Gestin

Ano I - Nº 1 - Julho de 2002

Instituto Politécnico de Castelo Branco

Escola Superior de Gestão

ISSN nº 1645-2534

OBRIGAÇÕES E A ESTRUTURA POR PRAZOS DA TAXA DE JURO

*Sandra Sofia A. Morais L. Manso**

RESUMO

O objectivo do presente trabalho consiste na análise dos aspectos essenciais relacionados com as obrigações e a estrutura por prazos da taxa de juros, dando ênfase ao seu estudo através de equações diferenciais. No ponto 1 serão abordados diversos conceitos relacionados com as obrigações e com a "*Yield curve*". O ponto 2 é dedicado ao estudo do problema de valorização de uma obrigação no caso da taxa de juro ser conhecida. No ponto 3 efectua-se a análise à equação da estrutura por prazos para uma obrigação de cupão zero, a qual vai ter especial importância para o desenvolvimento do ponto seguinte, no qual se faz a representação estocástica do preço de uma obrigação. Finalmente, apresentamos o estudo realizado e defendido por Vasicek, o qual assume que o preço de mercado do risco é constante e que a taxa de juro à vista segue o processo Ornstein-Uhlenbeck (tendência para reverter para a média).

1. DESCRIÇÃO DO CONTRATO

1.1. CONCEITO DE OBRIGAÇÃO

Uma obrigação é um título de dívida (pública ou privada) negociável através do qual o seu emitente se compromete pagar, a quem a detenha, um rendimento periódico – o juro – em condições definidas à data de emissão e durante um determinado período de tempo, para além do reembolso do capital em data(s) estabelecidas inicialmente.

1.2. CARACTERÍSTICAS DAS OBRIGAÇÕES

- **Valor nominal:** Valor "facial" inscrito no título;
- **Preço de emissão:** Valor que o comprador paga para subscrever as obrigações na data de emissão;
- **Taxa de cupão ou taxa de juro:** Taxa de juro anual que se aplica ao capital em dívida para determinar o montante do juro de cupão;
- **Valor de reembolso:** Montante pago ao detentor de uma obrigação para amortizar a dívida contraída;
- **Método de amortização:** Metodologia adaptada para proceder ao pagamento do capital em dívida:
  - Amortização integral no final (com juros periódicos ou com capitalização de

- Amortizações periódicas (prestações constantes de capital e juros ou reembolso periódico constante);
- **Maturidade**: Período que medeia entre a data actual e o final do empréstimo obrigacionista – última amortização de capital;
- **Vida:**
  a) **Vida máxima** – Período de tempo entre as emissões e o último reembolso de capital;
  b) **Vida média** – Média ponderada pelo montante de reembolso do período de tempo de cada reembolso.

1.3. TIPOS DE OBRIGAÇÕES

a) Em função do emitente:

Títulos de dívida pública – obrigações emitidas pelo Estado; o nível das suas taxas servem de referência para todo o mercado obrigacionista (considerada a taxa de juro sem risco de crédito);

Títulos de dívida diversa – obrigações emitidas por empresas; nível de taxa de juro de acordo com o risco específico da empresa.

b) Em função das taxas de juro:

Obrigações de taxa fixa – assim denominada por a sua taxa de juro ser fixa até à maturidade, pelo que, todos os *cash-flows* gerados pelas obrigações são conhecidos à partida, podendo apurar-se a sua rentabilidade. No entanto, a rentabilidade apurada no momento da compra pressupõe a detenção do título até à maturidade. Se o investidor vender o título antes da maturidade, a rentabilidade fica dependente do preço de venda, que varia de forma inversa às oscilações que ocorrem nas taxas de juro.

Obrigações de taxa variável – assim denominada por a sua taxa de juro ser variável até à maturidade, embora evoluindo de acordo com determinada regra pré-fixada (determinado *spread* face à taxa de referência – indexante). O indexante deve reflectir de forma correcta a evolução das taxas de juro no mercado, apresentando um prazo de duração igual ao do cupão de obrigação para minimizar as variações no preço da mesma, evidenciando menor risco de taxa de juro.

c) Outras classificações:

Obrigações de cupão zero – como o nome indica não apresentam taxa de cupão, pelo que não pagam juros. A rendibilidade destes títulos advêm do diferencial entre o seu preço de aquisição/preços de emissão e o seu valor de reembolso, que por definição é sempre o seu valor nominal => Obrigações emitidas a desconto.

Obrigações de capitalização automática – os juros vencidos não são de imediato pagos ao detentor das obrigações, vão sendo incorporados no valor nominal do título, assegurando assim a capitalização dos juros vencidos à taxa de cupão em vigor. A taxa de juro pode ser fixada ou indexada.

Obrigações convertíveis – estas obrigações conferem aos titulares o direito de as transformarem, converterem em acções da sociedade emitente de acordo com as condições constantes na ficha técnica.

Obrigações com Warrants – conferem o direito (Warrant) do seu detentor se tornar também accionista da empresa emitente a um determinado preço.

1.4. "YIELD CURVE"

Relação entre a rentabilidade de uma obrigação e as respectivas maturidades. Uma economia pode apresentar três configurações possíveis:

- inclinação positiva: maiores prazos implicam maiores rendimentos;
- inclinação negativa: o rendimento de curto prazo é superior ao rendimento de curto prazo;
- horizontal: rendimentos iguais para diferentes maturidades.

2. VALORIZAÇÃO DE UMA OBRIGAÇÃO COM TAXA DE JURO CONHECIDA

Sendo:

V = Valor do contrato, da obrigação
r (t) = taxa de juro
K (t) = pagamento do cupão

$$V(t;T) = Z e^{\int_t^T r(\tau) d\tau}$$

Sendo,

$$-\int^T r(\tau)\, d\tau = \log((Vt, T)/Z)$$

Sendo estes função do tempo, o preço da obrigação também será: V = v (t).

Valorizando a mesma obrigação num momento antes da maturidade t < T. Para quem possuir uma obrigação, a alteração do valor da obrigação com o passar do tempo é:

$$\frac{\partial V}{\partial t} dt$$

Se durante este período receber um pagamento de cupão (K (t) dt), a variação será dada por:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + K(t)\right) dt$$

As considerações sobre a arbitragem permitem igualar este termo ao rendimento de deter depósitos bancários à taxa r(t), assim:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + K(t) = r(t) V$$

Integrando esta equação diferencial ordinária temos:

$$V(t) = e^{-\int_t^T r(\tau) d\tau} \left(Z + \int^T K(t') \, e^{\int_{t'}^T r(\tau) d\tau} dt' \right)$$

Note-se que a constante do integral foi escolhida de modo a assegurar V(T) = Z. A partir desta equação podemos ver que um pagamento de cupão positivo aumenta o valor da obrigação no momento t.

No caso de uma obrigação de cupão zero, K(t) =0, logo

$$V(t;T) = Z e^{\int_t^T r(\tau)d\tau}$$

Sendo,

$$-\int_t^T r(\tau)\,d\tau = \log((Vt, T)/Z)$$

Se V (t;T) é diferenciável em relação a T, diferenciando a igualdade anterior temos:

$$V(T) = \frac{-1}{(Vt;T)} \frac{\partial V}{\partial T}$$

Se o preço de mercado de uma obrigação de cupão zero reflecte uma taxa de juro conhecida e determinista, assim a taxa de juro no momento futuro é dada através do preço de uma obrigação da equação anterior. Com taxa de juro positiva => dV/dt<0; o que está financeiramente correcto.

3. EQUAÇÃO DA ESTRUTURA DE PRAZOS PARA UMA OBRIGAÇÃO DE CUPÃO ZERO

Hipóteses:

A.1) a taxa de juro à vista segue um **processo contínuo de Markov**

A propriedade de Markov implica que o processo da taxa de juro à vista é caracterizado por uma única variável de estado, nomeadamente o seu valor corrente. A distribuição de probabilidade do segmento $\{r(\tau), \tau \geq t\}$ é completamente determinada pelo valor de $r(t)$. Os processos que são contínuos e Markov são denominados processos de difusão. Podem ser descritos por uma **equação diferencial** estocástica:

$$dr = f(r,t)dt + \rho(r,t)dz \qquad (1)$$

onde $z(t)$ é um **processo de Wiener** com variância incremental dt. As funções $f(r,t)$ e $\rho^2(r,t)$ são, respectivamente, a tendência e a variância incremental do processo $r(t)$. É natural que o preço da obrigação descontada seja determinado apenas pela taxa de juro à vista em torno da estrutura de prazos, isto é, pela avaliação corrente do desenvolvimento da taxa de juro à vista em torno do prazo da obrigação.

Esta hipótese implica que o desenvolvimento do processo da taxa de juro à vista em torno do intervalo (t,s), $t \leq s$, dados os valores do momento t, depende apenas do valor corrente $r(t)$.

Um empréstimo de montante W à taxa de juro À vista irá crescer em valor pelo incremento:

$$dW = Wr(t)dt \qquad (2)$$

A.2) O preço $P(t,s)$ de uma obrigação descontada é determinado pela avaliação no momento t, do segmento $\{r(\tau), t \leq \tau \leq s\}$ do processo da taxa de juro à vista em torno do prazo da obrigação.

Sendo a taxa de juro a prazo definida pela equação:

$$R(t,T) = E_t\left(\frac{1}{T}\int_t^{t+T} r(\tau)d\tau\right) \tag{3}$$

A hipótese das expectativas, a hipótese da segmentação do mercado e a hipótese da preferência de liquidez conferem a hipótese anterior pois assumem:

$$R(t,T) = E_t\left(\frac{1}{T}\int_t^{t+T} r(\tau)d\tau\right) + \bar{\pi}(t,T,r(t))$$

Esta hipótese implica que $P(t,s)$ é uma função de $r(t)$:

$$P(t,s) = P(t,s,r(t)) \tag{4}$$

Assim, **o valor da taxa de juro à vista é a única variável de estado para toda a estrutura de prazos**. As expectativas formadas com o conhecimento de todo o desenvolvimento passado das taxas de todas as maturidades, incluindo a estrutura de prazos presente, é equivalente às expectativas condicionadas apenas no valor presente da taxa de juro à vista.

Como existe apenas uma variável de estado, as rendibilidades instantâneas nas obrigações de diferentes maturidades são perfeitamente correlacionadas. Isto significa que a estrutura de prazos das taxas de juro pode ser gerada por uma obrigação de curto prazo e uma outra obrigação. No entanto, as rendibilidades das obrigações sobre um período finito não são perfeitamente correlacionadas.

A.3) O mercado é eficiente, isto é, não há custos de transacção, a informação está disponível para todos os investidores simultaneamente e cada investidor age racionalmente (maximizando a riqueza e usa toda a informação disponível). Esta hipótese implica que os investidores têm expectativas homogéneas e nenhum processo de arbitragem sem risco trará lucros (equilíbrio de mercado).

Partindo das equações (1) e (3) o preço da obrigação satisfaz a equação diferencial estocástica

$$dP = P\mu(t,s)dt - P\sigma(t,s)dz \tag{5}$$

onde os parâmetros $\mu(t,s) = \mu(t,s,r(t)), \sigma = (t,s,r(t))$ são dadas por:

$$\mu(t,s,r) = \frac{1}{P(t,s,r)}\left[\frac{\partial}{\partial t} + f\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2}\rho^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right]P(t,s,r) \tag{6}$$

$$\sigma(t,s,r) = -\frac{1}{P(t,s,r)}\rho\frac{\partial}{\partial r}P(t,s,r) \tag{7}$$

As funções $\mu(t,s,r), \sigma^2 = (t,s,r)$ são a média e variância, respectivamente, da taxa instantânea de retorno no tempo t numa obrigação com data de vencimento s, dado que a taxa de juro à vista corrente é $r(t) = r$.

Agora considerando um investidor que no tempo t emite um montante W_1 de uma obrigação com data de vencimento s_1, e simultaneamente compra um montante W_2 de uma obrigação com vencimento no tempo s_2.

O valor total $W = W_2 - W_1$ da carteira assim construída muda sobre o tempo conforme a equação acumulação:

$$dW = (W_2\mu(t,s_2) - W_1\mu(t,s_1))dt - (W_2\sigma(t,s_2) - W_1\sigma(t,s_1))dz \tag{8}$$

$$dW = W\mu(t,s)dt - W\sigma(t,s)dz$$

$$Sendo \qquad W = W_2 - W_1$$

$$Então \qquad dW = (W_2\mu(t,s_2)dt - W_1\mu(t,s_1))dt - (W_2\sigma(t,s_2) - W_1\sigma(t,s_1))dz$$

Fazendo

$$W_1 = \frac{W\sigma(t,s_2)}{\sigma(t,s_1)-\sigma(t,s_2)}$$

$$= \frac{W\sigma(t,s_1)}{\sigma(t,s_1)-\sigma(t,s_2)}$$

Portanto

Por tan to

$$dW = \left[\frac{W\sigma(t,s_1)\mu(t,s_2)}{\sigma(t,s_1)-\sigma(t,s_2)} \cdot \frac{W\sigma(t,s_2)\mu(t,s_1)}{\sigma(t,s_1)-\sigma(t,s_2)}\right]dt - \left[\frac{W\sigma(t,s_1)\sigma(t,s_2)-W\sigma(t,s_2)\sigma(t,s_1)}{\sigma(t,s_1)-\sigma(t,s_2)}\right]dz$$

$$\Leftrightarrow dW = \left[\frac{W(\sigma(t,s_1)\mu(t,s_2)-\sigma(t,s_2)\mu(t,s_1))}{\sigma(t,s_1)-\sigma(t,s_2)}\right]dt - 0$$

$$\Leftrightarrow dW = W(\mu(t,s_2)\sigma(t,s_1)-\mu(t,s_1)\sigma(t,s_2))\bullet(\sigma(t,s_1)-\sigma(t,s_2))^{-1}dt \qquad (9)$$

A carteira composta de montante igual das duas obrigações realiza o mesmo retorno conforme o empréstimo na taxa de juro à vista descrito na equação (2). Senão, a carteira não pode ser comparada com fundos obtidos por empréstimo na taxa de juro à vista, ou doutro modo vendida e os produtos emprestados para fora, a realizar uma arbitragem sem risco.

Tal oportunidades de arbitragem são regidas para fora por A.3, comparando das equações (2) e (9) "*yields*"

$$(\mu(t,s_2)\sigma(t,s_1)-\mu(t,s_1)\sigma(t,s_2))/(\sigma(t,s_1)-\sigma(t,s_2)) = r(t),$$

ou equivalente a,

$$\frac{\mu(t,s_1)-r(t)}{\sigma(t,s_1)} = \frac{\mu(t,s_2)-r(t)}{\sigma(t,s_2)} \qquad (10)$$

Vejamos,

$$eq.5)\ dW = Wr(t)dt$$

$$eq.12)\ dW = W(\mu(t,s_2)\sigma(t,s_1)-\mu(t,s_1)\sigma(t,s_2))\bullet(\sigma(t,s_1)-\sigma(t,s_2))^{-1}dt$$

então

$$\frac{\cdots s_2)\sigma(t,s_1)-\mu(t,s_1)\sigma(t,s_2)}{\sigma(t,s_1)-\sigma(t,s_2)}=r(t)$$

Portanto

$$\Leftrightarrow \mu(t,s_2)\sigma(t,s_1)-\mu(t,s_1)\sigma(t,s_2)=r(t)\sigma(t,s_1)-r(t)\sigma(t,s_2)$$

$$\Leftrightarrow \sigma(t,s_1)[\mu(t,s_2)-r(t)]=\sigma(t,s_2)[\mu(t,s_1)-r(t)]$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu(t,s_2)-r(t)}{\sigma(t,s_2)}=\frac{\mu(t,s_1)-r(t)}{\sigma(t,s_1)} \qquad eq.10)$$

No geral $\dfrac{\mu(t,s)-r(t)}{\sigma(t,s)}$

Portanto

$$q(t,r)=\frac{\mu(t,s,r)-r}{\sigma(t,s,r)} \qquad com \quad s\geq t \qquad eq.\ 11)$$

Também pode ser escrita:

$$\mu(t,s,r)-r=\sigma(t,s,r)q(t,r)$$

A equação *q(t,r)* pode ser chamada o preço de mercado do risco, assim, isto especifica o aumento (incremento) em taxa instantânea de retorno esperada numa obrigação conforme uma unidade adicional de risco.

Equação (10) será agora usada para derivar uma equação pelo preço da obrigação descontada. Escrevendo (10) como

$$\mu(t,s,r)-r=q(t,r)\sigma(t,s,r),$$

e substituindo μ,σ nas equações (6), (7), depois pôr em ordem novamente,

$$eq.\ 6)\ \mu(t,s,r)=\frac{1}{P(t,s,r)}\left[\frac{\partial}{\partial t}+f\frac{\partial}{\partial r}+\tfrac{1}{2}\rho^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right]P(t,s,r)$$

$$eq.\ 7)\sigma(t,s,r)=\frac{1}{P(t,s,r)}\rho\frac{\partial}{\partial r}P(t,s,r)$$

Substituindo em $\mu(t,s,r)-r=q(t,r)\sigma(t,s,r)$ temos :

$$\frac{1}{P(t,s,r)}\left[\frac{\partial}{\partial t}+f\frac{\partial}{\partial r}+\tfrac{1}{2}\rho^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right]P(t,s,r)-r=q(t,r)\left[-\frac{1}{P(t,s,r)}\rho\frac{\partial}{\partial r}P(t,s,r)\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial t}+f\frac{\partial P}{\partial r}+\tfrac{1}{2}\rho^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}-rP=q\left[-\rho\frac{\partial P}{\partial r}\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial t}+f\frac{\partial P}{\partial r}+q\rho\frac{\partial P}{\partial r}+\tfrac{1}{2}\rho^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}-rP=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial r}(f+\rho q)+\tfrac{1}{2}\rho^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}-rP=0 \quad t\le s \qquad eq.\ 12)$$

Equação (11) é a equação básica para "*pricing of discount bonds*" num mercado caracterizado pelas (A.1), (A.2), (A.3). Será chamada a equação da estrutura por prazo.

A equação da estrutura a prazo é uma equação diferencial parcial para $P(t,s,r)$.

Uma vez que o carácter do processo da taxa de juro à vista $r(t)$ é descrito e o preço de mercado do risco $q(t,r)$ específico, o preço da obrigação é obtido resolvendo (11) sujeito à condição limite

$$P(s,s,r)=1 \tag{13}$$

A estrutura a prazo $R(t,T)$ da taxa de juro é imediatamente avaliada da equação

$$R(t,T)=-\frac{1}{T}\log P(t,t+T,r(t)). \tag{14}$$

4. REPRESENTAÇÃO ESTOCÁSTICA DO PREÇO DE UMA OBRIGAÇÃO

A solução das equações diferenciais parciais do tipo parabólico ou elíptico, tal como equação (12), pode ser representada numa forma integral em termos de um processo estocástico [cf., Friedman (1975)]. Tal representação para o preço da obrigação igual à solução da equação estrutura por prazo (12) e é condição limite como se segue:

$$P(t,s)=E_t\exp\left(-\int_t^s r(\tau)d\tau-\tfrac{1}{2}\int_t^s q^2(\tau,r(\tau))d\tau+\int_t^s q(\tau,r(\tau))dz(\tau)\right),\ t\le s. \tag{15}$$

Para provar a equação (15) vamos definir :

$$V(u)=\exp\left(-\int^u r(\tau)d\tau-\frac{1}{2}\int^u q^2(\tau,r(\tau))d\tau+\int^u q(\tau,r(\tau))dz(\tau)\right)$$

aplicando a regra ao processo $P(u,s)\times V(u)$

$$d(PV)=VdP+PdV+dPdV \quad \textit{pela regra do produto}$$

Da equação (5), (6) e (7) retira-se:

$$dP = P\times\left[\frac{1}{P}\times\left(\frac{dP}{du}+f\frac{dP}{dr}+\frac{1}{2}\rho^2\frac{d^2P}{dr^2}\right)du+\frac{1}{P}\times\rho\frac{dP}{dr}dz\right]=$$

$$dP=\left(\frac{dP}{du}+f\frac{dP}{dr}+\frac{1}{2}\rho^2\frac{d^2P}{dr^2}\right)du+\rho\frac{dP}{dr}dz$$

Derivando V(u) pela regra:

$$dV=\left(-r-\frac{1}{2}q^2\right)Vdu+qVdz+\frac{1}{2}q^2Vdu$$

$$dV=V(-rdu+qdz)$$

O produto $dP\times dV$:

$$dP\times dV=\left[\left(\frac{dP}{du}+f\frac{dP}{dr}+\frac{1}{2}\rho^2\frac{d^2P}{dr^2}\right)du+\rho\frac{dP}{dr}dz\right]\times V[-rdu+qdz]=$$

$$dP\times dV=\rho\frac{dP}{dr}dz\times Vqdz=V\rho\frac{dP}{dr}qdu \quad com\ du^2=0,\ dudz=0\ e\ dz^2=du$$

$$d(PV)=VdP+PdV+dPdV$$

$$d(PV)=V\left(\frac{dP}{du}+f\frac{dP}{dr}+\frac{1}{2}\rho^2\frac{d^2P}{dr^2}\right)du+V\rho\frac{dP}{dr}dz+PV(-rdu+qdz)+V\rho\frac{dP}{dr}qdu$$

$$Pela\ (12):\ \frac{dP}{du}+(f+\rho q)\frac{dP}{dr}+\frac{1}{2}\rho^2\frac{d^2P}{dr^2}-rP=0$$

$$d(PV)=V\rho\frac{dP}{dr}dz+PVqdz$$

Integrando de t para s e tomando expectativas *"yields"*

$$E_t\big(P(s,s)V(s)-P(t,s)V(t)\big)=0$$

Num caso especial quando a taxa instantânea de retorno esperada em contratos para todos os vencimentos são os mesmos,

$$\mu(t,s)=r(t), \qquad s\geq t$$

(isto corresponde a $q = 0$), o preço da obrigação é dado por

$$P(t,s)=E_t\exp\left(-\int_t^s r(\tau)d\tau\right) \tag{16}$$

$$d(PV) = V\rho \frac{dP}{dr} dz + PVqdz$$

Equação (15) pode dar uma interpretação em termos económicos. Construído a carteira consistente numa obrigação longa (obrigação que usa o vencimento como aproximação ao infinito) e emprestar ou pedir emprestado com base na taxa de juro à vista, com proporções $\lambda(t)$, $1-\lambda(t)$, respectivamente, onde

$$\lambda(t) = (\mu(t,\infty) - r(t))/\sigma^2(t,\infty).$$

O preço $Q(t)$ de igual carteira sucede da equação

$$dQ = \lambda Q(\mu(t,\infty)dt - \sigma(t,\infty)dz) + (1-\lambda)Qrdt.$$

Esta equação pode ser integrada por avaliação do diferencial do *log Q* e notando que

Estes "rendimentos"

$$d(\log Q) = \lambda\mu(t,\infty)dt - \lambda\sigma(t,\infty)dz + (1-\lambda)rdt - \tfrac{1}{2}\lambda^2\sigma^2(t,\infty)dt$$
$$= rdt + \tfrac{1}{2}q^2 dt - qdz,$$

e consequentemente

$$\frac{Q(t)}{Q(s)} = \exp\left(-\int_t^s r(\tau)d\tau - \tfrac{1}{2}\int_t^s q^2(\tau, r(\tau))d\tau + \int_t^s q(\tau, r(\tau))dz(\tau) \right).$$

Assim, equação (15) pode ser escrita na forma

$$P(t,s) = E_t Q(t)/Q(s), \quad t \leq s. \tag{17}$$

Isto quer dizer que a obrigação em qualquer vencimento é valorizada de igual maneira que a mesma parte de certa bem-definida combinação de uma obrigação longa e activo sem risco (a carteira Q) não pode ser comprada agora para o montante no preço da obrigação quando (como) é esperado ser comprado na data de vencimento para o valor de vencimento.

5. O MODELO DE VASICEK

5.1. HIPÓTESES DO MODELO

1ª- O preço de mercado do risco q (t, r) é uma constante, q (t, r) = q independente do tempo e do nível da taxa de juro à vista.

2ª- A taxa de juro à vista r (t) segue o processo Ornstein-Uhlenbeck:

$$\partial r = \alpha(\gamma - r)\partial t + \rho\partial z \tag{18}$$

Com ∝ > 0, correspondendo à escolha

Esta descrição do processo da taxa de juro à vista foi proposta por Merton (1971).

O processo Ornstein-Uhlenbeck com $\propto > 0$ é, por vezes, chamado "passeio aleatório". É um processo Markov de incrementos com distribuição normal. Este processo tem uma distribuição estacionária em contraste com o processo de Wiener, o qual é um processo instável e passado um longo período diverge para valores infinitos.

A tendência instantânea ($\propto(\Upsilon - r)$) representa uma "força" que puxa continuamente o processo para uma média de longo prazo (Υ). com magnitude proporcional ao desvio do processo em relação à média.

5.2. ANÁLISE DO MODELO

O elemento estocástico, o qual tem uma variância instantânea constante ($\rho 2$), causa a flutuação do processo em torno do nível Υ numa forma errática, mas contínua.

A expectativa condicional e a variância do processo são, respectivamente:

$$E_t r(s) = \gamma + (r(t) - \gamma)e^{-\alpha(s-t)} \qquad t \leq s, \qquad (19)$$

$$Var_t r(s) = \frac{\rho^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha(s-t)}) \qquad t \leq s, \qquad (20)$$

Sobre estas hipóteses, a solução da equação da estrutura de prazos (12) sujeita a (13) (alternativamente, a representação da (15)) é dada por:

$$P(t,s,r) = \exp\left[\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(s-t)})(R(\infty) - r) - (s-t)R(\infty) - \frac{\rho^2}{4\alpha^3}(1 - e^{-\alpha(s-t)})^2\right]$$

$$t \leq s, \qquad (21)$$

onde

$$R(\infty) = \gamma + \rho q / \alpha - \frac{1}{2}\rho^2 / \alpha^2 \qquad (22)$$

A média e o desvio padrão da taxa de rentabilidade instantânea de uma obrigação com maturidade em s (a partir das equações (6) e (7)), são dados por:

$$\mu(t,s) = r(t) + \frac{\rho q}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(s-t)})$$

$$\sigma(t,s) = \frac{\rho}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(s-t)}) \qquad \text{Para } t \leq s$$

Quanto maior o prazo da obrigação, maior é a variância da taxa de rentabilidade instantânea, com a rentabilidade esperada em excesso da taxa de juro à vista, proporcional ao desvio padrão.

Para uma obrigação muito longa ($s \to \infty$) a média e a variância aproximam-se dos limites.

$$\mu(\infty) = r(t) + \rho q / \alpha$$

$$\sigma(x) = \frac{\rho}{\alpha}$$

A estrutura de prazos da taxa de juro é assim calculada a partir das equações (14) e (22) e tem a seguinte forma:

$$R(t,T) = R(\infty) + (r(t) - R(\infty))\frac{1}{\alpha T}(1 - e^{-\alpha T}) + \frac{\rho^2}{4\alpha^3 T}(1 - e^{-\alpha T})^2 \qquad (23)$$

$$t>0$$

O rendimento de uma obrigação muito longa, $t \rightarrow \infty$, é R (∞), explicando a notação (22).

A curva "*yield*" dado pela equação (23) começa no nível corrente r(t) de uma taxa de juro à vista para T=0, e aproxima-se a uma assimptota comum $R(\infty)$ com $T \rightarrow \infty$.

Para valores menores ou iguais a :

$$R(\infty) - \frac{1}{4}\rho^2 / \alpha^2$$

a curva *yield* é monotonicamente crescente.

Para valores de r(t) maiores que os anteriores, mas menores que:

$$R(\infty) + \frac{1}{2}\rho^2 / \alpha^2$$

temos uma curva arqueada (*hump*).

Quando r (t) é igual ou excede o último valor as curvas são monotonicamente decrescentes.

6. CONCLUSÃO

A estrutura por prazos das taxas de juro é, por definição, o conjunto das taxas de juro de diferentes prazos que se praticam no mercado obrigacionista calculadas a partir da informação existente sobre obrigações com risco de incumprimento mínimo que diferem entre si, *ceteris paribus*, pelos prazos de reembolso. As taxas actuariais de rendibilidade reflectem não só a estrutura de prazos das taxas de juro, mas também as características particulares das obrigações, tais como o montante dos cupões e o programa de reembolso.

A razão pela qual muitos agentes económicos decidem com base em *yields to maturity* em vez de usarem as taxas à vista adequadas prende-se com a dificuldade existente no cálculo destas últimas. Com efeito, o cálculo da estrutura de prazos das taxas de juro quando efectuado a partir de obrigações sem cupão é muito simples. O problema é que raramente existem obrigações sem cupão e com risco de incumprimento mínimo de médio e longo prazo.

Segundo Vasicek (1977), a taxa de juro à vista segue um processo Ornstein-Uhlenbeck, ou seja, a taxa de juro oscila em torno do seu nível médio a uma dada taxa de ajustamento. Contudo, este processo foi objecto de crítica por alguns autores, por permitir valores negativos para as taxas de juro. Além do modelo que apresentámos, existem muitos outros que pretendem efectuar o mesmo estudo, todos eles para obter uma solução explícita da equação diferencial que caracteriza a estrutura por prazos das taxas de juro, assumem uma hipótese específica sobre o processo estocástico das taxas de juro.