois jogadores que não perderam **(IMO)**.

Voltou-se a ler o enunciado e o terceiro resolvedor salientou que o colega estava a entender o problema ao contrário do primeiro resolvedor **(IMV)**.

De seguida, o segundo resolvedor também questionou o colega de grupo quanto ao facto de ter registado na tabela os valores totais de escudos com que cada um dos jogadores ficou **(IMO)**. Novamente, o seu colega de grupo teve que explicar que aqueles valores eram os valores com que cada jogador ficou após terem terminado as cinco partidas **(IMO)**.

Ao voltar a ler a pergunta do problema, o segundo resolvedor referiu que pensava que o Mário pudesse começar com um escudo, o Ricardo com dois escudos e o Orlando com três escudos **(IMO)**. Contudo, o colega de grupo salientou que isso era no início e que no final já não era isso **(IMO)**. Então, o segundo resolvedor questionou o que aconteceria se fosse o Orlando a perder na primeira partida, obtendo como resposta que os outros iriam dobrar o dinheiro que tinham.

Trocou o Orlando pelo Mário e comentou que se fosse o Mário a perder, seria ele a dobrar o seu dinheiro e os outros ficavam na mesma. Esta interpretação voltou a ser rebatida pelo primeiro resolvedor, dizendo que quem dobraria o dinheiro eram os outros dois jogadores e não o Mário **(IMO)**.

O segundo resolvedor voltou a questionar esta opinião **(IMO)** e o colega nem queria acreditar no que estava a ouvir **(IMO)**. Valeu-lhe o conforto do terceiro resolvedor, pois também entendia que os outros jogadores iriam buscar dinheiro ao que perdeu.

O segundo resolvedor voltou a ler oralmente o enunciado e deu-se por convencido **(IMO)**, dando razão aos seus colegas de grupo **(IMO)**.

Resolvida que estava esta etapa, houve alguma indecisão relativamente à opção inicial que deveriam tomar. Um dos elementos do grupo sugeriu que fosse o Mário a ganhar a primeira partida. Entretanto, outro colega sugeriu que deveriam começar todos com um escudo. Depois, já sugeriam que ganhavam todos ou que poderiam começar sem dinheiro nenhum. Somente depois é que se criticou essa possibilidade, alegando-se que o que o problema perguntava é quanto é que teria cada um no início **(IMO)**.

Este reparo fez com que os colegas também caíssem em si, pois não se tinham apercebido disso **(IMO)**.

Sugeriu-se outra vez o terno de números 1, 2 e 3 para começar, contudo, um dos elementos do grupo não percebia muito bem o que é que se havia de registar por escrito **(IME)**, passando a folha de resolução para o colega.

Este atribuiu por escrito o valor de um escudo ao Mário, o valor de dois escudos ao Ricardo e o valor de três escudos ao Orlando e voltou a ler a parte do enunciado que remetia para o número inteiro de escudos.

Sugeriu que no primeiro jogo poderia ter perdido o Mário ou o Orlando e o Ricardo dobrava o seu dinheiro. Contudo, outro elemento do grupo entendeu intervir para dizer que não se poderia começar com tanto dinheiro, alegando que o que tinha três escudos, ao dobrar já ficaria com nove escudos **(IMV)**. O terceiro elemento do grupo também interveio para acrescentar que a partir de determinado momento esse jogador perderia sempre. Contudo, o resolvedor anterior voltou a tomar a posse da palavra e chamou a atenção que se esse perdesse sempre, os outros iriam dobrar sempre **(IME)**.

Surgiu então a sugestão que de se deveria começar pelo Mário, escolhendo-se um valor que no fim desse os dez escudos **(IMOrg.)**, porque parecia que com esse, isso era possível **(IMOrg.)**.

Testaram-se alguns valores, mas houve uma chamada de atenção para o facto de serem cinco partidas **(IME)**. Esta observação fez com que um dos colegas referisse que ainda faltavam três partidas e, por isso é que não deveria jogar com valores tão elevados **(IME)**, mesmo não obtendo a concordância do colega **(IME)**. Este afirmou que teria que ser o Mário a perder mais vezes, porque dava um valor mais baixo **(IMO)**.

Testou-se para o caso do Mário e assim que se encontrou o valor de oito escudos, foi entendido por dois dos elementos do grupo que este perderia sempre até ao fim. Só o outro colega é que não achava que seria bem assim, porque os restantes jogadores teriam que dobrar sempre **(IMV)**, ultrapassando os valores finais **(IMV)**.

Esta observação levou a que um dos outros dois elementos do grupo referisse que havia necessidade de testar outros valores **(IMOrg.)**, mesmo pensando que o primeiro estava bem **(IMV)**. Experimentou-se começar o Orlando com um escudo e ao dobrar na primeira partida já ficava com dois escudos. Contudo outro colega chamou a atenção que não podia ser assim, porque mantendo o raciocínio anterior, esse teria que perder **(IMV)**. Logo, só o colocaram a ganhar na partida seguinte. Continuaram a atribuir-lhe vitórias e o valor começou a disparar, ultrapassando o previsto, o que não podia ser **(IMV)**.

Voltou-se, então, a referir que não se podia começar com valores tão elevados **(IMOrg.)**. Mas, por outro lado, outro colega referiu que tinham que começar pelo menos com um escudo cada, ainda que isso parecesse fácil demais **(IMOrg.)**.

Continuou a insistir-se que o caso do Mário estaria bem **(IMV)** e outro colega propôs que o Ricardo começasse com três escudos, que depois dobraria para seis escudos e depois para noves escudos **(IMOrg.)**. Constata-se, pois, que este resolvedor não se apercebeu que o dobro de seis não é nove.

Esta sugestão levantou algumas dúvidas, porque não se equacionou ao mesmo tempo o que aconteceria com os restantes jogadores **(IMOrg.)**.

Nisto, o elemento do grupo que não estava a participar deste diálogo, exteriorizou a ideia de que estava a pensar que o seu colega tinha por intenção somar o dinheiro das partidas todas, e que não era isso que deveria ser feito **(IMV)**. Contudo, o colega disse simplesmente que iria dobrar e por isso é que estava a sugerir que o Mário perdesse no início **(IMOrg.)**.

Salientou-se uma vez mais que não deveria somar os pontos de cada partida **(IMOrg.)**, apesar de não se ter a certeza se deveria ser assim ou não **(IMOrg.)**.

Decidiu-se voltar à resolução, questionando-se se o Mário perdia a primeira partida, ficando com um escudo. Contudo, quando outro colega de grupo pretendia manifestar um dúvida sua **(IMO)**, foi interrompido pelo terceiro elemento do grupo, que sugeriu que o Ricardo deveria começar com três escudos.

Voltou-se novamente a chamar a atenção que isso não era aconselhável, porque o valor seria logo muito elevado à partida **(IMV)**. A justificação do proponente é que dobraria para seis e depois para nove. Uma vez mais, o colega voltou a corrigir essa sugestão, porque o dobro de seis não era nove mas sim doze **(IMV)**. Logo, sugeriu que só se poderia começar com um ou com dois escudos, aí não havia dúvidas **(IMOrg.)**.

Entretanto o outro colega de grupo exteriorizou a sua dúvida que se prendeu com o facto de se saber se os valores finais eram ou não as somas do dinheiro das partidas **(IMO)**, obtendo como resposta que ao fim é que eles passavam a ter esses valores. Como consequência, afirmou-se que se assim era, não haveria problemas em começar-se com um escudo.

A dúvida de outro colega residia no facto de não saber se o Mário deveria começar com um ou com dois escudos **(IMOrg.)**. Então, outro colega sugeriu que tinha que se experimentar **(IMOrg.)**.

Perguntou-se se começariam todos com um escudo, ainda que houvesse o pressentimento que um deles deveria começar com dois escudos **(IMOrg.)**. O que já havia ficado resolvido é que não poderiam começar com três escudos **(IMV)**.

Implementou-se a estratégia de começarem todos com um escudo, mas chegados às últimas partidas, concluíram que já não funcionava **(IMV)**.

A nova estratégia passou pela utilização do valor dois em vez de ser o um no caso do Ricardo **(IMOrg.)**, pois tratava-se de fazer por tentativas **(IMOrg.)**. Contudo, passadas as primeiras partidas voltou também a verificar-se que não dava **(IMV)**.

Voltou, então a surgir a hipótese de começarem sem dinheiro, o que não chegou a ser implementado, porque ao dobar-se não se sairia do valor zero **(IMV)**.

A sugestão era poder começar sem nada mas depois poder ficar com algum dinheiro **(IMOrg.)**, o que voltou a ser negado **(IMV)** e acabou-se por não se seguir esse caminho, porque se não tinha dinheiro, também não poderia receber **(IMO)**. Portanto, deveriam começar com algum dinheiro, disso não havia dúvidas.

Voltou então a sugerir-se que a única hipótese era começarem todos com um escudo **(IMOrg.)**. Contudo, essa ideia também foi rejeitada, uma vez que já a haviam testado sem sucesso **(IMV)**.

Rejeitou-se, de seguida a possibilidade de começarem todos com dois escudos.

Entretanto, questionou-se uma vez mais porque é que alguns deles não poderiam começar sem dinheiro **(IMOrg.)**, o que vinha reforçar uma proposição anterior semelhante **(IMOrg.)**.

Abandonou-se esta ideia de vez, porque relembrou-se que não existiam moedas de zero escudos **(IMV)**.

Surgiu então o comentário que eles até poderiam começar com nove escudos e perder sempre. Isto era revelador da incorrecta compreensão do problema por parte do grupo.

Um dos seus elementos tentou experimentar a estratégia de o Orlando começar com dez escudos e perder sempre, mesmo com o abanar de cabeça de um colega e com a negação por parte do outro.

Contudo, este elemento continuou com a sua ideia, acrescentando que o Ricardo começaria com dois escudos e terminaria com nove.

Aqui, um colega relacionando o facto do Orlando perder sempre com o facto do Ricardo ir dobrar sempre, chegou à conclusão que ultrapassava o valor final **(IMV)**. Em consequência, não se saberia se poderia ser assim **(IMV)**.

O nível de incompreensão do problema era de tal ordem que até já admitiam que um pudesse começar com cinco escudos, dobrava uma vez e depois perdia sempre.

Faltava, contudo, arranjar uma maneira que resultasse para todos ao mesmo tempo **(IMOrg.)**, porque já nem se sabia se algum começava com um **(IMOrg.)** ou se seria com dois **(IMOrg)**.

Sugeriu-se que na primeira vez iria perder o Ricardo **(IMOrg.)**, mas o Orlando a começar com cinco já iria dobrar e depois já não dava **(IMV)**. Por esse motivo concluiu-se que não poderia haver um que perdesse sempre **(IMOrg.)**, devido aos outros estarem sempre a dobrar. Daí, também não poderia nenhum começar logo com cinco escudos **(IMOrg.)**, apesar de parecer ter alguma lógica **(IMV)**.

Voltou-se a dar atenção ao Mário, podendo este começar com um escudo, depois dobrava para dois escudos, voltava a dobar para quatro e para oito e depois perdia, o que obrigava o Orlando a dobrar para dez. Segundo o grupo, este até parecia ser possível, contudo, sentiram que o problema residia no Ricardo **(IME)**, porque quando não se perde, ganha-se **(IMV)**.

Como entendiam que os dois casos poderiam estar resolvidos, tentaram confirmar o que se passava com o Ricardo **(IMV)**, porque do Mário havia certezas de um resolvedor **(IMOrg.)** e do outro colega **(IMOrg.)** que ele deveria começar com um escudo.

A justificação do percurso do Mário, segundo um dos defensores desta estratégia, era começar com 1, dobrar para 2, depois para 4, para 6 e depois perder. Esta exposição foi corrigida pelo colega, ao substituir o seis pelo oito **(IMV)**, pois também estava a pensar assim **(IME)**.

Testaram-se várias hipóteses para os outros jogadores e voltou a questionar-se se no caso do Orlando já havia dobrado ou não **(IMV)**, tendo-se chegado à conclusão que não **(IMV)**. Apesar desta discussão, concluiu-se que o Orlando nunca poderia começar com cinco escudos, porque quando um dos outros perdesse na primeira partida, ele já dobraria para dez escudos. A não ser que perdesse sempre e apenas ganhasse ao fim. O problema residia no Ricardo **(IME)**, porque com o Mário parecia não haver problemas **(IMV)**, uma vez que segundo um dos resolvedores, o que acontecia com esse jogador era passar de 1 para 2, depois para 4 e depois para 6 e para 8. Contudo, isso foi novamente corrigido, porque de quatro não passaria a seis **(IMV)**.

Surgiu, então um desabafo de alguma desilusão, pois não estavam a conseguir resolver o problema **(IMOrg.)**.

Contudo, o colega continuou a tentar resolver a situação do Ricardo. Uma vez que terminaria com noves escudos, que é um número ímpar, sugeriu que tivesse que começar logo com essa quantia de dinheiro **(IMOrg.)**. Mas, por outro lado, ele não poderia perder sempre, pois haveria uma altura em que teria que ganhar **(IMV)**. Portanto, não podia ganhar mas também não era possível perder sempre **(IMV)**.

Voltou-se a ler parte do enunciado do problema e concluiu-se uma vez mais que quando um perdesse os outros iriam dobrar o seu dinheiro **(IMO)**, pois, era essa a indicação do enunciado **(IMO)**.

Voltou-se a analisar o percurso do Mário e voltou a referir-se que isto se resolvia por tentativas **(IMOrg.)**.

Chamou-se a atenção para o facto de quando o Mário estivesse a ganhar, os outros estariam sempre a perder **(IME)**. Foi, contudo, salientado que para que um ganhasse, alguém teria que perder **(IME)**.

Passou-se para o Orlando, que, para dar dez escudos no final, segundo um dos resolvedores, passaria por ter 2, 4, 6, 8 e 10 escudos, o que foi imediatamente corrigido, pois, de 4 não se poderia passar para 6 **(IMV)**. Concluiu-se uma vez mais que os dobros sucessivos que houvesse já ultrapassariam o valor limite **(IMV)**, a não ser que perdesse várias partidas **(IMV)**.

Chamou-se novamente a tenção para facto de o dobro de 4 não poder ser o valor 6 mas sim o valor 8 **(IMV)** e um dos elementos do grupo voltou a expressar a opinião de que achava que não estavam a resolver bem o problema **(IMV)**. Esta observação foi complementada por outra de um colega de grupo, quando referiu uma vez mais que o problema residia no dinheiro do Ricardo **(IMV)**.

Entretanto interveio o terceiro elemento do grupo e salientou que não era só o Ricardo que estava a dar problemas mas sim o Orlando **(IMV)**.

O nível de confiança na resolução era tão baixo que inclusivamente chegou a questionar-se se este problema poderia ser feito através da tabela que estavam a utilizar **(IMOrg.)**. A resposta que surgiu reforçou essa falta de confiança, pois não se soube fundamentar o porquê da utilização dessa estratégia de resolução **(IMOrg.)**.

Leu-se uma vez mais uma parte do enunciado do problema e voltou a questionar-se a estratégia utilizada **(IMOrg.)**, ainda que desta vez se esboçasse uma justificação mais plausível para essa opção, pois o argumento assentou no facto de a tabela ajudar a visualizar se o raciocínio estaria correcto **(IMOrg.)**.

Voltou-se ainda a uma nova tentativa de resolução do problema, começando por atribuir-se um escudo ao Mário e sugerindo-se valores pouco elevados para os outros **(IMOrg.)**. Contudo, voltou a manifestar-se o sentimento de que se achava que não poderia ser assim **(IMOrg.)** e voltou a pensar-se em atribuir-se o valor de zero escudos aos jogadores no início do jogo **(IMOrg.)**, porque nunca o Mário poderia ter quatro escudos quando ainda faltavam partidas para terminar o jogo **(IMV)**.

O grupo acabou por resignar-se **(IMV)** e desistiu da resolução deste problema.

No que diz respeito à folha de resolução deste problema, ela acaba por evidenciar as múltiplas tentativas levadas a efeito pelo grupo para resolver o problema, apesar de não haver justificação, por escrito, das decisões que presidiram a esses registos e a essas tentativas de resolução (Anexo 7).

Em termos de intervenções metacognitivas, o quadro nº 15 sintetiza as intervenções que conseguimos identificar para cada categoria de análise:

Quadro Nº 15 – Registo de frequências de Intervenções Metacognitivas do Grupo B no Problema Nº 6

	CATEGORIAS				
	Ori.	Org.	Exec.	Verif.	Total
6º Problema	27	38	11	40	**116**
%	23,3	32,7	9,5	34,5	**100**

Contrariando a análise que havíamos feito para o problema anterior, desta feita foi a categoria Execução que obteve menor número de intervenções metacognitivas, perfazendo cerca de 10% do valor total. Contudo, mantém-se a tendência de o maior valor percentual de intervenções metacognitivas dizer respeito à categoria Verificação. Destaca-se ainda, e pela quarta vez, que, contrariamente ao grupo A, os valores da categoria Orientação são inferiores aos da categoria Organização, o que poderá indiciar que este grupo, por norma, reflecte menos em termos de compreensão dos problemas do que na proposição de estratégias de resolução. Contudo, esta ilação carece de confirmação, pois o número de problemas envolvido neste estudo é manifestamente insuficiente para chegar com certezas a essa conclusão.

Classificação desta resolução:

O grupo não acertou minimamente na resolução do problema, porque nunca equacionou a verdadeira estratégia para poder resolver o problema, que seria o resolvê-lo do fim para o princípio.

Por outro lado, revelou sempre que não havia compreendido o problema, isto é, jamais foi equacionada a possibilidade de o jogador que perdesse uma partida, perdesse também dinheiro.

Por isso, atendendo à escala holística focada, esta resolução tem uma pontuação de um ponto **(1)**, uma vez que "*uma estratégia incorrecta foi começada mas depois houve desistência*".

Em jeito de síntese, poderemos dizer que este grupo evidenciou menor coerência metacognitiva, aquando da resolução dos problemas que lhes foram propostos, do que aconteceu com o grupo A. De facto, exceptuando-se a categoria Verificação que, tal como no grupo A, foi a que registou maior número de intervenções metacognitivas em todos os problemas, a posição relativa das restantes três categorias oscilou bastante mais de problema para problema do que aconteceu com o grupo A.

Poderemos concluir também, que enquanto que no grupo A, a categoria que evidenciava menor número de intervenções metacognitivas na maioria dos problemas foi a Organização, ao passo que no grupo B foi a categoria Orientação, conforme ilustra o quadro nº 16 seguinte:

Quadro Nº 16 – Total de intervenções metacognitivas dos Grupos a e B em todos os problemas

	GRUPO A					GRUPO B				
	Ori.	Org.	Exec.	Verif.	Total	Ori.	Org.	Exec.	Verif.	Total
1º Problema	29	18	40	58	**145**	7	3	9	15	**34**
2º Problema	4	2	3	4	**13**	2	8	10	17	**37**
3º Problema	10	3	4	23	**40**	26	74	52	86	**238**
4º Problema	3	2	8	11	**24**	6	0	4	36	**46**
5º Problema	3	4	4	26	**37**	10	33	21	37	**101**
6º Problema	13	7	9	16	**45**	27	38	11	40	**116**
Total	**62**	**36**	**68**	**138**	**304**	51	118	96	191	**456**

Desta observação poderia surgir uma recomendação futura, caso esta tendência se viesse a confirmar noutras resoluções, que consistia em insistir, em termos de formação, na fase da leitura, compreensão e interpretação dos enunciados dos problemas.

Quanto a haver problemas que tenham provocado mais intervenções metacognitivas do que outros, isso poderá estar relacionado, talvez, com o nível de dificuldade sentido ou não pelo grupo na resolução desses problemas, tal como havíamos dito para o grupo A. Contudo, os problemas que provocaram maior número de intervenções metacognitivas foram os problemas números 3, 5 e 6, sendo que somente um deles, o nº 3 é que foi resolvido com sucesso, como podemos verificar pela aplicação da escala holística focada.

Comparativamente com o grupo A, o grupo B deu mostras de intervir mais metacognitivamente na globalidade das resoluções levadas a efeito e, sem sabermos se foi por coincidência ou não, o nível de sucesso também foi superior ao do grupo A. De facto, num total possível de 24 pontos da escala holística focada, este grupo obteve mais um ponto (18 pontos) do que o grupo A

Contudo, este grupo desistiu na resolução de um problema (o sexto), após ter dedicado bastante tempo para a sua resolução, tendo obtido apenas um ponto, o que nunca se verificou com o grupo A. Valeu, pois ao grupo B ter conseguido resolver correctamente dois dos seis problemas e noutro (o 1º) ter apenas faltado a explicação clara e objectiva para a justificação da resposta encontrada.

Em termos de comentário final, apesar dos dois grupos terem evidenciado bastantes intervenções de índole reflexivo, não conseguiram obter um nível de sucesso minimamente aceitável. Realmente, não deixa de ser estranho o tão reduzido número de problemas resolvidos correctamente por estes grupos.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES

Neste capítulo apresentamos um breve resumo do estudo, salientando as principais conclusões. Serão referidas de seguida as principais limitações, bem como algumas recomendações.

1 – Resumo

O presente estudo, de tipo exploratório, pretendia analisar se os tipos de problemas teriam alguma influência no desempenho metacognitivo de dois tipos de grupos formados por futuros professores de Matemática. Por outro lado, pretendia-se analisar também se a gravação em vídeo permitia o registo dessa eventual relação.

Os dois grupos distinguiam-se um do outro pelo facto de um deles (grupo A) ser formado por três elementos que se auto-consideravam bons resolvedores de problemas e que gostavam de resolver problemas em grupo. Quanto ao outro grupo (grupo B), era formado por três futuros professores que não revelavam ser tão bons resolvedores de problemas como os elementos do grupo A e evidenciavam gostar menos de resolver problemas em grupo do que aquele grupo. Todos os seis elementos já conheciam alguma teoria existente sobre resolução de problemas e sobre metacognição. Conheciam nomeadamente a diferença entre problema e exercício, vários tipos de problemas e várias estratégias de resolução, bem como a importância de se pensar alto aquando da resolução de problemas em grupo.

Ambos os grupos foram submetidos à resolução de seis problemas de processo, seleccionados de uma bateria de problemas deste tipo, em função das estratégias que implicitamente se adequavam às suas resoluções.

Foi solicitado que pensassem alto à medida que iam resolvendo os problemas, bem como solicitado a que os registos escritos das resoluções dos mesmos fossem o mais detalhados possível.

No acto da resolução dos problemas utilizou-se uma câmara de vídeo para cada grupo no sentido de se registarem todas as intervenções orais e gestos corporais que os grupos manifestassem.

Os dados recolhidos pelas câmaras de vídeo foram transcritos em função de uma grelha de análise, adaptada do estudo de Buchanan (1987) e foram sujeitos a análise de conteúdo, em função das quatro categorias de análise referentes ao modelo de Lester (1985): Orientação, Organização, Execução e Verificação.

2 – Conclusões

Atendendo à tipologia do estudo, de natureza exploratório, as conclusões serão sempre limitadas aos sujeitos que estiveram envolvidos na investigação. Assim, destacamos alguns indicadores que nos parecem merecer alguma reflexão e que entendemos serem merecedores de outras investigações mais aprofundadas, no sentido de se tentar perceber melhor esta temática complexa que é a de se estudarem os processos metacognitivos envolvidos em actividades de resolução de problemas.

Uma primeira ilação que extraímos deste estudo é que ambos os grupos exteriorizaram um número elevado de intervenções, provenientes de uma atitude reflexiva intencional. Concordamos com Giacomoantonio (1981) e Gea (1983) quando referem que quem está em situação de ser filmado sente-se motivado para coordenar melhor as ideias e a explaná-las com maior objectividade e rigor.

Proveniente da análise dos dados, verificámos que os dois tipos de grupo manifestaram padrões de desempenho metacognitivo ligeiramente diferentes um do outro. Ainda que em ambos os grupos tenha sido evidente que a categoria de análise que contemplou mais intervenções metacognitivas foi a Verificação, a que registou menor frequência absoluta de intervenções metacognitivas não foi a mesma categoria para ambos os grupos. Enquanto que no grupo A, a categoria onde se evidenciou menor número de intervenções metacognitivas, na maioria dos problemas, foi a Organização, no grupo B, isso ocorreu ao nível da categoria Orientação. Uma vez que o número de problemas envolvido neste estudo foi reduzido, seria interessante submeter estes dois grupos a novos problemas, no sentido de se verificar se esta tendência se mantinha. Caso se mantivesse esse padrão de resolução, poder-se-ia em situações de formação futuras incentivar essas etapas de resolução. Por outras palavras, referimo-nos a que seria desejável submeter os grupos a uma reflexão profunda juntamente com o investigador deste estudo sobre o porquê de haver uma categoria onde se registaram muito menos intervenções metacognitivas que nas outras três. No caso concreto do grupo A, teria que se incentivar a etapa da concepção de planos de resolução, isto é, ter-se-ia que sensibilizar o grupo para a importância que assume a fase de planificação de estratégias de ataque aos problemas. Por sua vez, o grupo B teria que ser sensibilizado para a fase da leitura e compreensão dos problemas, pois sendo a fase primeira de resolução, merece que se lhe dedique alguma reflexão, antes de se avançar para a resolução, propriamente dita, dos problemas.

Outra ilação que podemos extrair deste estudo é que não nos parece haver uma relação muito estreita entre os tipos de problemas e o número de intervenções metacognitivas resultantes da suas resoluções. Parece-nos, sim, haver uma relação directa entre o nível de dificuldade sentido na resolução dos problemas e o número de intervenções metacognitivas daí resultantes.

Contudo, não deixa de ser curioso verificar-se que os problemas nº 2 e nº 4, envolvendo, respectivamente, as estratégias de: "*decomposição do problema nas suas partes constituintes*" e "*esquema ou figura*" foram os que suscitaram menor número total de intervenções metacognitivas, independentemente do sucesso ou insucesso ocorrido na sua resolução.

Seria recomendável levar-se a efeito outros estudos posteriores em que se testassem estes problemas com mais do que um grupo, mas na condição desses grupos serem formados por indivíduos com as mesmas características de resolvedores de problemas e de motivação para a realização dessa tarefa em grupo. Por outras palavras, poderá ser interessante investigar o nosso problema de investigação com grupos homogéneos entre si, para se cruzarem os resultados com os agora obtidos com grupos heterogéneos entre si. Talvez aí, se pudesse chegar a uma conclusão mais fundamentada sobre se existe ou não alguma relação entre os tipos de problemas e os desempenhos metacognitivos dos resolvedores em grupo.

Quanto ao facto da gravação vídeo servir para o registo de intervenções metacognitivas, verificámos essa forte possibilidade, pois, para além de termos conseguido descrever todos os processos de resolução levados a efeito pelos dois grupos na totalidade dos problemas, sentimos que os resolvedores não se mostraram nada inibidos pela presença das câmaras. Pelo contrário, voltamos a enfatizar as palavras supra referidas de Giacomantonio (1981) e Gea (1983), pois, desde que os indivíduos não se coíbam de pensar alto, a utilização da tecnologia vídeo será um precioso auxílio para que se analisem os desempenhos metacognitivos dos sujeitos envolvidos na resolução de tarefas deste tipo. De facto, foi-nos possível acompanhar com alguma facilidade os processos mentais utilizados por ambos os grupos na resoluções de todos os problemas, porque sentimos haver vontade da parte deles em querer exteriorizar todos os seus pensamentos à medida que iam surgindo.

Seria, pois, interessante, confrontar no futuro, os sujeitos do estudo com as filmagens efectuadas, no sentido de poderem ser eles a descrever o tipo de contributo que tiveram para o desempenho de cada grupo na tarefa proposta. Por outro lado, essa situação de autoscopia poderia ser interessante no sentido de cada sujeito poder retractar o seu próprio perfil metacognitivo.

Apesar de não ser uma questão objectiva desta investigação, não deixa de nos surpreender o baixo nível de sucesso que existiu na resolução destes seis problemas por parte de ambos os grupos. Seria natural esperar um maior nível de sucesso no grupo A, contudo, foi o grupo B que conseguiu obter uma pontuação mais elevada na resolução dos problemas e manifestou ser o mais metacognitivo. De facto, pela aplicação da escala holística focada de Charles et al. (1987), num total possível de 24 pontos, o grupo B obteve 18 pontos e o grupo A obteve 17. Apenas o problema nº 5, envolvendo a descoberta de regularidades ou padrões foi resolvido correctamente pelos dois grupos. Para além disso, o Grupo B ainda acertou completamente na resolução do problema nº 2, que implicada a estratégia de decomposição do problema nas suas partes constituintes. Os restantes problemas não foram resolvidos correctamente pelos grupos. Uma possível razão que apresentamos para tal ocorrência poderá ser o pouco hábito destes futuros professores resolverem em grupo problemas deste género.

3 – Limitações

Voltamos a salientar que as conclusões a que chegámos são apenas válidas para os sujeitos deste estudo. Por outro lado, não se pode ignorar o facto do investigador ter sido também professor destes sujeitos, o que implica uma determinada carga afectiva que poderá ter tido alguma influência no comportamento dos grupos.

Outra limitação prende-se com o facto de o número de problemas envolvido neste estudo não ser muito elevado, o que leva a que qualquer conclusão careça de um estudo envolvendo um maior número de problemas deste tipo.

4 – Recomendações

As conclusões a que se chegou com este estudo permitem-nos avançar com algumas recomendações, para além das que já fomos salientado ao logo deste capítulo. Antes demais, parece-nos valer a pena continuar-se a investigar o modo como se comportam metacognitivamente os futuros professores de

Matemática. Por outro lado reforçamos a ideia de que tem que se continuar a apostar em programas de formação inicial de professores de Matemática que contemplem uma componente metacognitiva muito forte, pois estamos em crer que isso poderá ter repercussões em termos das exigências reflexivas que irão ter com os seus futuros alunos. Sugerimos, para tal, que se devem continuar a motivar os resolvedores de problemas para não se inibirem de pensar alto, pois só assim se poderá aceder às suas formas de pensar, de modo a poder-se promover um ou outro aspecto, que em termos de formação possa ser enfatizado. Sugerimos, pois, estudos posteriores, onde os resolvedores de problemas possam ser confrontados com as gravações vídeo dos seus desempenhos como resolvedores de problemas, no sentido de poder haver uma tomada de consciência sobre os processos metacognitivos envolvidos, por forma a que se possam gerir esses mesmos processos de pensamento.

Sugerimos também que os futuros professores de Matemática sejam submetidos a um maior número de problemas de processo, isto é, problemas que não necessitem de muitos conhecimentos matemáticos para a sua resolução, no sentido de se verificar se existem alguns modelos metacognitivos, enquanto resolvedores, e se esses modelos dependem ou não do perfil de resolvedor ou do tipo de constituição dos grupos.

Terminamos este estudo fazendo um apelo para que os responsáveis pela formação inicial de professores de Matemática implementem programas de formação envolvendo a resolução de problemas, por forma a que se dotem esses futuros professores com uma capacidade metacognitiva que lhes permita conhecerem-se a si próprios, conhecendo a sua forma de pensar e de agir. Esta sugestão terá que ter sempre por base a ideia de que só assim é que os futuros professores poderão adquirir conhecimentos e capacidades para poderem exigir dos seus futuros alunos, comportamentos reflexivos intencionais semelhantes aos que eles tiveram no período de formação.

BIBLIOGRAFIA

Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só)... Educação e Matemática, (8), 7-10.

Afonso, P. e Afonso, M. (1994). Resolução de Problemas/Metacognição: Que relação? Sua pertinência na Formação Inicial de Professores. ProfMat 94. Actas, 257-267.

Afonso, P. e Afonso, M. (1995). Resolução de problemas em Matemática: ensina-se primeiro e avalia-se depois ou ensina-se avaliando? ProfMat 95. Actas, 141-147.

Afonso, P. (1995). O vídeo como recurso didáctico para a identificação e desenvolvimento de processos metacognitivos em futuros professores de Matemática durante a resolução de problemas. Braga: Universidade do Minho. Tese de Mestrado.

Almeida, L. e Morais, M. (1992). Educabilidade Cognitiva: Conceptualização, Operacionalização e Intervenção. Inovação, 5, (2/3), 29-51.

Aparici, R. e Matilla, A. (1987). Imagen, vídeo y educación. Madrid: Fondo de Cultura Económica. Paideia.

APM e IIE (1991). Normas para o currículo e a avaliação em Matemática Escolar. Lisboa: Autor.

Artzt, A. e Thomas, E. (1990). Protocol Analysis of Group Problem Solving in Mathematics: A Cognitive-Metacognitive Framework for Assessment. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Boston.

Bautista, A. (1994). Las nuevas tecnologías en la capacitación docente. Madrid: Aprendizaje Visor.

Boavida, A. (1993). Resolução de problemas em educação matemática: Contributo para uma análise epistemológica e educativa das representações pessoais dos professores. Lisboa: APM, tese de Mestrado.

Borg, W. e Gall, M. (1983). Educational research: An introduction (4th ed.) NY: Longman.

Borralho, A. (1990). Aspectos metacognitivos na resolução de problemas de Matemática: proposta de um programa de intervenção. Lisboa: APM, tese de Mestrado.

Borralho, A. (1994). O ensino da resolução de problemas por parte de futuros professores: Relações entre a sua formação inicial. Actas do V SIEM. Lisboa: APM, 195-209.

Borralho, A. (1997). O ensino da resolução de problemas por parte de futuros professores: Relações entre a sua formação inicial. In D. Fernandes, F. Lester, A. Borralho e I. Vale (coord.). Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática: Múltiplos contextos e perspectivas. Aveiro: Grupo de Investigação em Resolução de Problemas, 129-157.

Bourron, Y. e Denneville, J. (1991). Se Voir en Vídeo. Pédagogie de L'Autoscopie. Paris: Les Éditions D'Organisation.

Branca, N. (1980). Problem Solving as a Goal, Process and Basic Skill. In Stephen Krulik (Ed.), Problem solving in school mathematics - Yearbook. NCTM, 3-8.

Bransford, J. e Stein, B. (1984). The IDEAL Problem Solver. A Guide For Improving Thinking, Learning, And Creativity. New York: W. H. Freeman And Company.

Brown, G. (1979). La Microenseñanza. Madrid: Anaya.

Buchanan, N. (1987). Factors Contributing to Mathematical Problem-Solving Performance: An Exploratory Study. Educational Studies in Mathematics, 18, 399-415.

Cabero, J. (1989). Tecnologia Educativa: Utilización Didáctica del Vídeo. Barcelona: PPU.

Canellas, A. et al. (1988). Tecnologia Y Medios Educativos. Madrid: Editorial Cincel.

Charles, R. et al. (1987). How to Evaluate Progress in Problem Solving. NCTM.

Clement, J. e Konold, C. (1989). Fostering Basic Problem-Solving Skills in Mathematics. For The Learning of Mathematics, 9 (3), 26-30.

Cruz, N. (1989). Utilização de Estratégias Metacognitivas no Desenvolvimento da Capacidade de Resolução de Problemas - Um Estudo com Alunos de Física e Química do 10º Ano. Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, tese de Mestrado.

Dalgalian, G. (1974). Micro-enseignement et non-directicité dans la formation des enseignants. Orientations - Essais et Recherches en Éducation, 14 (51), 305-318.

Decaigny, T. (1972). Technologie éducative et audio-visuel. Bruxelas: Editions LABOR, 2ª Ed, revista e ampliada.

Deguire, L. (1993). Developing Metacognition During Problem Solving. In I. Hirabayashi et al. (Eds.), PME XVII, vol. II. Tsukuba: University of Tsukuba, 222-229.

Delgado, Mª. (1993). Os professores de Matemática e a resolução de problemas. Três estudos de caso. Lisboa: APM, tese de Mestrado.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In Merlin Wittrock (Ed.), Handbook of research of teaching. London: Macmillan, 119-161.

Evertson, C. e Green, J. (1986). Obseravtion as Inquiry Method. In Merlin Wittrock (Ed.), Handbook of research of teaching. London: Macmillan, 162-213.

Fauquet, M. e Strasfogel, S. (1974). Lo audiovisual al servicio de los professores. Madrid: Nircea, S. A. de Ediciones.

Fernandes, D. (1988). Comparison of the Effects of Two Models of Instruction on the Problem-Solving Performance of Preservice Elementary School Teachers and on their Awareness of the Problem-Solving Stategies they Enploy. College Station: Texas A & M University, tese de Doutoramento.

Fernandes, D. (1989a). Aspectos Metacognitivos na Resolução de Problemas em Matemática. Educação e Matemática, (8), 3-6.

Fernandes, D. (1989b). Organizar o Ensino da Resolução de Problemas. PROFMAT 89. Actas. Lisboa: APM, 169-175.

Fernandes, D. (1991a). Perspectivas de Formação em Educação Matemática. Aprender, (13), 70-74.

Fernandes, D. (1991b). Resolução de Problemas e Avaliação. Actas do 2º Encontro Nacional de Didácticas e Metodologias de Ensino. Aveiro: Universidade de Aveiro, 275-286.

Fernandes, D. (1992). Resolução de Problemas: Investigação, Ensino, Avaliação e Formação de Professores. In M. Brown, D. Fernandes, J. Matos, J. Ponte (Eds.), Educação Matemática. Temas de Investigação. Lisboa: IIE e SPCE, 45-103.

Fernandes, D. et al. (1994). Processos de Resolução de Problemas: Revisão e Análise Crítica de Investigação que Utilizou Esquemas de Codificação. In D. Fernandes, A. Borralho e G. Amaro (Eds.), Resolução de Problemas: Processos Cognitivos, Concepções de Professores e Desenvolvimento Curricular. Lisboa: IIE, 35-63.

Ferrés, J. (1988). Como Integrar El Vídeo En La Escuela. Barcelona: Ediciones Ceac.

Flavell, J. (1985). Cognitive Development. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 2ª Ed.

Fonseca, L. (1995). Três futuros professores perante a resolução de problemas: Concepções e processos utilizados. Lisboa: APM, tese de Mestrado.

Fonseca, L. (1997). Processos utilizados na resolução de problemas por futuros professores de Matemática. In D. Fernandes, F. Lester, A. Borralho e I. Vale (coord.). Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática: Múltiplos contextos e perspectivas. Aveiro: Grupo de Investigação em Resolução de Problemas, 39-70.

Fortunato, I. et al. (1991). Metacognition and Problem Solving. Arithmetic Teacher, 39 (4), 38-40.

Freiberg, H. e Waxman, H. (1988). Alternative Feedback Approaches for Improving Student Teachers' Classroom Instruction. Journal of Teacher Education, 34 (4), 8-14.

Gabriel, Mª. (2001). Um Olhar Sobre... A Resolução de Problemas no Ensino-Aprendizagem da Matemática. Um estudo de quatro casos. Castelo Branco: Escola Superior de Educação.

García, J. (1986). Fundamentos de la formación permanente del professorado mediante em empleo del vídeo. Alcoy: Editorial Marfil.

Gardner, M. (1992). Rodas, Vidas e outras Diversões Matemáticas. Lisboa: Gradiva.

Gaspar, A. (1987). Metacognição: Estratégias e Desenvolvimento. Aprender a Pensar. Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa. Projecto Dianoia.

Gea, F. (1983). El Vídeo. Um sistema aplicable al processo de ensenanza e investigación. Barcelona: Publicacions i Edicions Universitat de Barcelona.

Giacomantonio, M. (1981). O Ensino Através dos Audiovisuais. São Paulo: Summus.

Guba, E. e Lincoln, Y. (1990). Naturalistic and Rationalistic Enquiry. In John Keeves (Ed.), Educational Research, Methodology, and Measurement. An International Handbook. Oxford: Pergamon Press, 81-85.

Guzmán, M. (1999). Para Pensar Mejor. Dessarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos. Madrid: Pirámide.

Jesús, Mª. (1996). La resolución de problemas en el aula de matemáticas. UNO, nº 8, 5-6.

Johnson, B. (1988). Model What You Teach: Science Methods Vídeo. School Science and Mathematics, 88 (6), 476-479.

Jongekrijg, T. e Russell, J. (1999). Alternative techniques for Providing Feedback to Students and Trainers: A Literature Review With Guidelines. Educational Technology, November-December, 39 (6): 54-58.

Kantowski, E. (1974). Process Involved in Mathematical Problem Solving. University of Georgia, tese de Doutoramento.

Kilpatrick, J. (1985). A Retrospective Account of the past twenty-five years of Research on Teaching Mathematical Problem Solving. In E. Silver (Ed.), Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 1-15.

Lambdin, D. et al. (1994). Connecting Research to Teaching. Reflections on Mathematics Education Research over the Twenty-Five Years of JRME. Mathematics Teaching in the Middle School, 1 (1), 38-43.

Laycock, J. e Bunnag, P. (1991). Developing teacher self-awareness: feedback and the ude of vídeo. ELT Journal, 41 (1), 43-53.

Leinhardt, G. (1990). Videotape Recording in Educational Research. In John Keeves (Ed.), Educational Research, Methodology, and Measurement. An International Handbook. Oxford: Pergamon Press, 493-495.

Leitão, A. e Fernandes, H. (1997). Trabalho de Grupo e Aprendizagem Cooperativa na Resolução de Problemas por futuros Professores de Matemática. In D. Fernandes, F. Lester, A. Borralho e I. Vale (coord.). Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática: Múltiplos contextos e perspectivas. Aveiro: Grupo de Investigação em Resolução de Problemas, 99-128.

Lester, F. (1983). Trends and Issues in Mathematical Problem-Solving Research. In R. Lesh & M. Landan (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Process, New York, Academic Press, Inc., 229-261.

Lester, F. (1985). Methodological Considerations In Research On Mathematical Problem-Solving Instruction. In Edward Silver (Ed.), Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives. London: LEA, 41-69.

Lester, F. e Garofalo, J. (1985). Metacognition, Cognitive Monitoring and Mathematical Performance. Journal for Research in Mathematics Education, 26 (3), 163-176.

Lester, F. e Charles, R. (1992). A Framework for Research on Problem-Solving Instruction. In J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos e D. Fernandes (Eds.), Mathematical Problem Solving and New Information Technologies. Research in Contexts of Pratice. Berlin: Springer-Verlag, 1-15.

Lester, F. e Mau, S. (1993). Teaching Mathematics via Problem olving: a Course for Prospective Elementary Teachers. For the Learning of Mathematics, 13 (2), 8-11.

Lester, F. (1994a). O que Aconteceu à Investigação em Resolução de Problemas de Matemática? A Situação nos Estados Unidos. In D. Fernandes, A. Borralho e G. Amaro (Eds.), Resolução de Problemas: Processos Cognitivos, Concepções de Professores e Desenvolvimento Curricular. Lisboa: IIE, 13-31.

Lester, F. (1994b). Musings About Mathematical Problem-Solving Research: 1970-1994. Journal for Research in Mathematics Education, 26 (6), 660-675.

Lester, F. et al. (1994). Learning How to Teach via Problem Solving. In D. Aichele & A. Coxford (Eds.), Professional Development for Teachers of Mathematics - Yarbook. NCTM, 152-166.

Lobo, A. (1989). Estratégias Metacognitivas no Desenvolvimento das Capacidades Básicas de Pensamento Envolvidas na Resolução de Problemas. Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa, tese de Mestrado.

Lopes, A. et al. (1990). Actividades Matemáticas na Sala de Aula. Lisboa: Texto Editora.

Loureiro, C. et al. (1992). Matematicando - 5º Ano - Livro do Professor. Lisboa: Texto Editora.

Luz, Mª. (1996). Evaluación de procesos y progresos del alumnado en la resolución de problemas. UNO, nº 8, 53-63.

Mackey, W. (1967). The New Tecnhology of Teacher Training. Québec: Université Laval.

Martín Izard, J. (1997). La Mediación en los Programas de "Enseñar a Pensar" Como Actos Didácticos Interactivos. Aula, Nº 9, 123-137.

Ministério da Educação (1990). Reforma Educativa. Programa do 1º Ciclo do Ensino Básico. Lisboa: Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário.

Ministério da Educação (1991). Programa de Matemática. Plano de Organização de Ensino-Aprendizagem. Ensino Básico, 2º Ciclo, vol. I. Lisboa: Direcção dos Ensinos Básico e Secundário.

Moderno, A. (1984). Para uma Pedagogia Audiovisual na Escola Portuguesa. Ensinos Preparatório e Secundário. Aveiro: Universidade de Aveiro, tese de Doutoramento, não publicada.

Moore, G. (1983). Developing and Evaluating Educational Research. Boston, Toronto: Little, Brown Company.

Mota, G. e Guimarães, H. (1990). Resolução de Problemas. Relatório acerca do grupo de Discussão Nº 3 do Encontro Nacional de Professores de Matemática. PROFMAT 90. Actas, vol. II. Lisboa: APM, 81-86.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston: NCTM.

Noel, B. (1991). La métacognition. Brouxelles: De Boeck-Wesmael.

Novais, A. e Cruz, N. (1987). O Ensino e o Desenvolvimento das Capacidades Metacognitivas. Aprender a Pensar. Lisboa: Departamento de Educação da faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Projecto Dianoia.

Pallhares, P. (1997). Histórias com Problemas Construídos por Futuros Professores de Matemática. In D. Fernandes, F. Lester, A. Borralho e I. Vale (coord.). Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática: Múltiplos contextos e perspectivas. Aveiro: Grupo de Investigação em Resolução de Problemas, 155-188.

Parra, N. e Parra, I. (1985). Técnicas Audiovisuais de Educação. São Paulo: Biblioteca Pioneira de Ciências Sociais, 6ª Ed. revista e ampliada.

Pérez, Mª. 1994). La Solución de Problemas en Matemáticas. In J. Pozo; Mª Jesús e M. Yolanda (Coord.). La solución de problemas. Madrid: Santillana, 53-83.

Pérez, Mª. e Pozo, J. (1994). Aprender a Resolver Problemas y Resolver Problemas para Aprender. In J. Pozo; Mª Jesús e M. Yolanda (Coord.). La solución de problemas. Madrid: Santillana, 13-52.

Petrica, J. (1997). A Supervisão Clínica na Formação do professor de Educação Física. Análise qualitativa das actividades de microensino associadas a um modelo de preparação prévia para a práctica pedagógica. Castelo Branco: Escola Superior de Educação. Dissertação apresentada com vista à realização de Provas Públicas para Professor Coordenador. Vol. I.

Polya, G. (1978). A Arte de Resolver Problemas. Rio de Janeiro: Interciência.

Polya, G. (1981). Mathematical Discovery. On understanding, learning and teaching problem solving. New York: John Wiley & Sons.

Ponte, J. (1988). Matemática, Insucesso e Mudança: Problema Possível, Impossível ou Indeterminado? Aprender, (6), 10-19.

Ponte, J. (1991). Resolução de Problemas: Da Matemática às Aplicações. Actas do 2º Encontro Nacional de Didácticas e Metodologias de Ensino. Aveiro: Universidade de Aveiro, 287-296.

Ponte, J. e Canavarro, A. (1994). Perspectivas de uma professora sobre a actividade matemática: Uma experiência num contexto de formação. Actas do V SIEM. Lisboa: APM, 283-295.

Pozo, J. et al. (1994). La solución de problemas. Madrid: Santillana.

Puig, L. (1996). Elementos de resolución de problemas. Granada: Editorial Comares.

Rauly, T. (1987). Escolher e Utilizar os Suportes Visuais e Audiovisuais. Coimbra: Coimbra Editora.

Reeves, C. (1987). Problem-solving Tecnhiques Helpful in Mathematics and Science. Reston: NCTM.

Salema, Mª. (1997). Ensinar e Aprender a Pensar. Lisboa: Texto Editora.

Saljo, R. e Wyndhamn, J. (1990). Problem-Solving, Academic Performance and Situated Reasoning. A Study of Joint Cognitive Activity in the Formal Setting. British Journal of Educational Psychology, 60, 245-254.

Salomon, D. (1979). Como Fazer uma Monografia. Belo Horizonte: Interlivros, 6ª Ed.

Sanchez, J. (1993). Eficacia del Aprendizaje de las Matematicas por Descubrimiento. In L. Almeida, J. Fernandes e A. Mourão (Eds.), Ensino-Aprendizagem da Matemática. Recuperação de alunos com baixo desempenho. Riba d'Ave: Didáxis, 3-32.

Schoenfeld, A. (1979). Explicit Heuristic Training as a Variable in Problem-Solving Performance. Journal for Research in Mathematics Education, May 1979, 173-187.

Schoenfeld, A. (1980). Heuristics in the Classroom. In Stephen Krulik (Ed.), Problem solving in school mathematics - Yearbook. NCTM, 9-21.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. San Diego: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1987). What's all the fuss about metacognition? In A. H. Schoenfeld (Ed.), Cognitive science and mathematics education. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 189-215.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grows (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: Macmillian & NCTM.

Shigematsu, K. e Katsumi, Y. (1993). Metacognition: the role of the "Inner Teacher". Research on the process of internalization of "Inner Teacher". In I. Hirabayashi et al. (Eds.), PME XVII, vol. II. Tsukuba: University of Tsukuba, 278-285.

Silva, J. (1992). As aplicações da Matemática: a vida quotidiana na sala de aula. Educação e Matemática, (23), 3-9.

Stacey, K. e Groves, S. (1999). Resolver Problemas: Estrategias. Madrid: Narcea.

Vale, I. (1993). Concepções e práticas de jovens professores perante a resolução de problemas de matemática: um estudo longitudinal de dois casos. Lisboa: APM, tese de Mestrado.

Vale, I. (1994). Resolução de problemas: Desempenhos de futuros professores de matemática. Actas do V SIEM. Lisboa: APM, 209-222.

Vale, I. (1997). Desempenhos e Concepções de Futuros Professores de Matemática na Resolução de Problemas. In D. Fernandes, F. Lester, A. Borralho e I. Vale (coord.). Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática: Múltiplos contextos e perspectivas. Aveiro: Grupo de Investigação em Resolução de Problemas, 1-37.

Valente, M. et al. (1989a). O Desenvolvimento da Capacidade de Pensar Através do Currículo Escolar: Utilização de Estratégias Metacognitivas. Cadernos de Consulta Psicológica, (5), 69-79.

Valente, M. et al. (1989b). A Metacognição. Revista de Educação, 1 (3), 2-6.

Webb, N. (1979). Process, Conceptual Knowledge, and Mathematical Provlem-Solving Ability. Journal for Research in Mathematics Education, March, 1979.

White, R. (1990). Metacognition. In John Keeves (Ed.), Educational Research, Methodology, and Measurement. An International Handbook. Oxford: Pergamon Press, 70-75.

ANEXO Nº 1

Questionário orientador da selecção dos sujeitos para a constituição dos dois grupos em estudo.

QUESTIONÁRIO:

Relativamente a cada questão seleccione de 1 a 5 de acordo com o seguinte critério:

1 – Nunca
2 – Quase Nunca
3 – Algumas Vezes
4 – Quase Sempre
5 – Sempre

1 – Gosto de resolver problemas de Matemática

1	2	3	4	5

2 – Costumo ler com muita atenção o enunciado dos problemas que pretendo resolver

1	2	3	4	5

3 – Antes de avançar para a resolução de um problema tento compreender muito bem o seu enunciado

1	2	3	4	5

4 – Antes de avançar para a resolução de um problema dedico algum tempo à concepção de um plano de resolução

1	2	3	4	5

5 – Enquanto resolvo o problema e antes de encontrar uma possível solução, avalio várias vezes o próprio processo de resolução

1	2	3	4	5

6 – Costumo ser persistente na resolução de um problema, isto é, não desisto facilmente

1	2	3	4	5

7 – Avalio a solução que encontro para os problemas que resolvo

1	2	3	4	5

8 – Tento encontrar outras possíveis soluções para os problemas que resolvo

1	2	3	4	5

9 – Gosto de resolver problemas através de trabalho de grupo

1	2	3	4	5

10 – Sou um elemento activo ao trabalhar a resolução de problemas em grupo

1	2	3	4	5

11 – Aquando da resolução de problemas em grupo costumo solicitar ajuda aos meus colegas de grupo quando necessito

1	2	3	4	5

12 – Gosto de auxiliar os meus colegas de grupo se sentirem dificuldades na resolução de problemas em equipa

1	2	3	4	5

13 – Sou respeitador das opiniões dos meus colegas na resolução de problemas em grupo

1	2	3	4	5

14 – Costumo verbalizar os meus pensamentos quando resolvo problemas em equipa

1	2	3	4	5

15 – Sou bom(a) a resolver problemas

1	2	3	4	5

NOME:____

CURSO E ANO:____________________________________

ANEXO Nº 2

Folhas de resolução/registo dos seis problemas seleccionados para o estudo.

Problema Nº 1: A Assembleia dos Comerciantes da Rua

Oliveira é carniceiro. É o presidente da assembleia dos comerciantes da rua, a que pertencem também um merceeiro, um padeiro e um leiteiro.

Oliveira está sentado à esquerda de Pereira.

Nogueira está à direita do merceeiro.

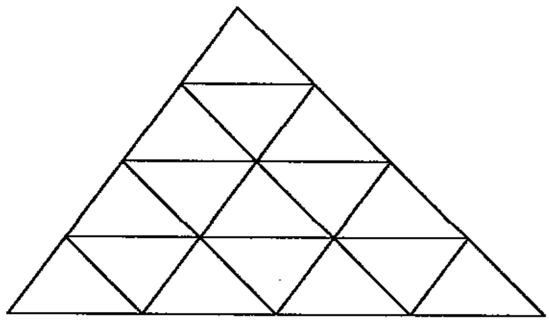
Pinheiro, sentado em frente de Pereira, não é o padeiro.

Qual a profissão de Nogueira?

Problema Nº 2: O Triângulo dos Triângulos

O Américo estava a tentar construir um triângulo de triângulos. Para tal, começou com um triângulo na primeira fila, depois passou a três triângulos e na terceira fila construiu mais cinco. Terminou a construção do triângulo na quarta fila e decidiu contar os triângulos que esta figura tinha no total.

Quantos são, afinal?



Problema Nº 3: As Medidas do Comerciante

Um comerciante possui dez medidas, contendo 1, 2, 4, 5, 6, 12, 15, 22, 24 e 38 litros. Cada uma delas está cheia de um só líquido.

Umas estão cheias de leite, outras de água e outras de azeite. Uma única medida ficou vazia. Para isso gastou duas vezes mais água do que leite e duas vezes mais azeite do que água.

Que contém cada medida?

Problema Nº 4: Os Maridos Ciumentos

Três casais, os Silva, os Costa e os Fonseca, querem atravessar um rio, mas só dispõem de um barco em que só cabem duas pessoas de cada vez. Ora, acontece que os maridos são muito ciumentos e, portanto, nenhum deles quer deixar a sua mulher, seja numa das margens ou no barco, com os outros homens, a não ser que eles também estejam presentes – elas só poderão ficar sozinhas ou na companhia das outras mulheres.

Como deverão fazer para atravessar o rio?

Problema Nº 5: A Sequência Numérica

O Artur e o Bruno decidem jogar ao jogo das sequências de números. Sabendo que a estratégia seguida pelo Bruno para acrescentar um novo número à sua sequência é a de adicionar os dois últimos números ditos pelo Artur, qual será o número que ele dirá quando o Artur referir o 231?

Eis as respectivas sequências já iniciadas:

Artur:	**1**		**3**		**6**		**10**		**15**	
Bruno:		**1**		**4**		**9**		**16**		**25**

Problema Nº 6: O Jogo das Moedas de Um Escudo

Mário, Ricardo e Orlando terminaram um jogo que se desenrolou em cinco partidas. Jogaram com moedas de 1$00 e só tiveram, no decurso do jogo, somas inteiras de escudos.

Em cada partida o que estava a perder dobrou os haveres dos outros dois.

No fim do jogo, Mário tem 8$00, Ricardo tem 9$00 e Orlando tem 10$00.

Quanto tinha cada um no início?

ANEXO Nº 3

Conjunto de orientações para o trabalho de grupo.

Orientações para o Trabalho de Grupo

1 – Pretende-se com esta actividade:

- desenvolver o espírito de equipa na resolução de problemas;
- desenvolver s técnica de "pensar alto" durante a resolução de problemas;
- desenvolver o espírito de registo do raciocínio envolvido na resolução de problemas.

2 – A sua colaboração activa em prol do trabalho de grupo é muito importante.

3 – Ao resolverem os problemas apresentados evitem usar conhecimentos de Álgebra.

4 – É extremamente importante "pensar alto", à medida que vão resolvendo os problemas, mesmo que pensem que o que estão a pensar é, eventualmente, um disparate.

5 – É também bastante importante que cada elemento de cada grupo não se isole a trabalhar. Pelo contrário, deve compartilhar as suas ideias com os colegas do grupo.

6 – O registo escrito de cada problema deve ser o mais detalhado possível.

7 – Mesmo que utilize a calculadora, é importante aparecer o registo escrito da indicação das operações, bem como os respectivos resultados.

8 – Utilize para cada registo escrito unicamente a folha da actividade respectiva.

9 – Não utilize lápis nem borracha nem cálculos noutras folhas. Caso queira anular algum registo efectuado, basta traçar um risco sobre esse registo, mas por forma a que se perceba o que foi escrito.

ANEXO Nº 4

Grelha de registo/análise adaptada de Buchanan (1987) com o registo das transcrições das gravações efectuadas em vídeo.

GRELHA DE REGISTO PARA O PROBLEMA Nº 1 – GRUPO A

CARLA	DINA	ESLA	OBSERVAÇÕES
	Oliveira é carniceiro. É o presidente da assembleia dos comerciantes da rua, a que pertencem também um merceeiro, um padeiro e um leiteiro. Oliveira está sentado à esquerda de Pereira. Nogueira está sentado à direita do merceeiro. Pinheiro, sentado em frente de Pereira, não é o padeiro. Qual a profissão de Nogueira?		Leitura do enunciado do problema
		Vamos fazer um esquema.	Sugestão de estratégia
		Oliveira é carniceiro. É o presidente da assembleia dos comerciantes da rua, a que pertencem também um merceeiro.	Leitura do enunciado do problema
Mete aí os quatro. Tens o carniceiro, o merceeiro...			Levantamento dos dados do problema (sugestão de registo escrito)
		Temos o carniceiro...	Registo escrito dos dados
	Faz tipo uma tabela. Eu acho que isto dá.		Sugestão de estratégia **(IMOrg.)**
		Espera aí. É o presidente, este, dos comerciantes da rua a que pertencem também um merceeiro, M.	Registo escrito mais leitura do enunciado
	Temos que pôr o nome deles.		Sugestão de registo escrito **(IMOrg.)**
		É o merceeiro, é um M.	Registo escrito dos dados
	Não, porque Oliveira é carniceiro.		**(IMV)**
		Ah! Então ponho aqui um O na cabeça.	Registo escrito dos dados
Tens o merceeiro...			

CARLA	DINA	ESLA	OBSERVAÇÕES
		Como é que ele se chama? Aí não diz!	(IMO)
Não diz.	Não diz.		
		Um padeiro...	Registro escrito dos dados
Pode ser padeiro e um leiteiro.			
	Isto quer dizer o quê?		Apontando para o registo escrito (IME)
e um leiteiro		É o merceeiro, um padeiro e um leiteiro.	
O Pereira está sentado à esquerda do Oliveira.			Raciocínio errado, pois é ao contrário.
À esquerda tens que por P.			Sugestão de registo escrito
À esquerda do Oliveira pões P, que é o Pereira.			Sugestão de registo escrito
	Ou então fazes aqui em baixo.		Sugestão de registo escrito
		Então como e que eu ponho?	
	Pões aqui em baixo, porque estes são os dados.		Sugestão de registo escrito
		Ah! Está bem. Oliveira.	Registo escrito
Depois, à esquerda o Pereira.			Sugestão de registo escrito
		O Pereira. Eu ponho PE, porque aqui é o Padeiro.	Registo escrito
	Está bem. Pereira e aqui o Oliveira.		
Não sabemos qual é o merceeiro!			(IMO)
		Nogueira está à direita...	Leitura do enunciado
do merceeiro, mas tu não sabes... Não, este aqui é o carniceiro, não é o merceeiro. Por isso não podes meter aqui...			(IMV)
O Nogueira está à direita do merceeiro, mas tu não sabes qual é o merceeiro.			
		Este está à direita do merceeiro...	

CARLA	DINA	ESLA	OBSERVAÇÕES
	Mas tu não sabes onde é que está o merceeiro!		**(IMO)**
		Ah! Então espera aí: se ele está à direita do merceeiro, no máximo está aqui o merceeiro, pode estar aqui o merceeiro.	Apontando para o registo escrito. **(IMO)**
	À frente deste aqui está o Nogueira, está o Pinheiro.		
Este está sentado à frente do Pinheiro. Pões à frente Pereira.			Sugestão de registo escrito.
		Ah, eles estão sentados!	**(IMO)**
	E este não é o padeiro.		
		Vamos ler outra vez: Oliveira...	Sugestão de leitura do enunciado.
	Espera aí, faz uma tabela. Mete aqui as profissões e aqui os nomes e vamos ver quais é que já temos, profissões.		Sugestão de estratégia mais resisto escrito da mesma. **(IMOrg.)**
Oliveira, Pereira, Nogueira e Pinheiro.			
	Oliveira, Pereira, Nogueira e Pinheiro.		Registo escrito.
Agora, carniceiro. Aqui já podes por carniceiro mas os outros não sabes.			Implementação da estratégia.
	Carniceiro.		Registo escrito.
		Não é aí!	Avaliação do processo.
	É. Agora faço uma cruz aqui.		Avaliação do processo e implementação da estratégia.
		Ah!	
	Temos merceeiro.		Registo escrito.
		Padeiro e leiteiro.	
	Padeiro e leiteiro.		Registo escrito.
	Agora este aqui já não pode ser nenhuma destas.		Implementação da estratégia.
Pois não.			
	E agora diz assim: Pinheiro não é padeiro. Não é padeiro, já não é aqui.		Implementação da estratégia.

CARLA	DINA	ESLA	OBSERVAÇÕES
		Então espera aí... Oliveira está sentado... Onde é que diz isso?	**(IMO)**
		Pinheiro, sentado em frente de Pereira, não é o padeiro. Exactamente.	Leitura de enunciado para confirmação.
		Então o Nogueira ou é merceeiro...	
	É uma destas três.		
		Não!	
	Estes já não podem ser carniceiros, nem o Oliveira pode ser nenhuma destas outras.		**(IME)**
	O Pinheiro é uma destas duas.		
Oliveira está sentado à esquerda de Pereira.			Leitura do enunciado.
	É o presidente da assembleia dos comerciantes da rua, a que pertencem também um merceeiro, um padeiro e um leiteiro		Leitura do enunciado.
Pode ser que esteja ligado. Como está perto, quer dizer o quê? O merceeiro?			Tentativa de compreensão do enunciado. **(IMO)**
		Não	**(IMO)**
		Eu acho que o Pinheiro ou é este ou é este. Portanto o Nogueira ou é este ou é este ou é este.	Apontou para o resisto escrito. **(IME)**
	Como?		
		Se o Pinheiro ou é o merceeiro ou o leiteiro, o Nogueira ou é o merceeiro ou o padeiro ou é o padeiro ou o leiteiro.	**(IME)**
	E o que é que tem a ver o estarem sentados, ao lado, à frente?		Tentativa de compreensão do enunciado. **(IMO)**

CARLA	DINA	ESLA	OBSERVAÇÕES
		Vamos lá ver, o Oliveira é carniceiro.	Leitura do enunciado.
	Assembleia. Na assembleia estes estão sentados num lado e no outro.		Tentativa de compreensão do enunciado.
		É o presidente da assembleia dos comerciantes da rua a que pertencem também um merceeiro, um padeiro e um leiteiro.	Leitura do enunciado.
O estar ao pé deve estar relacionado com as profissões!			Tentativa de compreensão do enunciado. **(IMO)**
		Eu acho que não está relacionado com nada.	**(IMO)**
Então...			
		Oliveira está sentado à esquerda do Pereira.	Leitura do enunciado e registo escrito.
		Nogueira está à direita do merceeiro.	Leitura do enunciado e registo escrito.
	Nogueira está quê? À direita do merceeiro?		**(IMO)**
		Espera aí. Já sei, já sei... Se o Nogueira está à direita do merceeiro, ele não é o merceeiro!	Tentativa de compreensão do enunciado. **(IMO)**
Pois, mas não tens aqui, o Oliveira...			
	Não. Ela tem razão, já não é o merceeiro.		**(IMO)**
		Já não é o merceeiro, não é?	
	É. E este Pinheiro está sentado à frente de Pereira.		
Não é padeiro. O Pinheiro não é padeiro.			Tentativa de compreensão do enunciado.
	O Pinheiro não é padeiro, então...		
		Quem é que não é padeiro?	**(IMO)**
O Pinheiro.			
	O Pinheiro. Sentado em frente a Pereira não é o padeiro.		Leitura do enunciado.

CARLA	DINA	ESLA	OBSERVAÇÕES
		Então, espera aí: este não é, este não é, ou é este ou é este.	Apontando para a tabela. Tentativa de compreensão do enunciado. **(IME)**
Ou é padeiro ou leiteiro.			Tentativa de compreensão do enunciado.
		E este ou é este ou é este. Então, o Pereira... o que é que diz em relação ao Pereira?	**(IMO)**
		Presidente, na na na	Leitura do enunciado.
	O Pinheiro está sentado à frente do Pereira, por isso, o Pereira...		
		Está sentado à esquerda do Pereira.	Leitura do enunciado.
		Então vamos lá raciocinar. O Oliveira está sentado à esquerda... então eu pus à direita!	Avaliação de processo. **(IMV)**
		Oliveira está sentado à esquerda do Pereira.	Leitura do enunciado.
		Ai, não está bem.. não, está mal.	**(IMV)**
	Oliveira está sentado à esquerda do Pereira.		Leitura do enunciado.
	Então o Pereira não é...		
		Nogueira está à direita do merceeiro.	Leitura do enunciado.
	Então não é merceeiro, já tínhamos dito.		Avaliação de processo. **(IMV)**
Não sabes qual é o merceeiro!			**(IME)**
		E o Pinheiro está sentado em frente...	Leitura do enunciado.
	Do Pereira.		
		Do Pereira.	
O Pereira está à esquerda.			
		Em frente do Pinheiro está quem? É o Pinheiro, não é?	**(IMO)**
Pinheiro.			

CARLA	DINA	ESLA	OBSERVAÇÕES
		E não é padeiro, o Pinheiro	Tentativa de compreensão do enunciado.
		Nogueira. E onde é que está o Nogueira?	Tentativa de compreensão do enunciado. **(IMO)**
		Nogueira está à direita do merceeiro.	Leitura do enunciado.
		Onde é que está o merceeiro?	Tentativa de compreensão do enunciado. **(IMO)**
	O Nogueira não é merceeiro.		
Agora tens que o Nogueira ou é o padeiro ou é leiteiro.		A gente não sabe onde é que está o merceeiro.	**(IMO)**
	Agora tens que ver se dá. O Pinheiro e o merceeiro. Este tem que ser o padeiro.		Tentativa de compreensão do enunciado.
Espera aí. Agora se o Pinheiro for merceeiro tem que estar... O Nogueira tem que estar à direita dele.			Sugestão de estratégia.
	Mas a gente não sabe se é esta a ordem!		**(IME)**
		Então espera aí...	
Tens que fazer por tentativas.			Sugestão de estratégia.
		O Nogueira ou é este ou é este. Nós temos que descobrir é o que é o Pinheiro. Se nós descobrir-mos o que é o Pinheiro, sabes qual é este!	Sugestão de estratégia. **(IMVOrg.)**
		Pinheiro está sentado em frente do Pereira.	Leitura do enunciado.
		O Pereira o que é? Não sabemos. Ah, não é padeiro.	**(IMO)**
		E o Pereira?	
	Só sabemos que não é o carniceiro!		**(IMO)**

CARLA	DINA	ESLA	OBSERVAÇÕES
		Oliveira é carniceiro.	Leitura do enunciado.
		Portanto, isto está...	
		E o presidente... à esquerda do Pereira.	Leitura do enunciado.
	Isto, se calhar, está mesmo por ordem. Estás a ver? Estás a dizer isto por ordem. Se este está à esquerda, o Pereira é um destes três. Dá para ir para aí.		Sugestão de estratégia. **(IMOrg.)**
		Que giro!	**(IMO)**
	E agora, o Nogueira está à direita do merceeiro.		Leitura do enunciado.
	O merceeiro ou é este ou é este. Por isso, o Nogueira tem que estar para aqui, mas agora tenho um sentado em frente, por isso, já não está bem!		Avaliação de processo. **(IMV)**
		Então vamos por aqui os lugares. Quantos são?	**(IMOrg.)**
	Quatro.		
		São quatro e um está em frente. Por isso, estas cadeiras chegam.	Fez quadros na folha.
	Então pões aqui o Oliveira e aqui o merceeiro.		Sugestão de registo escrito.
	Mas espera aí...		
		Então espera aí, ou dizes-me os nomes ou dizes-me...	
É o Pereira.			
		É o Pereira o merceeiro.	
	An?		
Agora, em frente ao Pereira... Nogueira está... Em frente ao Pereira metes o Pinheiro.			Sugestão de registo escrito.
		Em frente ao Pereira, Pinheiro.	Registo escrito.
Onde é que cabe o Nogueira?			**(IME)**

CARLA	DINA	ESLA	OBSERVAÇÕES
		Está sentado em frente ao Pereira e não é padeiro.	Leitura do enunciado
		Então e onde é que está o Nogueira?	**(IME)**
	Oliveira está à esquerda de Pereira.		Leitura do enunciado
	O Nogueira está à direita do merceeiro.		Leitura do enunciado
	Mas a gente não sabe qual é o merceeiro!		**(IMV)**
		Então, espera aí, quem é que está à direita? Como é que é?	**(IME)**
		Oliveira está sentado à esquerda de Pereira. O Nogueira está à direita do merceeiro.	Leitura do enunciado
		Então olha, o Oliveira é carniceiro.	
	Tem que ficar aqui ou aqui. Dependente se este é o merceeiro está aqui, se este é o merceeiro está aqui.		
		Como é que se chama? É o Nogueira. Então vou pôr aqui só debaixo:	
		É maior quê?	
		Nogueira está à direita do merceeiro. Pinheiro está sentado em frente a Pereira e não é o padeiro.	Leitura do enunciado
Eu acho é que tens que pegar no Pinheiro.			**(IMOrg.)**
		O Pinheiro... Não é o padeiro e é o carniceiro.	
	Não.		
		E está sentado onde?	**(IME)**
Está à direita do merceeiro.			

CARLA	DINA	ESLA	OBSERVAÇÕES
	O Nogueira está à direita do merceeiro.		
	Se o Nogueira está à direita do merceeiro,...	Então pode ser este aqui...	
	O Nogueira...	Poder estar aqui	
	O Nogueira não é o merceeiro.		
Então o merceeiro ou é o Pereira ou o Pinheiro.			
	Pois, se este não é o merceeiro, o merceeiro ou é o Pereira ou o Pinheiro.		**(IME)**
		E o Pereira, também o que é que não pode ser mais?	**(IME)**
O Pereira não pode ser, é carniceiro, porque está sentado à esquerda dele.			
	Mas o merceeiro ou é o Pereira ou é o Pinheiro. O Pinheiro não é padeiro, pode ser merceeiro. Este aqui também pode ser.		
		Espera aí, eu queria saber mais qualquer coisa acerca de Pereira.	**(IMO)**
		Oliveira..., não é Padeiro.	Leitura do enunciado
		Este não é padeiro.	Registo escrito
		E o Pereira?	
		Então, se este for padeiro, este não pode ser este aqui.	
	É?		
		Este está sentado à direita de quem? Do merceeiro.	**(IMO)**
À direita do merceeiro. Então, um é padeiro, outro é merceeiro. Mas tens de saber se é em cima ou se é em baixo.			**(IME)**
		Então ele é leiteiro! Este, o Nogueira.	

CARLA	DINA	ESLA	OBSERVAÇÕES
Então explica lá porquê?			Sorrisos em todas. **(IME)**
		Porque...	
	O Pinheiro não é padeiro.		
		O Pinheiro não é padeiro.	
Sim.			
		E o Nogueira está sentado à direita do merceeiro.	
Sim, mas tanto pode ser o Pinheiro como o Pereira!			**(IME)**
	Olha, o Nogueira depois está sentado à direita. Tem que estar aqui, aqui ou aqui. Tem que estar para estes lados.		**(IMOrg.)**
		Então olha, ele para estar à direita do merceeiro, ele aqui está à esquerda, aqui já está ocupado.	**(IMV)**
Tem que ser deste lado.			
		Para estar aqui, ou este é o merceeiro ou este é o merceeiro.	
	Ou o Pereira ou o Pinheiro.		
Ou o Pereira ou o Pinheiro.			
	A isso já chegámos.		**(IMV)**
		Este não é padeiro, pode ser merceeiro.	
Ou leiteiro.			
	Ou leiteiro.		
		Ou leiteiro e este...	
	Não é merceeiro.		
Não é merceeiro.			
		Não é merceeiro. Pode ser padeiro. Merceeiro.	
Então, se não é merceeiro, não pode estar à direita.			**(IME)**
	Não, não pode ser merceeiro!		

CARLA	DINA	ESLA	OBSERVAÇÕES
		Não pode ser merceeiro.	
Se não pode ser merceeiro, não pode estar à direita deste. Tem que estar aqui.			**(IME)**
	Não, o Nogueira é que não pode ser merceeiro.		**(IMV)**
Ah! O Pereira pode ser merceeiro, padeiro e leiteiro.			**(IMV)**
		E este pode ser tudo?	**(IMO)**
Sim, menos carniceiro.			
		Padeiro, leiteiro e merceeiro.	
Então daí podes pôr, pronto, mesmo que o Nogueira fique aqui, fica sempre à direita do merceeiro, tanto em cima como em baixo			**(IME)**
	Sim, sim.		
Porque é que tu dizes que é leiteiro?			**(IMV)**
		Porque ocorreu-me mas se calhar não tem nada.	**(IMV)**
	A mim, há bocado também me ocorreu. Se fossemos pôr aqui: O Oliveira está sentado à esquerda de Pereira. Oliveira é carniceiro está à esquerda de Pereira. Por isso, o Oliveira está aqui neste de baixo. O Pereira é um destes três...		**(IMV)**
		Mas o que é que isso tem a ver?	**(IMV)**

CARLA	DINA	ESLA	OBSERVAÇÕES
	Eu sei que não tem a ver. Mas depois dá, depois diz: Nogueira está à direita do merceeiro. Nogueira tem que estar entre este ou este. Depois, Pinheiro está em frente de Pereira, só que... e depois diz que Pinheiro não é padeiro. Pinheiro podia estar aqui. Tinha que estar ou aqui ou aqui. Depois diz que, que... Depois, olha, diz que o Pereira não é este, por isso, Nogueira não é este.		**(IMV)**
	Eh pá, não sou capaz!		**(IMV)**
		Prontos, nós só nos interessam estes. Só nos interessam três.	**(IMOrg.)**
Põe assim: Pereira pode ser tal e tal. Nogueira pode ser tal e tal...			**(IMOrg.)**
		Oliveira está sentado à esquerda de Pereira.	Leitura do enunciado.
	Pereira pode ser...		Registo escrito.
Merceeiro, padeiro ou leiteiro.	Merceeiro, padeiro ou leiteiro.		Registo escrito.
O Nogueira pode ser padeiro ou leiteiro. O Pinheiro pode ser merceeiro ou leiteiro.			
		Oliveira é carniceiro.	
	Então, os três podem ser leiteiros, estes dois podem ser merceeiros e estes dois padeiros.		
Agora vamos ver quem é que pode ficar à direita de quem.			**(IMOrg.)**
		Este P é o quê?	**(IMV)**
Padeiro. Não é nada! É Pereira.			
		Pereira, pode ficar... não era este que tinha? Ai, não, era o Pinheiro.	

CARLA	DINA	ESLA	OBSERVAÇÕES
	O Pereira fica à esquerda do Nogueira.		
		O Pinheiro se está à direita do merceeiro não é o merceeiro.	
Sim.			
		Então é o leiteiro.	
	O Pinheiro não é o padeiro.		
		Pois, mas tu não disseste que... Tu não disseste que... se está à direita do merceeiro não é merceeiro.	(IMV)
Nogueira!			
		Ah, Nogueira!	
	Por isso, o Nogueira só pode ser um destes dois.		
		Pois, já está aqui.	(IMV)
	O Nogueira só pode ser um destes dois.		
		O Pinheiro está em frente ao Pereira.	
	Olha, o Nogueira só pode ser padeiro ou leiteiro, Por isto, este aqui só sobra deste para este.		
Mas sobra também merceeiro para o Pinheiro.			(IMV)
	Então este é padeiro, parece.		(IMOrg.)
		Porquê?	(IMV)
	Porque sobram os mesmos dois. Este só pode ser padeiro ou leiteiro.		
Por exclusões... Pelo menos parece.			Abana negativamente a cabeça. (IME)
	Agora, vamos ver...		(IMV)
Vamos pegar nesta: O Nogueira está à direita do merceeiro.			

CARLA	DINA	ESLA	OBSERVAÇÕES
	Pois, está à direita. Ou é este, ou é este.		(IMV)
Qual é que será o que está à direita do merceeiro?			(IMO)
		Oliveira está sentado à esquerda do Pereira.	Leitura do enunciado.
	Olha, se o Nogueira estiver aqui, este não pode ser... depois... este também não pode ser. Depois este aqui... se este for merceeiro este tem que ser leiteiro. Se o Nogueira for merceeiro, está... e o Pinheiro está em frente do Pereira.		
	E se não formos capazes?		(IME)
	Acho que passamos para outro.		Sorrisos.
Nós estamos tão perto!			(IME)
		Oliveira está sentado à esquerda do Pereira.	Leitura do enunciado.
		Oliveira está sentado à esquerda do Pereira.	Leitura do enunciado.
	Neste já não há dúvida!		(IMV)
		O Nogueira está à direita do merceeiro.	Leitura do enunciado.
Eu acho que nós podemos pôr assim: este está à direita do merceeiro. Se pusermos este merceeiro, Nogueira tem que estar à direita.			
		Nogueira está à direita do merceeiro.	Leitura do enunciado.
	Então o Pereira é o merceeiro.		Sorrisos.
		Ou o Pinheiro!	
		Pinheiro, sentado em frente do Pereira, não é o padeiro.	Leitura do enunciado.
	Eu acho que a gente não pode!		(IMV)
		Nogueira está à direita do merceeiro.	Leitura do enunciado.

CARLA	DINA	ESLA	OBSERVAÇÕES
		Nogueira está à direita do merceeiro.	Leitura do enunciado.
		O outro não é padeiro e também não é carniceiro mas pode ser merceeiro ou pode ser leiteiro.	
		Mas se for leiteiro, o Nogueira não pode estar à direita dele!	**(IMV)**
	Como é que é? Quem é que...		**(IMV)**
		Se ele for leiteiro, Nogueira não pode estar aqui.	**(IMV)**
Pois não, porque está à direita do merceeiro!			
		E se este for padeiro...	
Mas o Nogueira tanto pode estar aqui como aqui!			
	Não, mas é como ela diz...		
		Mas se este for padeiro e este for leiteiro, o Nogueira não pode estar aqui.	
Sim.			
		Por isto, estes não podem... quando o Pereira é padeiro, o Pinheiro não pode ser leiteiro, estás a perceber?	**(IMV)**
Sim, um deles tem que ser merceeiro.			
		Se Pereira for padeiro, implica que o Pinheiro não seja leiteiro.	Registo escrito.
		E vice-versa. E se o Pereira...	
		O Pereira não é padeiro, pois não? Ah, não. É o Pinheiro.	**(IME)**
		E quando o Pinheiro não é leiteiro.	Registo escrito.
Mas aqui já nos diz que não é.			**(IMV)**
		Então, se não é leiteiro...	

CARLA	DINA	ESLA	OBSERVAÇÕES
		Se o Pereira for padeiro, implica que Pinheiro não seja leiteiro, só que a recíproca pode não ser verdadeira, ou seja, Pinheiro não é leiteiro, não implica que este... o contrário pode não verificar-se... ou pode?	(IMV)
		Estão a perceber-me?	(IME)
	Ora...		
		Se Pereira for padeiro, este não pode ser leiteiro. Mas este não é leiteiro! Então este é padeiro!	
	Não vamos lá!		(IMV)
Se o Pereira não for padeiro, este pode ser leiteiro. Este não é padeiro mas se este for leiteiro, aquele tem que ser merceeiro!			
	Ora, tenho este à frente do Pereira, não está? Está sentado à frente do Pereira...		
		Pois, se este for leiteiro, tem que ser merceeiro.	
	O Nogueira está à direita do merceeiro. Agora diz que o Pinheiro... aqui diz que o Pinheiro não pode ser leiteiro, porque o Pinheiro está à frente do Pereira. E tu podes dizer que se o Pinheiro for leiteiro, o Nogueira já não pode estar à direita do merceeiro.		
	Quer dizer, pode...		(IMV)
		É assim: se o Pereira for padeiro é que o Pinheiro não pode ser leiteiro.	
	Porquê?		(IME)

CARLA	DINA	ESLA	OBSERVAÇÕES
		Porque se o Pereira for padeiro...	
	Se o Pereira for padeiro,		
		O Pinheiro não pode ser leiteiro.	
	Pode!		
		Não pode nada, porque assim, o Nogueira não pode estar nem ao lado de um nem ao lado de outro. Nem à direita de um nem do outro.	
Eu acho que um deles é merceeiro.			
		Se o Pereira for padeiro, este não pode ser leiteiro e se o Pereira for leiteiro, o outro não pode ser Padeiro.	
		Se o Pereira for leiteiro, o Pinheiro não pode ser padeiro.	Registo escrito.
		E ali diz-nos que o Pereira...	
Que o Pinheiro não é padeiro.			
	Olha uma coisa: um destes dois é merceeiro. Agora a gente experimenta. Se este for merceeiro, este não pode ser. Por isto, se este não pode ser, tinha que ser este, leiteiro. E o Nogueira tinha que ser padeiro. Só que o Nogueira também tem que estar à frente deste. Porque se estes dois estão à frente um do outro, o Pinheiro está na frente de Pereira. Este tem que estar à frente destes dois, não tem?		**(IMOrg.)**
		Já me perdi!	**(IMOrg.)**
	Olha, o merceeiro tem que ser ou este ou este. O Pinheiro está à frente do Pereira...		

CARLA	DINA	ESLA	OBSERVAÇÕES
	Se o Pinheiro está à frente e o Nogueira tem que estar à direita, o Nogueira tem que ser o último. Têm que estar os dois aqui para trás.	Então, espera aí se o Pinheiro... é isto!	
	Se for este o merceeiro, porque este aqui não dá... Se este for merceeiro, este aqui... este já não pode ser merceeiro. Este pode ser padeiro, este Pereira aqui e o Nogueira fica leiteiro e está à direita destes dois.		
Mas o terceiro também pode ser merceeiro.			**(IMV)**
	An?		
O Pereira também pode ser merceeiro.			
	Não pode, porque se o Pereira for merceeiro, o Pinheiro tem que ser, tem que ser leiteiro e o Pinheiro ao ser leiteiro, este tinha que estar no meio. O Nogueira já não estava à direita do Pinheiro. E, como o Pinheiro está à frente deste, do Pereira, tem que estar o Nogueira à direita destes dois.		**(IMV)**
Tu estás a fazer isto assim, para a direita.			
	Não, por exemplo...		
Tu estás a contar que estas profissões já estão pela ordem certa!			**(IME)**
	Não estou a ver outra maneira para a gente fazer.		**(IME)**

CARLA	DINA	ESLA	OBSERVAÇÕES
		Esta aqui, esta não quer dizer qualquer coisa? O Pinheiro não é padeiro. O pinheiro não é padeiro, então este é leiteiro.	Apontando para o enunciado. **(IMO)**
	Eu acho que o Pereira é leiteiro.		
		Eu também acho.	
Então mete aí.			
	Porque, olha o merceeiro... O Pereira e o Pinheiro estão à frente um do outro. Temos Pereira e Pinheiro e aqui o Oliveira.		Registo escrito.
	O Oliveira está atrás do Pereira. O Pinheiro está à frente de Pereira, está à frente.		
E o Nogueira está à direita de um deles.			
	E o Nogueira está à direita do merceeiro, que é um destes. Só estes dois é que podem ser merceeiros. Por isso, o Pereira, ... o Nogueira tem que ser Pereiro.		Sorrisos.
	Tem que ser padeiro ou leiteiro. Por isso ele só pode ser leiteiro, porque se estes dois estão à frente, este tem que estar o leiteiro.		
	Um deles tem que ser o merceeiro e o outro deles têm que ser o padeiro para o Nogueira estar à frente.		**(IME)**
À direita!			**(IMV)**
	Para a direita, porque, senão, não fica à direita. E para estar à direita tem que ser o Pinheiro o merceeiro e o Pereira o padeiro.		

CARLA	DINA	ESLA	OBSERVAÇÕES
Mas espera aí: pode estar à direita, não é? Mas agora também não sabes qual é que se pode estar mais à direita, se é o Pereira, que é o merceeiro ou é este!			**(IME)**
	Não porque estão à frente um do outro	Então vamos fazer isto.	
		Então vamos lá tentar. Vou passar. Como era?	
Então como é que sabes qual deles era o merceeiro?			**(IME)**
		Como era? Carniceiro.	Registo escrito.
	Tem que ser um daqueles dois. Experimentas. Se for o Pinheiro... Ora, espera aí...		**(IMOrg.)**
		Vamos fazer todas as hipóteses.	
	Se for este o merceeiro, nenhum destes mais pode ser o merceeiro. Por isso, o Pinheiro tem que ser este ou este. Logo, o Pinheiro já não pode ser o padeiro. Tem que ser o leiteiro.		
		Então vamos tentar.	**(IMOrg.)**
	Se for leiteiro já fica à direita de todos.		
Então tem que ser merceeiro.			
		Vamos tentar... Carniceiro, merceeiro, padeiro... Oliveira, quem era mais?	Registo escrito.
	Pereira, Nogueira e Pinheiro.		Leitura do enunciado.
		Pereira, Nogueira e Pinheiro.	Registo escrito.
	O Oliveira é carniceiro.		
		O Oliveira é carniceiro.	Registo escrito.
	Não pode ser mais estes...		
		Nem estes, nem estes.	Registo escrito.

CARLA	DINA	ESLA	OBSERVAÇÕES
Pinheiro não é padeiro.			
	Pinheiro não é padeiro e o Nogueira não é merceeiro. Está ao lado...		
Está à direita dele.			
	Está à direita do...		
		E agora vamos pôr o leiteiro no Nogueira.	
	Não, não comeces por aí. Começa por aqui: se o Pereira for merceeiro este já não pode ser merceeiro.		Registo escrito. **(IMOrg.)**
		Lá está ela com as cruzinhas pequeninas!	Sorrisos. **(IME)**
	Mas é para perceberes.		
		Mas eu quero perceber e aqui já não estou a perceber, porque também estão estas cruzes pequeninas.	**(IMV)**
	Então eu não escrevo. Olha, se este for merceeiro, este já não pode ser, pois não?		
		Pois.	
	E se este não pode ser, só sobra esta hipótese.		Apontou para a tabela.
		E, logo, estes também não podem ser.	
	Pois, porque este agora vai ficar no meio.		
E ele tem...			
	Depois, Nogueira é que tem que ser padeiro. Ia ficar no meio das duas profissões.		
Sabes porquê? Porque tu aqui diz que é à direita, não é? Tanto deste como deste.			

CARLA	DINA	ESLA	OBSERVAÇÕES
	O Nogueira está à direita do Pereira e do Pinheiro.		
		Não acham que o leiteiro é o Nogueira?	
	Acho.		
		Então vamos pôr lá isso. Pronto, já não é este, nem este, nem este.	Registo escrito.
		Então este é este.	Registo escrito.
	Sim.		
		Então é este e este é este.	Registo escrito.
		Agora vamos lá ver: o Oliveira é carniceiro. É.	Leitura do enunciado e Confirmação. **(IMV)**
		É o Pres... à esquerda de Pereira.	Leitura do enunciado.
		Só que aquele gráfico não dá para ver isso.	**(IMV)**
	Dá, dá para ver que está à esquerda. Não dá para ver se está bem.		
	Está à esquerda do merceeiro.		
		Oliveira está sentado à esquerda de Pereira.	Leitura do enunciado.
Ficou aqui, está à esquerda, não é?			
	O Oliveira está à esquerda do Pereira.		
		Mas vocês estão a ver a esquerda e a direita por onde? Porque aqui mesmo...	Apontou para o esquema. **(IMV)**
		Então como é que vocês vêm...	**(IMV)**
	Repara, estamos a supor que eles estão por ordem. Então o Oliveira, se o Pereira corresponde ao padeiro, o Oliveira está à esquerda deste.		**(IMV)**
	Está à esquerda.		
		Sim.	

CARLA	DINA	ESLA	OBSERVAÇÕES
	Agora, Nogueira está à direita do merceeiro.		Leitura do enunciado.
	Nogueira está à direita do merceeiro. Está, porque o merceeiro é este e o Nogueira está à frente.		Olha para o esquema.
	À frente não, à direita!		**(IMV)**
	E agora, Pinheiro está em frente de Pereira. Agora aqui é que não dá bem para ver, porque o Pinheiro está em frente de Pereira...		**(IMV)**
Pois, o que nós fizemos foi pôr o Nogueira...			**(IMV)**
	O Nogueira também está à frente do Pinheiro. Então isso tem significado, tem que se fazer por aqui.		Por esquema. **(IMV)**
Pusemos o Nogueira o mais à direita possível.			
	Pusemos o Nogueira à direita do Pereira e do Pinheiro, porque eles estão os dois um à frente do outro e pusemos aqui o Nogueira.		
Está sempre à direita.			
		Mas o Nogueira só está à direita de um deles.	**(IMV)**
	Está à direita dos dois, porque eles estão os dois um à frente do outro.		
Está sempre do lado direito, quer de um, quer do outro.			
	Estás a perceber?		
		Mas pode estar um, como estávamos a fazer...	
Ou pode estar logo a seguir ou não.	Mas não interessa, ou está em cima ou está em baixo.		

CARLA	DINA	ESLA	OBSERVAÇÕES
Mas aqui está a dizer e nós pusemos o mais à direita possível.			(IMV)
	Significa que está à direita. Só,		
		Vamos ver se isto coincide.	(IMV)
	O Oliveira está à esquerda...		
		O Pereira é padeiro.	
Se o Pereira for padeiro, Pinheiro não é leiteiro.		Se o Pereira for padeiro, o Pinheiro não é leiteiro.	Leitura do registo escrito.
	E não é.		Confirmação.
O Pinheiro é merceeiro, está à direita...			
		Se o Pereira for leiteiro... Ah! Mas esta não pusemos lá!	(IMV)
	Mas espera aí, vamos lá ver...		
	Se o pereira for leiteiro, o Pinheiro não pode ser padeiro.	Se o pereira for leiteiro, o Pinheiro não pode ser padeiro.	Leitura do registo escrito.
Mas o Pinheiro não é leiteiro.			
	Não é leiteiro.		
Será padeiro.			
	Eu acho que dá. Agora a gente põe que eles estão uns ao lado dos outros e que o Nogueira está à direita, tanto do Pereira como do Pinheiro.		(IME)
	É preciso escrever? Não é preciso escrever por onde é que a gente...		(IME)
É preciso é.			
		Mas não estou muito convencida da resposta!	(IMV)
	Mas a gente diz que pusemos assim por ordem...		
		Mas ainda havia outra hipótese.	(IMV)
	Eu não estou a ver outra hipótese!		(IMV)

CARLA	DINA	ESLA	OBSERVAÇÕES
Havia hipótese se tivéssemos os merceeiros.			
		Pois, se puséssemos este merceeiro e este padeiro.	
		Estás a perceber?	
Ficava sempre à direita, este.			
	Qual é que punhas para a direita?		
Trocar este por este.			
	Este não pode ser padeiro. Diz lá que este não é padeiro. Por isso mesmo, ou é leiteiro ou é merceeiro.		
Não é leiteiro. Se fosse leiteiro não estava à direita. Estava à frente.	Se fosse leiteiro este já não estava à direita.		
		Quem é que não pode ser padeiro?	
	Este. Eu só tenho este espaço e este. Como ele já não pode ser leiteiro, se fosse leiteiro já não tinha ninguém à direita.		
		Então só pode ser essa hipótese.	(IMV)
Eu acho que sim.			
	Se supusermos que eles estão por ordem, na mesa, não é?		(IMV)
Sim.			
		Agora pões aqui: como a gente já chegou à conclusão, metes aqui conclusão mesmo.	(IME)
	Oliveira está à esquerda de Pereira.		Leitura do enunciado.
Não é carniceiro.			
	O Pereira não é carniceiro, porque já está ocupado.		
Pois, mas...			
		Mas vais explicar o raciocínio todo?	(IME)
	Não é preciso?		
		Eu só explicava a questão...	

CARLA	DINA	ESLA	OBSERVAÇÕES
Do Pereira.			
		Pois.	
Mas mete isso assim.			
	Então vou dizer assim: como este aqui tem que estar à direita... como estes dois, este e este, estão à frente um do outro,...		
O Nogueira tem que estar à direita deles.			
	O Nogueira tem que estar à direita deste e do outro.		
	Como o Oliveira está à esquerda de Pereira...		
O Pereira não é carniceiro.			
	Este não é carniceiro.		Registo escrito.
		Logo, ou é merceeiro ou leiteiro.	
	Agora é assim: o Pinheiro não podia ser padeiro...		Registo escrito.
Nem carniceiro.,	Nem carniceiro.	Nem carniceiro.	
	E este aqui... O Nogueira não podia ser merceeiro.		Registo escrito.
		Porquê?	(IME)
Porque estava à direita dele.			
		Porque estava à direita do merceeiro, por isso não podia ser ele o merceeiro.	
		E agora é que começa a confusão!	(IME)
	Agora é assim: se o Pereira e o Pinheiro estão à frente um do outro		Registo escrito.
		Se o Pereira e o Pinheiro estão à direita um do outro...	
	E se o Nogueira tem que estar à direita de quem?		(IME)

CARLA	DINA	ESLA	OBSERVAÇÕES
Do merceeiro?			
	Nogueira à direita, logo o Nogueira... Logo,... Se o Pereira e o Pinheiro estão à frente um do outro. Agora, e estes só podem ser... e um destes tem que ser merceeiro.		
Um destes tem que ser merceeiro, o Pinheiro não pode ser merceeiro.			
Agora podes deixar que o Nogueira...			
	O Nogueira tem que estar à direita do merceeiro, logo o Nogueira...		
	Tem que ser o último, que é para estar à direita.		Registo escrito.
		O último como?	**(IME)**
	Porque eu digo que eles estão por ordem.		
Já tens esta ocupada. Sabes que tens três. Sabes que o Nogueira tem que estar à direita. Sabes que o máximo à direita é este.			
	Porque eu pus aqui: se supusermos está mal escrito. Como é que se escreve supusermos?		**(IMV)**
Pronto, nós bloqueámos. Puseste, agora tu não sabes se é esta. Mas como este não pode ser padeiro, logo só sobra aquela.			**(IME)**
	Logo, o Nogueira tem que ser o último da tabela.		Registo escrito.
	Está feita, vamos passar para outro.		**(IMV)**

GRELHA DE REGISTO PARA O PROBLEMA Nº 2 – GRUPO A

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
	O Américo estava a tentar construir um triângulo de triângulos. Para tal, começou com um triângulo na primeira fila, depois passou a três triângulos e na terceira fila construiu mais cinco. Terminou a construção do triângulo na quarta fila e decidiu contar os triângulos que esta figura tinha no total. Quantos são, afinal.		Leitura do enunciado.
	Então, pequeninos. Começamos pelos pequenos. Triângulos pequenos. Triângulos de uma unidade.		Registo escrito.
		Então pois aqui: unidade.	
Tem que ser 1, 3, 5, 7			Registo escrito.
	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16. Dezasseis pequenos.		
	Agora...		
		De duas unidades	**(IME)**
	Não dá para ver.		
		Tem que ser quatro.	
	Tem que ser triângulos de quatro unidades.		Registo escrito.
		Agora tens que pôr ali quatro unidades.	
	Isto é a unidade. Quatro unidades são quatro pequeninos		
	Que é este, ... 2, 3, 4.		
		Então mas é isso que se pede?	**(IMO)**
		Quantos são afinal?	Leitura do enunciado.

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
Triângulos que têm esta figura.			
		Têm estes só!	
	E agora dá para ter triângulos de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.		
		Então, mas não tem só estes triângulos aqui?	(IMO)
	Não! Então não dá para fazer estes triângulos?		(IMO)
		Têm a certeza?	(IMO)
	É.		
	Já não podemos fazer igual a este lado?		(IMOrg.)
	De nove é: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Este é um triângulo.		
	Dá para ter um, este aqui.		
Dá para ter um, dá!			
	E dá para ter... não dá para ter para baixo.		
E agora o exterior. Dezasseis.		Então podes ter 1, 2, 3..., 9	
		Nove só.	
	Só uma coisa, o de três não dá para ser... este, este aqui e este aqui e este aqui.		(IME)
Quatro, sim.			
	Mas depois não dá para ter este aqui? Tens triângulos diferentes.		(IME)
São quatro na mesma!			(IMV)
	Este. Este não. Este já está! É quatro.		
	Então, dezasseis... 17, 18, 19, 20, 21, 22. Vinte e dois triângulos.		
Eu acho que sim.			
	Acho que não há mais!		(IMV)
	Percebeste?		

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
Eu estava a pensar que tínhamos que fazer triângulos até preencher toda a área.			(IMOrg.)
		Um, dois, três, quatro. Então e aqui... Espera, um, dois, três, quatro...	(IMV)
	Dá para ver triângulos de uma unidade, triângulos de quatro unidades...		(IMV)
		Prontos.	
	E agora escreves assim: encontramos...		
		Então isso já está: uma unidade, duas unidades, quatro unidades e isto, nove unidades.	Elaboração de figuras.
E agora dezasseis, um. É ele todo.			
	Pronto, já está. Chega.		

GRELHA DE REGISTO PARA O PROBLEMA Nº 3 – GRUPO A

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
		Mais um comerciante.	
		Um comerciante possui dez medidas, contendo 1, 2, 4, 5, 6, 12, 15, 22, 24 e 38 litros.	Leitura do enunciado.
		Dez medidas.	Sublinhou no enunciado.
	Cada uma delas está cheia de um só líquido. Umas estão cheias de leite, outras de água e outras de azeite. Uma única medida ficou vazia. Para isso gastou duas vezes mais água do que leite e duas vezes mais azeite do que água.		Leitura do enunciado.
É melhor ler outra vez.			(IMO)
		Vou meter aqui as medidas, que eu gosto muito de fazer bonecos.	(IMO)
Umas estão cheias de leite, azeite...			Leitura do enunciado.
	Então, uma de água é igual a duas de leite.		
	O que é que estás a fazer?		
		Medidas.	
Quantos são? Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, dez.			
		Leite.	Escrita dos dados.
	Azeite e água.		
		Azeite e água.	
	E agora diz assim: gastou duas vezes mais água do que leite. Então, uma de leite é igual a duas de água.		
		Uma única medida ficou vazia.	Leitura do enunciado.
	Então pronto, mas agora gastou duas vezes mais água do que leite.	Espera aí, gastou duas vezes mais água do que leite.	

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
	Uma de leite são duas de água. Uma de leite são duas de água.		Para que a colega registasse.
		Neste caso.	
	É uma de água, duas de azeite.		
	Escreve isso: uma de leite, duas de água e uma de água são duas de azeite.		
	Uma de água são duas de azeite.		Registo escrito.
		Então, uma de leite são quatro de azeite.	Registo escrito.
Sim.	Sim.		
	Igual a quatro de azeite. Se uma de água são duas de azeite...		
		Uma de água são duas de azeite, é meia de leite, não é?	
	Mas não interessa, porque só tens que ter um!		**(IMV)**
	Agora diz: umas estão cheias de leite, outras de água e outras de azeite. Uma única medida ficou vazia.		Leitura do enunciado.
	Ah! Agora temos que ver. Temos que gastar uma...		**(IMO)**
		Então vais gastar esta.	
	Não, não sabes! Se tu gastares essa, não te vai dar, tens que jogar estas duas. Tens que ver, por exemplo, gastaste esta? Tens que ter uma de duas e outra de quatro.		**(IMOrg.)**
		Tem que ter uma de dois e outra de quatro?	
Se gastar esta, gastas esta e gastas esta.			

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
		Só gastou uma. Tenho que ver é quantos litros gastei!	(IMO)
	Umas estão cheias de leite, outras de água e outras de azeite. Uma única medida ficou vazia. Para isso gastou duas vezes mais água do que leite e duas vezes mais azeite do que água.		Leitura do enunciado.
	Porque olha, se tu gastares uma destas, dá-te para fazeres com esta e com esta. Por exemplo, gastas leite, isto é água e isto é azeite. Dá para ser esta ou esta. Não dá para ser mais nenhuns.		
	Agora se for dois, tinhas de ter uma de quatro e outra de oito e não tens. Se for quatro, tens de ter uma de oito e outra de dezasseis. Também não tens. Se for cinco, tinhas de ter uma de dez...		(IMV)
E uma de vinte			
	E uma de vinte.		
Quinze, trinta, sessenta, também não dá.			(IMV)
	Há duas hipóteses.		
Que contém cada medida?			Leitura do enunciado.
Então... cada medida? Mas todas elas?			(IMO)
		Duas vezes mais água...	Leitura do enunciado.
Então isto pressupõe que é...		Eu acho que a partir de aqui nós podemos saber quantos litros é que ele gastou.	(IMO)
	Ou gastou esses litros... ou gastou quatro.		

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
		Que esses?	
	Ou gastou esses litros ou gastou, 26, 27, 28, 29, 30, 31...		
		Que esses litros?	(IMV)
	Como?		
		Tu disseste "ou gastou esses litros".	
	Ou gastou seis litros ou gastou estes, vinte e quatro mais doze. Dá quarenta e dois. Ou gastou quarenta e dois litros ou gastou sete litros.		
		Então, mas quarenta e dois não temos e sete também não!	(IMV)
Então, quarenta e dois é a soma da água com o azeite e com o leite.			
		Mas é só uma medida! São três!	
Que contém cada medida?			Leitura do enunciado.
Eu acho que isto aqui, que contém, é que líquido é que leva lá dentro.			(IMO)
		Pois, mas a medida que tu gastas, qual foi?	(IMO)
Então, nós temos aqui duas possíveis que é esta e esta!			
		Mas tens esta?	
		Mas eu acho que não é assim!	(IMV)
		Eu acho que... estão duas de leite, quatro de água e outras de azeite.	
		Uma única medida ficou vazia. Para isso gastou duas vezes mais água...	Leitura do enunciado.
		Para já, nem começava a fazer assim.	(IMOrg.)
		Começava: duas vezes mais de água que de leite	Leitura do enunciado.
	Então olha...		

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
Duas vezes mais dá este.		Então se gastou de leite um...	
	Então ele gastou esta aqui ou gastou esta.		
		Ah, está bem.	
	Despejou esta lata. Se despejou esta lata tem duas vezes mais de azeite. Havia uma com azeite que não gastou e quatro vezes mais de leite.		
		Olha, se gastou um litro de leite...	
	Não podes... Eu acho que é ao contrário...		(IMV)
		Gastou dois litros de água.	
	Olha, se ele só gastou uma lata, imagina que ele gastou esta lata. Esta lata é qualquer coisa, não interessa, tinha azeite, tinha que ter azeite. Não, isto é azeite, água e leite. Esta tinha azeite, esta tinha água e esta tinha leite. Só que ele não gastou estas, só gastou esta e gastou duas vezes mais de leite e quatro vezes mais de água. Mas foi só esta que ele gastou!		
		Então vamos pôr lá: azeite, água e leite.	Registo escrito.
		Ele gastou uma de leite, ou seja, mandou fora seis litros.	
Seis litros de leite. Sim.			
	E duas de água.		
		Vinte e quatro litros. Não!	
	Duas de água dá doze.		
	Olha, duas vezes mais água do que leite.		Leitura do enunciado.

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
		Ah, está bem!	
	E duas vezes mais azeite do que água.		Leitura do enunciado.
	Quer dizer que ele gastou quatro de leite e duas de água. É o equivalente...		
		Doze litros de água e mais...	
	Gastou duas vezes mais água do que leite e duas vezes mais azeite do que água.		Leitura do enunciado.
		E quatro vezes mais de azeite.	
	Ele só gastou este recipiente mas é equivalente a ter tanto de água e tanto de leite, porque eles estão em recipientes diferentes, são coisas diferentes.		
		Então, e agora o azeite?	
	O azeite é este. Ele gastou azeite só. Mas é equivalente a gastar o dobro de água, duas vezes a medida de água...		
		Para isso gastou duas vezes mais água do que leite.	Leitura do enunciado.
	Temos que ir primeiro ao leite: gastou duas vezes mais azeite do que água.		Leitura do enunciado.
		Então não gastou nada disto!	**(IMV)**
		E duas vezes mais azeite...	Leitura do enunciado.
	Já vamos para esta relação.		**(IME)**
		Do que água, então gastou... então gastou muito azeite!	**(IMO)**
	Gastou vinte e quatro. Então já tinhas dito...		

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
	Então, gastou duas vezes mais água do que leite		Leitura do enunciado.
	Um de água é equivalente a dois de leite, não é? Foi o que tu escreveste aqui.		(IMV)
		Não. Escrevi ao contrário: escrevi duas de azeite.	(IMV)
	Por isso gastou duas vezes mais de água do que leite.		Leitura do enunciado.
Então, uma de leite, duas de água.			
	Sim, uma de leite, duas de água. Disse ao contrário! Uma de leite, duas de água.		(IMV)
	E duas vezes mais azeite do que água.		Leitura do enunciado.
	Uma de água é duas de azeite. Então, fazendo a relação...		
		Uma de leite é quatro de água.	
Quatro de azeite.			(IMV)
	Uma de leite dá quatro de azeite.		
		De azeite, exacto.	
	Então, se dá quatro de azeite, ter es quatro de azeite é a mesma coisa que teres metade de água e um quarto de leite.		
	Metade de água e um quarto de leite.		
		Pois é.	
	Então já está.		
	E aqui dá igual.		
E aqui também, também se pode verificar essa situação.			
Quatro litros de azeite, metade e água e um quarto é leite.			

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
	A medida que gastaste é esta ou esta, mas equivalente a teres metade de água e um quarto de leite.		
	Um litro tem leite, este dois litros tem água e este tem azeite. Agora, este leite, este água e este azeite e os outros não podemos somá-los.		
Mas aqui diz que uma única ficou vazia!			Leitura do enunciado. **(IME)**
	Fica a de quatro.		
		Esta tem leite, esta tem água e esta tem azeite.	Registo escrito.
	Dá duas hipóteses.		**(IME)**
		Gastou duas vezes mais de água...	Leitura do enunciado.
		Ai, isto é complicado!	**(IMO)**
	Então tens uma de leite e duas de água, não é? A água não é o dobro de leite? E o azeite é o quadruplo...		
		Mas eu não sei se isto está bem!	**(IMV)**
O quê?			
		Se isto... o nós estarmos a dizer que isto é leite...	**(IMV)**
	Tem que ser, por causa desta relação.		**(IMV)**
		Duas vezes mais água...	Leitura do enunciado.
	Lembras-te daquelas dos ovos? Tinha cestas dos ovos. Dava duas hipóteses também. Se escolhesses esta cesta ia dar aquela, se escolhesses aquela cesta ia dar aquela.		**(IMOrg.)**
		Então esta é azeite.	

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
	É		
		Então há duas que podem ficar, estas!	
Há duas maneiras de gastares uma medida.			
	Ou é esta maneira ou é esta.		
		Mas aqui diz uma única!	(IMV)
	Porque só gastaste uma medida vazia. Pronto, só gastaste. É assim, se gastaste esta, acontece esta situação. Gastaste só uma medida mas podes ter escolhido em vez de escolheres esta, escolhias esta. Mas nunca escolhes as duas ao mesmo tempo, porque se ele pusesse aqui: duas medidas ficaram vazias, tu podias juntar esta com esta e tinhas que fazer as contas para isto tudo. Estás a perceber? Já é duas hipóteses. Só gastaste uma medida, na mesma. Podes ter a de quatro ou a de vinte e quatro.		
		Então e esta aqui assim?	(IME)
	Não dava, porque não há relação. Tinhas que ter uma de dez e uma de vinte.		
Não dá. Só tem essas duas medidas.			
	Só tem essas duas hipóteses.		
Agora escreve-se aí.			
		Não fiquei convencida!	(IMV)
Gastar			Registo escrito.
	Gastar quatro litros de azeite.		
Quatro litros de azeite.			Registo escrito.

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
	Que é o dobro de água, que é um quarto de água.		
Que é... este é o quê? Água? Não é um quarto, é meio.			(IMV)
	É meio, pois.		
Meio de água.			Registo escrito.
	E um quarto...		
De leite.			Registo escrito.
	Isto aqui...		
É quatro sobre dois, que é metade, que é a mesma coisa que dois litros.			
	Dá dois.	Dá dois.	
Sim, é a mesma coisa.			
	E isto dá um quarto.		
Ah, espera aí, é quatro.			
	Agora faz o mesmo com esta relação.		
Gastar doze litros de água.			Registo escrito.
Temos duas hipóteses de resolução.			Registo escrito.
		De resolução mas não ficamos a saber o que é que tem cada uma!	(IMV)
	Ficas.		
Então não ficas? Sabes que aqui tem que ter leite, água e azeite.			
		E as outras?	(IMV)
	As outras não podes, não tens potes para dar.		
		Mas aqui: que contém cada medida?	Leitura do enunciado.
	Só consegues concluir destas três mais estas três.		(IMV)
Então estas não têm relação com estas, não podemos dizer que estas têm relação.			(IMV)
Através da relação que fizemos só temos estas.			(IMV)

GRELHA DE REGISTO PARA O PROBLEMA Nº 4 – <u>GRUPO A</u>

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
		Três casais, os Silva, os Costa e os Fonseca querem atravessar um rio.	Leitura do enunciado.
Mas só dispõem de um barco.			Leitura do enunciado.
		Vamos fazer um rio.	Registo escrito.
		Mas só dispõem de um barco.	Leitura do enunciado.
Calma.			
	Deixa ler primeiro.		**(IMO)**
	Duas pessoas de cada vez. Ora acontece que os maridos são muito ciumentos e, portanto, nenhum deles quer deixar a sua mulher, seja numa das margens ou no barco, com os outros homens, a não ser que eles também estejam presentes – elas só poderão ficar sozinhas ou na companhia das outras mulheres.		Leitura do enunciado.
É assim, eu acho que...			
	Temos que ir por tentativas. Primeiro tem que ir tipo o marido com o casal.		**(IMOrg.)**
Vai sempre uma mulher no barco.			
	Vai por exemplo, vai um casal.		
E sem mulheres.			
	Casal, marido e mulher.		
Deixa lá ficar o homem.			
	Deixa lá ficar a mulher.		
A mulher, sim.			
		E se deixar o homem?	**(IME)**
	Depois, o homem vem para trás.		
O homem leva a mulher.			
	O homem vem para trás.		
		Pois, tem que deixar a mulher...	**(IME)**

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
	Não! Tem que ficar o homem.		
		Não, não.	
Se ele deixar ficar a mulher...			
		Senão a mulher fica com os outros homens!	**(IMV)**
	Não, porque depois a mulher vem buscar outra mulher e fica a mulher deste aqui, do primeiro.		**(IMOrg.)**
Explica lá outra vez!			**(IMV)**
	Vem o casal Silva, por exemplo.		Registo escrito.
		Pronto, já percebi.	**(IMV)**
	E fica aqui o homem.		Registo escrito.
	E agora vem a mulher dele para trás.		Registo escrito.
E vai buscar uma mulher.			
	A mulher Silva.	E vai buscar...	
	E vai buscar uma mulher		
		A mulher Fonseca, por exemplo.	**(IME)**
	Vamos pôr assim:...		
mF			
	Aqui Silva homem, Silva mulher, Costa homem, Costa mulher, Fonseca homem, Fonseca mulher.		Registo escrito.
	Então, estes aqui vão os dois e fica aqui...		
		Fica o homem.	
	Fica aqui o S homem.		Registo escrito.
		E vem a mulher.	
	Agora vem o S mulher.		Registo escrito.
	Vem buscar a Fonseca	Vem buscar a...	
	Agora vai para aqui e fica o S mulher e o S homem.		Registo escrito.
		Fica aqui o S homem e o S mulher.	
	E agora para aqui vai o F mulher.		Registo escrito.

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
	Porque assim, vão estar um homem por aqui mas tem mulher. Fica aqui dois homens mas está no meio esta. Por isso não pode ficar.		(IMV)
	Agora vem para aqui esta e vem buscar o marido.		
		Mas aqui já está a ficar um homem com duas mulheres.	(IMV)
	Mas diz: elas só poderão ficar...		Leitura do enunciado.
		Sozinhas...	Leitura do enunciado.
Ou na companhia das outras mulheres.			Leitura do enunciado.
	A não ser que eles também estejam presentes.		Leitura do enunciado.
		Os maridos?	(IMO)
	Sim, se os maridos estiverem presentes pode lá estar outro homem qualquer.		(IMO)
		O marido da coisa...	
	Então agora vem a F mulher e vai buscar...		Registo escrito.
O homem.			
		Não, porque vai sozinha com ele no barco!	(IMV)
Então o homem dela!			
	O homem dela!		
	E deixa ficar aqui o homem dela.		
	Ela agora vem e traz e vai levar o mC.		Registo escrito.
Agora vem para trás o Fm.			
	Aqui vai ficar o Ch sozinho e aqui Fm também. Fm, Fh, Sh e Sm.		Registo escrito.
		E depois vem a Cm.	

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
Vem a Cm buscar o marido.			
	Agora vem a Cm buscar o marido.		Registo escrito.
	Agora fica: Ch, Cm, Fm, Fh, Sh e Sm.		Registo escrito.
Sh mais Sm.			
	Então vamos ter que escrever...		**(IME)**
		Já está escrito. Só se calhar melhorar o esquema.	**(IMV)**
	Explicamos assim: como pode ficar com o marido, ~~um~~ homem desde que fique lá o marido da mulher, tem que ir primeiro uma mulher.		**(IME)**
	Como pode ficar um homem junto com outras mulheres, desde que esteja lá os seus respectivos maridos, tem de ser uma mulher a fazer a travessia primeiro.		Registo escrito. **(IME)**
		Com outra mulher.	
Não, com o marido!	Não, mulher com o marido da mulher.		**(IMV)**
Uma mulher pode andar sempre com o marido e com outra mulher.			**(IME)**
		Não! Com outra mulher.	**(IMV)**
Não, ela leva o marido!	Não, com o marido!		**(IMV)**
Sh mais Sm!			
	Foi a mulher mais o marido. Deixou lá o marido sozinho. Depois veio buscar uma mulher e ficou lá ela e o marido.		
	É preciso explicar tudo?		**(IME)**
		Tens que explicar melhor o esquema.	**(IMV)**
Leva... leva...	Não percebes? Olha, foi o Sh mais o Sm.	Está aqui todos!	
	Então tira estes dois.		Apagou o Sh e o Sm da margem esquerda.

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
	Estes vão para lá e ficam estes quatro. Depois, aqui vai ficar só este. Agora vêm...		
		Então para... é assim, deixa lá ver. Sh mais Sm. Depois aqui é só Sh. Vem e estão aqui estes.	
	Esses quatro, pronto.		
	E agora vai para lá...		
	O Fm.	Fm.	
	A Sm mais o Sh.	E fica a Sm mais o Sh.	
	Agora vai para lá e fica cá o Fh e a Cm.		
		O Sh e Cm e leva o Fm e Fh e vai deixar o Fh.	
	E os que já estavam de trás.		
		Fm vem buscar...	
	A Cm.		
Dois casais.	E fica aqui duas mulheres.		
	Dois casais completos.		
Porque vai para trás a mulher a buscar o marido.			
	Vai para trás e vai buscar o marido.		
		Pronto, está.	

GRELHA DE REGISTO PARA O PROBLEMA Nº 5 – GRUPO A

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
		O Artur e o Bruno decidem jogar ao jogo das sequências de números. Sabendo que a estratégia seguida pelo Bruno para acrescentar um novo número à sua sequência é a de adicionar os dois últimos números ditos pelo Artur, qual será o número que ele dirá quando o Artur referir o 231?	Leitura do enunciado.
	Como é que é?		**(IMO)**
Tem que se ler outra vez.			**(IMO)**
	Ora bem, este diz um número e este repete. Depois este diz outro e ele soma estes dois últimos. Depois este diz 6 e, 6 mais 3 vai dar 9. Depois este diz 10 e ele soma 10 mais 6 que vai dar 16. Depois este diz 15 e ele soma 15 mais 10 que vai dar 25.		
	Ele soma tudo menos um número.		
		O um.	
	O um. Ele diz o 1 também. Depois ele diz outro número e ele soma esse número e o anterior que ele disse.		Explica à colega.
		Três mais um.	
Espera aí. Ah, e o Bruno vai dizer a soma dos que ele diz.			**(IMO)**
	A soma dos dois últimos.		
		Três mais um deu quatro. Depois, três mais seis deu nove.	Fez círculos a explicar isto.
O Bruno diz sempre a soma dos dois últimos do Artur!			

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
		Depois o Artur disse dez e o Bruno fez: dez mais seis, dezasseis. E então o outro, o Artur, disse quinze e o Bruno fez: dez mais quinze, vinte e cinco.	
		E agora qual é o outro que ele vai dizer?	
		Agora temos que ver aqui uma sequência.	**(IMOrg.)**
Daqui para aqui três, quatro, cinco, ...			
		São os números triangulares.	
	Agora, quando o Artur disser o 231, qual é que este vai dizer?		Registo escrito.
Ele daqui para aqui ele acrescenta três.		Pronto, mas aqui também tem de...	
Quatro, cinco, ...			Registo escrito.
		Ah!	
Aqui já é 21.			
		Então temos que fazer essa sequência toda.	**(IMOrg.)**
E ele aqui já é 36.			
		Então, Artur diz 21 e o outro diz 36, não é?	Registo escrito. **(IMV)**
Sim.			
	Faz com a máquina.		
		Depois, o outro agora diz...	
	Espera aí, é 21...		Utilização da calculadora.
		Isto é um cinco, não é?	
Sim, cinco.			
	É quinze mais vinte e um.		
		Agora vinte e um mais sete?	
28.	Ora vinte e um mais sete...		Utilização da calculadora.
		Ai, pois é!	Sorrisos.

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
		Vinte e oito mais vinte e um?	
49.			
		49.	Registo escrito.
	Faz primeiro os de cima!		
		Ah, está bem.	
		28 mais ...	
Aqui podemos pôr para onde partias. Puseste aqui sete, agora põe aqui oito.			
		Ah, oito!	
	Vinte e oito mais...		Utilização da calculadora.
		Oito.	
36.			
	Mais nove...		Utilização da calculadora.
45.	Dá 45.		
Mais dez...			
Quem é que vai dizer o 231?			**(IME)**
	É o de cima.	É o de baixo.	
		É o de cima.	
		Então mas diz se vai somando cada vez...	
Mais onze, sessenta e seis.			
Mais doze, setenta e oito.			
		78.	Registo escrito.
Mais treze, noventa e um.			
		91.	Registo escrito.
Mais catorze, cento e um... mais quatro, cento e cinco.			
		105 só.	Registo escrito.
Mais quinze.			
	Espera aí, noventa e um mais dez dá 101.		
		130, 140...	

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
153.	136 mais 17..		Utilização da calculadora.
	153 mais 18...		Utilização da calculadora.
	171.		
Mais dezanove.			
	Mais 19, 190.		Utilização da calculadora.
		E agora encontrar o número.	Sorrisos.
Mais vinte, duzentos e dez.			
	Mais vinte e um...		Utilização da calculadora.
231.			
	Mais 21, 231.		Utilização da calculadora.
		Agora é este. Agora é somar estes.	
		Portanto, confirma só: 21 mais 6, 36, é isso?	**(IMV)**
Sim... 21 mais 6? Não! 21 mais 14.			**(IMV)**
	21 mais 28, 49.		**(IMV)**
21 mais 15!			
		21 mais 15, 36.	
Agora é 21 mais 28.			
	Dá 49.		
		36 mais 28...	
	36 mais 28, 64.		Utilização da calculadora.
		45 mais 36...	
	81.		Utilização da calculadora.
		45 mais 55...	
100			
	Dá 100.		Utilização da calculadora.
		55 mais 66...	
	55 mais 66, 121.		Utilização da calculadora.
66 mais 78...			
	66 mais 78, 210.		Utilização da calculadora.
		210.	Registo escrito.
78 mais 91...			
	78 mais 91, 169.		Utilização da calculadora.

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
91 mais 105...		91 mais 105...	
	91 mais 105, 196.		Utilização da calculadora.
		196.	Registo escrito.
		105 mais 120...	
225.			
	225.		Utilização da calculadora.
120 mais 136...		120 mais 136...	
256.			
	256.		Utilização da calculadora.
		136 mais 153...	
	289.		Utilização da calculadora.
153 mais 171...			
	324.		Utilização da calculadora.
171 mais 190...			
	171 mais 190, 361.		Utilização da calculadora.
190 mais 210...			
		200, 300, 400.	
210...			
		400, 631.	
Não! É 610. 210 mais 231, 441.			
	210 mais 231...		Utilização da calculadora.
		Dá 441.	Registo escrito.
	2650.		Sorrisos.
Já estás s ficar cansada!			
	Então, pronto.		
		Qual será o número que ele dirá?	**(IME)**
		441.	
	Mas temos que dizer que o Artur faz os números triangulares, para a gente chegar a esta conclusão.		**(IMOrg.)**
		Que triangulares?	**(IMV)**
Soma sempre mais um.			
	Então não é?		

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
Não devíamos ter feito uma... procurar um termo geral?			**(IMOrg.)**
		1, 2, 3... 1, 2, 3.	Está a desenhar os triângulos de pontos.
	É n...		
	É n vezes n mais um sobre dois.		
		É capaz!	
	Deixa ver se dá certo.		**(IMV)**
		Então, sem se fazer por bonecos...	
		Está certo, 1, 2, 3. Então olha, ele faz uma sequência que é 1, ...	
	Espera aí, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. O quarto valor...		
		Mas não é preciso falar dos números triangulares!	**(IMV)**
	O quarto é igual a quanto? Quatro vezes cinco sobre dois...		Registo escrito.
10.			
	Quatro vezes cinco, a dividir por dois dá dez.		Registo escrito.
		Mas não deve ter que se falar nos números triangulares!	**(IMV)**
	Mas dizes que encontrámos esta sequência, que vai ter números triangulares.		
		Basta dizer que ele começa... então já reparaste que é 3, 4, 5, 6, não é nada números triangulares!	**(IMV)**
	É! Estás a ver a diferença mas isto faz números triangulares: 1, 3, 6, 10, 15... são os números triangulares.		**(IMV)**
		Pois são.	

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
		Mas isso não nos interessam para nada, depois apareceu o resto!	**(IMV)**
	Interessa, já sabes que os números triangulares...		**(IMV)**
Sabias que é sempre mais um.			
	É o anterior mais este aqui mais um.		
		Pois, por isso é que não vale a pena, não é preciso falar em números triangulares!	
	Como verificamos...		Registo escrito.
Também consegues fazer sem saberes os números triangulares.			**(IMV)**
		Sem saberes que isso eram números triangulares não consegues saber fazer?	**(IMV)**
	Mas tu verificaste que, por exemplo este número aqui, o próximo a seguir era mais quatro!		**(IMV)**
		Pronto.	
	Depois era mais cinco, depois era mais seis...		
		Mas se tu não soubesses que isso era números triangulares, também podias fazer!	**(IMV)**
	Mas dizes que há uma relação. Uma relação entre os números.		
	Como verificamos que os números do Artur tinham uma relação.		Registo escrito.
	Agora depende...		
	Qual foi a relação? Era...		**(IME)**
		Era...	
Era sempre n mais 1.			

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
		Era assim: para encontrar, para encontrar o próximo número que ele dizia, que ele ia dizer, somava ao anterior que tinha dito mais... mais um.	
	Mais um?		**(IMV)**
		Pois, assim não está bem dito!	**(IMV)**
Não, porque senão aqui ele fazia quatro!			**(IMV)**
	Ou seja, o próximo número a dizer era sempre		Registo escrito.
		Mas não é preciso escrever isto tudo. Se a gente escrevesse aqui no esquema bem indicadinho, não era preciso: mais dois...	**(IME)**
	Como verificamos que os números do Artur tinham uma relação, ou seja, o próximo número a dizer era sempre...		Leitura do registo escrito.
	O anterior...		Registo escrito.
		Mais quatro.	
	Mais...		
		Mais cinco.	
	Como verificamos que os números do Artur tinham uma relação...		Leitura do registo escrito.
N igual a dois dá três.			
	N igual a 1...		
		A gente percebe!	**(IMV)**
Não sei se percebe o nosso raciocínio!			**(IMV)**
		Olha, um mais dois dá três e estes dão o quatro.	Registo escrito.
	Ou seja, o primeiro...		Registo escrito.

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
		O professor também pôs aqui uma sequência!	(IMV)
Mas o que nós queremos é saber como é que ele vai dizer este...			(IMV)
	Ou seja n igual a um é igual a n vezes n mais dois sobre dois.	Soma dois.	Registo escrito.
Então e este vai dizer este porquê? Porque soma três?			(IMV)
		Porque soma três. E a este soma mais do que tinha aqui.	
Mas só que... mas...	Já está aqui, já está feito, pronto.		
Mas não dá, sabes porquê? Porque ele aqui vai somar o mesmo número.			(IMV)
		Pois, estes três têm a ver com este dois e é mais um do que este. Estás a entender?	
Mas tu disseste que este dois vem porquê? Porque somo mais um do que disse.			
	Já está!		
		Imagina que tinha aqui um. Um mais um, dois. Dois mais um, três...	
	Como verificamos que os números do Artur tinham uma relação, ou seja, n igual a um, que é este, n igual a dois dá este, n igual a três dava-te este. Aqui reticências.		(IMV)
Até 231.			
	Pronto.		

GRELHA DE REGISTO PARA O PROBLEMA Nº 6 – GRUPO A

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
Mário, Ricardo e Orlando terminaram um jogo que se desenrolou em cinco partidas. Jogaram com moedas de 1$00 e só tiveram, no decurso do jogo, somas inteiras de escudos. Em cada partida o que estava a perder dobrou os haveres dos outros dois. No fim do jogo, Mário tem 8$00, Ricardo tem 9$00 e Orlando tem 10$00. Quanto tinha cada um no início?			Leitura do enunciado.
	O Mário tem 8$00.		Registo escrito.
Mário 8$00, Ricardo 9$00 e Orlando 10$00.			
	Ricardo 9$00 e Orlando tem 10$00.		Registo escrito.
	Agora é assim...		
		Jogaram com moedas de 1$00.	Leitura do enunciado.
	Cinco partidas.		Registo escrito.
É assim, quem ganhar...			
	Espera aí, em cada partida, o que estava a perder dobrou os haveres dos outros dois.		Leitura do enunciado.
Quem perder... os restantes ficam com o dobro do dinheiro.			
		Então quer dizer que neste jogo não é só o perdedor que ganhou!	
	Não, porque é assim: eu jogo, se tu perderes eu fico com o teu dinheiro e com o dela. Por isso dobro.		

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
		Em cada partida, o que estava a perder dobrou os haveres! O que estava a perder...	Leitura do enunciado.
Dos outros dois! Se tu perdes, os outros é que ficam com o dobro que têm, não tu.			**(IMO)**
		Então mas diz aqui...	
	Tu fizeste com que dobrasses. Se tu perderes fizeste com que nós dobrássemos.		
Se nós temos duas tu perdes e passam para quatro.			
		Ah, está bem!	
	E ela...		
		Mário tem 8$00, Ricardo tem 9$00 e Orlando tem 10$00.	Leitura do enunciado.
	Mário, Ricardo e Orlando terminaram um jogo que se desenrolou em cinco partidas. Jogaram com moedas de 1$00 e só tiveram, no decurso do jogo, somas inteiras de escudos.		Leitura do enunciado.
Começamos de baixo para cima.			**(IMOrg.)**
	É isso.		
Põe aí.			
	Somas inteiras de escudos.		Leitura do enunciado.
	Em cada partida o que estava a perder dobrou os haveres dos outros dois. No fim do jogo...		Leitura do enunciado.
Faz uma tabela. Assim: Mário, Ricardo e Orlando.			**(IMOrg.)**
	Mário, Ricardo...		Registo escrito.
		Com quanto é que começou cada um?	**(IMO)**

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
	É isso que queres saber!		**(IMO)**
Sim.			Sorrisos.
		Então vamos pô-los a andar para baixo.	**(IMOrg.)**
Mário tem 8$00.			
	E aqui o que é que ponho?		**(IME)**
Põe as partidas. A última...			
	Quinta partida.		Registo escrito.
		Quinta partida. Eles estavam a jogar o quê?	**(IMO)**
8, 9, 10.			
Em cada partida o que estava a perder dobrou os haveres dos outros dois.			Leitura do enunciado.
	Eles têm que começar todos com dinheiro.		
Jogaram com moedas de 1$00 e só tiveram, no decurso do jogo, somas inteiras de escudos.			Leitura do enunciado.
	Então temos que ir por hipóteses. Se o Mário perder nesta, tinha no mesmo 8...		**(IMOrg.)**
E esses ficaram...			
	E estes tinham... nove menos dois?		**(IME)**
Quatro e meio.			
	Sete.		
Não, dobrou. Se este perdeu, dobrou. Tinha 4,5 e 5. Só que são somas inteiras. Este não pode ter perdido!			**(IMV)**
	Este não pode ter perdido.		
	Percebeste? É assim...		
Então este tem quatro.			

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
	Se este perdeu nesta etapa, este continuava com oito...		(IMO)
Então vai dobrar.			
	Ele perdeu, dobrou e tem quatro para pôr nesta...		
Mas como diz que só são somas inteiras...			(IME)
	Mas não dá certo. Então tem que ser este a perder. Este tem nove, porque só assim é que dá!		(IMV)
Dão inteiros!			
	Então este perdeu nesta etapa.		
		Então o outro ficou...	
	Este com quatro.		Registo escrito.
E este com cinco.			
	E este com cinco.		Registo escrito.
Agora já se sabe que foi este que perdeu aqui.			(IME)
	Que é para ficarem estes com...		
Este perdeu aqui.			
	Então mas este aqui ficava com...		
Não, não, não!			
Podem perder os dois ao mesmo tempo?			(IMO)
	Podem.		
		Então este, este ganhou. E tinha dois antes.	
	Estes, espera aí...		
		Tinha dois, ficou com quatro. Põe aí um dois.	
	Mas ele pode perder e nunca dá!		(IMV)
		Então e este perdeu.	
	Não pode ter perdido.		(IMV)

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
O que estava a perder...			Leitura do enunciado.
		Perder não, ganhou! Põe aí um dois, quer dizer que ganhou.	(IMV)
	Este ganhou.		Registo escrito.
		Estes aqui...	
	Este ia ficar com 4,5.		
		Estes empataram. Nove, cinco.	
Então, assim...			
		Ai não, porque assim tinham que dar os dois dinheiro. Tinha que este dar...	(IME)
Se tiveres nove, cinco, quer dizer que eles perderam.			
		Pronto!	
	Então podem perder os dois?		(IMO)
		Mas ao perderem os dois têm que repor os dois os dobro. Ia ficar muito mais do que quatro. Estás a perceber?	(IMO)
Não! Fica sempre o dobro.			(IMV)
		Então quer dizer que estes dois dão menos dinheiro...	
Estes não dão dinheiro.			
	Quando algum perde o outro fica com o dobro. Podem ter perdido os dois.		
		Então pronto.	
Então mas para isso, fica sempre assim até ao fim!			(IMV)
Vamos ter aqui o cinco e o nove.			
	Ele aqui fica com este outra vez.		
Fica com um.			
	É, o dobro de um é um.		
O dobro de um é dois.			Sorrisos.

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
		Então mas deviam começar todos com o mesmo dinheiro!	**(IMOrg.)**
Não.	Não.		
	Quanto tinha cada um no início?		Leitura do enunciado.
		Então olha, mete um um. Mete um um, um nove e cinco.	
1, 9, 5 e aqui...			
		Zero.	
Então mas todos têm que ter dinheiro senão não começam a jogar!			**(IMO)**
		Diz lá?	
Jogam com moedas de 1$00.			Leitura do enunciado.
Então se tu não tens moedas, como é que vais jogar?			**(IMO)**
		Terminaram um jogo que se desenrolou em cinco partidas. Jogaram com moedas de 1$00.	Leitura do enunciado.
	E só tiveram somas inteiras.		Leitura do enunciado.
		Então porque é que não podia começar com zero escudos?	**(IMO)**
Imagina que perdiam aqui!			
		Porque é que não podem começar com zero?	**(IMO)**
	Então, como? Zero vezes um, zero. O dobro e triplo de um é sempre zero. Não pode ser o zero.		
		Ah, está bem!	
		Então espera aí, este tem que começar com um. Neste caso, este tinha que começar com um.	
	Mas nós temos que começar por aqui, olha. Este aqui tinha que ser este a perder.		**(IMOrg.)**

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
		Vê lá se não pode haver erros a trás!	**(IMV)**
Em cada partida, o que estava a perder...			Leitura do enunciado.
		Dobrou os haveres dos outros dois.	Leitura do enunciado.
	Então é porque chegou aqui e ninguém perdeu. Ninguém ganhou...		
	Mas têm que ganhar!		**(IMV)**
		Onde é que diz isso?	**(IMO)**
	Estou a dizer que na primeira etapa ninguém ganhou.		
		Pronto.	
		Na primeira partida...	
Então também podes dizer que foi na primeira partida que ninguém perdeu, não é? Se aqui não perdeu nenhum, aqui já ia ter moedas.			
		E se começassem logo com 1, 9 e 5, empatados?	
	Mas tens de começar daqui para aqui.		**(IMV)**
		Está bem, mas depois, para verificarmos os resultados, podes vir ao contrário!	**(IMOrg.)**
	Vamos começar outra vez para trás. Este tem que obrigatoriamente perder.		
		Porque é que tem que ser para trás?	**(IMV)**
	Este tem que perder.		
Porque tu sabes é isto, o final!			
		E então assim...	

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
	O que está a dar problemas é este. Se a gente disser que este aqui também perdeu, ficou com dez. Ficou com dez, então, chegou-se aqui e este perdeu e ele ficou com... este perdeu e ficou com cinco.		**(IME)**
Espera aí, espera aí. Quem é que perdeu aqui?			**(IME)**
	Aqui perdeu este. Perdeu este e este.		
		Tira aí um desses.	
	Perderam estes dois e ganhou o outro. Foi este.		
Sim.			
	Agora chegamos aqui, perdeu este...		
		Aqui tu estás a ganhar este. Este também ganhou. Só este é que perdeu e ganharam estes dois, não é? Dobrou o dinheiro e este também dobrou.	
	Estou a dizer de aqui para aqui. Daqui para aqui este perdeu, este ganhou e ficou com oito e aqui com dez.		
		Olha, primeiro este aqui, este aqui nunca pode ter perdido. Não, este aqui não pode ter ganho!	
	Pois não, perdeu. Por isso é que ele está aqui com nove.		
		Tem que começar com nove. Então aqui também é nove.	
	Não, ele pode... Ah! Pois é!		
	Tem que começar com nove.		Registo escrito.
		Pronto. Os outros podem oscilar.	

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
Estes aqui... se este perde, os outros vão ter sempre que dobrar.			
	Então mas não há somas de meios!		(IMV)
		Então vamos tentar assim...	
	Não há somas de meios.		
Então só eles perdem também.			
		Então deixa-me ver. Um e cinco.	
	A partir daqui, este também nunca pode ter...		
		Aqui ninguém ganhou.	
	Nem aqui.		
		Pronto. Aqui ganhou este e estes dois perderam. Aqui ganhou este e estes dois perderam e aqui ganhou este e estes dois perderam.	
		Nada nos diz que eles não podem...	(IME)
	Perder todos? Perder todos ou perder dois.		
		Ou empatarem!	
		A gente diz: inicialmente o Mário tinha 1$00.	Registo escrito.
	Acho que devias dizer que começámos daqui para aqui. Como é que se chama isso?		(IMV)
Começámos do fim para o princípio.			
	Pois, porque nós andámos do fim para o princípio.		
		Ah, isso é a técnica. Estratégia do fim para o princípio.	Registo escrito.
	Isso que tu disseste. O Ricardo como tem nove, nunca pode ter perdido nem ganho. Nunca pode ter ganho.		
Pois.			

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
	Por causa dos valores serem inteiros.		
Somas inteiras de escudos.			Leitura do enunciado.
		Uma vez que as, as somas...	Registo escrito.
	São sempre inteiras.		
		Têm de ser inteiras...	Registo escrito.
	O Ricardo nunca ganhou.		
		O Ricardo nunca ganhou.	Registo escrito.
		Assim sendo, iniciou o jogo com 9$00.	Registo escrito.
		9$00, pronto. O Orlando que tinha 10$00 só pode ter perdido uma vez porque a coisa...	
É.	É isso.		
	Independente de ter perdido aqui, aqui ou aqui.		
		O Orlando que concluiu o jogo com 10$00.	Registo escrito.
	Só pode ter perdido uma vez.		
	Não! Ele pode ter ganho!		**(IMV)**
		Só pode ter ganho uma vez, para as somas darem inteiras, logo começou com 5$00.	Registo escrito.
Começou com 5$00 e agora o Mário...			
	Este três vezes. Um, dois, três, quatro.		
O Mário ganhou três vezes.			
	Espera aí, daqui para aqui ganhou. Ganhou três vezes.		
		Então o Mário...	Registo escrito.
	Como acabou com 8$00.		

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
		Pode ter... Isto são tudo possibilidades, porque podiam começar todos com o mesmo dinheiro e depois dar sempre.	(IMV)
	Ou seja, o Mário podia ter começado com 4$00 e ter perdido sempre e só ganhar uma vez. O Mário pode ter começado...		
		Então este perdeu e perdem todos?	(IMV)
	Aqui empataram todos!		
Pois, empataram e não diz nada!			
	O Mário pode ter começado com 4$00, com 2$00 ou com um.		
		Sim e até podem ter começado todos com oito, nove e dez, não é?	
		O Mário pode ter começado com 1$00.	Registo escrito.
	Com dois.		
		Não! Depois isso a gente diz para o fim, porque é a tal coisa, se vamos pôr todas as possibilidades todas...	
		O Mário pode ter começado com 1$00.	Leitura do registo escrito.
		E ter empatado com os colegas no primeiro jogo.	
Numa das partidas.			
	E ter ganho três vezes.		
Empatou numa das três partidas e ganhou as outras.			
		Não, aqui na segunda.	
	Não falas do que empatou. Falas das que ganhou.		
E ganhou três vezes.	E ganhou três vezes.		

CARLA	DINA	ELSA	OBSERVAÇÕES
		E ter ganho três vezes.	Registo escrito.
		Empatando os três uma vez.	
	E não é preciso dizer mais nada, porque estás a dar hipóteses.		(IME)
		Numa das jogadas... uma das jogadas...	
	Em que uma das jogadas empataram os três. Em que numa das jogadas empataram os três.		
		Numa das jogadas houve um empate dos três jogadores.	Registo escrito.
		Agora podemos pôr assim...	
	Acho que não vale a pena falar...		
		Esta é uma possível solução para o problema...	Registo escrito.
	Haveria outras mais.		
		Haveria muitas outras...	Registo escrito.
		Por exemplo, o mais simples era terem todos iniciado com o dinheiro que findaram...	Registo escrito.
E empatado em todas as partidas.			
		Já está.	

GRELHA DE REGISTO PARA O PROBLEMA Nº 1 – <u>GRUPO B</u>

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Oliveira é carniceiro. É o presidente da assembleia dos comerciantes da rua, a que pertencem também um merceeiro, um padeiro e um leiteiro. Oliveira está sentado à esquerda de Pereira. Nogueira está sentado à direita do merceeiro. Pinheiro, sentado em frente de Pereira, não é o padeiro. Qual a profissão de Nogueira?			Leitura do enunciado do problema
		Eu até gosto destes.	**(IMO)**
	Estes aqui não dá para fazer assim por aquela grelha?		**(IMOrg.)**
Sim, sim, pelas cruzes. É, é.			
		Vamos pôr uma tabela.	Registo escrito.
Vamos pôr uma tabela.			
	Depois, aí vamos seleccionando.		
Espera aí, metes os nomes deles. Oliveira, Nogueira, Pinheiro.			
	E depois o emprego.		
Sim e o Pereira.			
	Oliveira.		
Oliveira é carniceiro. Agora metes aqui a profissão de cada um.			
		Carniceiro.	Registo escrito.
Merceeiro.			
	Merceeiro, padeiro.		
Leiteiro.			
		São quatro?	**(IMO)**
	São.		

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Sim, são quatro.			
	Si, é padeiro e leiteiro.		
Agora temos quatro nomes. É o Oliveira, o Pereira, o Nogueira e Pinheiro.			
Então o Oliveira é o carniceiro.			
		Já vamos pôr uma cruz.	
	Oliveira é carniceiro.		
Carniceiro. Cruz.			
	Cruz.		
		O Oliveira, então estes já não são.	
Estes já não são, exacto. Então...			
		A gente havia de pôr uma bola no que era.	**(IME)**
Não, isso é igual, isso é igual.			
	Não, espera aí...		
		Então mas é assim: se este é aqui estes já não são...	
	Já não são.		
Então, pronto, aqui metes um traço. Metes um tracinho.			
	Um tracinho.		
		Estes aqui já não podem ser. Pereira e Nogueira. Já não podem ser.	Registo escrito.
	É o Presidente da assembleia de comerciantes da rua, a que pertencem também um merceeiro, um padeiro e um leiteiro.		Leitura do enunciado.
Pronto, esses são os outros três.			
	Oliveira está sentado à esquerda de Pereira.	Oliveira está sentado à esquerda de Pereira.	Leitura do enunciado.
Isto não diz nada.			**(IMO)**
	Não, não nos dá mais nenhum...		**(IMO)**

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Nogueira está à direita do merceeiro.			Leitura do enunciado.
Logo, o Oliveira não é merceeiro.			
Ah! O Oliveira também não é nada disto!			(IMV)
	Pois não, já não é.		
		Pois, isso já não é.	
		Oliveira está sentado à esquerda de Pereira.	
	Pinheiro... O Pereira não é padeiro.		
O Pinheiro não é padeiro.			
	O Pinheiro pode-se riscar, que não é padeiro.		
	Se não é padeiro...		
Espera, espera...			
		Ou é merceeiro...	
Espera...			
	Portanto, tem que ser um destes dois.		(IME)
Nogueira está à direita do merceeiro.			Leitura do enunciado.
Acho que é aqui que está!			(IMO)
Oliveira está sentado à esquerda de Pereira e o Nogueira está à direita do merceeiro.			
Portanto, logicamente, eu acho que o Pereira é o merceeiro.			(IME)
	Então porquê?		(IMV)
	É o Presidente da assembleia dos comerciantes...		Leitura do enunciado.
E o Pinheiro, por estar sentado em frente de Pereira, não é o padeiro.			
Então, lá está, o Pereira não é o padeiro. Pinheiro não é o...			
Pinheiro, sentado em frente de Pereira, não é o padeiro.			Leitura do enunciado.

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
		É isso...	
O Pinheiro não é o padeiro.			
	Pinheiro, sentado em frente do Pereira, não é o padeiro.		Leitura do enunciado.
	Então e esta não há informação relativamente ao Pereira?		**(IMO)**
		Todas elas têm que nos dar informação.	**(IMO)**
Se o Oliveira...			
		Oliveira está sentado à esquerda de Pereira.	Leitura do enunciado.
O Pereira... eu acho que é assim, o Pereira...			
	Então faz aí o símbolo, aqui isto do Presidente e põe aí à esquerda de cada um.		**(IMOrg.)**
É assim, eu acho que o Pereira é o merceeiro...			
Vamos experimentar: se o Pereira for o merceeiro...			**(IMOrg.)**
Oliveira está sentado à esquerda de Pereira, não é? E Nogueira está sentado à direita do merceeiro.			Leitura do enunciado.
Espera...			
	Este é o Presidente, não é?		**(IME)**
		Este é o Oliveira. O presidente é o Oliveira.	Registo escrito.
	É o Oliveira carniceiro. Podes pôr um C, que é carniceiro, que é para se saber a profissão.		**(IME)**
	Depois, o Oliveira está sentado à esquerda de Pereira.		Leitura do enunciado.

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
		O Oliveira está sentado à esquerda do Pereira.	Registo escrito.
		Esta aqui é a esquerda.	
À direita do merceeiro.			
	Fica aí o Pereira.		
		Pereira.	Registo escrito.
		Depois diz.: Nogueira está à direita do merceeiro.	Leitura do enunciado.
		Se Nogueira está à direita...	
	Ele é o Presidente da mesa, portanto se o Nogueira está à direita do merceeiro, se o Nogueira está à direita do merceeiro...		
E o merceeiro, lá está, é o Pereira.			
	Um, um.		
		O merceeiro está à esquerda do...	
	Do Presidente, mas pode estar ainda aqui outro, entre eles. Não!		(IME)
		Não! A estar à direita, ou podia estar aqui ou podia estar ali.	
	Sim.		
		E aqui não é direita.	(IME)
Portanto, se isto... é assim, se o Pereira é o merceeiro, o Pinheiro já não pode ser o merceeiro. Portanto, o Pinheiro é o leiteiro, porque também não é padeiro.			Registo escrito. (IME)
	Também não é padeiro. Também já diz que não é padeiro.		
Então, exacto, se este aqui não...	Se não é padeiro, o carniceiro já ali está em cima...		

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Estes não podem ser nem merceeiro... o Nogueira só pode ser o Pereira.			
		Vamos confirmar, a ver se isto está bem!	(IMV)
	Portanto esse é carniceiro, tudo bem.		
		Este está certo. Então, olha lá, imaginando que o Pereira é merceeiro...	
	Sabemos já que o Pinheiro não é padeiro, também.		(IMV)
O Nogueira está à direita do merceeiro. Se está à direita do merceeiro é o padeiro. E à esquerda do merceeiro é o carniceiro.			
		Então, o Pinheiro sentado em frete ao Pereira não é padeiro.	Leitura do enunciado.
É assim. E o outro é o leiteiro.			
Eu acho que é assim! Não estou a ver mais lógica nenhuma.			(IMV)
Nogueira é padeiro.			
	É padeiro, porque diz logo aqui: Nogueira está à direita do merceeiro. Por isso já não é merceeiro.		
Isso já a gente sabe!			(IMV)
		Nogueira não é merceeiro. Isso também já sabemos.	(IMV)
Eu acho que isto está certo. Vamos para a próxima.			(IMV)
	Acho que sim. Acho que está.		Sorrisos.
Não te preocupes com isso.			
		Deixa-me lá ver só mais uma vez.	(IMV)
	Mas eu acho que está.		(IMV)

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
		Espera lá, deixa confirmar de novo.	(IMV)
	É preciso legenda?		(IME)
Mas está aqui. Então não está aqui a legenda?			(IMV)
		Vamos lá tentar ver de novo para ver se realmente está certo ou não.	(IMV)
Oliveira é carniceiro.			
		Está fora de questão ele ser este.	(IMV)
Oliveira está sentado à esquerda de Pereira.			Leitura do enunciado.
Então olha, mete aqui o Pereira. Metes assim...			
	Era isso que eu também estava a dizer.		
Aqui é o Oliveira.			Registo escrito.
E o Nogueira está sentado à direita do merceeiro. Só que nós, o merceeiro ainda não sabemos quem é.			(IMV)
E o Pinheiro sentado em frente de Pereira não é padeiro.			Registo escrito.
Portanto, à direita, lá está, por isso o Pereira só pode ser o outro. Então se este não é o padeiro e está em frente deste, à direita deste só pode ser o Nogueira.			
	É isso mesmo.		
Tu não estás a perceber?			
		Pronto.	Ainda ficou a olhar para o enunciado, como se não tivesse ficado convencida da resposta.

GRELHA DE REGISTO PARA O PROBLEMA Nº 2 – <u>GRUPO B</u>

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	O Américo estava a tentar construir um triângulo de triângulos. Para tal, começou com um triângulo na primeira fila, depois passou a três triângulos e na terceira fila construiu mais cinco. Terminou a construção do triângulo na quarta fila e decidiu contar os triângulos que esta figura tinha no total. Quantos são, afinal.		Leitura do enunciado do problema
Este é aquele... os de fora... um de fora já, que é o grande.			**(IMOrg.)**
	É o grande, depois os outros médios e depois os mais pequeninos.		
		É o grande e depois este aqui faz...	
Este faz outro.			
	Espera, vamos meter...		
	Temos, um é grande.		
Então vá, mete um grande.			
		Eu acho que a gente até resolveu este na aula.	**(IMO)**
Já, eu também acho que a gente já fizemos isso.			**(IMO)**
		Nós agora até podíamos...	
	Agora vamos contar por aqui. Estes...		
	Já podemos contar os pequeninos.		
Os pequeninos são os do fim. Não estás a perceber? Olha, um assim...			**(IMOrg.)**
	Um. Assim já dá dois.		
		Vamos começar pelos maiores que nós encontrámos. Olha aqui...	**(IMOrg.)**

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Pois é, o grande. Só temos um.			
		O grande. Agora temos este...	
		Pois, os médios.	
	Os médios, pode ser.		
		Tens este, que faz assim.	
Sim	Sim, que é um.		
		Depois temos este assim.	
Concordo, concordo.	Dois.		
		E depois temos um outro, este aqui.	
	E agora para baixo.		
		Pois é, agora assim.	
E assim e assim...			
Ai, temos tantos!			**(IME)**
	Há muitos!		**(IME)**
Então espera lá. Agora mete médios.			
	Os médios devem ser muitos!		**(IME)**
		Agora espera lá. Devíamos ter lápis para ir riscando.	**(IME)**
Pois.	Pois era.		
Risca com a caneta.			
		Oh, mas depois eu queria apagar.	
		Então é assim...	
Esse é o primeiro.			
		Agora vamos para os médios.	
Agora vamos para este aqui.			
Mete tracinhos, mete traços que é para a gente saber.			**(IMOrg.)**
Não, mete aqui. Aqui médios, um... depois no fim é que metemos. Mete por traços.			
E este assim, não é?			
	E agora temos o outro assim, estão a ver? Dois.		

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
		Sim, dois.	Registo escrito.
		Conseguiste ver esse?	**(IMV)**
	Estás a ver este aqui?		**(IMV)**
Este aqui? Os que lá estão dentro?			
		Não, este aqui. Começa aqui.	
	Começa aqui o vértice e vem assim, assim. É a mesma coisa que este assim e assim.		
Sim, sim, sim.			
		Só que está...	
	Dois.		
		Depois temos este aqui assim. Este aqui. Este assim.	
Sim.			
	Três.		
Três.			
	E agora devemos ter um aqui assim.		
Não, esse ainda não é. Esse é mais pequeno.			**(IMV)**
		Temos um assim, outro...	
Um assim...			Alguma confusão.
Só há três.			
Esse é o primeiro.			
		Depois, agora começando...	
É assim, a minha ideia era assim: a gente começava assim primeiro, acho que era mais fácil levamos este assim até ao fim, depois é que viramos ao contrário.			**(IMOrg.)**
		Também pode ser.	
Acho que assim é um bocado complicado para nós.			**(IMOrg.)**
Este dá um, não é?			

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	Sim.	É.	
Agora aqui... dois.			
		Agora ainda tínhamos...	
Pois, agora é que acho que volta, não é?			**(IME)**
		Pois, e em princípio nós temos que ter mais.	**(IME)**
E se contarmos primeiro os pequeninos e depois os médios?			**(IMOrg.)**
	Pois, estes pequeninos não há tanto problema.		**(IMOrg.)**
16 pequenos.			
	16.		Registo escrito.
Agora é que é.			
		Só que agora a gente ainda tem estes aqui. Estes assim.	**(IME)**
Mas esses são os médios. É o que a gente está a contar como médios.			
	Não, há uns médios e...		
		Ainda há outros...	
	Ainda há outros mas... entre os médios e os pequenos.		
Sim, é um médio grande e um médio pequeno.			
		Pois, é isso que eu estou a dizer.	
Pronto, eu queria englobar todos no mesmo.			**(IME)**
	Nos médios.		
		Não.	
Em médios.			
	Nós não resolvemos isto para casa? Eu acho que era em três, em grandes, médios e pequenos.		**(IME)**

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Era em grandes. Médios e pequenos e acho que estes aqui fazem parte dos grandes. Dos médios!			
	Dos médios!		
Olha ali um médio, um. Um já temos, não é?			
	Sim.	Sim.	
Dois e... três.			
	Não, esse é o grande.	É o grande.	
Esse é grande. Já dissemos, exacto!			**(IMV)**
		Olha ali, se nós fizermos assim, temos um aqui, um aqui, dois, três...	
Três, quatro, cinco, seis.			
	E agora este virado ao contrário, quatro, não era como estavas a dizer?		**(IMV)**
Seis, seis...			
Não, ao contrário já ela tinha dito. A gente estava a dizer era assim, sete, oito... Já vai em oito médios.			**(IMV)**
		Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete...	Confirmação.
Já vai em oito médios.			
		Oito...	
	Não, eu acho que tu repetiste ali!		**(IMV)**
Não, eu por acaso contei oito. Eu contei oito médios. E não estou a ver mais nenhum.			**(IMV)**
Ah! Oito e um, nove, que é este aqui.			
Nove, dez. Estou a contar dez.			
		Este aqui...	**(IMV)**
Não, por acaso estou em dez.			**(IMV)**

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Espera aí, eu contei. Agora conta uma de vocês, que é para ver se...			(IMV)
	Seis e um sete.		
Agora, não te esqueças destes aqui deste lado!			(IMV)
	Sete...		
Já encontraste este aqui?			
	Falta-me este aqui. Sete, oito... oito,... e este aqui nove. Nove... nove... Foi nove.		(IMV)
		Deixa-me lá contar.	(IMV)
		Um, dois, três e aqui quatro.	
		Assim conto logo quatro.	
Assim contas... si, quatro.			
		Agora, quatro, cinco...	
Ora aí está, cinco!			
		Cinco, seis, sete, este assim.	
Sim, exacto, sete.			
Agora, oito, nove, dez.	Oito, nove dez.	Oito, nove, dez.	
Este aqui já tinha contado, aqui o do meio?			(IMV)
		Sim, sim.	
Então são dez. Era o que eu tinha contado. Dez. Dez médios.			(IMV)
	Ah, faltava-me era este aqui do meio!		(IMV)
Pois é, são dezasseis. Vai siga.			

GRELHA DE REGISTO PARA O PROBLEMA Nº 3 – GRUPO B

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
		Um comerciante possui dez medidas, contendo 1, 2, 4, 5, 6, 12, 15, 22, 24 e 38 litros. Cada uma delas está cheia de um só líquido.	Leitura do enunciado.
Eu não gosto nada destes!			**(IMO)**
Este é assim tipo aqueles que a gente fez de beber água, dividir o copo ao meio.			**(IMO)**
	Ah, já me lembro!		
		Não é não! Eu já fiz isto. Sabes o que é que era? Eu acho que tem a ver com os múltiplos, não sei.	**(IMO)**
		Espera lá, a vente vai lá!	**(IMO)**
Vá então, lê aí o resto.			**(IMO)**
	Mas olha, que contém cada medida?		Leitura do enunciado e apontou para o colega.
É a do copo. Estou-te a dizer.			**(IMO)**
	Do copo, de beber. Depois bebiam metade e ficava outra...		**(IMO)**
Era, estar no deserto!			**(IMO)**
		É capaz de ser isso, é!	
		Vá, vamos lá ver...	
Umas estão cheias de...		Cada uma está cheia de um só líquido. Umas estão cheias de leite, outras de água e outras de azeite. Uma única medida ficou vazia. Para isso gastou duas vezes mais água do que leite e duas vezes mais azeite do que água. Que contém cada medida?	Leitura do enunciado.
		É aquele dos ovos!	**(IMO)**

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	Ah, da cesta de ovos?		**(IMO)**
Ah! Mas acho que tens que começar pelo fim, não é? É do fim para o início, ou o que é.			**(IMOrg.)**
		Tens de somar...	
	A estratégia, não era? Tinha que se arranjar...		**(IMOrg.)**
	Então temos que fazer...		
		Eu acho que é igual ao dos ovos!	**(IMO)**
Se é a dos ovos, é fácil!			**(IMO)**
	Podemos desenhar, podemos desenhar...		**(IMOrg.)**
		Aquela das cestas e depois ela ia vender uma com o dobro da outra.	**(IMO)**
Estou a lembra-me!			**(IMO)**
	Então podemos fazer dez medidas, não é?		**(IMOrg.)**
		Então vou desenhar aqui assim... uma, duas, são dez medidas.	
	São dez medidas.		
		Pomos aqui esta: um.	Registo escrito.
Não são dez!			
	São dez. Olha aqui.		Apontou para o enunciado.
	Isso são as medidas.		Referindo-se aos valores que a colega escrevia na folha de resolução.
		Estava a pensar que era uma dos múltiplos, mas isto...	**(IMV)**
	15.		
E 22.			
	24 e 38.		
		Agora diz assim: cada uma delas está cheia de um só líquido.	Leitura do enunciado.

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Sim.			
		Agora, umas estão cheias de leite, outras de água e outras de azeite.	Leitura do enunciado.
Água e azeite.		Há três líquidos: leite, água e azeite.	Registo escrito.
Mas está aqui outra: uma única medida...			Leitura do enunciado.
Ficou vazia.		Uma única media ficou vazia.	Leitura do enunciado.
Só apenas uma.			(IMO)
	Só uma é que está vazia.		
		Agora diz assim: para isso gastou-se duas vezes...	Leitura do enunciado.
Mais água.	Mais água.		Leitura do enunciado
		Para isso gastou-se duas vezes mais água.	Sublinhou isso no enunciado.
Do que leite.	Do que leite.	Do que leite.	Leitura do enunciado.
E duas vezes mais azeite do que água.			Leitura do enunciado.
		Pois é, agora... que contém cada medida?	Leitura do enunciado.
Então, espera aí...	Portanto, se gastou duas vezes mais água do que leite...		
	Gastou-se mais água do que leite.		Interiorização.
Espera aí, ficou uma vazia.			
	E duas vezes mais azeite do que água.		Leitura do enunciado.
	Portanto, a que... o que gastou menos foi leite, porque se gastou duas vezes...		
		Duas vezes, foi!	Acena afirmativamente com a cabeça.
	Mais água e o azeite foi duas vezes mais do que a água...		
Sim sim, foi.			

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
		É assim: a menor foi a quantidade de leite, depois foi a água e depois foi duas de... duas vezes mais azeite do que de água.	(IMO)
	Pronto, leite, água e depois azeite.		Interiorização.
Agora é assim, os números devem estar...			
		Vamos pôr assim por x. x representa o número de leite que foi.	Registo escrito. (IME)
	Sim, os litros.		
		Agora, gastou-se isso, pronto, eu ponho mais, pronto, foi o que se gastou. Mais duas vezes x...	
Mas por exemplo, nós podemos utilizar uma equação?			(IMOrg.)
		Podemos.	
	x não, porque x é leite, aqui é y e aqui é z!		
Professor, podemos utilizar uma equação?			
Vês, não podemos utilizar equação!			
		Está bem, mas a gente não vai usar.	
Não, mas era mais fácil! Vocês com uma equação chegávamos logo. Fazíamos três incógnitas. Depois era resolver a equação.			(IMOrg.)
	x, y e z.		
	x é leite, dois x é...		
Portanto, fazemos, x, y, z.			
		Pois era.	
	x, y, z.		
	Duas vezes mais água do que leite.		Leitura do enunciado.

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Eu acho que devíamos fazer assim: x+y+z=10.			
Depois fazíamos: é duas vezes mais água. A água é o quê? É o x?			
		A água é o x. Não, é o dois y.	
	É o y, porque é duas vezes esta.		
Do que leite. Duas vezes mais água do que leite.			Leitura do enunciado.
Então, o nosso x ficava normal. O x é o quê?			(IME)
	É leite.		
Ah, mas tu estás a dizer isto aqui? Mas eu acho que eram três. Eu acho que na minha opinião...			(IMO)
		Faz aí.	
x+y+z =10, que é as dez medidas, não é?			Registo escrito. (IMOrg.)
	É as dez medidas.	Sim.	
Depois é este aqui: duas vezes mais água. Este é o x, não é? Este o y e este o z.			
Então, x, que é o leite.			
	Sim.	Sim.	
x+2y+z....			Registo escrito.
Agora aqui, igual a quê? Igual a um?			Registo escrito. (sorrisos de todos). (IMOrg.)
		Não pode...	(IMV)
O problema está aqui!			(IMV)
	Na mesma, igual a dez, não?		(IMV)
		Deixa-me ler a pergunta: que contém cada medida?	Leitura do enunciado. (IMO)
		Cada medida. Então a medida um contém o quê? Ah!	

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Eu acho que isto tem a ver com os números! Eu acho que as medidas são valores.			**(IMO)**
	Isto é os litros que cada um tem.		
		Então é fácil, acho eu!	**(IMO)**
		Eu acho que deve ser assim: então se isto é assim, igualamos isto a um e vamos ver quanto é que tem cada um.	**(IMOrg.**
Então vá!			
		Igualamos a dois e vamos ver quanto é que cabe a isto. A quatro, a cinco... Vocês acham que é assim?	**(IMOrg.)**
Experimenta. Mas eu estou a perceber.			**(IMOrg.)**
		Estás a entender? Porque ele pede cada medida. Então a medida um tem de ter. Então a medida um tem de conter duas vezes...	**(IMOrg.)**
Isto mais isto mais isto.			
Igual a um? Dá...			
	Mas está aqui a dizer que cada uma delas tem só um líquido!		**(IMV)**
Só tem um líquido. Assim estás a misturar todos.			**(IME)**
	Assim estás a misturar.		
		Pois estou!	**(IME)**
O que eu estava a dizer, por exemplo era assim...			
	E uma está vazia!		
		Pois está.	
		Ah! Já estou a entender! Acho que agora já estou a entender!	Após uma pausa de oito segundos. **(IMO)**

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Tu lembras-te daquele dos ovos?			(IMO)
	Lembro-me das cestas, dos ovos.		
		Aquela era assim: qual é que era a cesta que ela vendia com que desse para fazer...	
E era isso! Agora tens que encontrar um número que dê duas vezes mais água do que leite.			(IMOrg.)
O 12.		Então olha ali, estes aqui...	
O 12.			
		O 12 dá para trio.	
O quê?			(IME)
	Porque nós fazíamos... como é que era? Era...		(IMOrg.)
Tens que arranjar um número que tenha duas vezes mais água do que leite.			(IMOrg.)
	Era isso, era isso!		
		É assim, uma destas não tem, não tem, está vazia.	
Mas isso é a última que a gente vaia ver que está vazia.			(IMOrg.)
		Então imagina assim...	
Duas vezes mais água do que leite...			
		Olha, imagina estas duas...	
Então, se eu tiver duas vezes mais água do que leite, duas vezes... duas vezes sete, catorze...			
		Olha lá,...	
	Esta tem dois litros...		
		Imagina assim....	
	Dois litros. Duas vezes mais...		

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
		Imagina lá. Esta dois. Tens esta aqui. Esta tem, por exemplo dois litros de leite. Outra bilha, a de quatro já tem...	
	Já pode ter...		
		Água.	
Mas esta aqui este de trinta e oito litros.			
		Mas agora acho que somar isto, estás a entender,... não sei.	**(IMOrg.)**
Isto somado quanto é que dá? Isto tudo somado.			**(IME)**
		Ah, se calhar é por aí.	**(IMOrg.)**
Quanto é que isto aqui dá tudo somado? Isto aqui tudo?			
	Sei lá.		Pega na máquina de calcular.
Dois e um, três. Quatro e três, sete. Sete e seis, treze, dezoito. Dezoito, trinta, quarenta e cinco.			
	67.		
Confere aí pela coisa.			
	67, espera aí, diz-me lá.		
		Um, dois...	
	Ponho um mais dois mais quatro...		Efectuou cálculos na máquina.
		Mais cinco, mais seis...	
Cento e vinte e nove.			
		Mais doze, mais quinze, mais vinte e dois, mais vinte e quatro, mais trinta e oito.	
	129.		Efectuou os cálculos na máquina.
129, é isso.			
		Agora deste...	
Agora deste valor é que temos que tirar.			**(IMOrg.)**

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Então isto aqui, se calhar é igual a 129.			
	A 129, que é o total dos litros.		
		Só que há uma bilha destas que não se enquadra. Tem de ficar de fora!	**(IMOrg.)**
Pois, por isso mesmo, fica um número par.			**(IMOrg.)**
Mas temos que ter em causa que isto é dois y, não é?			**(IMOrg.)**
É duas vezes mais água do que leite.			Leitura do enunciado.
É assim, a medida que há mais é azeite. Tem que haver mais azeite, não é?			
Se a gente fizer, por exemplo, tirarmos a bilha um, fica 128, não é? 128 para gastar. Desses 128 ia gastar metade, por exemplo.			
		128 temos que dividir em partes. Uma que tem que ser o dobro da outra e outra que tem que ser o dobro da outra.	**(IMOrg.)**
Não!			
		É, porque diz assim: é de leite, água...	
	x, o outro é duas vezes aquela e...		
Mas espera aí, mas nós aqui é quatro vezes mas é assim, nós temos que ver que ele só tem um líquido cada uma. Cada medida destas só tem um líquido.			
	Pois só.	Pois só.	
E vocês assim estão a misturar os líquidos!			**(IMV)**

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	Pois...		
		Não sei se estamos! Sabes porquê? Porque é nós não podemos... imagina assim: juntas a bilha dois com a bilha quatro e têm as duas o mesmo líquido e são, por exemplo, de azeite. Ai, de leite!	**(IME)**
		São seis, tenho seis litros de leite. Agora para ter seis litros de elite, tenho de ter doze de...	**(IME)**
	Água.		
		De água. Então junto, junto esta bilha.	
Retiro os doze, não é? Este já fica de água.			
		E agora tenho de ter o dobro de doze.	
	É vinte e quatro. Logo estes, por exemplo, já estão arrumados, não é?		
		Já estão, só que sobram ainda muitas bilhas. Então eu acho que nós devemos juntar os números, entendes, por forma a que dei-a, por forma a que dei-a um número que,	**(IMOrg.)**
		Não estás a entender o que eu estou a dizer?	**(IMOrg.)**
Eu estou-te a perceber. Mas estás a pensar... é assim, a minha ideia era, por exemplo,...			
		Mas depois, acho que vai haver uma bilha que vai ter de sobrar, para não dar certo.	**(IMOrg.)**
Espera aí, se retirarmos a bilha 1 ficam 128 litros.			
Desses 128, se dividirmos por dois dá 64 litros de azeite.		128 litros.	

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
		128...	Registo escrito.
	A dividir por dois.		
A dividir por dois dá 64 litros.			
		Agora dividimos isto por dois.	
Seria os 16, daria os de água.			
		Pois, estes de água.	Registo escrito.
	Que é 32.		
Que é 32 de água.			
Não, este aqui é o de azeite! Os 64 é os de azeite!			
		Pois é, azeite.	
E sobrava outros 64...			
		Que a dividir por dois iria dar...	
	32.		
		Então e agora os de leite?	**(IME)**
Pois, os de leite nunca poderia ser. Por isso é que...			**(IME)**
	Dá 16. E não tens aqui nenhum.		**(IME)**
	Doze, quatro.		
		Mas imagina, a gente is supor que tirava a bilha 1, mas a gente pode tirar a bilha 5 ou 6...	**(IMOrg.)**
Exacto!			
Então e se tiramos, por exemplo, a 4?			
		Aqui é por erro e tentativa. Esta só pode ser por erro e tentativa.	**(IMOrg.)**
		Erro e tentativa.	Registo escrito.
	Então, se uma está vazia, como é que aqui diz que esta tem um litro, esta dois, esta quatro, esta vinte e dois, esta...		**(IMO)**
Não! Depois a gente tem que ver!			**(IMO)**

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	Cada uma delas tem um só líquido.		Leitura do enunciado.
Isto são bilhas que contêm as medidas, não têm lá líquido!			
	Ah, está bem! Esquece.		
	Mas cada uma delas está cheia de um só líquido.		Leitura do enunciado.
Vá, é tentativa, vá.			**(IMOrg.)**
Para o dois agora, para o um já vimos que não dá!			**(IMV)**
		Supondo...	
Eu tirava aqui a 5. Eu acho que isto aqui só dá com números pares. Eu acho que isto só dá com ímpares, porque isto tem que ficar par!			**(IMOrg.)**
		Pois tem. Então vamos, supondo que tiramos...	Registo escrito.
A bilha 5.			
		Supondo que a bilha 5 está vazia, então temos: ficava 129 menos 5.	Registo escrito.
	Então isso dá 124.		
		Sim.	
Sim, 124.			
		124.	Registo escrito.
		Agora, 124...	
A dividir por dois dá 62.			
		62.	Registo escrito.
		Agora, estes 62 têm que ser divididos por... ah, estes 62 iria dar o azeite.	Registo escrito.
Sim e sobravam outros 62 agora aqui que possivelmente daria a água.			
Agora a dividir por dois.			
	Dá 31.		
Não. Sim.			

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
		Sim, dá 31 de água.	Registo escrito.
		E agora tem de haver estes 31 a dividir por dois...	
Ficaria duas vezes mais água do que leite.			Leitura do enunciado.
		Ora o 5 também não dá, porque 31 a dividir por dois...	**(IMV)**
Pois não.			
		Não dá. O 5 está fora de questão.	**(IMV)**
		Não dá.	Registo escrito.
Não dá. Acho que quanto mais para a frente formos melhor!			**(IMOrg.)**
Escolhe aqui o 15.			
		Supondo...	Registo escrito.
Quanto é que fica? 129...			
	129 menos 5...		
		A 15 está vazia.	Registo escrito.
Fica 104, acho eu.			
		Quanto é que dá?	
	Menos 15, 114.		Efectuou os cálculos coma máquina.
Dá 114.			
		114.	Registo escrito.
		Agora divide lá isso por dois.	
	114? Dá... portanto... dá 57.		
É quanto? 114....			Efectuou os cálculos com a máquina.
	É 57.		
		57.	Registo escrito.
		Agora 57 são os de... já não vai dar, este também!	**(IMV)**
Azeite.			
		Ainda não é este!	**(IMV)**
Ah, isso também não é!			

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
		E acabaram-se os nossos números ímpares!	(IME)
Pois é!			
Mas tem de ser um número alto!			(IMOrg.)
22, experimenta lá aí.			
E se a gente fizer a multiplicação?			(IMOrg.)
		Isto não é bem como nós estamos a fazer!	(IMV)
		Eh pá, eu acho que era assim mas não tem...	(IMV)
Então vamos lá fazer como eu estou a dizer. É assim: duas vezes trinta e oito. Faz lá.			
Duas vezes trinta e oito, quanto é que dá?			
76. Desses 76 de 129, quanto é que soma desses 76?			
	Então, 129 menos 76.		
		Dá 53.	Efectuou os cálculos com a máquina.
53. 53... também não dá, é doze e meio, não é?			(IMV)
		Tem de ser o dobro. Temos de...	
Experimentar com o 6.			
Vamos experimentar, sei lá, experimenta com o 6.			
	Então 129 menos 6 dá 123.		
A dividir por dois dá...			
	Dá...	Não dá.	
Este não dá!			
129 menos 12.			
Também não dá!			
	O 15 já está...		(IMV)
129			
Menos 22	Menos 22		

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	Também não vai dar, porque é muito, não é também certo.		(IME)
38. Faz lá 129 menos 38.			
Ah, não dá! Dá 91.			
	E a de 24? Também não dá!		
Não estou a ver como é que isto se faz!			(IMOrg.)
Para isso gastou duas vezes mais água!			Leitura do enunciado.
Espera lá, um comerciante possui dez medidas, contendo 1, 2, 4, 5, 6, 12, 15, 22, 24 e 38 litros. Cada uma delas está cheia de um só líquido. Umas estão cheias de leite, outras de água e outras de azeite. Uma única medida ficou vazia. Para isso gastou duas vezes mais água do que leite e duas vezes mais azeite do que água.			Leitura do enunciado.
Eu acho que, vamos experimentar como tu estavas a dizer.			(IMOrg.)
Se enchermos, portanto, o que tu estavas a dizer é que só 4 e 2 dá 6, não é?			
	Seis.		
		Dá seis e agora...	
Mas para seis...			
		Tinha que ser uma de 12.	
Então mas ele de leite tinha que ter menos de duas vezes!			(IME)
		Pois tinha e...	

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Se calhar é mais fácil começarmos a preencher a de leite! Se preenchermos a de leite, esta aqui, por exemplo, tem leite, não é?			**(IMOrg.)**
		Pois.	
Então, se a gente fizer assim: leite, água e azeite.			Registo escrito de uma tabela.
	Eu acho que tem de ser isso de juntarmos as bilhas!		**(IMOrg.)**
Portanto, se o leite tiver duas, não é?			
	É.		
A água tem duas vezes mais.			
	Tem quatro.		
Tem quatro.			Registo escrito.
E a de azeite...			
Tem seis.	Tem 6.	Tem 6.	
	Logo, essas bilhas podem sair.		
Estão ocupadas.			
Se o de leite tiver 5... mas o outro não tem 10!			**(IMV)**
		Mas podes juntar 10. Podes juntar a bilha de 4 com...	**(IMOrg.)**
Será? Eu acho que cada uma... só tem 10 medidas. Assim já estás a fazer mais bilhas!			**(IME)**
	Mais, pois.		
Estas já estão cheias! De leite, já está cheia de água e já está cheia de azeite.			
		Só que eles pedem-te: que contém cada. Se tu só preencheres essas não te vai, não é solução do problema!	**(IMV)**

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
		Entendes? Porque eles, porque é assim, só se preencheres aqui esta fila, não é? Isto está certo porque diz que deu esta...	**(IMV)**
Não, mas é que depois, sim, eu estou-te a perceber.			
		Só que sobram mais bilhas!	**(IMV)**
Há aqui dez bilhas.			
		Pois, só que se a gente preencher estas, vai-nos sobrar 7 bilhas.	**(IMV)**
Não mas nós podemos juntar esta bilha com aquela mas assim vai faltar bilhas no fim!			**(IMOrg.)**
Também não pode ser assim como tu estavas a dizer, porque tu estavas a dizer juntar a 5 com a 4. 5 com a 4 dava 9 litros, mas depois, no fim, não te dá dez!			**(IMOrg.)**
		Nove com um, por exemplo, dá dez. Já é o dobro.	
Então mas o problema não é isso!			
	Depois, quatro vezes...		**(IME)**
Então espera aí, um comerciante possui dez medidas, espera lá.			Leitura do enunciado.
		Não sei se é assim!	**(IME)**
Contendo... umas estão cheias... uma única medida ficou vazia.			Leitura do enunciado.
É isso é! Não pode ser o que tu estás a dizer, porque é assim, tu contas aqui uma, duas, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, tens dez medidas, não é? Se a gente fizer como tu estás a dizer, por exemplo, juntar o 5 com o 4 e com o 1 já dá 10.			**(IMOrg.)**

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
		Esse aí já não podia ser usado, porque já foi usado aqui!	(IMV)
Lá está, mas no fim, nunca dava dez medidas, porque tiravas três medidas para formar uma única só!			(IMV)
Estás a entender?			
Tiravas, por exemplo, o 5 e o 4, dava, isto aqui ia dar dez medidas, isto tudo.			
		Sim, sim.	
Então espera aí... eu acho que o 2 é que a gente tem que tirar!			
O outro fica com 4.			
	Com 6.		
	Aqui já estamos a utilizar outra vez o 6 para este leite!		(IMV)
Se fizermos ao contrário? Por exemplo se o azeite tiver 38, quantos há-de ter a água?			
Há-de ter... divide lá por dois.			
	Dá 16, não... é mais...		
É...			
		Dá 19.	Cálculos efectuados com a máquina.
		Depois, a dividir por dois já não dá!	(IME)
	E 19 também não temos!		(IME)
Espera, espera...			
	Mas 19 pode ser o quê? Pode ser esta com esta.		(IME)
Mas aí é que está! Não pode ser, porque é assim, se eles querem dez medidas, nunca pode. A gente está a unir as medidas, acho eu!			(IMV)

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
		Mas eu... eu acho que se calhar a gente até nem podia uni-las.	(IMOrg.)
		É assim, uma delas tem de ficar de fora. Uma medida fica de fora. Eu acho que a gente tem de juntar, entendes...	(IMOrg.)
Essa medida de fora, eu acho que só ao fim é que a gente consegue descobrir qual é a medida de fora!			(IME)
		Pois, mas por isso é que eu acho que nós devíamos ir por aí!	(IMOrg.)
		Estava a dar, só que não entendo, porque é que isto não deu certo!	(IMV)
Não sei, mas é assim, eu acho que esta aqui. Eu no início estava a dizer isto só que agora já não estou a ver muita lógica nisto!			(IMV)
Porque é assim, se ao fim e ao cabo, se a gente fizesse o que tu estás a dizer...			
	Esta, por exemplo, tem só um litro de leite, esta tem dois de água e esta tem quatro de azeite!		
Pode ser 1, 2, 4, exacto! Depende daquilo que tu fazes!			
Estes aqui encaixam bem. O problema está nestes aqui no fim!			(IME)
Porque, por exemplo, se meteres 10 litros e agora a seguir era 5. Já tinhas que meter o dobro de água.			(IMOrg.)
	Porque o dobro de água...		
Há-de ser 10. Dez, não tens cá nenhuma de 10!			(IMOrg.)
		Pois não.	

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	Depois. Mais duas vezes...		
Será que nós podemos retirar daqui água?			(IMOrg.)
		Não, não, acho que não!	
Não, não podemos.			
		Diz assim: cada uma delas está cheia de um só líquido.	Leitura do enunciado.
Só se ficar a de 5 de for. Espera lá... tiramos a de 12. A de 12, o dobro há-de ser a de 24 e o dobro de 24...			
	Não, era 6... utilizamos 6.		
Mas a de 6 já está utilizada!			(IMV)
	Ah, mas tirando esta hipótese. Começando com o 1, com o 2 e com o 4. Este é leite, o dobro é água e...		
		Será azeite.	
	O outro era azeite.		
	Depois saltávamos, esta era de 6, era de leite...		
Espera aí, eu estou a perceber o que estás a dizer, espera aí, 1, 2, 4.			Resisto escrito. (IME)
1, 2, 4. Aqui já está. Agora a de cinco. A de cinco era a que a gente devia deixar de fora, não é? Porque não dá o 10.			
	Pois, eu também já tinha pensado nisso!		(IME)
Agora ficamos com a de 6.			
	6.		
Para o leite. Há-de ser a de 12 a água e 24.			Registo escrito.
	24 azeite.		
24 de azeite.			

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	O pior é agora! 22, 38 e 5.		**(IME)**
		Mas assim, eu acho que não estamos a responder à pergunta do problema: o que contém cada medida?!	**(IMV)**
Pois, tu queres saber o que contém!			
		Contém, estas dez medidas, o que é que contém!	
		Nós sabemos, uma, duas, três, quatro, cinco...	
Depois vais somar isto tudo!			
		Ah, está bem!	
Esta contém uma de água, uma de não sei quantos.			
Porque é assim, o meu problema está aqui nas dez medidas!			**(IMOrg.)**
Porque é assim, se fosse como estavas a dizer à bocado, era fácil! A gente juntava este com este e este com este...			**(IMOrg.)**
		Pois era.	
O problema é que no fim, acho que tem que dar 10 medidas!			**(IMOrg.)**
Nós aqui temos, uma, duas, três, temos seis. Faltam-nos quatro!			**(IMV)**
Mas assim, lá está, quatro, sobra uma. Agora tinha que haver aqui três!			**(IMV)**
		Pois tinha.	
Agora a seguir, nós íamos buscar a de 15, mas a de 15 já não dá!			**(IMV)**
	Tínhamos que ir juntar, como tu estavas a dizer à bocado. Juntar, mesmo repetidas!		**(IMOrg.)**

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
		Porque eu acho que temos que usar estas dez medidas todas!	**(IMOrg.)**
	Que contém cada medida?		Leitura do enunciado.
Eu não estou a perceber...			**(IMO)**
	Mas a pergunta é: que contém cada medida.		Leitura do enunciado.
	A um contém não sei quantos...		
Que contém cada medida?			Leitura do enunciado.
	Mas aqui está só a ver estas três coisas...		
Então, mas... mas também está, vês, está cheia. Elas têm que estar cheias. Por isso, a de um tem de conter 1 litro, a de 2 tem que conter dois e quatro a de quatro...			
	Estão mesmo cheias, não é possível...		
Não há possibilidade de tu tirares de lá nada.			
	Não está só a meio nem só a...		
Está cheia, está cheia. Se está cheia, não podes retirar de lá nada!			
	Pois, aquela tem um, aquela tem dois e aquela tem quatro.		
Mas até aqui está bem. Agora falta-nos a última parte, é que não estou a ver onde é que vou buscar a última parte!			**(IMV)**
Será que à bocado estava a fazer... se retirássemos a de 38 sobrava, depois já não dá!			**(IMOrg.)**

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Por isso é que eu acho que tínhamos que tirar aqui uma que ficasse... e a de 15, não dá?			(IMOrg.)
		Eu até acho que esta....	
E a de 5? Espera lá, a de 5 dá 124. A dividir por dois dá 62.			
		Então olha, isso a dividir por dois...	
Espera aí, espera aí... 124. Eu acho que é isso!			Registo escrito. (IME)
62 de azeite, quantos é que dá? Quantos é que temos que tirar de azeite?			Registo escrito.
Para dar 62 tiramos, por exemplo a de 38...			Registo escrito.
		Pois, eu estava a achar que era assim!	(IME)
A de 38 e tiramos mais qual? Faz aí a conta.			
		Dá 24.	Cálculos efectuados na máquina.
		Entendes? E agora, eu acho que era assim!	(IME)
Quer dizer, 38 e 24 tinham azeite.			
Agora ainda nos sobravam sessenta e duas.			(IME)
	Sim.		
		Dessas sessenta e duas, metade dessas...	
	Que é 31.		
Trinta..., não, quanto é que dá?			
	62, metade é 31. Então?!		
Agora também estava parvo! Tens razão.			Sorrisos.
31. Cá está, tirávamos 15.			

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	E crescia uma!		**(IMV)**
Não, tirávamos, por exemplo, ou então tirávamos a 22...			
	Nove. Não dá!		**(IMV)**
		Esse, mas...	
É! Espera aí, eu já estou a perceber!			**(IMO)**
32. Agora, por exemplo, tirávamos a 22 e para dar 31...			
	Nove.	Mas a um tinha de estar lá!	**(IMV)**
Sim, sim, sim. Agora espera, agora já podes juntar como tu estavas a dizer!			**(IMOrg.)**
		Pois, eu acho que era assim!	**(IMOrg.)**
Então, é assim, tiramos a 6, a 2 e a 1 e a 22.			
Era 22, 6, 2 e 1.			Registo escrito.
		E essas todas continham água.	Registo escrito.
Essas continham água e agora as que sobravam...			
	Tinham leite.		
Faz lá agora aqui as de leite.			
Sobrava...			
	A 4.		
		Espera lá, vamos ver quais é que não...	
Agora 31, cá está... a dividir por dois, como não dá um número certo, quanto é que dá?			**(IME)**
		Pois, ai!!!!!	**(IME)**
Tinha dado o 15!			
		Claro!	Sorrisos
Faz lá aí a conta, dá 15.			
		Que estupidez!	

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	A dividir por dois dá 15 e meio, por aí...		
		Não, agora jogamos com estas que nós cá temos. Quais é que são as bilhas que nos faltam?	(IMOrg.)
	Então temos a 4, a 5, a 15.		
		Já tirámos, espera lá, já tirámos a 22...	
Já está, eu risquei-as, é a 15, a 5 e a 4 que nos faltam			Esqueceu-se da 12.
	5, 4, 15. E a 12? A 12 também...		Falou só para ela.
31, dá 16.			
	Não, dá 15 e meio.		
		Então não está bem ainda, porque aquele 31 tinha de dar um número...	(IMV)
	15 e meio.		Cálculos com a máquina.
		Sabes porquê? Porque a gente aqui já vai fazer, a gente fez com o qual?	(IMV)
	12, 16, não dá		Falou só para si própria.
Não, mas aqui já tirámos a bilha de 5!			(IMV)
Nós já tirámos a 5. Isto devia dar 19.			(IMV)
Isto já devia ir dar 38!			(IMV)
		Pois, já devia...	
	Que era para dar certo.		
Portanto, este era o de 4 e a de 15 para a de leite...			
Então, espera aí, leite.			Registo escrito.
Eu acho que a gente está perto!			(IME)
		Eu também acho, mas acho que não é a bilha... vamos começar por fazer...	(IME)
4 e 15.			Registo escrito.
Água.			Registo escrito.

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
		Acho que temos de começar a fazer isso de novo mas sem pôr esses valores!	(IMOrg.)
		Olha lá, esse valor aqui nunca pode ser quatro....	(IMV)
Então espera lá, mas primeiro temos que fazer como tu estás a dizer. 129, tira lá dois.			
		Pois, estás a ver...	
Tira dois.			
Mas assim, dá-te valores médios, não pode ser! Ah, pode-se tirar na mesma!			(IME)
Agora, quanto é que vai dar de 127?			
Tira 38 mais 24.			
		Eu agora já não estou a entender o que estás aí a fazer!	(IME)
Então, 129, 22, 64 e meio.			Cálculos com a máquina.
Mas assim não podemos tirar!			(IMV)
Por isso é que eu te digo que não pode ser. Por isso eu quero tirar sempre, temos de tirar sempre uma já no início, que é para te dar um número par!			(IMOrg.)
		Pois, aqui já nós temos...	
		Vocês fizeram a soma bem? Pode ser que seja número par!	Sorrisos. (IMV)
Tirando o 1.			
	Dá 128.		
Mas tirando o 1 já nós fizemos à bocado.			(IMV)
		Nós já fizemos tirando o 1.	

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Ai não, é capaz de estar certo, olha aqui... ai não, porque depois não te dá o número 16!			(IMV)
	Deixa-me ver.		Efectua cálculos com a máquina.
Não, isto está certo. Eu já vi que aqui é que nós temos que tirar. Aqui logo no início temos que tirar.			(IMOrg.)
Tira lá o 5. 124.			
		Já fizemos com o 5!	(IMV)
124. Sobram 62 de azeite.			
	E se tirarmos o 4? Dá 125.		
Isso não dá! Isso dá um número médio.			(IMV)
		E se nós tirarmos a bilha de 1?	
O 1. Tira o 1. 128 divididos por dois dá 64.			
		128.	Registo escrito.
Não, não metas aí! Mete aqui mais para baixo. Isto é ao fim!			
		128. Agora estes 128 a dividir por dois dá 64.	Registo escrito.
Agora tens de ir buscar... quanto é que vais tirar... quanto é que vais tirar, lá as bilhas?			(IME)
		Vou tirar, para encher o 64, tenho que preencher a 38...	
O 38. Faz as contas logo aí.			
38 mais 24...			
	Mais 2.		
Mais 2.			
		Então vá, escreve lá.	
	Escreve: 38, 24 e 2.		
		Agora risca já as bilhas que nós...	(IME)

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	Agora temos outros 64.		
Agora, 64 a dividir por dois.			Registo escrito.
	Que dá 32.		
	Desses 32, quais é que a gente vai buscar?		**(IME)**
Quantas bilhas... é que se tem que pôr.			**(IME)**
	Por exemplo, 32... 8 e 2, dez, não temos.		
		Quais é que foi as que tirámos? Foi a 24 e a 38.	**(IME)**
	E a 2.		
15, 20.			
	22. Já não dá!		**(IMV)**
		Então, esta.	
Não, essa já está e a 1 também já está.			**(IMV)**
		Ai foi aquela que se...	**(IMV)**
E 5, 20. 20 e 12, 32.			
		É isso.	
15 mais 5 mais 12. Pronto.			Registo escrito.
E agora desses 32.			
	Tem que dividir		
		Dá 16.	Cálculos com a máquina.
Dá 16.			Registo escrito.
		Ora já usámos aqui...	**(IMV)**
	O 12 e 4 já está?		**(IMV)**
		Ai não!	**(IME)**
Não utilizámos nada!			**(IMV)**
Utilizámos o 22. Ou não?			**(IMV)**
		Não, não, não usámos o 22!	
	O 12 e o 4 não está aí em baixo, acho eu!		

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	Então a vazia é esta!		
Então e a 1? Assim falta a 1 também!			(IMV)
		A vazia era a 1!	
Mas tem lógica!			(IMV)
Fazemos assim e vamos para a frente. 16.			
	Era 12 e 4.		
Mas o 12 já utilizámos! Então?			(IMV)
	Já? Onde?		
Já!			
	Ora bolas!		
		Então e... aí a 22 também não.	(IMV)
Então mas espera lá, a gente pode utilizar aqui outros números!			(IMOrg.)
		Pois pode. Tenta lá pôr 22 mais...	
15.			
	Não, 22 mais 15 dá 37.		(IMV)
		Olha, o 22 mais o 6 mais o 4.	Cálculos na máquina.
	22 mais o 6 mais o 4.		
Sim, que já utilizámos estes aqui, vá.			
		Agora sobra-nos o 15 mais...	
Já utilizámos o 38, o 24 e o 2, o 22, o 6 e o 4.			
	E agora queremos o número 32, não é?		(IME)
Não, agora queremos o 16.			(IME)
Dá aqui 15, 5, 20.			
	O 16 é mais complicado!		(IME)
15 e 5, vinte.			
Agora temos que reformular este.		Vamos baixá-los aqui. Tirar este dois e pôr...	(IMOrg.)
		Pois.	
Então, espera aí...			

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	Em vez de ser aqui 12...		
		Mete aqui ao canto os números que nos faltam.	**(IME)**
O 38 tem que ser!			
		Mais...	
Agora o problema está: este aqui tem que dar 16. Temos 24, também não pode ser.			**(IMV)**
Então mas lá está, o primeiro tem que ser sempre este.			**(IMV)**
		Então aqui o 24. Pôs o 24 aqui.	
Aqui não pode ser, porque aqui há 16!			**(IMV)**
	Pois é, é muito baixo. Tem que ser com números menores.		**(IMOrg.)**
Já não estou a entender nada disto!			**(IMV)**
Eu acho que nós estamos perto!			**(IMV)**
Acho que estamos mesmo muito perto!			**(IMV)**
Mas se a gente tirar a 5, eu acho que é assim, eu acho que o 1 nunca se pode tirar.			
		Deixa lá ler.	
Ou é 5 ou é 15!			
		Uma medida ficou vazia.	Leitura do enunciado.
Ou é essa ou é essa. Eu tenho quase a certeza que uma destas é que ficou vazia!			**(IMOrg.)**
		A qual?	
Ou é esta ou esta.			
	5 ou 15?		

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Vamos lá com a 15. Se retiramos a bilha 15 menos 129, quanto é que dá?			Registo escrito.
		Mete ali os resultados daquela que faltava que é para a gente saber.	(IME)
O 16?			
		Era 16, quais é que faltavam? para a gente ver.	(IME)
	A gente começou assim a escolher...		
Este sobram quatro. Lá está, sobram quatro. Quatro e um, cinco.			
Por isso é que eu estou a dizer que com certeza vai ser 5, porque é assim, sobram quatro, com um que a gente tirou, cinco.			(IMOrg.)
	Cinco. Dá 125.		
		Vamos lá experimentar.	
		Isto dá 124.	Cálculos na máquina.
		Dá 31.	Cálculos na máquina.
	É pior...		(IMV)
129 menos 15?			
	Não.		
129 menos 15 dá 124.			
	Fez menos cinco!		
	114. Mas a dividir por dois dá 57! E depois já não dá!		(IMV)
		Dá 57.	Cálculos na máquina.
		Depois tem que haver um dobro...	
Mas o que é que estás para a aí a fazer?			(IME)
	57... 30, 50, 38, 54, também não dá. 40, 46, 48...		

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
		É assim, eu acho que isto até está mais ou menos, acho que não deve ser muito longe daqui.	(IMV)
Já estamos perto.			(IMV)
	Está um bocado complicada, esta execução.		(IMV)
Só pode ser este aqui.			
Isto deve ser aqui um jogo, basta a gente jogar aqui com o...			(IMOrg.)
	Com outros números.		
		É assim, nós tiramos logo a bilha 2.	
O primeiro tem que ser assim: 38, 24 e 2.			
		Mas pode não ser...	
Podes tirar é o 24. Tira o 24.			
	E o 38...		
Tiramos aqui o 24 e metemos 38 e... o 38 tem que ser!			
Onde é que vais meter o 38? Nunca o vais meter em mais lado nenhum!			(IMOrg.)
	Então e que número vai dar para substituir aqui?		(IME)
Vais meter aqui o 22. Vê lá.			
	Então, aqui preciso de um quatro em vez do dois.		
38 mais 22.		Mas isto....	
	Dá sessenta e... precisa de quatro.		
Espera, agora sobra, falta... vamos pôr aqui os números todos.			(IME)
		Sabes porquê? Olha aí, o nosso problema, se calhar, lê lá melhor.	
		Diz assim: para isso gastou duas vezes mais água do que leite.	Leitura do enunciado.

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Sim, e duas vezes mais azeite do que água.			Leitura do enunciado.
Lá está, o azeite é sempre o primeiro.			
		Pois é.	
É o que tem o valor mais alto.			
		Pois e a dividir por dois vai dar a água e a água a dividir por dois vai dar o azeite.	
É como a gente tem estado a fazer.			(IMV)
A dividir por dois, não! A dividir por dois vai dar o leite!			(IMV)
Ou por outra, multiplicar também dá.			
		Pois dá.	
Mas é assim...			
	Temos é depois que juntar as bilhas, de acordo com...		
Portanto, 1, 2, 4, 5, 6, 12, 15, 22, 24, 38.			Registo escrito.
Então já retirámos o 38. Já está. O 22 já está e o 4.			Registo escrito.
		O 1 tiras, que é aquele que está fora.	
O 1 sim, este aqui é o que nós retiramos.			
Depois o 15, o 5 e o 12, agora não sei. Depois se retirarmos o 5, o 15 e o 12, quais é que sobram?			(IME)
O 24 e o 6.			
	E o 2.		
Logo, nunca pode ser, porque é 16.			(IMV)
Então vamos fazer 16 primeiro.			
	16 pode ser o 12 e o 4.		
O 12 e o 4 já está!			(IMV)
	Pois já, mas era no, no...		

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Então, lá está, esta nunca pode ser.			(IMV)
	Não.		
	Se a gente fizer primeiro o 16.		
Então vamos fazer primeiro, vamos fazer ao contrário.			
É isso mesmo.			
		Eu estou a fazer a conta...	
Espera aí, espera aí, espera... vamos fazer primeiro para o 16. Para o 16.			
	É 12 e 4.		
6 e 4, 10, 12.			
	É o 12 e o 4 que dá 16.		
Pode dar mais!			
	Pois pode.		
5, 6, 7.			
	Por exemplo, pode ser o 6, o 5 e o 4.		
	Não, esquece, não, não.		(IMV)
	6 e 5, 11. 11... não.		
12. Eu acho que é assim, o 12 tem que ser. Acho que tens razão. É o 12 e o 4.			Registo escrito. (IMV)
Não consegues tirar mais nada, porque é assim, se tirares o 15 não consegues...			(IMOrg.)
	Não dá, eu já tive a ver, não consegue.		(IMV)
Podemos fazer assim por tentativas, utilizando também o 1.			(IMOrg.)
	Pois, eu acho que já estão a tirar o 1...		
		Ah, podemos usar, mas se usarmos o 1 temos que tirar outra bilha mas não podemos jogar com o 128!	(IMOrg.)

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Pois.			
	Em vez de ser o 1 pode ser outra.		
Não, não, mas assim já nunca te dá estes valores aqui!			(IMV)
	Pois é isso. Nunca dão certos, também.		
O 12 e o 4. Agora para dar 32...			
	Deixa cá ver, então o 32 pode ser o quê?		
		16...	
32. Aqui 4 e 12.			
	O 12 já está em baixo.		
Ah, o 12 já está, então pronto!			
24 e 6, 30.			Registo escrito.
	E 2.		
E 2.			Registo escrito.
		E agora para o outro é que não te dá, se calhar!	(IMV)
38 mais 20?			
	38 mais 15.		
Não! 38 mais 15 mais 5. Mais 20, 38 mais 20.			
	Dá 58.		
58.			Registo escrito.
		Não dá!	
	Ainda nos faltava o 6!		
	O 6 já está!		
O 6 já está. Nós gastamos todos.			
58.			
	Estava a arranjar um número para ver se dava!		(IMOrg.)
Falta-nos um 6 aqui.			

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	Era isso que eu estava a dizer. Um 6, mas 6 já aqui está!		**(IMV)**
		Então nós temos, uma, duas, três, quatro, cinco...	
Cinco e depois é o resto.			
Faltava uma. Falta uma, não, depois utilizámos as outras.			
Uma, duas, três, quatro, cinco. Ali utilizámos 6.			
	Faltam quatro.		
		Quatro. Quais eram as quatro que sobravam?	**(IMV)**
Vamos decompor aqui outra vez o 32.			
		Quais é que eram as bilhas aqui que nos sobravam, destes dois para o 64?	**(IME)**
Mas não dá!			
2 e 14, 16. 2 e 14, 16.			
6 e 4, 10, também não dá.			
6 e 5, 11... 11 e 4, 15, também não dá.			
Pois, lá está, os do 16 têm que ser sempre aqui estes primeiros.			**(IMOrg.)**
		Assim não vai, nós temos que ir tentar com outra que tirem todos a cesta.	**(IMOrg.)**
	Em vez de tirar a 1, tirar outra.		
Então mas outra já a gente experimentou e não dá.			**(IMV)**
		Pois, temos que experimentar com elas todas para ver qual é que dá.	**(IMOrg.)**
	31 dava.		
		Então faz lá.	
	129 menos 5, por exemplo.		Cálculos na máquina.

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	124.		
Nós temos 129 litros. Destes 129 temos que ver o leite, tem que ser duas vezes o do leite e este aqui... nunca pode, nunca pode porque senão assim, vai dar mais do que 129 litros.			
		Faz lá 31. Imaginando que 31 era o do leite.	
		31 vezes 2 é igual a 62. Vezes 2 é igual a 124. Vezes 2 já não dá.	Cálculos com a máquina. **(IMV)**
	Porquê vezes 2?		**(IMV)**
Esta aqui não estou a perceber!			**(IMV)**
Vamos para a próxima.			

GRELHA DE REGISTO PARA O PROBLEMA Nº 4 – GRUPO B

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	Os Maridos Ciumentos.		Leitura do enunciado.
		Ai, este é o de atravessar o rio, se calhar.	**(IMO)**
	Três casais...		Leitura do enunciado.
Ai, eu gosto destes, estes são fixes!			**(IMO)**
Três casais, os Silva, os Costa e os Fonseca, querem atravessar um rio, mas só dispõem de um barco em que só cabem duas pessoas de cada vez.			Leitura do enunciado.
	Aquele que tem a ver com os canibais, também!		**(IMO)**
		Tem que se ler alto!	Criticando a leitura silenciosa do colega.
	Três casais, os Silva, os Costa e os Fonseca, querem atravessar um rio, mas só dispõem de um barco em que só cabem duas pessoas de cada vez. Ora, acontece que os maridos são muito ciumentos e, portanto, nenhum deles quer deixar a sua mulher, seja numa das margens ou no barco, com os outros homens, a não ser que eles também estejam presentes – elas só poderão ficar sozinhas ou na companhia das outras mulheres. Como deverão fazer para atravessar o rio?		Leitura do enunciado.
	Então nós temos, temos uma margem, temos outra margem, temos o rio.		
		Faz aí as margens.	

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	Não! Façam vocês.		
	Isso é que são as margens.		Após ter sido desenhado o rio.
Isto é a água.			
	Isto é o barco.		
	Isto tem a ver com a alpista, com o passarinho e também com o outro que era... os canibais ou não sei o quê!		(IMO)
Os casais. Temos três maridos.			Registo escrito.
	E três esposas.		
Vá, três homens e três mulheres.			Registo escrito.
	Três casais, os Silva, os Costa e os Fonseca querem atravessar um rio mas só dispõem...		Leitura do enunciado.
	Eles só podem ir duas pessoas.		
Pomos um homem e uma mulher, não é?			Registo escrito.
	Um homem e uma mulher, por exemplo, os... temos que ver se são os Silva, os Costa ou os Fonseca.		
		Fica aí a mulher. Fica aí a mulher.	
Fica a mulher.			Registo escrito.
E vem o homem.	E vem o homem sozinho.		Registo escrito.
Chega aqui temos duas mulheres e três homens.			Registo escrito.
	Mas atenção, eles são ciumentos. Têm que ir, não pode ir a mulher de um e o homem de outra.		(IME)
O quê?		Então vai...	(IME)
	Eles são ciumentos e então não pode ir...		
Ah, sim!			
		Agora vai um homem e outra mulher.	

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	Mas, pois e tem que ficar aqui...		
		Ficam lá as outras duas.	
	Fica lá a outra mulher.		
Vai outra vez um homem e uma mulher.			Registo escrito.
		Deixa aí a mulher.	
Deste lado ficam então, pois, não é preciso! Estás a dizer que fica aqui a mulher?			**(IME)**
		Não, ficam aqui duas mulheres.	
	Duas mulheres, claro. Que é esta e esta.		
Sim, volta o homem para aqui.			Registo escrito.
Então mas assim não pode!			**(IMV)**
		Porque é que não pode?	**(IMV)**
Tens que levar um homem.			
	Tens que levar duas pessoas.		
Tens que levar um homem, porque senão deixas aqui uma mulher sozinha já com os outros!			**(IMV)**
	Sabes porquê? Isto... isto, este marido que é desta sai e entra um casal.		
A gente pode fazer assim: M1 e H1.			Registo escrito.
Vem o H1. Agora vai o H1 e o H2. Chega cá, deixa o H1 e o M1.			Registo escrito.
Vem o H2 para aqui.			
		Sim e agora chega aqui. Ah, mas aqui já está a M2!	
Sim, olha aqui, então vão dois homens, não é? Estão duas mulheres e um homem.			Registo escrito.
		Ah, mas é que não podem estar aqui!	**(IMV)**

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	Mas não pode!		
Não podem estar aqui, porquê?			(IMV)
	Não é aqui, é aqui, como é que é?		
Então mas a mulher está com o homem 1!			
		Olha lê lá bem. Diz assim:	
	Pois, e agora vai para lá o H2 aqui não pertence.		(IMV)
Sim! É o homem 2 que não tem. A mulher dele está aqui.			
		Mas está aqui com o homem, este homem é de onde?	(IMV)
	Mas está cá também a mulher dele!		
Mas está cá a outra também! Não pode estar é sozinha!			(IMV)
		Ah, está bem!	
Estás a entender?			
		Elas podem estar sozinhas ou acompanhadas...	Leitura do enunciado.
Ele vem para cá. Se ele vem para cá fica a mulher, a mulher 2, a mulher 3, o H2 e o H3.			Registo escrito.
		Mas olha ali, diz assim: elas...	Leitura do enunciado.
Agora vão para lá, não é?			
		Olha lá, elas só podem ficar sozinhas ou na companhia das outras mulheres!	Leitura do enunciado.
		Aqui ela está duas mulheres e está um homem. Já não pode!	(IMV)
	Poderão ficar sozinhas ou na companhia.		Leitura do enunciado.

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Não! Olha ali: ora acontece que os maridos são tão ciumentos, portanto nenhum deles quer deixar a sua mulher seja numa das margens ou no barco.			Leitura do enunciado.
		Com os outros homens!	**(IMO)**
Com os outros homens.			Leitura do enunciado.
Lá está, não há aqui...			
		A não ser que eles também estejam presentes.	Leitura do enunciado.
Portanto, elas só poderão ficar sozinhas ou na companhia das outras... então?			
	Olha aqui, então não está presente? Vê-se que está na presença de outras. Tem lá o marido mas tem lá as outras mulheres também.		**(IMV)**
Isto está bem. Disto aqui percebo eu!			**(IMV)**
		Mas quando ela diz assim: elas só poderão estar sozinhas ou na companhia das outras mulheres.	Leitura do enunciado.
Pronto!			
		Mas aqui temos duas mulheres e temos um homem!	**(IMV)**
Então e não está na companhia da outra mulher?			**(IMV)**
	Mas está na companhia de outra mulher!		**(IMV)**
		Está bem, não me batam!	
	Estão lá três pessoas, pronto!		
Agora vai o H2. O H2 pega na mulher dele. Pega no M2.			Registo escrito.
Agora aqui já temos o M1.			

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	O H1 e a M2.		
E o M2.			Registo escrito.
Não é? Pode cá ficar com outra mulher.			**(IME)**
		É. Sim.	
E volta e agora vai outra vez o H2.			
	Só que agora o H2 fica aí.		
Temos o M3, o H2 e o homem 3.			Registo escrito.
Agora vai o H3 e a mulher dele para aquele lado e o H2 fica aqui.			Registo escrito.
	Fica aqui sozinho. Isso!		
Agora fica aqui o M1, o H1, o M2 e a mulher 3.			Registo escrito.
E agora volta outra vez o H3.			
		Para ir buscar a mulher.	**(IMV)**
	Para ir buscar o homem 2!		
Para ir buscar a mulher?! Para ir buscar o homem 2.			
Agora volta para cá e fica o H2 e o H3.			Registo escrito.
	E agora vão os dois para lá.		
E agora voltam o H2 e o H3, pronto.			Registo escrito.
	E agora ficam todos.		
Ficam todos: o M1 com o H1, o M2 com o H2 e o M3 com o H3.			Registo escrito.
		Deixa-me lá ver!	**(IMV)**
	Isto é uma margem. Escreve aqui margem 1.		Registo escrito.
		Margem A ou margem B.	
	Margem B.		Registo escrito.
Já está! Outra margem.			

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Pronto, eu aqui é que fiz mal. Três mulheres e três homens. Devia ter metido logo M1, M2...			**(IMV)**
		Pois.	
Então, olha aqui...			
		Está bem, mas espera aí, deixa-me ler primeiro senão assim não consigo!	**(IMV)**
Está bem! Este aqui...			
		Eu fiquei com a impressão, como... elas só podem ficar sozinhas ou na companhia das outras mulheres, só que eu olhei para aqui e vi duas mulheres e um homem. Por isso é que eu achei que...	**(IMV)**
Então e não está na companhia de outra mulher?			**(IMV)**
	Mas está na companhia, tem que estar!		
Não pode ficar é sozinha com outro homem!			**(IMV)**
	Não pode.		
		Sim, sim.	
Ou ir, por exemplo, no barco com um outro homem!			**(IMV)**
	Eu sei o que tu estás a dizer, porque tu dizes que é sozinha ou com outra mulher e como aqui tem duas mulheres e um homem, por ter lá um homem é que estás a ficar com dúvida, mas eu acho que não!		**(IMV)**
		Pois era nisso é que estava a minha dúvida.	**(IMV)**

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Então mas não está sozinha. Então não está na companhia de outra mulher?			(IMV)
	Pois não, como está na companhia de outra mulher já não está sozinha com o marido da outra.		
		Sim, sim. Agora é que eu já entendi isso mas em primeiro não estava, porque olhei para aqui e vi...	(IMO)
Por exemplo, não pode estar é a mulher 1 com o homem 3!			
		Sim, sim.	
Ou com o homem 2.			
Por exemplo, não pode ir no barco.			
		Como estava aqui: elas só podem ficar sozinhas ou na companhia das outras mulheres, eu olho para aqui e estava a ver que estava com outro homem, por isso é que achei...	(IMV)
	Mas se leres aqui par trás já dá para perceber. Nó é só aqui.		(IMV)
		....margens ou no barco, com os outros homens, a não ser que eles também estejam presentes.	Leitura do enunciado.
	Aí está. A mulher e o marido respectivo.		
		Este é duas mulheres que deve ser do M1.	
Não, o M1 já aqui está!			(IMV)
		Então e este M1 é o quê?	(IMV)
Este é o H. Olha aqui, quer dizer, o teu problema está aí nisso, não é?			(IMV)

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
		Está, o meu problema está só nesta parte em que diz que...	**(IMV)**
	Mas eu acho que aí não há confusão nenhuma!		**(IMV)**
Temos três mulheres e três homens. Levas a primeira mulher e o primeiro homem para aquele lado.			
		Sim.	
O primeiro homem deixa a sua primeira mulher.			
		Sim e volta para baixo.	
E volta o primeiro homem, onde ficou M2, está M3 e está o H1, o H2 e o H3.			
Agora o H1 e o H2 vão para aquele lado, não é?			
		É.	
Vão os dois no mesmo barco. Aqui deste lado fica M2, M3 e o H3.			
		Pois, estás a ver? Agora aí é que eu entendi que realmente, agora é que eu estava a entender, porque aqui... pois agora já entendi, porque temos aqui o M3 e o M3 e o M2 e o M2.	Nota-se que ainda não percebeu. **(IMV)**
Depois chegas o H1. Como podes chegar a este lado o H2, porque a mulher dele não pode ficar, só pode ficar com o próprio homem ou com outra mulher.			
	Por isso, eles aqui trocam.		
Por isso é que trocam este aqui. Alguém tem que trazer o barco.			

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
		Eu entendo isso perfeitamente. Só não entendi, porque eu olhei para aqui e li assim: elas ó poderão ficar sozinhas ou na companhia das outras mulheres. Eu olhei para a nossa margem e vi que estava lá...	(IMV)
Exacto	Sim, sim.		
		Duas mulheres com um homem.	
		O problema diz com outros homens a não ser que sejam os maridos.	Leitura do enunciado.
	Pois mais para trás dá, percebes?		
		Pronto, então aqui fica... aqui está certo, porque... isto é o quê? É um M ou um H?	
É um M.			
		Pronto e agora já entendi que...	
Este era fácil!			(IMV)
		Pronto já entendi. Só que eu primeiro olhei para ali e vi que só poderiam ficar... só podem ficar na companhia dos homens delas.	(IMV)
Pronto, vamos continuar.			

GRELHA DE REGISTO PARA O PROBLEMA Nº 5 – GRUPO B

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	O Artur e o Bruno decidem jogar ao jogo das sequências de números. Sabendo que a estratégia seguida pelo Bruno para acrescentar um novo número à sua sequência é a de adicionar os dois últimos números ditos pelo Artur, qual será o número que ele dirá quando o Artur referir o 231?		Leitura do enunciado.
		Agora é fazer uma sequência, é aquela...	**(IMOrg.)**
	Eis as respectivas sequências já iniciadas.		Leitura do enunciado.
		É aquela do n.	**(IMOrg.)**
E nós podemos utilizar isso? n mais 1 essas coisas?			**(IMOrg.)**
		Ai, eu só sei que a gente pode... acho que sim. Vamos pôr...	
	Pronto, é o Bruno que acrescenta um novo número à sua sequência.		
Então é o jogo do 23! Não é igual àquele jogo do 23? O primeiro a chegar ao 23 ou ao 20, ou, qual é que era o jogo?			**(IMO)**
		Ai não, esse acho que não! Este é aquele... ah, é, é!	**(IMO)**
É a mesma coisa, só que é para o 231!			**(IMO)**
		Fazer-se um algoritmo!	**(IMOrg.)**

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
		O Artur e o Bruno decidem jogar ao jogo das sequências de números. Sabendo que a estratégia seguida pelo Bruno para acrescentar um novo número...	Leitura do enunciado.
		Ah, é mesmo esse!	(IMO)
		À sua sequência é a de adicionar os dois últimos números ditos pelo Artur. Qual será esse e tal?	Leitura do enunciado.
		Então o Artur...	
	Isto dá 10 com 15, 25. E ele soma sempre os últimos que este disse.		
	1, 3, 6, 10, 15, isto vai, isto é 1, 3,... aqui é mais dois, mais três, mais quatro e mais cinco. Este aumenta sempre de um em um, não é?		
Sim, sim, sim.			
	O n mais 1.		
O outro é ao contrário. Dois. Aqui aumenta três, aqui aumenta quatro, aqui aumenta cinco, aqui aumenta seis e aqui aumenta sete. Aqui aumenta oito e aqui aumenta nove.			
		E agora vamos ver, pronto, quanto é dezasseis, quando é quatro é...	
	Agora um número a seguir aqui... vai ser 21. Isto aqui, o número a seguir vai ser 21. Este vai ser 21, este vai ser... o número a seguir...		
Isto basta fazer assim: isto aqui é mais dois, mais três...			Registo escrito.
	O outro é mais três. Esse é mais três e esse aí é mais quatro.		

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Não, esse é mais cinco.			**(IMV)**
	Sim.		
		Mais cinco.	
Daqui para aqui é que é mais quatro.			
	Ah, está bem!		
Daqui para aqui...			
	Já é... sete.		
		É sete, vai sempre aumentando dois.	
	Este aumenta sempre mais um e este aumenta mais dois.		**(IMO)**
E este aqui?			
	Esse é mais cinco.		
Então, cá está, se este aumenta mais dois, quando este referir o 231, que é o Artur, este há-de dizer mais dois!			**(IMOrg.)**
	Sim.	Sim.	
Mais dois não! Mas dois mas com o número de trás!			**(IMV)**
	Pois, 234.	Pois.	
	Este aumenta sempre mais um.		
	Vamos fazer n mais 2 para o Bruno. 25 mais 11 dá 36. 36 mais 13 dá 49, para aí!		Registo escrito.
		49.	Cálculos na máquina.
	81 mais 19...		Registo escrito.
		100.	Cálculos na máquina.
	E agora é 100 mais 21, porque é n mais 2, dá 121.		Registo escrito.
	121 mais 23...		Registo escrito.
		144.	Cálculos na máquina.
	144 mais 25...		Registo escrito.
		169.	Cálculos na máquina.
	169 mais 27 dá 196.		Registo escrito.

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	Estamos lá quase. Estamos quase a chegar!		**(IME)**
196, sim. Agora, mais 29.			
		225.	Cálculos na máquina.
	Qual é o número?		**(IME)**
Não, só estamos a fazer para o Bruno! Agora a seguir temos que fazer para o outro nas mesmas vezes.			**(IME)**
	Espera, mais 31.		Registo escrito.
	Mas há uma estratégia, não é preciso a gente fazer isto tudo!		**(IMOrg.)**
Mas para tirarmos a sequência nós temos que fazer isto primeiro.			**(IMOrg.)**
Agora mete aqui o Artur, neste lado.			
	Pronto, nós acabámos aqui no 15. 16 mais 6 é 21.		
Mas mete 15 mais 6.			
	Pois, porque senão não sabe.		Registo escrito.
	Aqui é de um em um, não é?		**(IME)**
Sim. Aqui é sempre n mais 1.			
	Posso pôr aqui.		Registo escrito.
		Pois, e aí é n mais 2.	
	28 com 8, isso dá 36, penso eu.		Registo escrito.
		36.	Cálculos na máquina.
Será que é n vezes n mais 2?			**(IMOrg.)**
		45.	Cálculos na máquina.
	Eu só pus aqui...		
Mas não, mas continua a fazer o que estavas a fazer. Eu estava a pensar de outra maneira.			**(IME)**

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Tens que fazer isso, tens que ver quanto é que dá 231, que equivale aquele ali.			**(IMOrg.)**
Entendes o que a gente está a procurar?			**(IMOrg.)**
		66.	Cálculos na máquina.
		78.	Cálculos na máquina.
	78 mais 13...		Registo escrito.
		91.	Cálculos na máquina.
	Isto dá 105?		
É o 256! Isto nem é preciso...			**(IMV)**
		Dá.	
		Pois, isto é desnecessário, porque isto agora...	**(IME)**
	Pois é, porque basta fazer por ali, mas pronto.		**(IME)**
		Então agora temos que encontrar...	
Isso há-de ser o n anterior mais 1.			
	Mais 1. É.		
Mas não é só isso! Agora é preciso saber qual é que é o n anterior!			**(IMOrg.)**
	Isto aqui é mesmo para ter trabalho! Há uma forma mais rápida!		**(IMOrg.)**
	136.		Registo escrito.
		Isto é escusado.	**(IME)**
	Isto é escusado. Eu acho que há uma fórmula mais...		**(IMOrg.)**
		Isto é, agora é assim, 15 mais...	
	Mas já agora vamos continuar.		**(IME)**
		Não! Isto daqui para aqui...	
	Este aumenta sempre mais um.		
Dá. Mas o teu problema é quanto é que é o teu n! O problema não é isso.			**(IMO)**

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
É o teu n anterior. Multiplica o teu n anterior por n mais 1!			
É 15. Ah, mas também não dá!			(IMV)
	Eu acho que estou a perceber o que tu queres dizer!		(IME)
Ou será 2n mais 1?			(IMOrg.)
	Porque quando... 2n?		
Não, 2n não pode ser. 2 vezes 3 não dá!			(IMV)
	Não dá. Tem que ser...		
N mais 1 sobre... 2n mais 1 sobre 2. Faz lá, faz lá.			
		Olha aqui, aqui vão 6, aqui vão sempre 7, não é?	Registo escrito.
	Sim, sim.		
		8, 9.	Registo escrito.
	Como é que tinhas dito?		(IMOrg.)
	Como tu estavas a dizer... 2n... mais 1? Era a dividir por 2?		
Sim.			
	Eu acho que não. Substitui aqui um valor, por exemplo...		(IMOrg.)
2 vezes 15.			
	2 vezes 15 é 30.		
Sim, mais um, 31.			
	31 a dividir por 2. 31 a dividir por 2 não dá!		(IMV)
Ou então, se calhar é 2n mais 1 menos...	Menos 1.		
Não, então?!			
É 2n... então não é mais 1. Espera lá...			(IMV)

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	2n menos 1. Não! 2n menos 1, por exemplo tem de dar 30. Dá 29. 29 a dividir por 2 também não!		**(IMV)**
Não! Tem que te dar é o 28!			
		Tem que dar este. A gente anda à procura de uma coisa, ou este...	
De este aqui, vá...			
	É isso que eu estou a ver . Talvez não, não dava!		**(IMV)**
Tens 2n. Aqui o n é 15, não é? 2n dá 30. 30 para dar 28, menos 2.			
	Ou isso.		
Por exemplo, menos 2.			
	Experimenta lá para outro.		
2 vezes 21...			
	42.		
Menos 2.			
	40.		
Não dá!			
	Dá 20, não temos!		
Dá 20 como?! Dá 36!			**(IMV)**
	Na? Então 40, para fazer isto não dá!		
20 não. Mas então, não o 2 não é. É menos 2.			
2n menos 2, quanto é que dá?			
		Então, 2 vezes 40 menos 2, 28.	Cálculos com a máquina.
Ao quadrado.			Sorrisos.
		Então explica lá isso. Explica lá isso.	**(IMOrg.)**
	Eu acho que não!		**(IMV)**
Espera, então 28... eu acho que é 2n. 2n...			
		Não te esqueças que o teu n é aqui este 25!	**(IME)**

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Sim! Então 28 vai, 2 vezes 28...			
	56.		
Agora menos dois.			
	54. Não temos!		
Espera aí, espera aí, que eu já estou a...			**(IMO)**
	E 3n, também não?		
Tem de ser a dividir ou uma coisa assim qualquer!			**(IMOrg.)**
	n menos 2...		
		Imagina que o n é...	
Se fosse só n...			
Para dar o 28... tinha que ser o n vezes o n mais 1. Faz lá.			
Não, também não pode ser, não pode ser!			
O n é 15. Se o n é 15,...			
		Então este aqui é quando a gente for, este n vai ser o nosso n, 231, não é?	**(IMO)**
O quê?			
		Este vai ser o nosso n?	
Sim.			
		E vamos ter que...	
Não sei. Sim será o n, é como o 15.			
Se o n fosse 15, isso para dar 28? Eu estou a fazer, por exemplo, o caso aqui do 28.			**(IMOrg.)**
	Então este não é uma coisa exponencial? Era aquele das progressões geométricas.		**(IMOrg.)**
Ah, espera lá, espera lá. Então faz... é o nosso n.			
	n ao quadrado. Não!		

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Que é o 15. Não, o n ao quadrado não pode ser! É o n mais, isto aqui é quê? 15 mais 21... mais 7... mais 6, exacto... há-de ser n mais 1... ao quadrado sobre 2.			**(IMV)**
Faz lá o n mais 1 ao quadrado sobre 2.			
	Olha este aqui. Este aqui é, por exemplo... tem que ser ao quadrado, porque olha aqui...		**(IMOrg.)**
		Pois tem.	
	Dois ao quadrado dá 4. Três ao quadrado... 5.		
		Dá... 5.	
	(n mais 1) ao quadrado, não!		**(IMV)**
Não, mas depois temos de tirar.			
Espera lá: (n mais 1) ao quadrado sobre 2. (n mais 1) ao quadrado sobre 2.			Registo escrito.
Vamos experimentar para o 15. Ao quadrado...		Então fica, isso mais o 16. 16 a dividir...	Cálculos na máquina.
16 ao quadrado. Exacto. Aqui divide por 2.			
		Não pode ser.	
		Sabes porquê? Porque nós somamos aqui este coiso, este aqui. Temos de pôr na fórmula este aqui indicado.	**(IMOrg.)**
Mais uma razão me estás, pois é o mais 1!			
Então só se for n...			
		Mas é que aqui não é o 1!	**(IMV)**
n vezes este, faz lá. É o 15 vezes o 16... a dividir...			

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
		Nunca pode dar.	
Então e o 2n?			
		Só que o nosso n... isto está mal, porque é assim, vai ter que ser, é 15, entendes? Mas não é mais n mais 1. Isto aqui. Isto aqui não é n mais 1.	**(IMOrg.)**
Então, mas esse valor também não sabes, assim!			
		Mas estás a entender como eu estou a dizer?	
É 2, espera aí, 2n... 2n, não pode ser!			**(IMV)**
Eu acho que é assim: eu acho que é 2n menos 2, dá 28, não é?			
2n menos 2 dá 28. Agora 2n menos (n mais 1). Não, também não pode ser! Espera...			**(IMV)**
Eu tenho quase a certeza que é 2n!			**(IMOrg.)**
30 menos 2, 28. Vai ter o valor do 2º, não é? Agora tem que nos dar 36. Seria o 2n, é o 2 vezes 21.			
	Dá 42.		
42 menos 2, pois, dá 40!			
Eu acho que é aqui, eu é que não sei se é menos 2!			**(IMOrg.)**
		Se fosse menos 3 já não dava.	**(IMV)**
Há aqui qualquer coisa. É aqui, é que é!			**(IME)**
Espera, 15, 21, 28...			
Eu acho que vocês, à bocado deviam ter posto era assim: mais 8, mais 9.			Registo escrito. **(IME)**
É sempre o resultado anterior, que há-de ser este n aqui, que é o 21...			
	Mais o, o...		

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Mais...			
		E agora é mais este.	
Então espera, n mais....			
		É assim, não podemos estar a adivinhar assim. Vamos lá pensar com cabeça!	**(IMOrg.)**
É o 21... é mais 6, mais 7...			
		Isto é fácil!	**(IMO)**
Mais 9....			
		Eu podia ter estudado isto.	Sorrisos.
		Isto é igual a um que a gente deve ter feito na aula!	**(IMO)**
Então há-de ser o n, n, n, o n aqui é 21... n mais n mais 1 não pode ser.			**(IMV)**
	A gente sabe que é sempre mais um, não é? Mais dois, neste caso.		
		É assim, a este vai sempre somando mais 1 e a este vai sempre somando mais 2.	
	Tudo bem.		
		Como é que tu chegaste a essa conclusão?	**(IME)**
Por lógica. Sei lá!			**(IME)**
		Então como?	
Então, basta contar o número de vezes.			
	Como é que a gente vai arranjar aquele... vai dar o anterior e depois mais este?		**(IMOrg.)**
Se o n for 21, para dar 28 há-de ser o nosso 21...			

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	Ou vamos aqui por números mais simples. 16 é 4 ao quadrado, este é 3 ao quadrado e este é 2 ao quadrado...		**(IMOrg.)**
Então pode ser n ao quadrado mais qualquer coisa.			
	Quando o n é 1, n ao quadrado é 1.		
Mais 2 não podia ser! Só se for n ao quadrado.			**(IMV)**
	Quando é 2 dá 4. Quando é 3 dá 9, quando é 4 dá 16, quando é 5 e 25...		
Nós aqui é que representámos isto mal! É assim, isto devia ser assim: n igual a 1, segundo este aqui, dava 1, que era n ao quadrado, não é?			Registo escrito. **(IMV)**
n igual a 2, 4, n igual a 3...			Registo escrito.
	Mas atenção, temos que pôr aqui n ao quadrado.		**(IME)**
Dá 9.			Registo escrito.
n igual a 4 dá 16. n igual a 5 dá 25. n igual a 6...			Registo escrito.
	Dá 36.		
		Mas eles não te dão o valor do Bruno. Dão-te o valor do Artur. Esta é a sequência para o Bruno, entendes?	**(IME)**
Então, mas, por exemplo, isto aqui nunca é isso. Este aqui já era diferente.			
Isso é outra maneira de pensar, que eu não pensei!			**(IMV)**
Isto aqui é o n ao quadrado. Este é que é o n ao quadrado.			
Pois, lá está, 36, 49.			

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
		Pois, estás a ver...	
Agora o Artur pensa... n mais 2. Depois há-de ser n ao quadrado mais qualquer coisa.			
n ao quadrado mais 1 sobre 2.			
		Eu acho que a gente já fez essa!	(IMV)
	Já fizemos, acho eu.		
Não, não.			
	Tinha era o quadrado de fora.		(IMV)
Quando o n é igual a 1, 1 ao quadrado mais 1, 1, a dividir dá 1.			
Quando for 3 dá 9. 9 mais 1, 10. A dividir por 2 dá 5.			
Faz n vezes...			
		Mas o que é que tu queres que eu faça? n vezes o quê?	(IMV)
	n ao quadrado. n vezes o quê?		
Para dar o 1, o que me interessa é para dar o 1. Para o 1 já encontrámos, que era 3... mas este está mal. Este não é válido para o 3.			(IMV)
		Então fica... neste...	
n vezes n ao quadrado mais 1, tudo sobre 2.			
Isto dava 1. O 1 está certo!			(IMV)
	Exacto.		
Se fosse 3. 3, 9. 3 vezes 10, 30. 30 a dividir por 2... não dá!			(IMV)
A gente está perto!			(IME)
		Se a gente metesse aqui 3?	
3 como? 3n?			(IMOrg.)
	3n era, 3 vezes 1, 3...		
Não!			

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
		3n a dividir por...	
Tínhamos 3n, então vá, n...			
	3n menos 1.		
Então 3n nunca podia ser! Para o primeiro perdia logo a validade! No primeiro perdia logo a validade.			**(IMV)**
	E n ao quadrado menos 1?		
Não, menos 1 não pode ser!			
Não pode ser, porque para o 1 perde logo validade!			**(IMV)**
	Ai, mas isto deve ser tão simples e uma pessoa não sai daqui!		**(IME)**
3, 6, 10... então isso já eu fiz.			**(IMV)**
		Está bem, deixa-me estar a tentar.	**(IMOrg.)**
		Este também não dá. Isto não dá, porque dava 2 logo.	Cálculos com a máquina. **(IMV)**
O primeiro tem que dar logo o 3.			
3n mais 1...n vezes n menos 1.			
Se fosse n vezes n menos... não, também não pode ser!			**(IMV)**
		Para o n igual a 2 fica 2. 2 vezes 2 mais 1 dá 3. 2 vezes 3, 6. A dividir por 2 dá 3.	
Agora para n igual a 3...			
		Para o n igual a 3 fica,...	
	4 vezes 3, 12. Dá 6. Dá 6.		
		Pois dá 6, depois vai dar 10, não é isso?	
	Deixa-me ver se é 10.		**(IMV)**
Então mete aqui: Artur.			
	Espera só um bocadinho. 5 vezes 4, 20. Dá 10, dá.		
Mete aqui: Artur.			A Sus escreveu: n x (n + 1) sobre 2.

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
2 mais 1 como? Então? 1 mais 1!			**(IMV)**
		Mas 1 mais 1 onde?	**(IME)**
Sim! Então o n é 1!			**(IME)**
		Sim, sim.	A sus escreveu: 1 x (1 + 1) sobre 2.
	Dá 2. 2 vezes 1, 2. Sobre 2 dá 1. Esse dá 1.		
4 vezes 3, 12. Dá 6.			
		Agora já está. 200, agora substituímos assim, por este.	
Não! Quando o número dele for 231.			
Imagina com o n igual a 15, quando é que neste aqui vai ser 231?			**(IMOrg.)**
Isto agora é fácil! Este aqui é Artur.			**(IMOrg.)**
	E agora para o Bruno.		
Agora Bruno.			Registo escrito.
	16 vezes 17 sobre 2.		
Para n igual a 30 será... 30 vezes 31 sobre 2.			Registo escrito.
30 vezes 31, faz lá.			
	465.		
Também não pode ser!			
Não, calma, tenham calma...			
	Empresta-me a caneta só para eu ver assim.		
210, portanto há-de ser 23 vezes 24 a dividir por 2.			Cálculos efectuados coma máquina.
21 vezes 22 a dividir por 2...			Cálculos efectuados com a máquina.
Olha, aqui está! 21, n igual a 21!			**(IMV)**
Então olha ali, se o n for 21, o Artur há-de ser 21 vezes 22 a dividir por 2, que é igual a 231 e o Bruno há-de ser, onde é que está? n ao quadrado, há-de ser 21 ao quadrado, que é 441.			**(IMOrg.)**

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	Já tinha dado!		(IMV)
Não, não tinha dado!			(IMV)
	Tinha dado quatrocentos e tal, ou o que era!		(IMV)
Este é a nossa resposta. Vai, siga o próximo!			

GRELHA DE REGISTO PARA O PROBLEMA Nº 6 – GRUPO B

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
		Mário, Ricardo e Orlando terminaram um jogo que se desenrolou em cinco partidas. Jogaram com moedas de 1 \$00 e só tiveram, no decurso do jogo, somas inteiras de escudos. Em cada partida o que estava a perder dobrou os haveres dos outros dois. No fim do jogo, Mário tem 8\$00, Ricardo tem 9\$00 e Orlando tem 10\$00. Quanto tinha cada um no início?	Leitura do enunciado.
		Vamos fazer uma tabela.	
		Fazer uma tabela.	Registo escrito.
Cinco partidas.			
Mário, Ricardo e Orlando.			A Guiomar estava a ler em silêncio e a Helena estava a fazer a tabela.
		Agora consideramos assim: total.	Registo escrito.
		No total das cinco partidas o Mário teve 8\$00, o Ricardo 9\$00 e o Orlando 10.	Registo escrito.
		Então, o que estava a perder dobrou os haveres dos outros 2.	Leitura do enunciado.
		Então imaginemos que...	
Se calhar vale mais fazer por aqui, não?			
		Pois.	
Senão depois vão riscar o quadro todo.			(IME)

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
		Imagina que o Mário perdeu. Então se o Mário perdeu dava, estes ganhavam, não...	
Primeira partida.			
	Temos que ver para o primeiro jogo, o segundo...		
Em cada partida, o que estava a perder dobrou os haveres dos outros dois.			Leitura do enunciado.
		Se o Mário perde, o Ricardo vai dobrar e o outro vai dobrar.	
Não! O que estava a perder dobrou o dobro!			**(IMO)**
	O que estava a perder é que dobrou.		
		Pois. Pois, se eu perder, vocês dobram o dinheiro.	**(IMO)**
Não! O que estava a perder é que dobrou!			**(IMO)**
		Os haveres dos outros dois!	
Então quer dizer, então é ao contrário!			**(IMO)**
		Ao contrário, como?	
	Normalmente quem ganha é que vai buscar a quem perde, não é?		**(IMO)**
Isto é assim, o que está a perder é que dobra os outros.			
		Pois, se eu tenho um ponto e perder e vocês tiverem dois, vocês ficam com quatro, quatro e fico com um.	**(IMO)**

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Não! Pelo que está aqui é: em cada partida o que estava a perder dobrou os haveres dos outros dois.			Leitura do enunciado. **(IMO)**
Por exemplo, se eu tenho 2, tu perdeste ficas com 4.			**(IMO)**
		Não!	
	Não, porque a gente vai buscar a quem perde.		
		O que estava a perder dobrou os haveres dos outros dois.	Leitura do enunciado.
		Se eu estou a perder, se eu tenho 2 pontos e vocês têm 4, 4, vão ficar com 8.	
Eu acho que não, porque é assim, dobrou os haveres!			**(IMO)**
		Os haveres são o quê? É o dinheiro dos outros!	**(IMO)**
Sim, então dobrou os outros!			
		Pois!	
Mário, Ricardo e Orlando terminaram um jogo que se desenrolou em cinco partidas. Jogaram com moedas de 1$00 e só tiveram, no decurso do jogo, somas inteiras de escudos. Em cada partida o que estava a perder dobrou os haveres dos outros dois.			
		Então, se estava a perder, vocês têm 2 pontos cada um, vai dobrar o vosso!	
	Mas ele está a dizer o contrário.		**(IMV)**
Pois, eu estou a dizer ao contrário.			
	Tu estás a dizer que tu perdeste, vais ficar com mais pontos.		
		E tu?	

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	Eu também acho que quem está a ganhar é que vai buscar a quem perde.		
Porque é assim...		É assim, espera lá...	
		Em cada partida o que estava a perder...	Leitura do enunciado.
Este total que tu estás aqui a dizer, acho que não corresponde aqui a nada disto! Isto aqui acho que a nível de pontos.			**(IMO)**
		Eu acho que não! Então se eles terminaram em cinco partidas, entendes? Eu percebo assim: ele em cinco partidas, ao fim de cinco partidas, o Mário tem 8$00...	**(IMO)**
	O outro tem 9 e o outro 10.		
		E o outro 10, entendes? Este para ter 10, imagina que agora...	
Quanto tinha cada um no início?			Leitura do enunciado.
		Olha, vamos supor que...	
Era isso que eu pensava, que era isto. Por exemplo, o Mário tinha 1$00, o Ricardo tinha 2 e o Orlando tinha 3,...			**(IMO)**
	Pois, na primeira.		
		Mas aqui não podes...	**(IMO)**
Imagina que perde o Orlando.			
		Se perde o Orlando, os outros dois vão dobrar.	
Ou perde o Mário, perde o Mário. Dobra o Mário e os outros ficam na mesma!			

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
		Não, não! Se perdeu o Mário dobra estes dois!	(IMO)
Eu acho que não!			(IMO)
		Ai meu Deus!	(IMO)
	É, porque estes vão buscar o dinheiro deste, não é?		
Em cada partida, o que estava a perder dobrou os haveres dos outros dois!			Leitura do enunciado.
		Então pronto, se ele dobrou os haveres mas foi dos outros, não foi dele próprio!	
É! Tens razão! Cem por cento, vá.			(IMO)
	Tem que ser assim. Então ele estava a perder e ia ganhar?		
Tens razão, pronto, pronto. Não vamos discutir já mais.			(IMO)
		Então, mas não é?	
		Então, supondo que eles começam...	
		Vá supondo... que o Mário ganha...	
Ou começam todos com 1$00, vá.			
		Começam todos com 1$00.	Registo escrito.
Começam todos com 1$00. Então no primeiro jogo...			
		Têm todos 1$00.	
Pronto, ganha...			
		Ganharam todos.	
	Não...		
Eles já começaram com isso. Agora este é o primeiro jogo.			
	Cada um tem 1$00 por exemplo.		
Agora aqui é que começa: primeiro...			

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	Ou então podem começar sem nada, também.		
		Começam todos sem nada.	
	Podem começar sem nada.		
Não! Tu tens que saber quanto tinha cada um ao início! Tens que fazer várias coisas.			**(IMO)**
	Ai, pois é. Ai meu Deus!	Ai, pois é!	**(IMO)**
Por exemplo: 1, 2, 3, vá.			
	Pois é, pois pode ter 5 e outro nada e...		
1, 2, 3.			
		Queres assim ou assim? Não sei bem como é que tu queres!	Passou a folha de registo ao Ivo. **(IME)**
Então este é o Mário...			
		Ah, sim, sim.	
Começou com 1$00, o Ricardo começou com 2$00 e o Orlando começou com 3$00.			Registo escrito.
Estes jogaram com moedas de 1$00. Jogaram com moedas de 1$00 e só tiveram, no decurso do jogo, somas inteiras de escudos.			Leitura do enunciado.
Portanto, no primeiro jogo perdeu o Mário, ou perde o Orlando. O outro dobrou.			Registo escrito.
	Ficou com 4$00 e esse com 2.		
Sim, agora no segundo...			
		Não pode começar com tantos valores, porque este 3 vai dobrar e já vai ficar com 9.	**(IMV)**
	Então e depois tem que perder sempre!		

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
		Depois se perder sempre vai dobrar sempre os outros!	(IME)
		Imagina que...	
Temos que fazer um que no fim dê 10.			(IMOrg.)
	10 e um de 9 e 8, calma.		
Penso que este dá bem. Se calhar este aqui...			(IMOrg.)
		Imagina que este também tem 3. Então, este é o primeiro jogo, não é?	
Sim.			
		Este perde, fim com...	
Não, ganhou esse aí!			
	Este é que perdeu, não é? Este dobrou e este dobrou.		
		E fica com 2?	
	Mas era o que estavas a dizer!		
Sim, esse perdia.			
	Esse mantém.		
Então mantém os 2$00!			
		Então este perde, vai dobrar este que vai ficar com 4 e este vai ficar com 4.	
Sim.			
		4 e 2, 6.	
Espera, ainda faltam jogos. São cinco jogos, não te esqueças!			(IME)
		Faltam três, por isso é que não podemos jogar com tantos!	(IME)
Então não podemos jogar com tantos o quê? Então se dá 8, dá 9 e dá 10, não podes jogar com tantos?!			(IME)
		Então mas aqui ainda tens, vá agora vai perder...	

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
O que tem que perder mais já se sabe que é o primeiro! Tem que dar um valor mais baixo			**(IMO)**
Agora, por exemplo, ganhou, ganhou, perdeu outra vez o qual? Perde aqui este aqui. Estes dois. 8.			
	Este ficou com 8 e depois perde sempre.		
Pois, exacto.			
	E este dobra também aqui.		
Este também dobra. 8.			
	Fica com 8.		
		Mas para estes perderem, para este perder sempre, este vai ter sempre que dobrar!	**(IMV)**
	E vai ficar com...		
		E já vai ultrapassar o valor!	**(IMV)**
Pois, ora isso é que a gente agora vai experimentar mais. Mais valores!			**(IMOrg.)**
Eu acho que é assim, eu acho que o primeiro está bem!			**(IMV)**
Experimenta agora aqui com o 1, o Orlando com 1.			
Aí fica com 2.			
		Aqui vai ficar com 2.	Registo escrito.
	Com dois não, porque olha aqui, se a gente mantiver este raciocínio, este perdeu!		**(IMV)**
Sim, este perdeu. Então, se perdeu fica com 1. Agora, a seguir, é que ganha.			
	Agora aqui é que ganha 2.		
4.	4.	Se este vai perder aqui...	

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	E se ganhar aqui já fica com 8, 10. Ai Jesus!		**(IMV)**
		Não pode ser assim! Entendes? Porque este, ao perder, nunca podemos começar com valores tão altos!	**(IMOrg.)**
Tem que começar pelo menos com 1$00!			
		Pois, também pode ter que ser, mas...	
	E se todos tiverem 1$00? Em vez de este ter 2, vamos lá experimentar com 1$00.		
Não sei... isso assim era muito fácil. Não me parece!			**(IMOrg.)**
Eu acho que é assim: este aqui está bem!			**(IMV)**
		Este perde, este dobra e este dobra.	
	Há-de ter que começar com 3$00, que é para chegar a 9! Este tem que começar com 3$00, porque ao dobrar dá 6 e quando ganhar dá 9 paus. E depois perde, há dois jogos que este perde.		**(IMOrg.)**
Então e os outros? Então, assim, quer dizer...			**(IMOrg.)**
	Mas os outros já é valores 8 e 10.		
		Sabes qual é que é a nossa... nós não estamos a achar a mesma coisa, porque é assim, tu achas que vais somar o que está aqui. Não, eu não vou somar essa parte...	**(IMV)**
Não! Vou sempre dobrar!			
		Pois, mas este ao final...	
Sim, tem de dar 8!			

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
		Pois tem.	
Por isso mesmo é que eu estou a dizer que este aqui começa logo por perder no início com 1, já nunca vai dar 8!			**(IMOrg.)**
		Mas é que eu não vou somar este! Eu não vou somar a primeira partida, os pontos da primeira...	**(IMOrg.)**
		Se calhar até é para somar, só que eu não sei se é para somar ou não.	**(IMOrg.)**
Vá, pronto, vamos fazer: tu estás a dizer que o primeiro perde, não é? Fica com 1.			Registo escrito.
		É assim, a minha dúvida é assim...	**(IMO)**
	Esse acho que deve começar com 3, o do meio.		
Não, nunca pode começar com tantos, que isso dá logo valor, rebenta logo!			**(IMV)**
	Então, dobra para 6 e dobra para 9.		
Então 6?!			**(IMV)**
	Então, para dar o 9...		
Dois vezes seis, doze!			
	Ai!		
Isso não pode ser. Só pode 1 ou 2, isso está resolvido!			**(IMOrg.)**
		Este total aqui é a soma deste, deste, deste, deste e deste ou é só ao fim das...?	**(IMO)**
Não, ao fim tem que dar 8$00.			
		Então pronto, este pode começar perfeitamente com 1!	

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Sim, agora a minha dúvida está se o Mário começa com 1 ou se começa com 2. Estás a entender?			**(IMOrg.)**
		Ah, sim, mas isso agora temos que tentar!	**(IMOrg.)**
Começam todos com 1? Eu acho que este aqui vai começar com 2, não sei porquê!			**(IMOrg.)**
		É assim, nunca pode começar com 3, sabes porquê?	
Não, 3 não pode ser! Isso já vimos que 3 não!			**(IMV)**
Vá, vamos pôr 1, 1, 1.			
Então começa com 1, com 1 e com 1.			Registo escrito.
Se estes ganham, este perde e estes ganham, não é?			
	Sim.		
2.			Registo escrito.
Agora, na segunda vez...			
	Por exemplo, esse...		
Vai perder este, fica com os mesmos 2, este fica com 2 e este fica com 4.			Registo escrito.
		Ora, noutra jogada...	
Na terceira vez...			
		Este vai perder.	
Sim, tem que perder um de cada vez. Este fica com 4, este com 4 e este com 4.			Registo escrito.
		Terceira jogada...	
Vamos outra vez ao Mário. Perde o Mário outra vez...			
Pois e agora aqui já não dá!			**(IMV)**
		Pois, estás a ver!	

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Não, estás a ver, não! Vamos com calma! Porque isto está, 1, 1, 1. Agora podemos pôr é aqui um 2, se calhar!			**(IMOrg.)**
		Então põe lá	
Isto aqui é por tentativas!			**(IMOrg.)**
O Mário com 1, por exemplo, agora este aqui começava com 2, não é?			
	Sim.		
Começamos na mesma ordem que a gente estava a fazer. Portanto, se começava com 2, dobrava e ficava com 4.			Registo escrito.
		Não ponhas por cima. Faz aqui ao lado.	
Assim, depois não temos espaço.			
Portanto, este perde, fica com 4 e com 2.			Registo escrito.
A seguir, agora dizemos que perdia este, não era?			
Ficava com 2, com 4...			Registo escrito.
	E esse com 4.		
		Ah, depois já não dá!	**(IMV)**
	E começassem com zero?		
Sem nada é nada. O dobro de nada é nada!			**(IMV)**
	Começavam sem nada mas depois, não era assim, é que eu estava a pensar... começava sem nada mas depois ia...		**(IMOrg.)**
Isso como? Então isso é somar!			**(IMV)**
	Também ia buscar dos outros.		
	Pois não, esquece!		

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Então se ele não punha dinheiro, não pode recuperar dinheiro!			(IMO)
Não, eles com dinheiro começam!			
		Eu acho que a única hipótese é eles começarem todos com 1.	(IMOrg.)
Não, todos com 1 já experimentámos e não dá!			(IMV)
	Já não dá!		
	Também todos com 2 também...		
		Isso não dá!	
E se for 2, 4... o Orlando só pode começar com...			
		Porque é que a gente não pode pôr um com 1, outro com zero e outro com zero?	(IMOrg.)
Não pode! Um com 1...			
	Aí está o mesmo coiso que eu disse!		(IMOrg.)
Então tu metes... jogaram com moedas de 1$00.			Leitura do enunciado.
Então, não há nenhuma moeda de zero escudos!			(IMV)
		Pois, não pode ser!	
	Mas eles também podem começar com moedas de 1$00. Até podem começar com 9. Este até pode começar com 9 e perder sempre!		
Sim! Isso pode. Pode fazer isso.			
	Porque olha, se começa com 1, dobra para 2, dobra para 4, por exemplo, depois dobra para 8 e depois nunca chega aos 9.		
O Orlando começa com 10$00, tal, tal, tal e perde sempre?!			

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	Não, pode não ser.		
E ao fim acaba com 10 e este começa com 2 e acaba com 9.			Abana a cabeça na dúvida.
	Mas 2, dobrar dá 4, dobrar dá 8, nunca dá!		**(IMV)**
Começa com 1, 2, 4.			
	Porque este aqui...		
		Eu não sei!	**(IMV)**
	Vai dar 8... 4, 8, também já não dá!		
		Se começarem... imagina, se começa...	
Deixa-me ler isto, espera aí.			
	5$00 e há um momento que dá 10.		
Pode pode.			
		Nunca pode.	
Pode começar com 5$00. Então não pode?			
	E há uma vez que dobra...		
Dobra uma vez só e perde as outras vezes.		Então não vês que ele começa por...	
	Dobra só uma vez e perde as outras. E este, por exemplo, começa com 9 e perde sempre e este começa com 1 ou com 2 e dobra.		
Este começa com 3. Dois vezes três, seis, também não dá!			
	Porque ganha e os outros perdem.		
	Agora era arranjar uma maneira de...		**(IMOrg.)**
Espera lá, o que tu estás a dizer é, este começa com 5.			Registo escrito.
	Esse começa com 5.		
E este começa logo com 9, não é?			

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	E esse começa sempre com 9 e perde sempre.		
E este começa com 1?			**(IMOrg.)**
	Com 1 ou com 2, sei lá!		**(IMOrg.)**
		Mas quando este for perder, este 1 vai dobrar!	
	Dá 10 paus! Dá 10 e a partir daí perde sempre.		
A primeira vez ganhou o Ricardo. Ganhou o Ricardo a primeira vez.			
Não! A primeira vez perde o Ricardo.			**(IMV)**
Então, se perde sempre, este não pode começar com 5! Se perde sempre não pode ser.			**(IMV)**
	Pois não, porque depois aqui...		
		Esse não pode começar... é assim, se este começar e perder sempre, os outros, os outros vão dobrar sempre. Então, se eu começo com...	
Não, nunca pode haver um que perca sempre!			**(IMOrg.)**
	Não!	Pois.	
Porque os outros estão sempre a dobrar!			
	Porque este assim dobrou e já não dava!	Por isso mesmo é que assim com 5 nunca pode ser!	**(IMOrg.)**
Mas este aqui do 5 tem uma certa lógica!			**(IMV)**
		Mas olha ali...	
O de 5 tem lógica!			
		Imagina que este começa com 1, dobra para 2, dobra para 4, dobra para 8 e dobra...	

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	E perde, e perde.		
		Então e este aqui se perde vai dobrar para 10!	
Não, o que está mal é aqui o Ricardo!			(IME)
	Então o 5, perdeu aqui, mantém. Perdeu aqui, mantém. Perdeu aqui e aqui dobrou.		
Perdeu aqui, mantém!? Não pode ser! Nunca mantém! Quando não perde, ganha!			(IMV)
	Perdeu, fica com 5 e depois dobra aqui. Porque perdeu dobra aqui.		
		Não, deixa-me lá ver. Aquela dá conta certa. Deixa lá ver o Ricardo.	(IMV)
O Ricardo começa com 1. Este se começar com 3...			
Eu tenho quase a certeza que o Mário começa com 1!			(IMOrg.)
	Eu também acho que começa com 1!		(IMOrg.)
1, 2, 4, 6 e perde...			
	Não! 1, 2, 4, 8!		(IMV)
1, 2, 4, 8 e perde a última.			
	Era o que eu estava a pensar!		(IME)
		E este ganha na primeira e vai dobrar... ganha na última.	
	Este começa com 5 e dobra aqui...		
Estes aqui vão perder no meio e vão ganhar aqui.			
	E aqui dobrou para 10.		
Mas aqui já dobrou para 10!			(IMV)
	Não, não. Aqui começa com o 5!		(IMV)

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Não, nunca começa com 5, porque na primeira... na primeira partida há já alguém que perde! Só se for ele a perder agora aqui.			
Só se perder sempre e ganhar aqui. E ganha os 10 e depois basta este aqui.			
	O pior é este aqui!		(IME)
Este está sempre bem!			(IMV)
Este tem 1... 2, 4, 6, 8...			
	Eu também estava a fazer 3, 6, 9.		(IMV)
9 não!			
	Era 3, 6, 12! Era a que eu estava também, já não estava...		
	Se este começar com...		
		Não faço ideia!	(IMOrg.)
Se começa com... se começar... mas o Ricardo pode perder aqui uma. Ah, depois para dar 9... para dar 9, o Ricardo só pode começar com 9.			(IMOrg.)
	É isso que eu também estava a ver ali! Mas para isso ele tinha que perder sempre e há aqui qualquer no meio... ele tem que aqui ganhar, se calhar!		(IMV)
Não, ganhar não pode! Ele perder sempre também não pode perder sempre!			(IMV)
Em cada partida, o que estava a perder dobrou os haveres dos outros dois.			Leitura do enunciado.
		Ele quando perde, os outros vão dobrar. Acho que é assim!	(IMO)

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
	Mas a gente só estava a ver aqui o dobrar! É essa a indicação que nos dá!		**(IMO)**
O Mário, no primeiro jogo ganhou 2.			
		4, se algum destes perder!	
	Pois, está bem, é por tentativa!		**(IMOrg.)**
Ele está sempre a ganhar até aqui! Se ele ganha, estes estão a perder sempre. Estás a entender? Então se ele está a ganhar, os outros estão a perder!			**(IME)**
Ah, os outros não! Os outros é que...			
		Para ele ganhar, há um que tem que perder!	**(IME)**
	Há um que perde. Só um é que perde, os outros ganham.		
Este aqui tem que dar 10, espera. Se começar com 2 este, fica com 4.			Registo escrito.
	Ah, está bem, também pode começar com 2, 4, 6, 8 e 10.		
4, 6, 8. Não dá!			**(IMV)**
	Portanto, este tem 1, passa para 2, 4, 8... não, pode começar com 1$00. Passa para 2, este dobra sempre, por exemplo, este começa... não...		
Não, ... se começar com 5. 5, se perder a primeira e a seguir ganhar as outras fica com 10.			
		Mas estes então não iam sempre dobrar! Então ele já tem aqui 4, ia dobrar para 8 e ainda ia dobrar de novo!	**(IMV)**
	Não ia nada, perde, perde... pois, não pode ser aqui na mesma ordem.		**(IMV)**

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
Mas para já pode ser assim.			
	Pode, eu acho que sim. Aí não, não é 6! 4, 8!		**(IMV)**
		E ainda faltava este aqui mas eu acho que não é bem assim. Eu acho que não é assim!	**(IMV)**
	Porque ele começa, portanto, este perde, não é? Como é que é? Tem 5 e perde... e este dobra... E este dobra também.		
	Aqui o dos 9 paus é que está a atrapalhar tudo!		**(IMV)**
Ah, só os 9 paus?! Este aqui assim também está a atrapalhar!			**(IMV)**
E se não for assim que se faz, por essa tabela?			**(IMOrg.)**
		Não faço ideia! Lembrei-me de fazer a tabela.	**(IMOrg.)**
Jogaram com moedas de 1$00 e só tiveram, no decurso do jogo, somas inteiras de escudos.			Leitura do enunciado.
		Se calhar não é mesmo por aí, por isso é, nós estamos...	**(IMOrg.)**
		Não, mas sabes porque é que eu fiz a tabela? Porque assim era para a gente ir vendo e tentando... se dava... quando é que dava 8, quando é que dava...	**(IMOrg.)**
		Começando por tentativa, assim!	
Então o Mário tem uma... estes aqui, este não pode ser tão alto!			**(IMOrg.)**
		Também acho que não, que não pode ser assim!	**(IMOrg.)**

IVO	GUIOMAR	HELENA	OBSERVAÇÕES
		E se nós... por zero, tu dizes que não dá, porque eles têm que começar com algum.	(IMOrg.)
		Nunca pode ter aqui 4, porque assim vai dobrar sempre!	(IMV)
	Pois vai.		
		E já logo na terceira vai logo dobrar!	
Não sei. Já está!			(IMV)

ANEXO Nº 5

Escala holística focada, traduzida e adaptada de Charles et al. (1987).

ESCALA HOLÍSTICA FOCADA

<u>0 pontos:</u> As folhas de registo têm as seguintes características:

- Estão em branco;
- A informação do problema foi simplesmente recopiada e nada foi feito com essa informação, mostrando não haver compreensão do problema.
- Existe uma resposta incorrecta sem nenhum trabalho evidente.

<u>1 ponto:</u> - As folhas de registo têm as seguintes características:

- Há um começo para chegar à solução através do copiar da informação, que demonstra alguma compreensão do problema, mas essa aproximação não conduz à solução do problema;
- Uma estratégia incorrecta foi começada mas depois desistiu e não há evidência de que se tenha mudado para outra estratégia;
- Tentou-se alcançar uma submeta mas não se conseguiu.

<u>2 pontos:</u> - As folhas de registo têm as seguintes características:

- O aluno usou uma estratégia interrompida e encontrou uma resposta incorrecta, contudo, o trabalho mostrou alguma compreensão do problema;
- Uma estratégia apropriada foi utilizada mas (1) não foi desenvolvida o suficiente para encontrar a solução, (2) foi implementada incorrectamente e, assim, conduziu a uma ausência de resposta ou resposta incorrecta;
- O aluno conseguiu encontrar uma submeta mas nada conseguiu para além disso;
- A resposta correcta foi mostrada mas (1) o trabalho não está compreensível; (2) nenhum trabalho é mostrado.

<u>3 pontos:</u> - As folhas de registo têm as seguintes características:

- O aluno implementou uma estratégia que o podia ter levado à solução correcta, contudo, compreendeu mal uma parte do problema ou ignorou uma condição;
- Estratégias de solução apropriadas foram aplicadas mas (1) a resposta é incorrecta sem razão aparente; (2) a parte numérica correcta da resposta foi dada e a resposta não; (3) nenhuma resposta foi dada;
- A resposta correcta foi dada e há alguma evidência que houve uma selecção de estratégias apropriadas. Contudo, a sua implementação não está bem clara.

<u>4 pontos:</u> - As folhas de registo têm as seguintes características:

- O aluno cometeu um erro na transposição de uma estratégia apropriada. Contudo, esse erro não reflecte incompreensão do problema ou de como devia implementar a estratégia, parece sim, um erro de cópia de cálculos;
- Estratégias apropriadas foram seleccionadas e implementadas. A resposta correcta foi dada em termos da informação do problema

ANEXO Nº 6

Cópias das folhas de resolução dos seis problemas – Grupo A

(A)

Problema Nº 1: A Assembleia dos Comerciantes da Rua

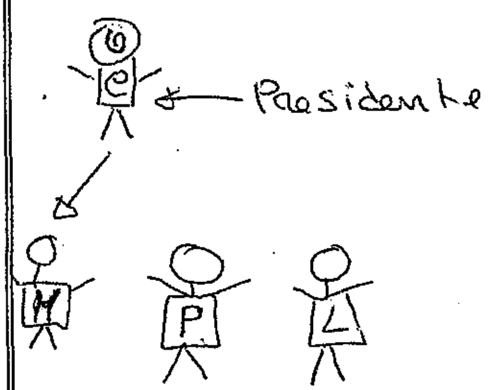
Oliveira é carniceiro. É o presidente da assembleia dos comerciantes da rua, a que pertencem também um merceeiro, um padeiro e um leiteiro.

Oliveira está sentado à esquerda de Pereira.

Nogueira está à direita do merceeiro.

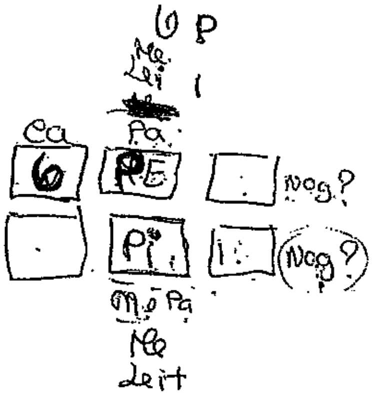
Pinheiro, sentado em frente de Pereira, não ~~é o padeiro~~.

Qual a profissão de Nogueira?



O ← Pe / Pi → N

	Carniceiro	merceeiro	Padeiro	leiteiro
Oliveira	X	—	—	—
Pereira	—	—	X	—
Nogueira	—	—	—	X
Pinheiro	—	X	—	—



Pe → lei / Pad / lei

No → Pad / lei

Pinh → lei / lei

Se Pe for Pa ⇒ Pi ñ seja leiteiro

Se Pe for lei ⇒ Pi ñ pode ser Padeiro

	Carniceiro Oliveira	Merc Pinheiro	Padeiro Pereira	Leiteiro Nogueira
Oliveira	X	—	—	—
Pereira	—	—	X	—
Noguei	—	—	—	X
Pinhei	—	X	—	—

~~Supo~~ ~~Supomos~~ Supusemos que as profissões estão por ordem. Como o Oliveira está à esquerda do Pereira este não é carniceiro, logo ou é merceiro ou leiteiro. O pinheiro não podia ser padeiro nem carniceiro e o nogueira não podia ser merceiro porque estava à direita dele.

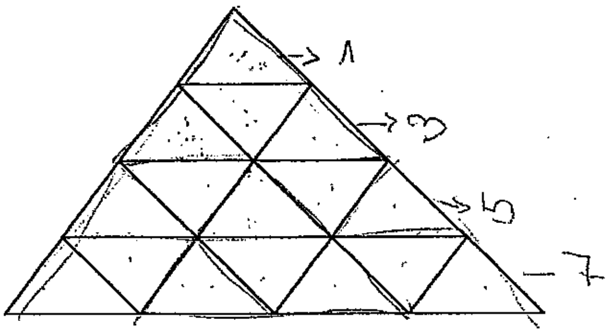
Se o Pereira e o Pinheiro estão à frente um do outro e um deles tem de ser merceiro, e se o nogueira tem de estar à direita do merceiro, logo o nogueira tem de ser o último da tabela.

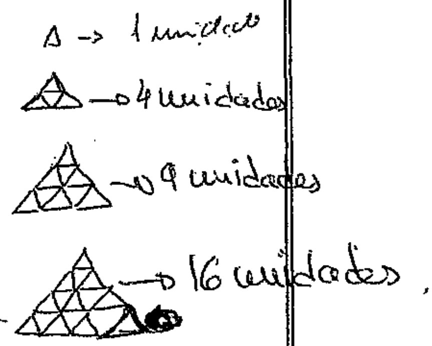
(A)

Problema Nº 2: O Triângulo dos Triângulos

O Américo estava a tentar construir um triângulo de triângulos. Para tal, começou com um triângulo na primeira fila, depois passou a três triângulos e na terceira fila construiu mais cinco. Terminou a construção do triângulo na quarta fila e decidiu contar os triângulos que esta figura tinha no total.

Quantos são, afinal?





Δ de 1 unidade → 16
Δ de 4 unidades → 4
Δ de 9 unidades → 1
Δ de 16 unidades → 1

22 Δs.

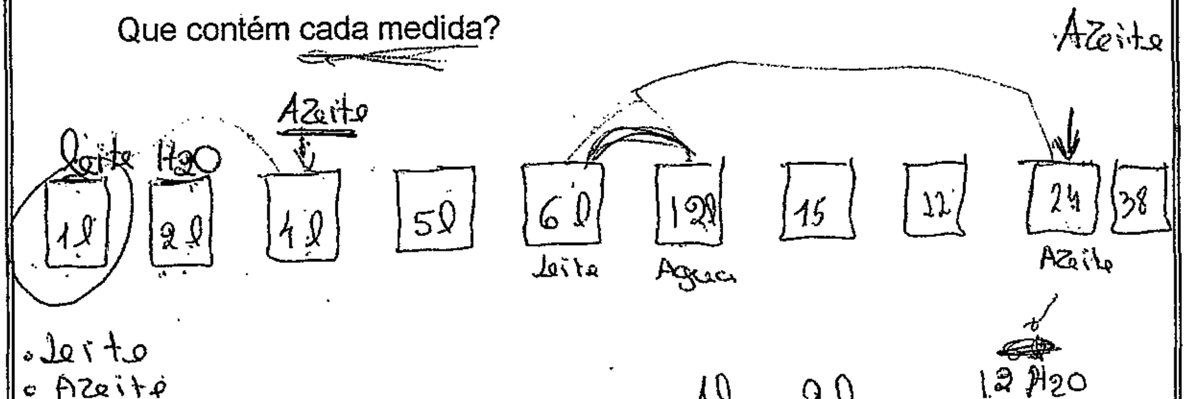
(A)

Problema Nº 3: As Medidas do Comerciante

Um comerciante possui dez medidas, contendo 1, 2, 4, 5, 6, 12, 15, 22, 24 e 38 litros. Cada uma delas está cheia de um só líquido.

Umas estão cheias de leite, outras de água e outras de azeite. Uma única medida ficou vazia. Para isso gastou duas vezes mais água do que leite e duas vezes mais azeite do que água.

Que contém cada medida?



- Leite
- Azeite
- H_2O

1 l — 2 l

1 leite = 2 H_2O = 4 A

1 H_2O = 2 A

Temos 2 hipóteses de resolução:

Hipótese 1:

Gastar 4 l de azeite ⇒ $\frac{4}{2}$ l de água ⇒ $\frac{4}{4}$ l de leite
(2 l) (1 l)

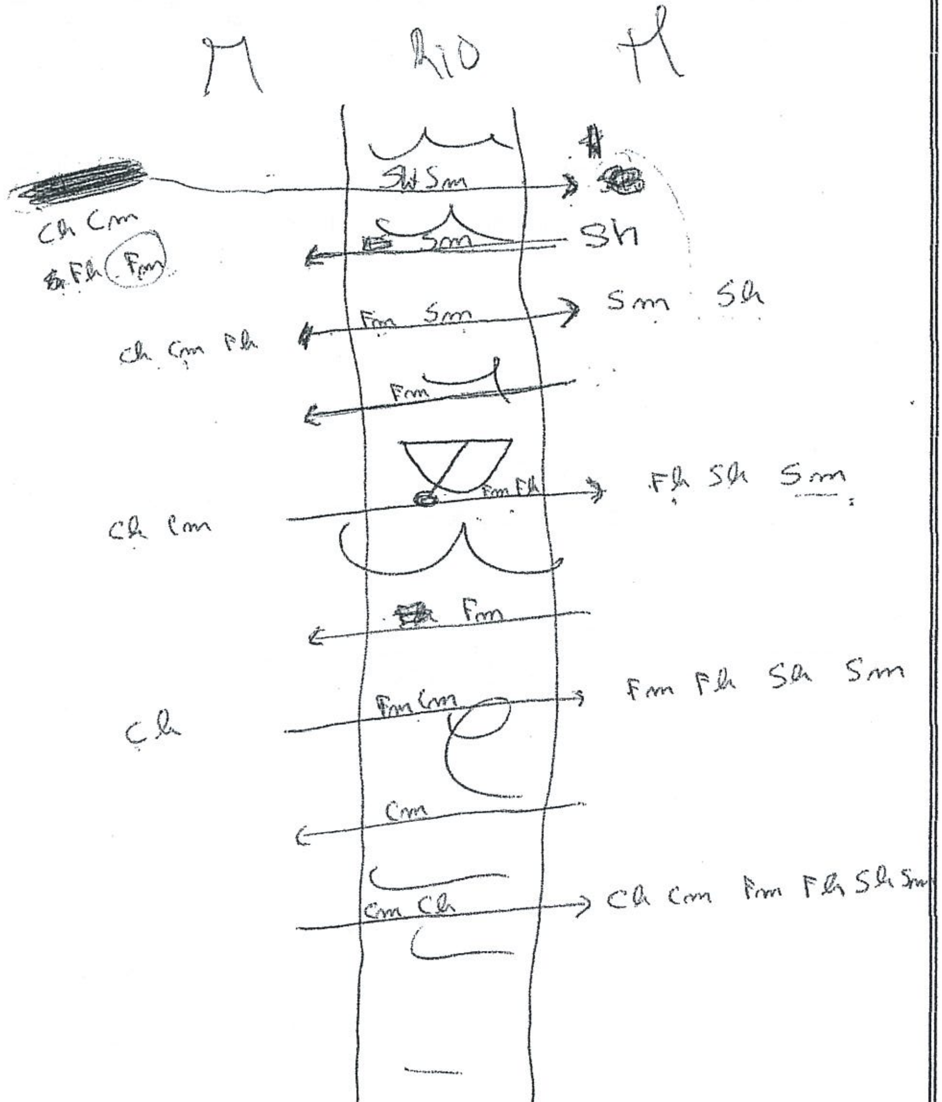
Hipótese 2

Gastar 24 l de azeite ⇒ 12 l de água ⇒ 6 l de leite

Problema Nº 4: Os Maridos Ciumentos

Três casais, os Silva, os Costa e os Fonseca, querem atravessar um rio, mas só dispõem de um barco em que só cabem duas pessoas de cada vez. Ora, acontece que os maridos são muito ciumentos e, portanto, nenhum deles quer deixar a sua mulher, seja numa das margens ou no barco, com os outros homens, a não ser que eles também estejam presentes – elas só poderão ficar sozinhas ou na companhia das outras mulheres.

Como deverão fazer para atravessar o rio?



Como pode ficar um homem junto com outras mulheres (desde que esteja lá os seus respectivos maridos) tem de ser uma mulher a fazer a travessia primeiro.

Problema Nº 5: A Sequência Numérica

O Artur e o Bruno decidem jogar ao jogo das sequências de números. Sabendo que a estratégia seguida pelo Bruno para acrescentar um novo número à sua sequência é a de adicionar os dois últimos números ditos pelo Artur, qual será o número que ele dirá quando o Artur referir o 231?

Eis as respectivas sequências já iniciadas:

+2 +3 +4 +5 +6

Artur: 1 + 3 + 6 + 10 + 15 ... 231?

Bruno: 1 → 4 → 9 → 16 → 25

21 $\xrightarrow{7}$ 28 $\xrightarrow{8}$ 36 $\xrightarrow{9}$ 45 $\xrightarrow{10}$ 55 $\xrightarrow{11}$ 66 $\xrightarrow{12}$ 78 $\xrightarrow{13}$

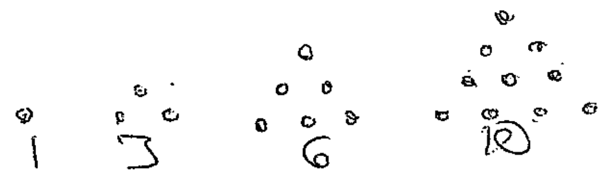
36 49 64 81 100 121 210

91 $\xrightarrow{14}$ 105 $\xrightarrow{15}$ 120 $\xrightarrow{16}$ 136 $\xrightarrow{17}$ 153 $\xrightarrow{18}$ 171 $\xrightarrow{19}$ 190 $\xrightarrow{20}$ 210 $\xrightarrow{21}$

169 196 225 256 289 324 361 400

231 → $\boxed{441}$ ← Resultado

$\frac{n(n+1)}{2}$



→ Como verificamos que os números do Artur tinham uma relação ~~ou seja,~~ ~~o próximo número a dizer era sempre o anterior mais~~ ou seja, ~~o primeiro~~

$\frac{4(5)}{2} = 10$

$n=4$

$n=1 = \frac{n(n+1)}{2} = 1$

$n=2 \ldots = 3$

(a)

Problema Nº 6: O Jogo das Moedas de Um Escudo

Mário, Ricardo e Orlando terminaram um jogo que se desenrolou em cinco partidas. Jogaram com moedas de 1$00 e só tiveram, no decurso do jogo, somas inteiras de escudos.

Em cada partida o que estava a perder dobrou os haveres dos outros dois.

No fim do jogo, Mário tem 8$00, Ricardo tem 9$00 e Orlando tem 10$00.

Quanto tinha cada um no início?

5 partidas

Mário → 8$

Ricardo → 9$

Orlando → 10$

Estratégia do Fim para o princípio

	5ª partida	4ª	3	2º	1
Mário	8	4	2	1	1
Ricardo	9	9	9	9	9
Orlando	10	5	5	5	5

~~Inicialmente o Mário tinha 1$.~~

uma vez que as somas têm de ser inteiras, o Ricardo nunca ganhou, assim sendo, iniciou o jogo com 9$00.

O Orlando que concluiu o jogo com 10$00 só pode ter ~~perdi~~ ganho uma vez (para as somas darem inteiras), logo começou com 5$00.

O Mário pode ter começado com 18
e ter ganho 3 vezes.
Numa das jogadas houve um
empate dos 3 jogadores.

Esta é uma possível solução
para o problema, haveriam muitas
outras...
Por exemplo a mais simples era
terem todos iniciado com o dinhei
ro que findaram por empatarem
em todas as partidas.

ANEXO Nº 7

Cópias das folhas de resolução dos seis problemas – Grupo B

(B)

Problema Nº 1: A Assembleia dos Comerciantes da Rua

Oliveira é carniceiro. É o presidente da assembleia dos comerciantes da rua, a que pertencem também um merceeiro, um padeiro e um leiteiro.

Oliveira está sentado à esquerda de Pereira.

Nogueira está à direita do merceeiro.

Pinheiro, sentado em frente de Pereira, não é o padeiro.

Qual a profissão de Nogueira?

	Carniceiro	Merceeiro	Padeiro	leiteiro
Oliveira	X	—	—	—
Pereira	—	X	—	—
Nogueira	—	—	X	—
Pinheiro	—	—	—	X

— di —

Pinheiro

Pereira P —

Oliveira

é

e

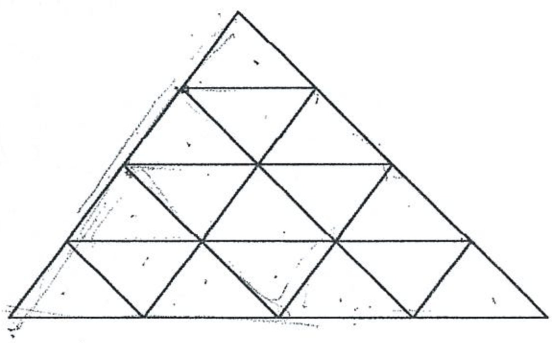
Oliveira Pereira Nogueira

(B)

Problema Nº 2: O Triângulo dos Triângulos

O Américo estava a tentar construir um triângulo de triângulos. Para tal, começou com um triângulo na primeira fila, depois passou a três triângulos e na terceira fila construiu mais cinco. Terminou a construção do triângulo na quarta fila e decidiu contar os triângulos que esta figura tinha no total.

Quantos são, afinal?



1 – grande

10 – médios

16 – pequenos

Problema Nº 3: As Medidas do Comerciante

Um comerciante possui dez medidas, contendo 1, 2, 4, 5, 6, 12, 15, 22, 24 e 38 litros. Cada uma delas está cheia de um só líquido.

Umas estão cheias de leite, outras de água e outras de azeite. Uma única medida ficou vazia. Para isso gastou duas vezes mais água do que leite e duas vezes mais azeite do que água.

Que contém cada medida?

dados:

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{12}$ $\boxed{15}$ $\boxed{22}$

$\boxed{24}$ $\boxed{38}$ = 129

6 · leite
4 · água
7 · azeite

da 128 : 2 = 64

64 : 2 = 32

erros e tentativa.

supondo que a bilha 5 esta vazia então

129 − 5 = 124

124 : 2 = 62 − azeite

62 : 2 = 31 − água

ñ dá água

• supondo que a bilha 15 está vazia

129 − 15 = 114

114 : 2 = 57 − azeite

124 = 62 → 38 / 24

Azeite

l	á	a
1	2	4
6	12	24

62 : 2 = 31 → 22, 6, 2, 1

água

31 : 2 = 15 leite

lite ⇒ $\boxed{4}$ $\boxed{15}$

ifuc ⇒ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$

128

1 - ~~4~~ - 5 - ~~6~~ - ~~12~~ - 15 - ~~22~~ - ~~24~~ - 31

128 : 2 = 64 ⇒ ~~28 + 24 + 2~~ ~~38 + 12 + 4~~ 58

64 : 2 = 32 ⇒ ~~15 + 5 + 12~~ ~~+ 24 + 6 + 2~~

24 + 6 + 2

32 : 2 = 16 ⇒ 12 + 4

15 - 125 -

Problema Nº 4: Os Maridos Ciumentos

Três casais, os Silva, os Costa e os Fonseca, querem atravessar um rio, mas só dispõem de um barco em que só cabem duas pessoas de cada vez. Ora, acontece que os maridos são muito ciumentos e, portanto, nenhum deles quer deixar a sua mulher, seja numa das margens ou no barco, com os outros homens, a não ser que eles também estejam presentes – elas só poderão ficar sozinhas ou na companhia das outras mulheres.

Como deverão fazer para atravessar o rio?

Margem A	Barco	Outra margem B
3M e 3H	$M_1H_1 \rightarrow$	M_1
$H_1H_2H_3$	$\leftarrow H_1$	
M_2M_3	$H_1H_2 \rightarrow$	M_1H_1
M_2M_3 H_3	$\leftarrow H_2$	
M_2M_3 - H_2H_3	$H_2M_2 \rightarrow$	$M_1 H_1 M_2$
$M_3 H_2H_3$	$\leftarrow H_2$	
	$H_3M_3 \rightarrow$	$M_1 H_1 M_2 M_3$
H_2	$\leftarrow H_3$	
$H_2 H_3$	$H_2H_3 \rightarrow$	$M_1 H_1 M_2 H_2 M_3 H_3$

Problema Nº 5: A Sequência Numérica

O Artur e o Bruno decidem jogar ao jogo das sequências de números. Sabendo que a estratégia seguida pelo Bruno para acrescentar um novo número à sua sequência é a de adicionar os dois últimos números ditos pelo Artur, qual será o número que ele dirá quando o Artur referir o 231?

Eis as respectivas sequências já iniciadas:

$$\text{Artur: } 1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+4} 10 \xrightarrow{+5} 15 \xrightarrow{+6}$$

$$\text{Bruno: } 1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{+5} 9 \xrightarrow{+7} 16 \xrightarrow{+9} 25$$

~~Artur - 231~~
~~Bruno - 256~~

$$\frac{n \times (n^2+1)}{2}$$

$n=1 \Rightarrow 1$
$n=2 \Rightarrow 4$
$n=3 \Rightarrow 9$
$n=4 \Rightarrow 16$
$n=5 \Rightarrow 25$
$n=6 \Rightarrow$

Bruno: $(n+2)$
$25 + 11 = 36$
$36 + 13 = 49$
$49 + 15 = 64$
$64 + 17 = 81$
$81 + 19 = 100$
$100 + 21 = 121$
$121 + 23 = 144$
$144 + 25 = 169$
$169 + 27 = 196$
$196 + 29 = 225$
$225 + 31 = 256$

Artur: $(n+1)$
$15 + 6 = 21$
$21 + 7 = 28$
$28 + 8 = 36$
$36 + 9 = 45$
$45 + 10 = 55$
$55 + 11 = 66$
$66 + 12 = 78$
$78 + 13 = 91$
$91 + 14 = 105$
$105 + 15 = 120$
$120 + 16 = 136$
$136 + 17 =$

$\frac{n \times (n+1)}{2}$

$\frac{2(2+1)}{2}$

$\frac{6}{2} = 3$

$n = 3$

Antuu $\Rightarrow \dfrac{n \times (n+1)}{2}$

$n=1$ $\qquad \dfrac{1 \times (1+1)}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

$n=2$ $\qquad \dfrac{2 \times (2+1)}{2} = 6/2 = 3$

$n=3$ $\qquad \dfrac{3 \times (3+1)}{2} = 12/2 = 6$

$\vdots$

$n = 231$

Bruno $\Rightarrow n^2$

$n = 16$ — $A = \dfrac{16 \times (17)}{2} =$

$n = 30$ — $A = \dfrac{30 \times 31}{2}$

Resposta!

$n = 21$ — Antuu $= \dfrac{21 \times (22)}{2} = 231$

Bruno $= (21)^2 = 441$

Problema Nº 6: O Jogo das Moedas de Um Escudo

Mário, Ricardo e Orlando terminaram um jogo que se desenrolou em cinco partidas. Jogaram com moedas de 1$00 e só tiveram, no decurso do jogo, somas inteiras de escudos.

Em cada partida o que estava a perder dobrou os haveres dos outros dois.

No fim do jogo, Mário tem 8$00, Ricardo tem 9$00 e Orlando tem 10$00.

Quanto tinha cada um no início?

	1º	2º	3º	4º	5º	total:
Mário 1	2	4		8	8	8$00
Ricardo 1	2	4				9$00
Orlando			10			10$00

Supondo 1º	1º	2º	3º	4º	5º
M - 1	2	4	8		10
R - 1	2				
O - 1	2				

M –	1	2	4
R –	4	2	4
O –	2	4	4

M - 1	1	- 2 -
R - 2	4	- 4 -
O - 1	2	- 4 -

1
2