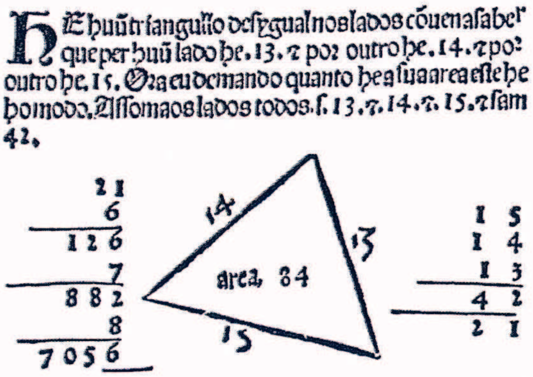
EXPOSIÇÃO INTERACTIVA

PROBLEMAS COM CONTA, PESO E MEDIDA



Apoio à Exploração do Friso Histórico e Proposta de Uma Resolução Manipulativa dos Problemas

Fátima Paixão **Fátima Jorge** **José Prata**
Paulo Silveira **Sónia Balau**

Ciência Viva
Agência Nacional para a Cultura Científica e Tecnológica

Entidade Proponente:

Escola Superior de Educação

Ciência.Inovação 2010
União Europeia
Fundo Europeu de Desenvolvimento Regional

Fátima Paixão Fátima Jorge José Prata
Paulo Silveira Sónia Balau

EXPOSIÇÃO INTERACTIVA
PROBLEMAS COM CONTA, PESO E MEDIDA

Apoio à Exploração do Friso Histórico e Proposta de Uma Resolução Manipulativa dos Problemas

PROGRAMA CIÊNCIA VIVA
PROJECTO PVI-ID 1375

Título: Exposição Interactiva "Problemas com Conta, Peso e Medida" - Apoio à Exploração do Friso Histórico e Proposta de Uma Resolução Manipulativa dos Problemas

Autores: Fátima Paixão
Fátima Jorge
José Prata
Paulo Silveira
Sónia Balau

Capa: Imagem retirada de Tratado da Prática d'Arismética, Gaspar Nicolás, 1515, fol. 82v. e 83

Editor: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Castelo Branco

Maio de 2008

Nova Edição

Impressão: WorkJunior

ISBN: 978-989-95831-0-8

Índice

Introdução 1
Friso Histórico 3
Uma proposta de resolução manipulativa dos problemas 15
Comprimento 17
Área 23
Volume 29
Capacidade 35
Massa 45
Bibliografia 53

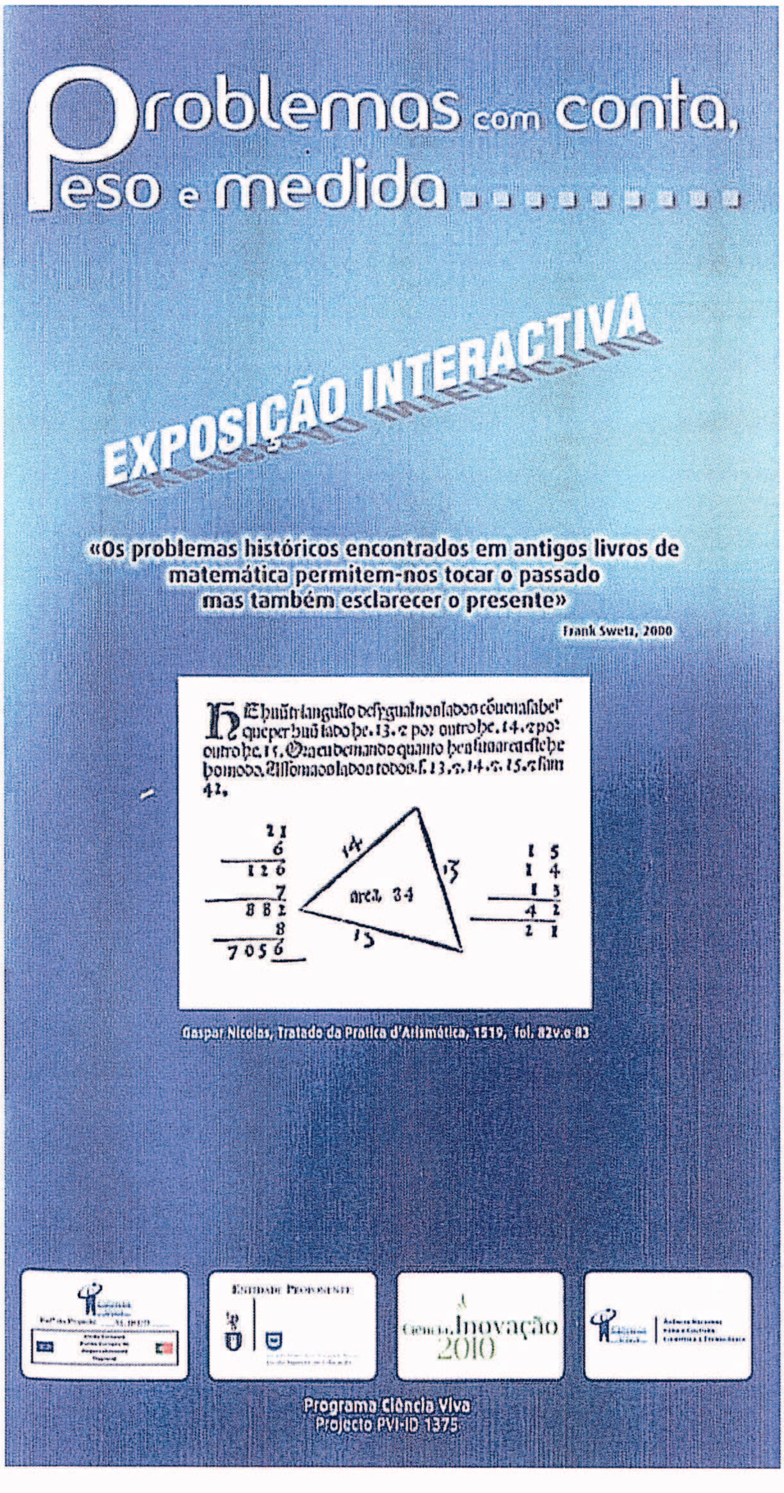


Figura1. Painel de apresentação da Exposição

INTRODUÇÃO

A exposição interactiva "Problemas com Conta, Peso e Medida" é uma iniciativa que surge no âmbito do Programa Ciência Viva e que envolve a Escolas Superior de Educação do Instituto Politécnico de Castelo Branco e todos os agrupamentos de escolas do ensino básico do concelho de Castelo Branco.

Resolver problemas é uma actividade tão antiga como o Homem que sempre o estimulou intelectualmente. A par de contribuir para as suas múltiplas funções e tarefas, a procura de soluções está na base do desenvolvimento da Matemática, da Ciência e da Tecnologia.

Os problemas históricos que a exposição apresenta reflectem necessidades sociais e o papel da matemática na vida quotidiana portuguesa dos séculos XVI e XVII. Através da sua resolução é possível conhecer algumas das antigas unidades de medida, as dificuldades dos antigos sistemas de unidades e perceber as vantagens da utilização do Sistema Internacional de Unidades.

A exposição é constituída por cinco módulos relativos aos atributos mensuráveis comprimento, área, volume, capacidade e massa. Em cada um deles propõe-se um conjunto de problemas adaptados de textos de aritmética publicados em Portugal entre 1519 e 1624, alguns dos quais retratam a experiência de vida dos negócios e as necessidades dos mercadores. A resolução de problemas implica a realização de medições utilizando antigas unidades de medida, a compreensão das relações entre essas unidades e a modelação do problema com materiais manipulativos.

Para além dos problemas, a exposição integra um Friso Histórico que introduz os visitantes e que os guia e interpela acerca da sentida necessidade, ao longo dos tempos, de uniformização dos avulsos sistemas de unidades que perduraram durante séculos e foram geradores de inúmeros problemas sociais e políticos. Ao mesmo tempo, a linha da história permite compreender o valor da história da ciência/matemática no âmbito da história da humanidade. Cada módulo integra um Painel ilustrado no qual a grandeza é apresentada e em que se inclui uma nota histórica e se apresentam dois problemas, para os quais são apresentados materiais que permitem uma resolução manipulativa.

Neste caderno, apresenta-se uma proposta de exploração do friso histórico e dos problemas propostos nos cinco módulos. Relativamente a estes últimos, indica-se, para cada problema, um conjunto de materiais passíveis de o modelar e que acompanham a exposição. Aqui, propõe-se uma possível estratégia de resolução, que, frente ao módulo, deve sempre ser acompanhado de uma discussão dos conceitos e procedimentos adoptados e, eventualmente, de uma resolução com papel e lápis.

FRISO HISTÓRICO

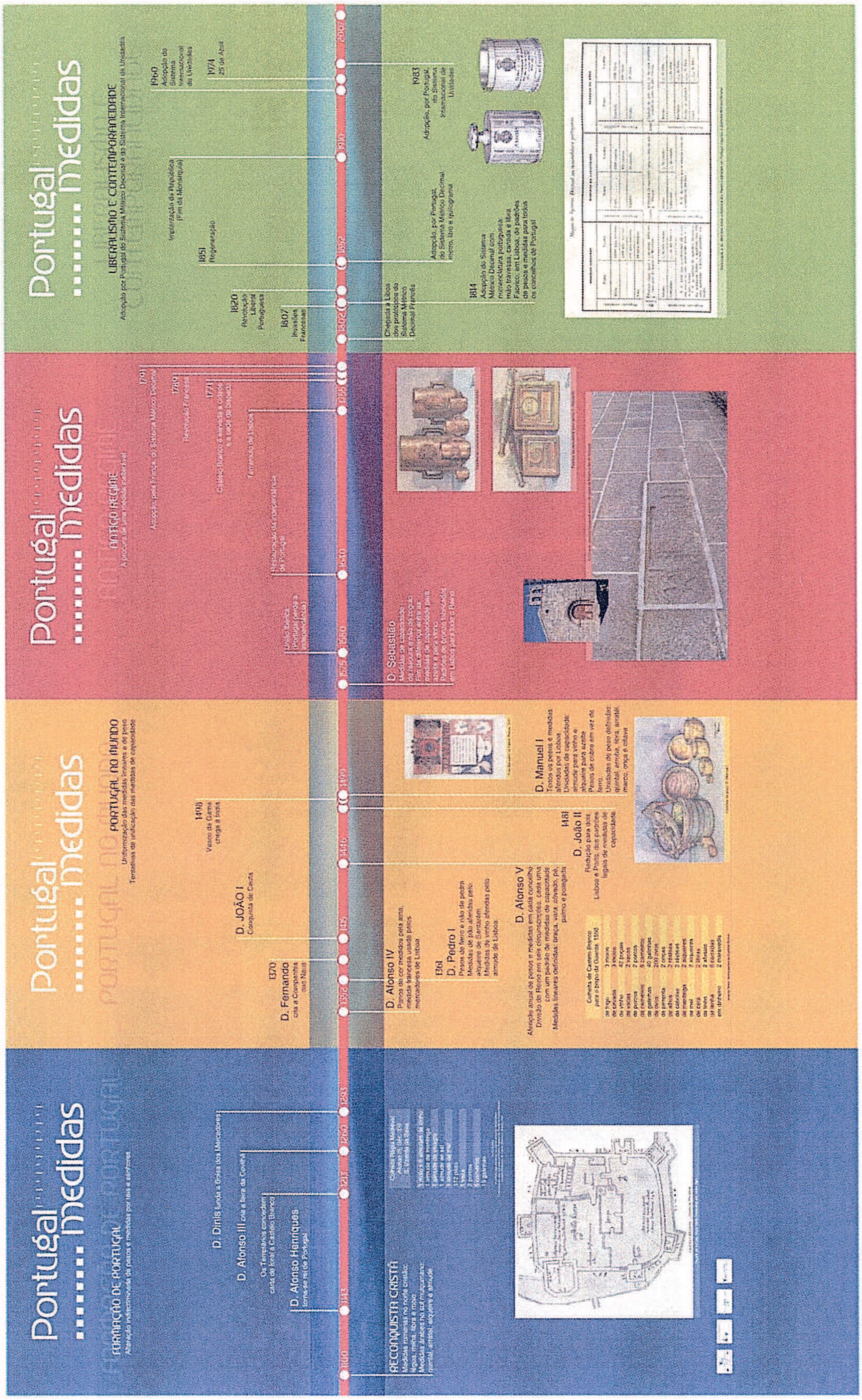


Figura 2. Friso Histórico

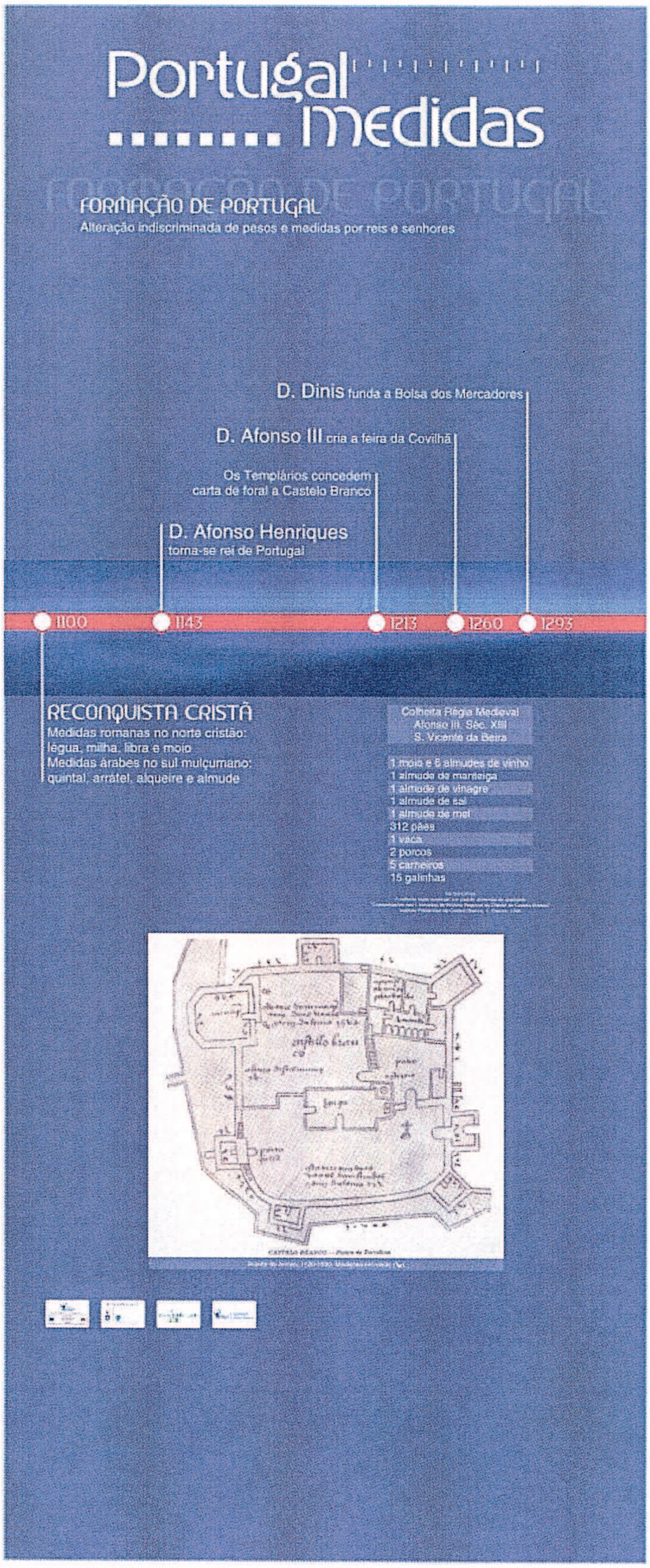


Figura 3. Primeiro painel do Friso Histórico

1.º PAINEL

1100-1300
FORMAÇÃO DE PORTUGAL

Alteração indiscriminada de pesos e medidas por reis e senhores

Aquando da Reconquista Cristã, coexistiam na Península Ibérica as medidas romanas, sobretudo no norte cristão, e as medidas árabes, no centro e sul.

No período da formação de Portugal (1143-1248), reis e senhores alteraram indiscriminadamente os pesos e as medidas, no sentido de garantir para si uma maior arrecadação de impostos, pagos pelos povos que viviam na sua dependência. Por todo o Reino de Portugal, as medidas e pesos ganharam localmente nomes diversos e foram-lhes atribuídas diferentes valores.

A partir de meados do século XIII, a preocupação dos governantes centra-se no desenvolvimento económico, nomeadamente através da criação das feiras, como forma de organizar o comércio interno, e da fundação da Bolsa dos Mercadores, para reforçar as relações económicas de Portugal com as regiões do Norte da Europa e do Mediterrâneo.

O castelo de Castelo Branco foi construído neste período, embora tenha sido completado nos séculos XIV e XV. Por essa razão se insere neste painel a planta do castelo, traçada nos inícios do século XVI. As medidas estão apresentadas em *varas*, uma das medidas lineares mais usadas na época, equivalente à distância do centro do peito à extremidade dos dedos da mão.

A colheita régia devida pelo concelho de S. Vicente da Beira ao rei D. Afonso III mostra duas medidas de origem árabe, usadas nesta região: o *almude* e o *moio*. Segundo Oliveira Marques, um *moio* eram 20 almudes, o que equivalia no sistema decimal a 360 litros. O almude variava entre 14 e 18 litros.

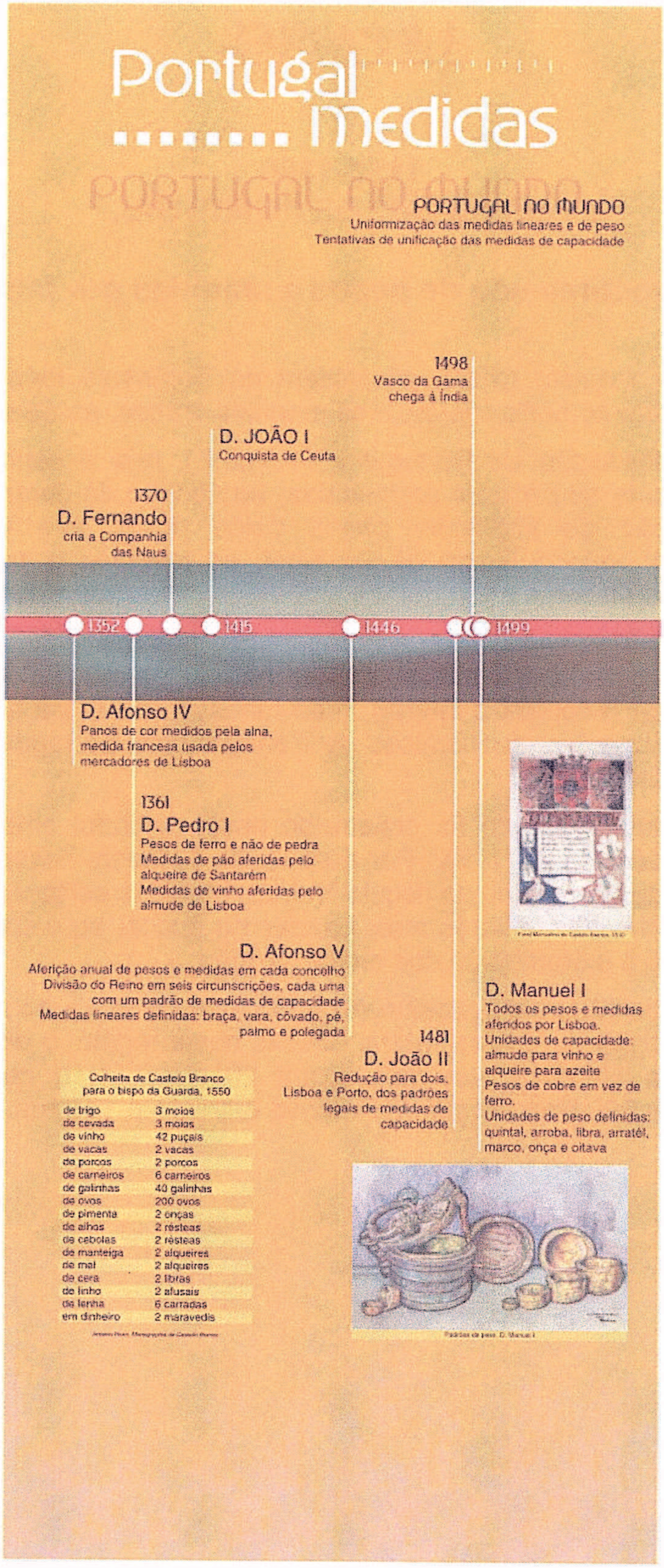


Figura 4. Segundo painel do Friso Histórico

2.º PAINEL

1300-1500
PORTUGAL NO MUNDO

Uniformização das medidas de comprimento e de peso[1]
Tentativas de unificação das medidas de capacidade

Portugal insere-se progressivamente na economia europeia e sente a necessidade de alterar e disciplinar algumas práticas comerciais.

D. Afonso IV generaliza a todo o reino o uso da alna, uma medida francesa que os mercadores de Lisboa usavam no comércio de panos de cor importados da Flandres. A alna era quase igual ao nosso côvado, o qual correspondia à distância da cova do braço à extremidade dos dedos da mão.

D. Pedro I substituiu os pesos de pedra por pesos de ferro, devido à facilidade com que aqueles se degradavam. No entanto, em 1783, ainda as autoridades de Castelo Branco entregaram aos responsáveis do açougue municipal um peso de pedra com sua argola chumbada que pesava trinta e seis arráteis (pouco mais de 12 quilogramas, no actual sistema de medidas). Na tentativa de disciplinar o uso das medidas de capacidade, o rei decidiu ainda que as medidas de pão fossem aferidas pelo alqueire de Santarém e as de vinho pelo almude de Lisboa.

Em meados do séc. XV, já com as caravelas ocupadas nas descobertas e tráficos da Guiné, D. Afonso V impõe que os pesos e medidas sejam anualmente aferidos em cada concelho. Face ao fracasso da uniformização de D. Pedro I, estabelece que haja no reino seis circunscrições, cada uma com o seu padrão de medidas de capacidade. A partir desta altura e até ao século XIX, as medidas de comprimento não sofrem alterações.

O rei D. João II tenta reduzir para duas, Lisboa e Porto, as circunscrições com padrões de medidas de capacidade, mas D. Manuel I uniformiza todas as medidas de capacidade pelos padrões de Lisboa, pois a diversidade era prejudicial ao grande comércio internacional, de que Lisboa era um dos centros. Também substitui os pesos de ferro, facilmente deterioráveis, por padrões de cobre, que permanecerão inalteráveis até ao séc. XIX.

É desta época o foral concedido por D. Manuel I a Castelo Branco. Dele constam as unidades de pesos e medidas então usadas, o mesmo sucedendo com a colheita que esta vila devia ao bispo da Guarda, em 1550. Um *moio* de cereal equivalia a cerca de 60 alqueires, a que correspondiam perto de 1000 quilogramas; um *puçal* correspondia a 5 *almudes*, cerca de 90 litros; um *afusal* era a quantidade de linho que cabia entre o dedo polegar e o indicador.

[1] Até muito tarde era frequente a designação de "peso" para a grandeza "massa" e de "pesos" para as medidas de massa. Trata-se de duas grandezas diferentes embora relacionadas, pois os corpos têm peso e são atraídos para a Terra pela força da gravidade pelo facto de terem uma determinada massa que depende da quantidade da matéria de que são formados. "Pesar" ainda se usa para a operação de determinar a massa.

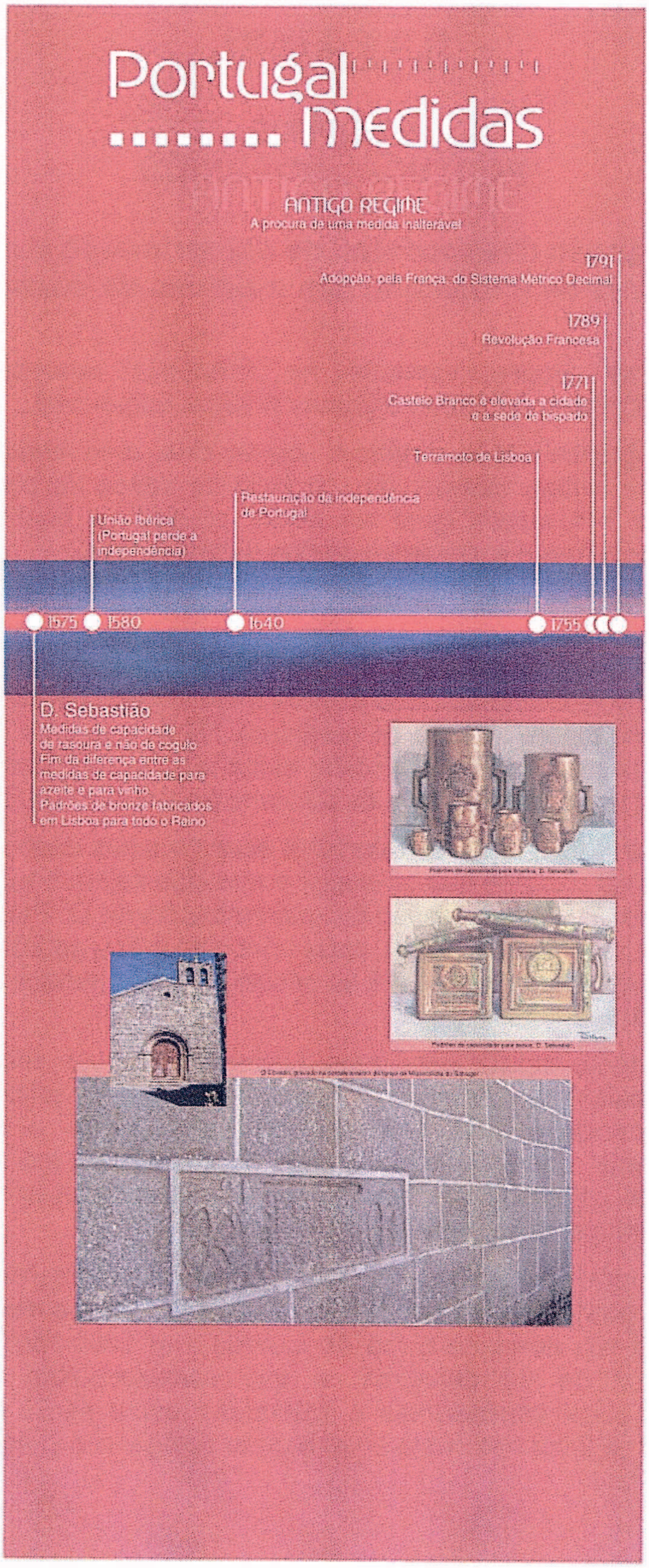


Figura 5. Terceiro painel do Friso Histórico

3.º PAINEL

1500-1800
ANTIGO REGIME

A procura de uma medida inalterável

D. Sebastião, no ocaso do período áureo das descobertas, acaba com a distinção entre medidas de capacidade para vinho e para azeite e manda que as medidas de capacidade para secos sejam de rasoura e não de cogulo. Os padrões de bronze seriam fabricados em Lisboa, para todo o reino. Com estas leis, uniformizavam-se legalmente todas as medidas em Portugal.

A Igreja da Misericórdia do Sabugal foi edificada neste século XVI e na sua parede os aferidores do concelho talharam no granito o côvado, com vista a uma mais fácil aferição anual, como ordenara D. Afonso V. Castelo Branco tinha, em 1783, uma vara de ferro, em que se cotejavam os côvados e as varas.

No século XVIII, por toda a Europa, comerciantes e cientistas procuravam um tipo na Natureza tão inalterável como a consideravam a ela, a qual servisse de base para a definição da unidade fundamental de todas as medidas. Em 1789, dá-se a Revolução Francesa, que representou a tomado do poder político por parte da burguesia (comerciantes, industriais e banqueiros) em França e progressivamente em todo o mundo. Logo em 1791, a Academia Real das Ciências de Paris propõe como padrão para medir a grandeza comprimento uma medida relacionada com as dimensões da Terra. Mediu-se um arco do meridiano, de Dunquerque a Barcelona, e a partir dessa medição calculou-se a medida de um quarto do meridiano terrestre. E à décima milionésima parte do quarto do meridiano chamou-se Metro.

Com base num sistema decimal, definiram-se os múltiplos e submúltiplos do metro e calcularam-se as restantes unidades de medida.

Estava encontrada a unidade que viria a permitir uniformizar os pesos e medidas em cada país e nas regiões do mundo sob influência europeia.

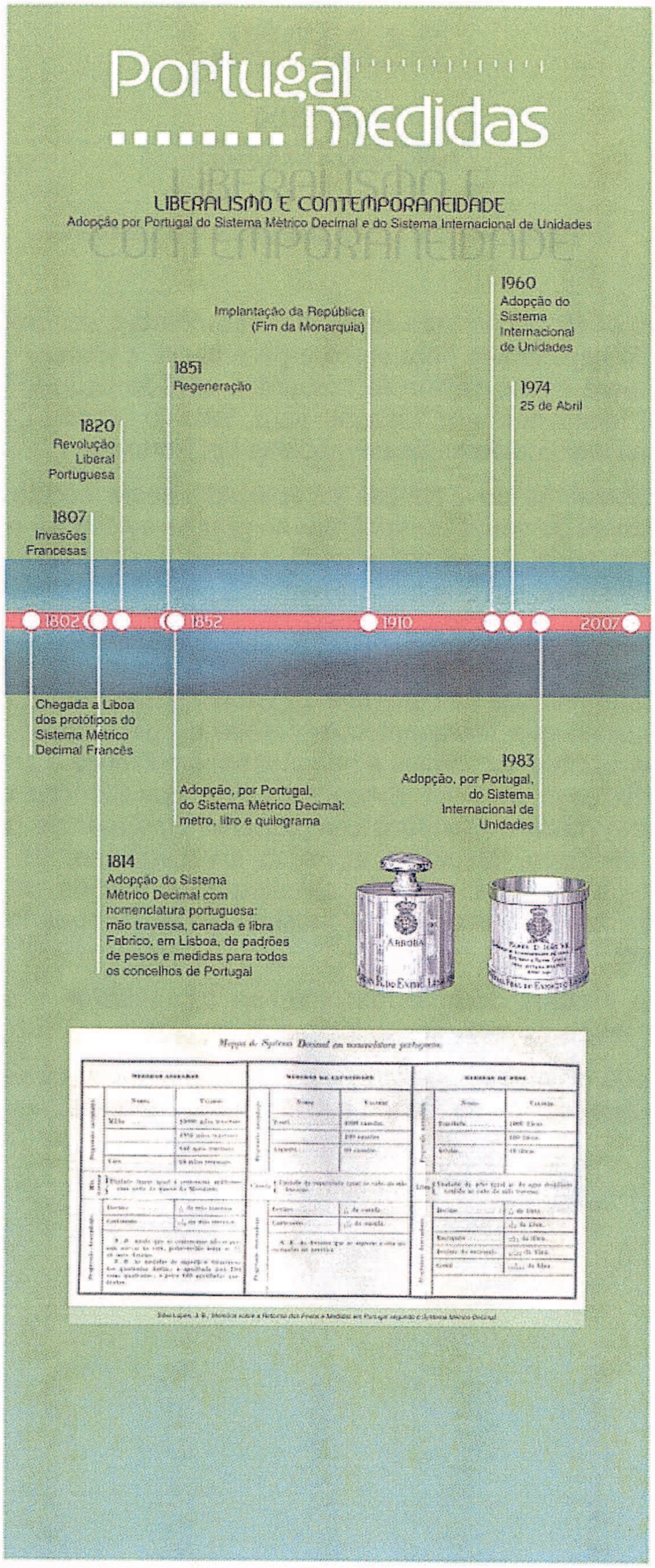


Figura 6. Quarto painel do Friso Histórico

4.º PAINEL

1800-2007
LIBERALISMO E CONTEMPORANEIDADE

Adopção por Portugal do Sistema Métrico Decimal e do Sistema Internacional de Unidades

Logo em 1802, Portugal recebe os protótipos do Sistema Métrico Decimal Francês. Mas dão-se as Invasões Francesas em 1807 e o orgulho ferido dos portugueses impedia de usar unidades de medida com nomes franceses, como *mètre* ou *litre*. Então, aproveitou-se o princípio científico criando um sistema decimal de pesos e medidas adoptando, contudo, uma nomenclatura portuguesa.

Como a décima parte do metro, a unidade base, tinha a medida de uma mão-travessa, adoptámo-la como unidade das medidas lineares. Numa mão-travessa cúbica cabia, aproximadamente, uma canada de água e por isso a canada ficou como unidade das medidas de capacidade, correspondente ao litro dos franceses. Dentro dessa mão-travessa cúbica cabia água destilada cuja massa era de uma libra, ficando esta a ser a nossa unidade de massa, correspondente ao quilograma francês.

A partir de 1814, foram fabricados em Lisboa, no Arsenal do Exército e a mando de D. João VI, estes novos padrões de pesos e medidas, para todos os concelhos de Portugal.

No ano de 1851, adveio o período a que se chamou Regeneração, em que se procurou reforçar o desenvolvimento económico do reino. Então, com o tempo já se esbatera o ódio aos franceses e reconhecia-se que um sistema métrico com nomenclatura portuguesa era um entrave ao nosso comércio externo. Por isso se adoptou o Sistema Métrico Decimal, tal como estabelecido em França e em adopção por toda a Europa.

Em 1960, a comunidade científica mundial concluiu que tal denominação já não era apropriada à multiplicidade de medidas necessárias para as novas grandezas conhecidas e usadas (tempo, temperatura, corrente eléctrica...) e mudou-lhe o nome para Sistema Internacional de Unidades (SI), que foi adoptado por Portugal, em 1983.

UMA PROPOSTA DE RESOLUÇÃO MANIPULATIVA DOS PROBLEMAS

COMPRIMENTO

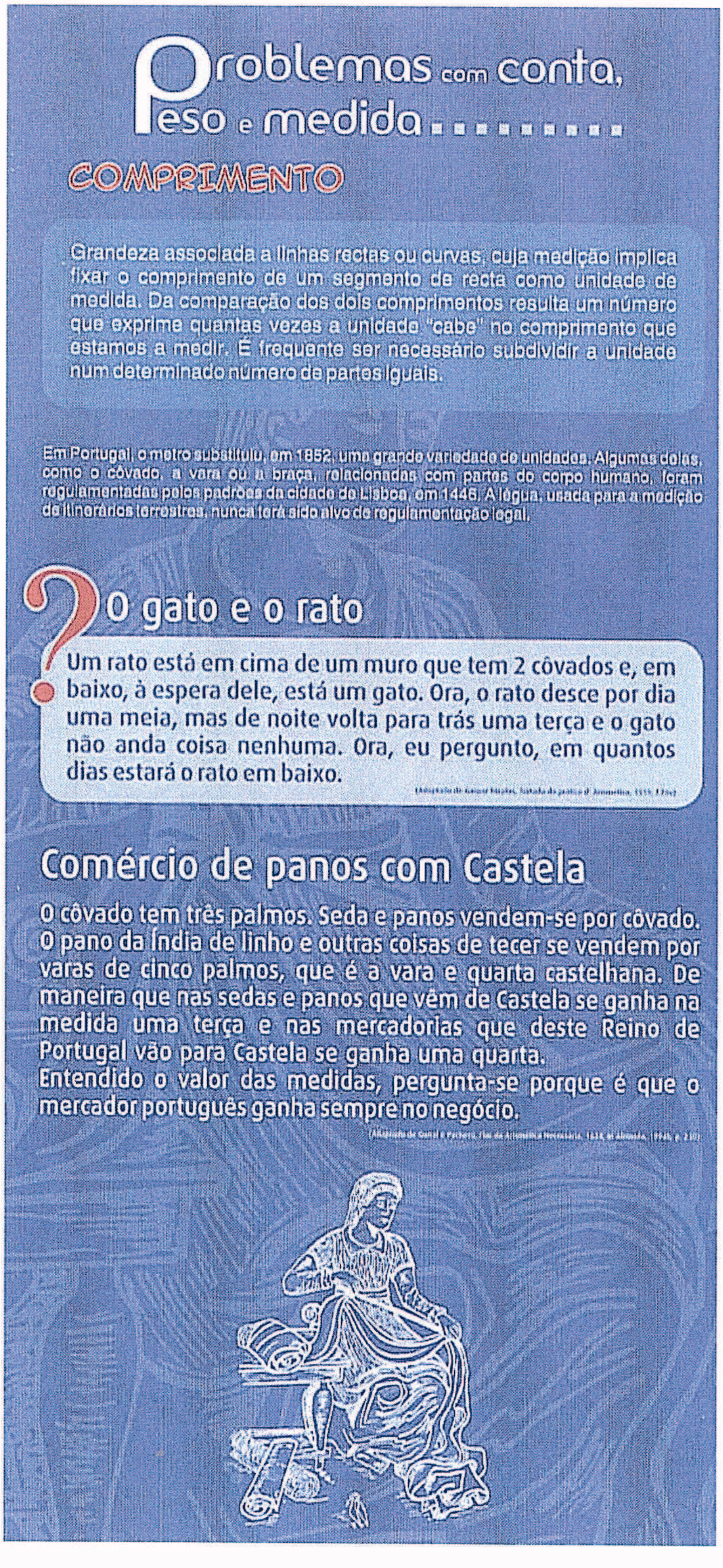


Figura 7. Painel do módulo Comprimento

O GATO E O RATO

Um rato está em cima de um muro que tem 2 côvados e em baixo, à espera dele, está um gato. Ora, o rato desce por dia uma meia, mas de noite volta para trás uma terça e o gato não anda coisa nenhuma. Ora, eu pergunto: em quantos dias estará o rato em baixo?

(Adaptado de Gaspar Nicolas, Tratado da prática d' Arismética, 1519, in Almeida, 1994b, p. 273)

Materiais:

Padrões em madeira do côvado, da meia e da terça (ou palmo).

Guia de resolução:

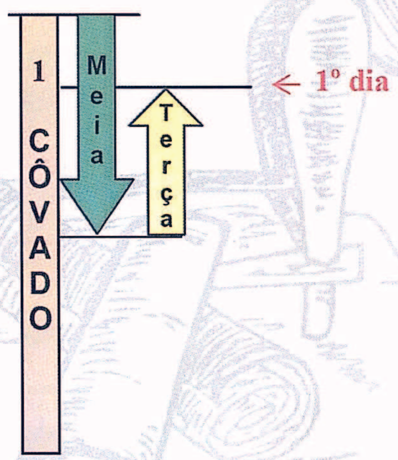
1. Comparar e relacionar os comprimentos dos padrões apresentados:

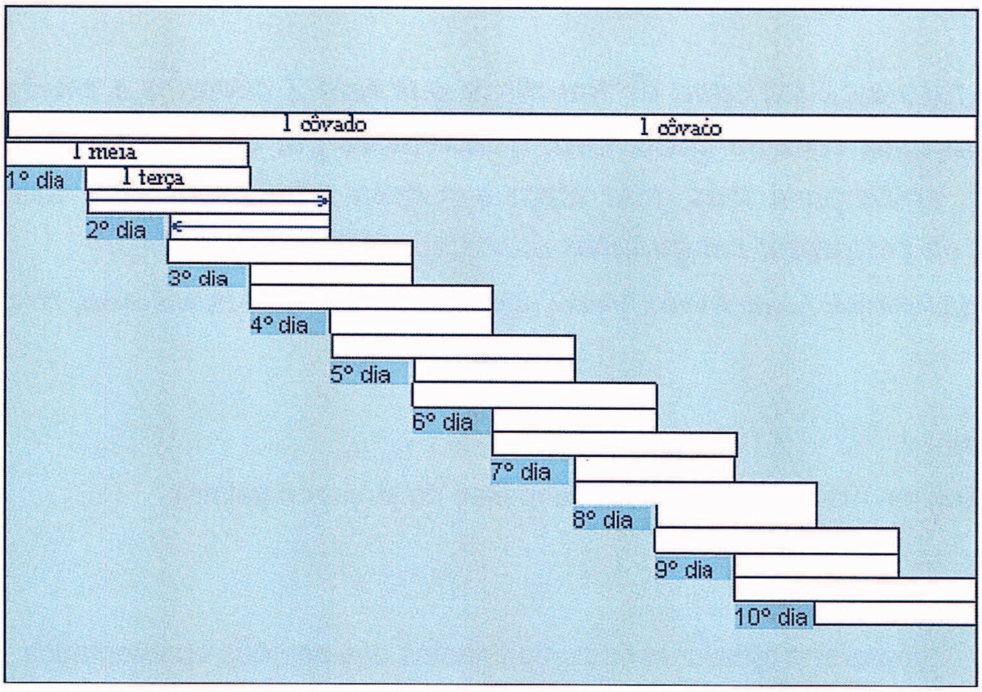
   1 *côvado* = 2 *meias*

   1 côvado = 3 *terças*

   1 côvado = 4 *quartas*

2. Fazendo uso dos padrões de comprimento, simular o comprimento que, em cada dia, o rato percorre num sentido e no outro até perfazer os 2 côvados de altura do muro.





Dada a relação entre as várias unidades e atendendo a que ao décimo dia o rato atinge o chão, obtém-se como solução: o rato demora dez dias a chegar ao pé do gato.

Note-se que quando o rato atinge o chão já não volta para trás.

COMÉRCIO DE PANOS COM CASTELA

O côvado tem três palmos. Seda e panos vendem-se por côvado. O pano da Índia de linho e outras coisas de tecer se vendem por varas de cinco palmos, que é vara e quarta castelhana. De maneira que nas sedas e panos que vêm de Castela se ganha na medida uma terça e nas mercadorias que deste Reino de Portugal vão para Castela se ganha uma quarta.
Entendido o valor das medidas, pergunta-se porque é que o mercador português ganha sempre no negócio.

(*Adaptado de Guiral e Pacheco, Flor da Arismética Necessária, 1624, in Almeida, 1994b, p. 230*)

Materiais:

Padrões em madeira da vara portuguesa, da vara castelhana, do côvado e da terça (ou palmo).

Guia de resolução:

1. Identificar todas as unidades de comprimento e estabelecer a relação entre elas:

   1 *vara portuguesa* = 5 *palmos*

   1 *vara castelhana* = 4 *palmos*

   1 *côvado* = 3 *palmos*

2. Dada a relação entre as várias unidades há que começar por identificar as unidades em uso para a medição dos vários panos.

   Em Portugal, os panos de linho e de tear são medidos em *varas* enquanto que o *côvado* é a unidade de medição das sedas:

Vara portuguesa

Côvado

Em Castela apenas se usa a *vara*:

Vara castelhana

3. Há agora que descobrir o uso que o mercador faz da diferença das unidades em Portugal e Castela:

Lucro na transacção dos panos de linho e de tear

Quando o mercador compra linho e panos de tear em Portugal usa a vara portuguesa

O mercador vende os panos de linho e de tear a Castela mede-os em varas castelhanas

=

+

Vara portuguesa

Vara castelhana

Quarta
(da vara castelhana)

Com uma vara de Portugal, o mercador faz uma vara de Castela e sobra-lhe um pedaço de pano cujo comprimento é $\frac{1}{4}$ da vara de Castela. Ganha uma quarta (quarta parte da vara de Castela).

Lucro na transacção das sedas e outros panos adquiridos em Castela

O mercador quando compra seda e outros panos em Castela faz uso das unidades de medida de Castela

O mercador revende a seda e outros panos em Portugal em côvados

=

+

Vara castelhana

Côvado

Terça
(do côvado)

Com uma vara castelhana de seda, o mercador faz um côvado e sobra-lhe um pedaço de seda cujo comprimento é um terço do côvado. Sobra-lhe pois uma terça.

ÁREA

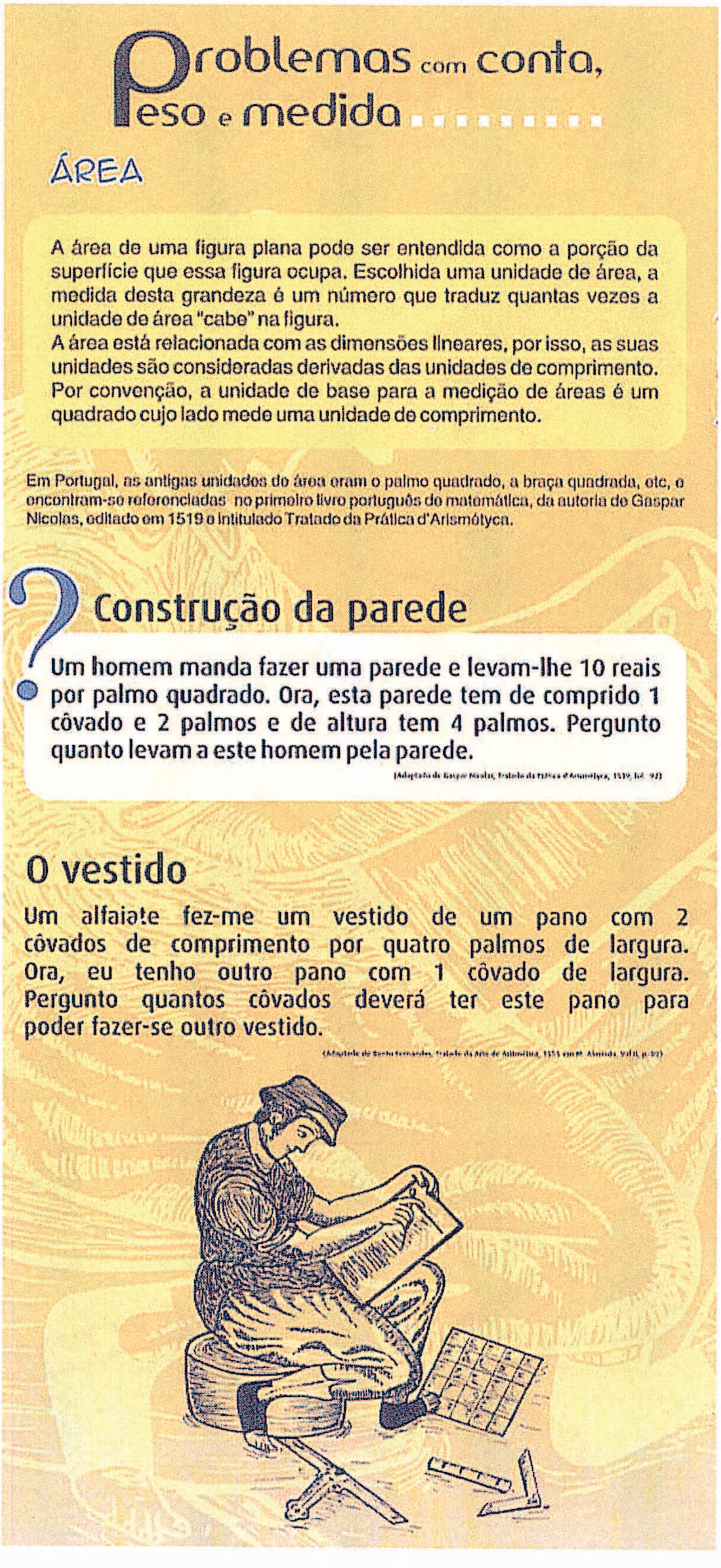


Figura 8. Painel do módulo Área

CONSTRUÇÃO DA PAREDE

Um homem manda fazer uma parede e levam-lhe 10 reais por palmo quadrado. Ora esta parede tem de comprido 1 côvado e dois palmos e de altura tem 4 palmos. Pergunto quanto levam a este homem pela parede?

(Adaptado de Gaspar Nicolas, Tratado da Prática d'Arismétyca, 1519, fol. 92)

Materiais:

Tabuleiro em madeira com orifícios espaçados de palmo em palmo.

Grampos de metal.

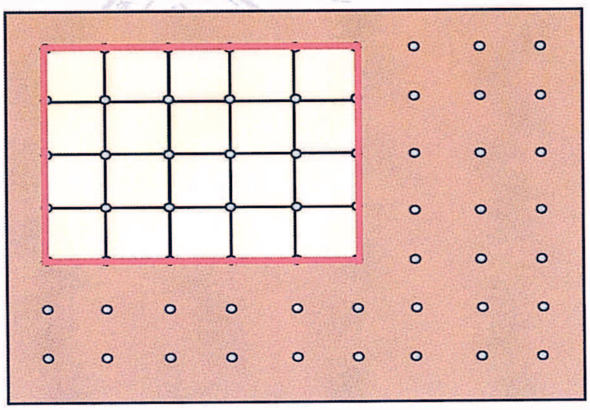
Fio.

Padrões em madeira do côvado e do palmo.

Padrões em madeira do palmo quadrado

Guia de resolução:

1. Delimitar sobre o tabuleiro de madeira a superfície por ela ocupada (que se supõe rectangular). Para tal, medir o comprimento e a altura da parede e recorrendo aos grampos metálicos e ao fio construir uma linha poligonal rectangular.
2. Preencher essa superfície com as placas de um palmo quadrado de área e contar quantas destas placas são necessárias. O número obtido expressa a medida da área da parede em palmos quadrados.



Como necessitamos de 24 palmos quadrados para preencher a superfície da parede e o custo de cada palmo quadrado é de 10 reais, obtém-se então como solução 200 reais.

O VESTIDO

Um alfaiate fez-me um vestido de um pano com 2 côvados de comprimento por quatro palmos de largura. Ora, eu tenho outro pano com 1 côvado de largura. Pergunto: quantos côvados deverá ter este pano para poder fazer-se outro vestido.

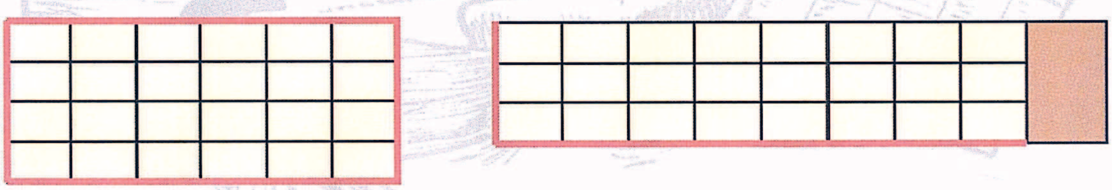
(Adaptado de Bento Fernandes, Tratado da Arte de Aritmética, 1555 in Almeida, 1994b, p. 80)

Materiais:

Dois panos: um deles com 2 côvados de comprimento por 4 palmos de largura e o outro com 1 côvado de largura.
Padrões em madeira do côvado e do palmo.
Padrões do palmo quadrado

Guia de resolução:

1. Com o auxílio dos padrões de comprimento identificar os panos referidos no problema.
2. Para se poder fazer outro vestido é necessário ter a mesma quantidade de pano, ou seja, os dois panos devem ter a mesma área.
   Medir a área do primeiro pano por contagem do número de unidades de área necessárias para recobrir a sua superfície.
3. Colocar esse número de placas sobre o segundo pano e medir o comprimento da superfície assim preenchida.



Obtém-se o como solução um comprimento de 8 palmos.

VOLUME

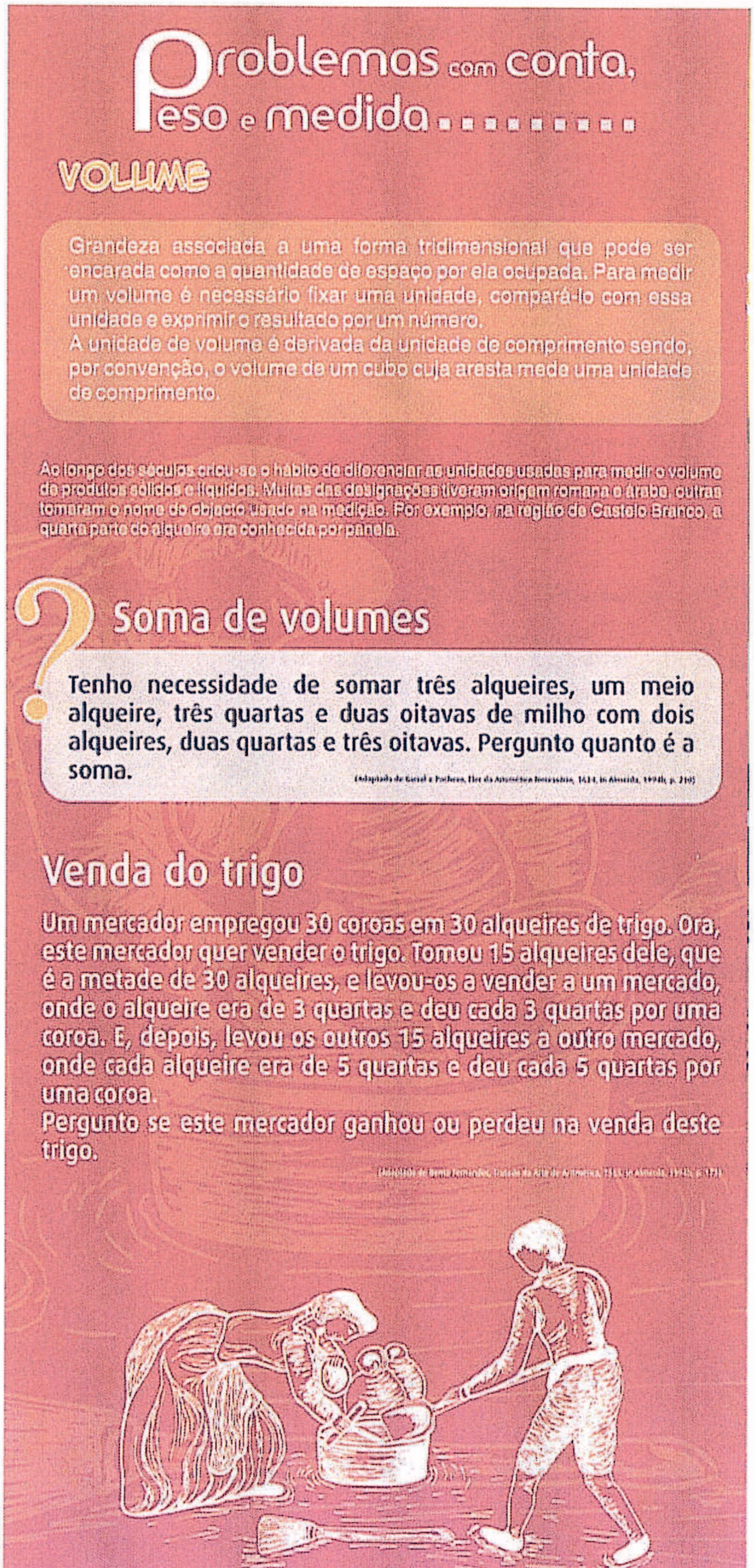


Figura 9. Painel do módulo Volume

SOMA DE VOLUMES

Tenho necessidade de somar três alqueires, um meio alqueire, três quartas e duas oitavas de milho com dois alqueires, duas quartas e três oitavas. Pergunto: quanto é a soma.

(Adaptado de Guiral e Pacheco, Flor da Arismética Necessária, 1624, in Almeida, 1994b, p. 210)

Materiais:

Padrões em madeira do *alqueire*, do *meio alqueire*, da *quarta* e da *oitava*

Rasoura

Milho

Guia de resolução:

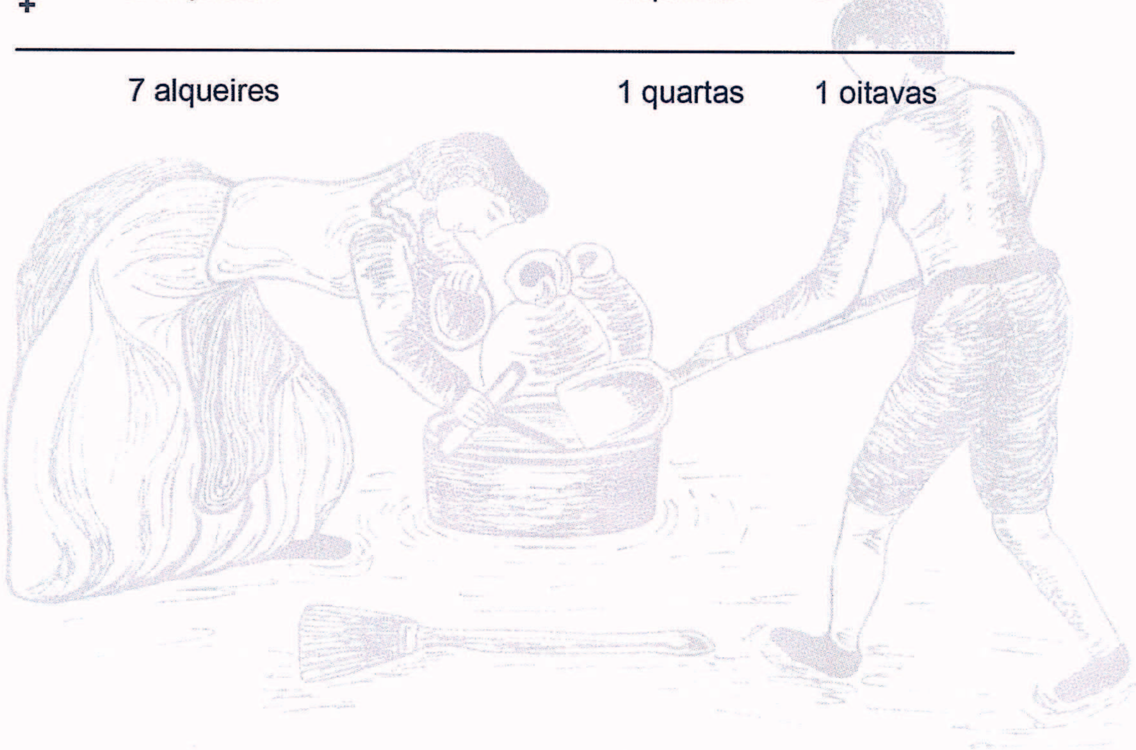
1. Comparação dos volumes interiores (capacidades) dos 3 recipientes, usando para o efeito milho:
   1 *alqueire* = 2 *meios alqueires* = 4 *quartas* = 8 *oitavas*

2. Trata-se de calcular uma soma de dois volumes, cada um deles expresso em mais do que uma unidade. Para tal, pode começar-se por adicionar as unidades da mesma espécie (*oitava* com *oitava*, *quarta* com *quarta*, etc.):

	3 *alqueires*	1 *meio alqueire*	3 *quartas*	2 *oitavas*
+	2 *alqueires*		2 *quartas*	3 *oitavas*
	5 *alqueires*	1 *meio alqueire*	5 *quartas*	5 *oitavas*

Dada a relação estabelecida entre os volumes interiores do *alqueire*, do *meio-alqueire*, da *quarta* e da *oitava*, obtém-se como solução 7 *alqueires*, 1 *quarta* e 1 *oitava* (Sugere-se que se comece pela unidade da mais ínfima espécie, isto é, determinando quantas quartas é possível fazer com 5 oitavas, efectuar o transporte do número de quartas e assim sucessivamente).

	3 alqueires	1 meio alqueire	3 quartas	2 oitavas
+	2 alqueires		2 quartas	3 oitavas
	7 alqueires		1 quartas	1 oitavas



VENDA DO TRIGO

Um mercador empregou 30 coroas em 30 alqueires de trigo. Ora este mercador quer vender o trigo. Tomou 15 alqueires dele, que é a metade de 30 alqueires, e levou-os a vender a um mercado, onde o alqueire era de três quartas e deu cada três quartas por uma coroa. E, depois, levou os outros 15 alqueires a outro mercado, onde cada alqueire era de cinco quartas e deu cada cinco quartas por uma coroa. Pergunto se este mercador ganhou ou perdeu na venda deste trigo.

(Adaptado de Bento Fernandes, Tratado da Arte de Aritmética, 1555, in Almeida, 1994b, p. 173)

Materiais:

Dois tabuleiros em madeira.

Pequenos blocos de madeira para simulação das quartas.

Guia de resolução:

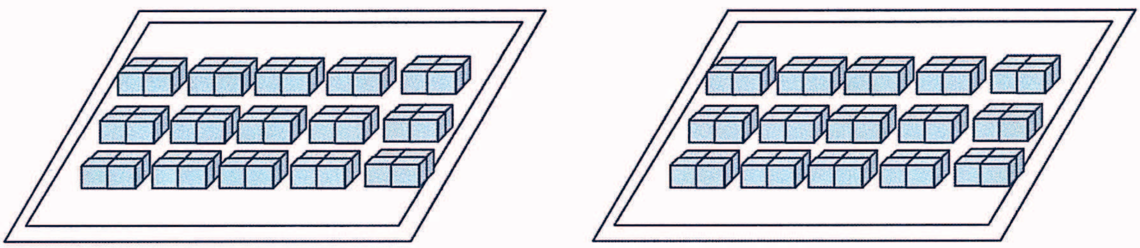
1. Recordar que 1 alqueire (comum) é igual a 4 quartas (problema anterior) e chamar a atenção que o problema faz referência a dois alqueires diferentes desse. Um é igual a 3 quartas e pode ser chamado de alqueire pequeno (porquê), o outro é igual a 5 quartas e pode ser chamado de alqueire grande.

   1 alqueire = 4 quartas

   1 alqueire pequeno = 3 quartas

   1 alqueire grande = 5 quartas

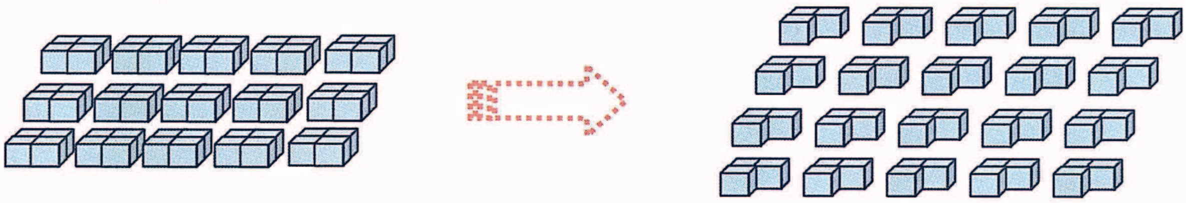
2. Recorrendo ao material manipulativo simular em cada um dos tabuleiros os 15 alqueires que o mercador levou para cada mercado, isto é, 15 grupos de 4 quartas.



3. Determinar de seguida, para cada um dos mercados, quantos alqueires pequenos pode o mercador fazer. Ou seja, pretende-se saber quantos grupos de 3 quartas pode fazer no primeiro mercado e quantos grupos de 5 quartas pode fazer no segundo.

Assim, no mercado A:

15 alqueires

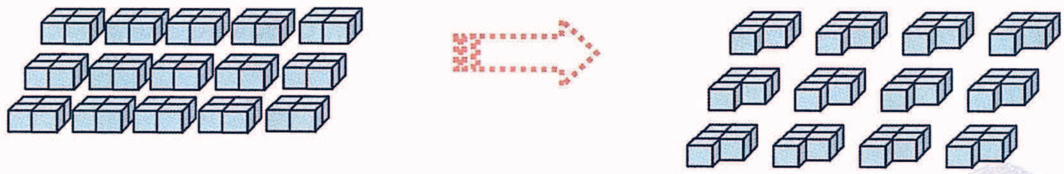


20 alqueires pequenos

Neste mercado, consegue com a venda 20 coroas.

No mercado B:

15 alqueires



12 alqueires grandes

Neste mercado, consegue com a venda 12 coroas.

Portanto, o mercador ganha na venda do trigo 2 coroas.

CAPACIDADE

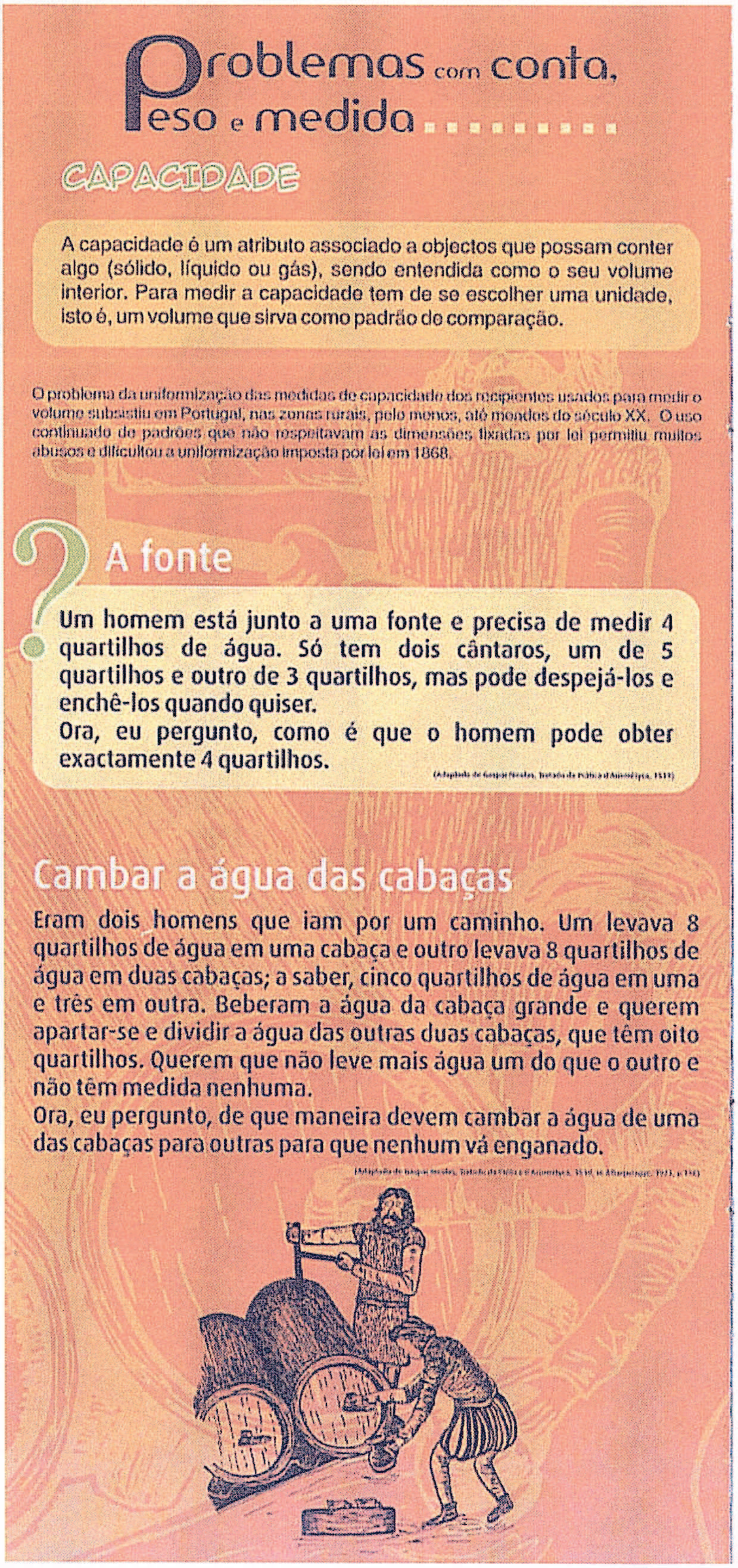


Figura 10. Painel do módulo Capacidade

A FONTE

Um homem está junto a uma fonte e precisa de medir 4 quartilhos de água. Só tem dois cântaros, um de 5 quartilhos e outro de 3 quartilhos, mas pode despejá-los e enchê-los quando quiser.
Ora eu pergunto: como é que o homem pode obter exactamente 4 quartilhos?

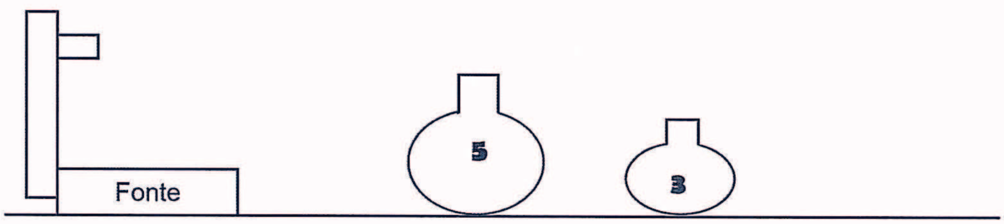
(Adaptado de Gaspar Nicolas, Tratado da Prática d'Arismétyca, 1519)

Materiais:

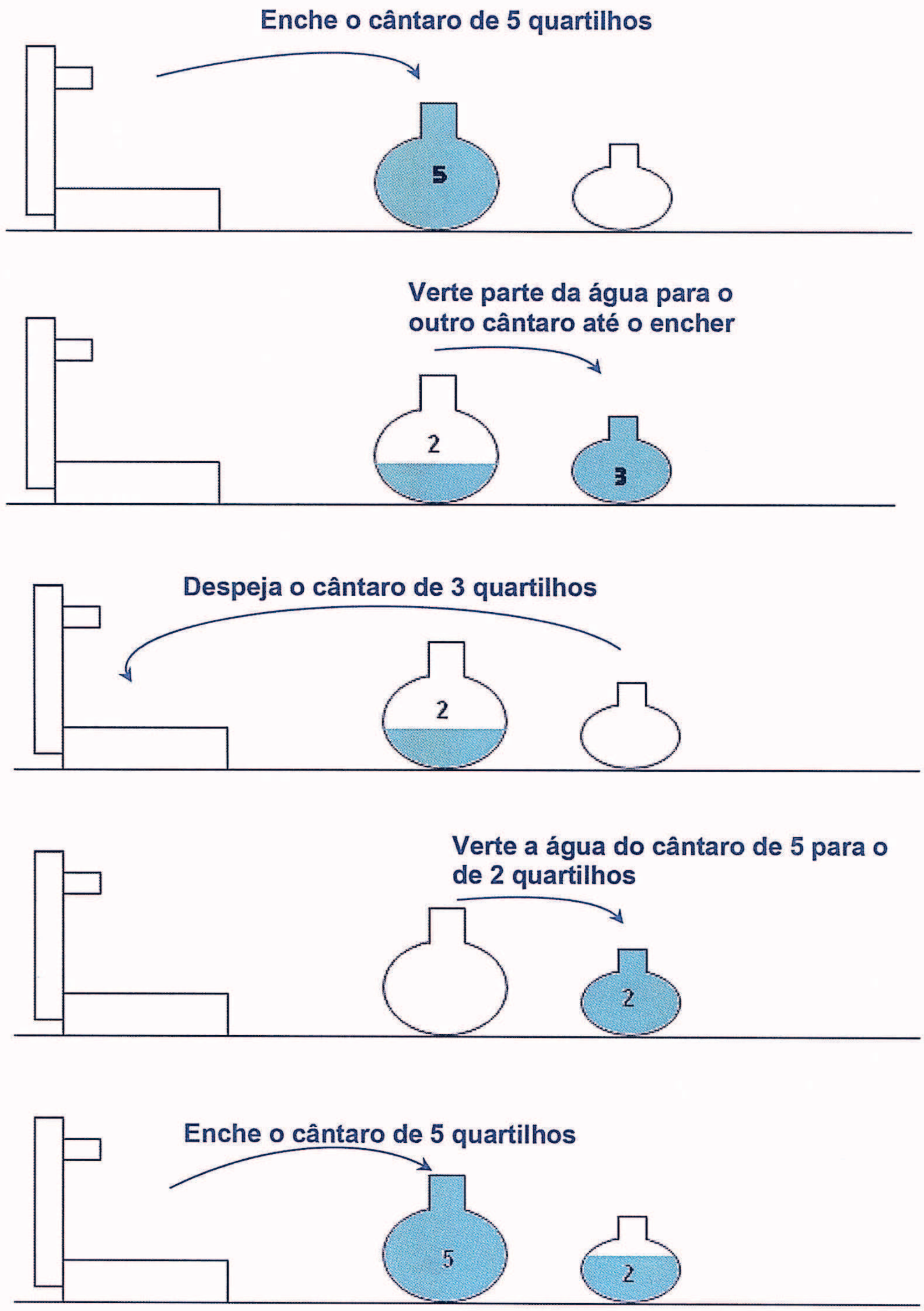
Dois cântaros em cobre: um com capacidade de 5 quartilhos e o outro com a capacidade de 3 quartilhos.
Recipientes com água
Tabuleiros
Lápis de cor
Folha de registo em que deve ser indicado em cada momento o volume de água contido em cada um dos cântaros.

Guia de resolução:

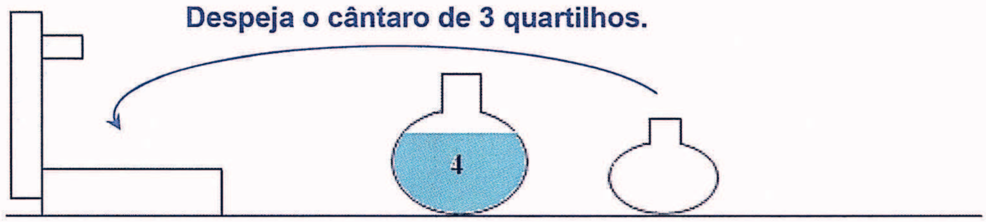
1. A solução deverá ser encontrada por transferência da água entre os cântaros e entre estes e a fonte (simulada por um recipiente com água). Após cada mudança de água ou despejo de água do cântaro para a «fonte», deve ser assinalado na folha de registo os volumes de água existentes em cada momento nos cântaros.



Uma possível solução pode obtida através da seguinte sequência de mudanças (os numerais indicam o volume de água, em quartilhos, contido em cada cântaro):




Verte parte da água do cântaro de
5 para o de 3, até o encher
4
3


Despeja o cântaro de 3 quartilhos.
4

CAMBAR A ÁGUA DAS CABAÇAS

Eram dois homens que iam por um caminho. Um levava 8 quartilhos de água num cântaro e outro levava 8 quartilhos de água em dois cântaros, a saber, cinco quartilhos de água num e três no outro. Beberam a água do cântaro grande que tem 8 quartilhos e querem-se apartar e dividir a água dos outros dois cântaros, cinco num e três no outro. Querem que nenhum deles leve mais água do que o outro, a saber, que cada um leve quatro quartilhos e não têm medida nenhuma. Ora eu pergunto: de que maneira devem cambar a água de um dos cântaros para os outros para que nenhum vá enganado.

(Adaptado de Gaspar Nicolas, Tratado da Prática d'Arismétyca, 1519, in Albuquerque, 1973, p.118)

Materiais:

Três cântaros em cobre: um com capacidade de 8 quartilhos, 5 quartilhos e o outro com a capacidade de 3 quartilhos.

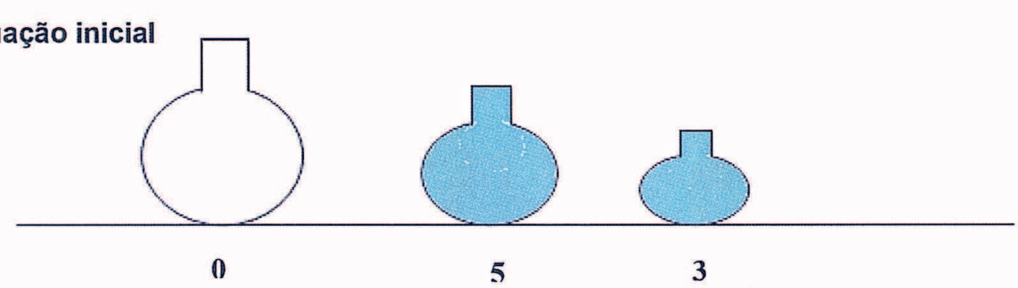
Recipientes com água.

Folha de registo em que deve indicado em cada momento o volume de água contido em cada um dos cântaros.

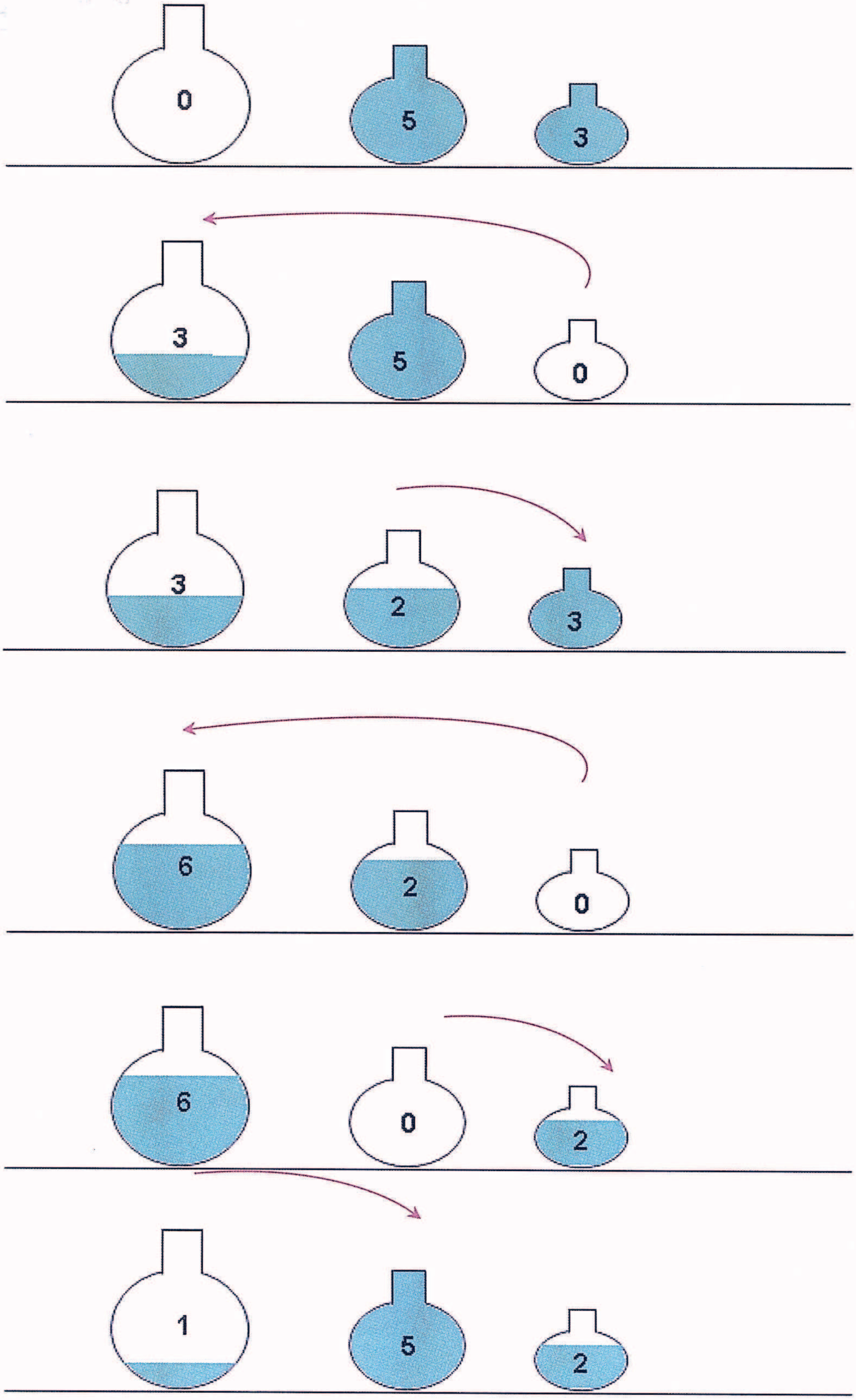
Guia de resolução:

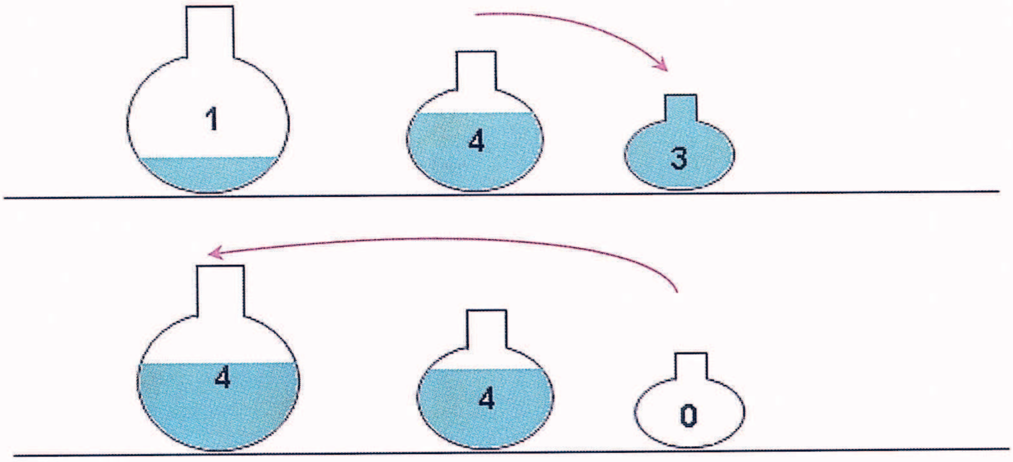
1. A solução deverá ser encontrada por transferência da água entre os cântaros. Sugere-se o registo dos volumes de água existentes, em cada momento, em cada um dos cântaros. A construção de uma representação figurativa dos três cântaros ou de uma tabela são possibilidades a ter em conta no registo de todas as mudanças de água de um cântaro para outro e dos volumes, em quartilhos, obtidos em cada caso.

Situação inicial



2. Uma possível solução seria a obtida través da seguinte sequência de mudanças (os numerais indicam o volume de água contida em cada um dos cântaros):

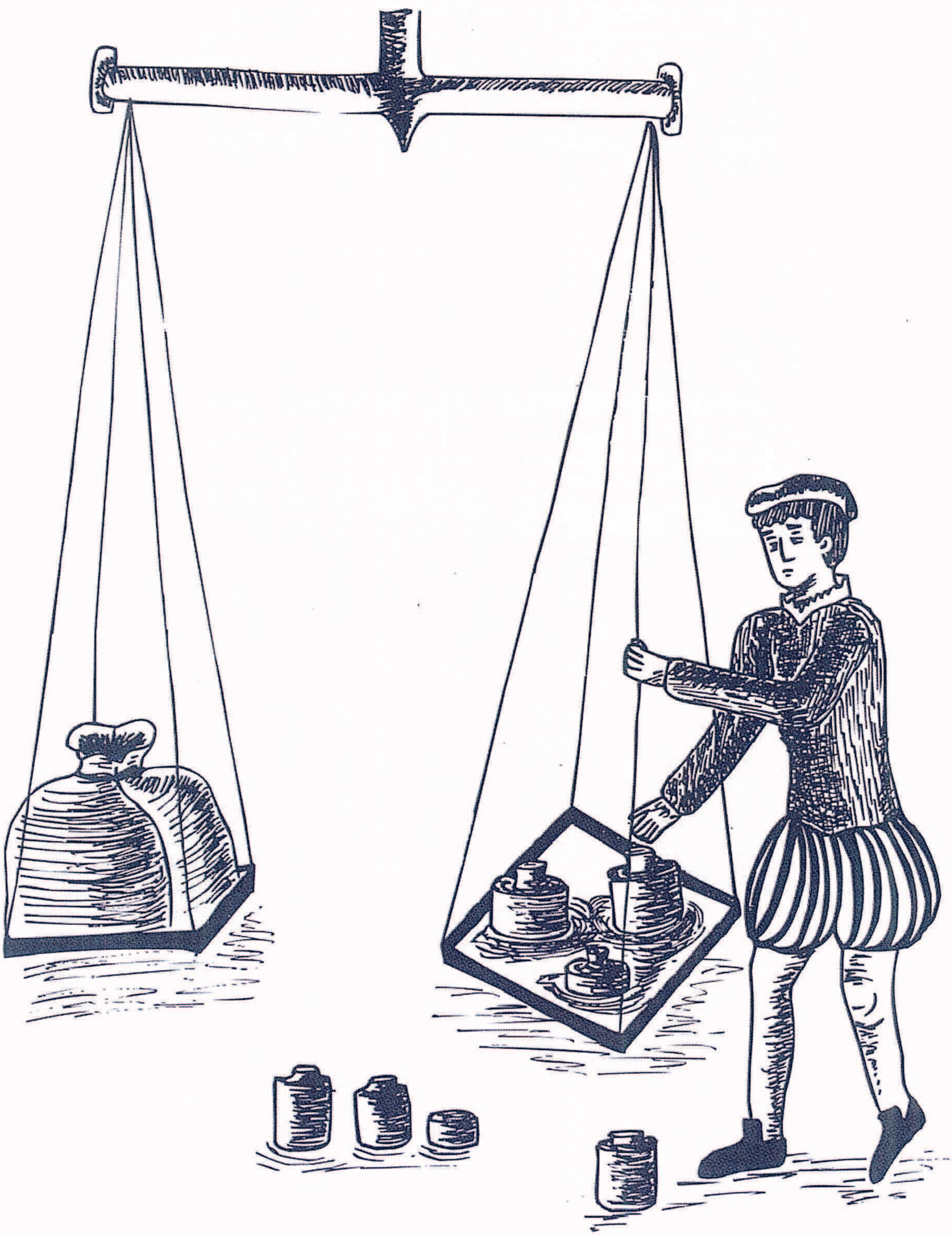




Ou na forma de tabela:

8 Quartilhos	5 Quartilhos	3 Quartilhos
0	5	3
3	5	0
3	2	3
6	2	0
6	0	2
1	5	2
1	4	3
4	4	0

MASSA



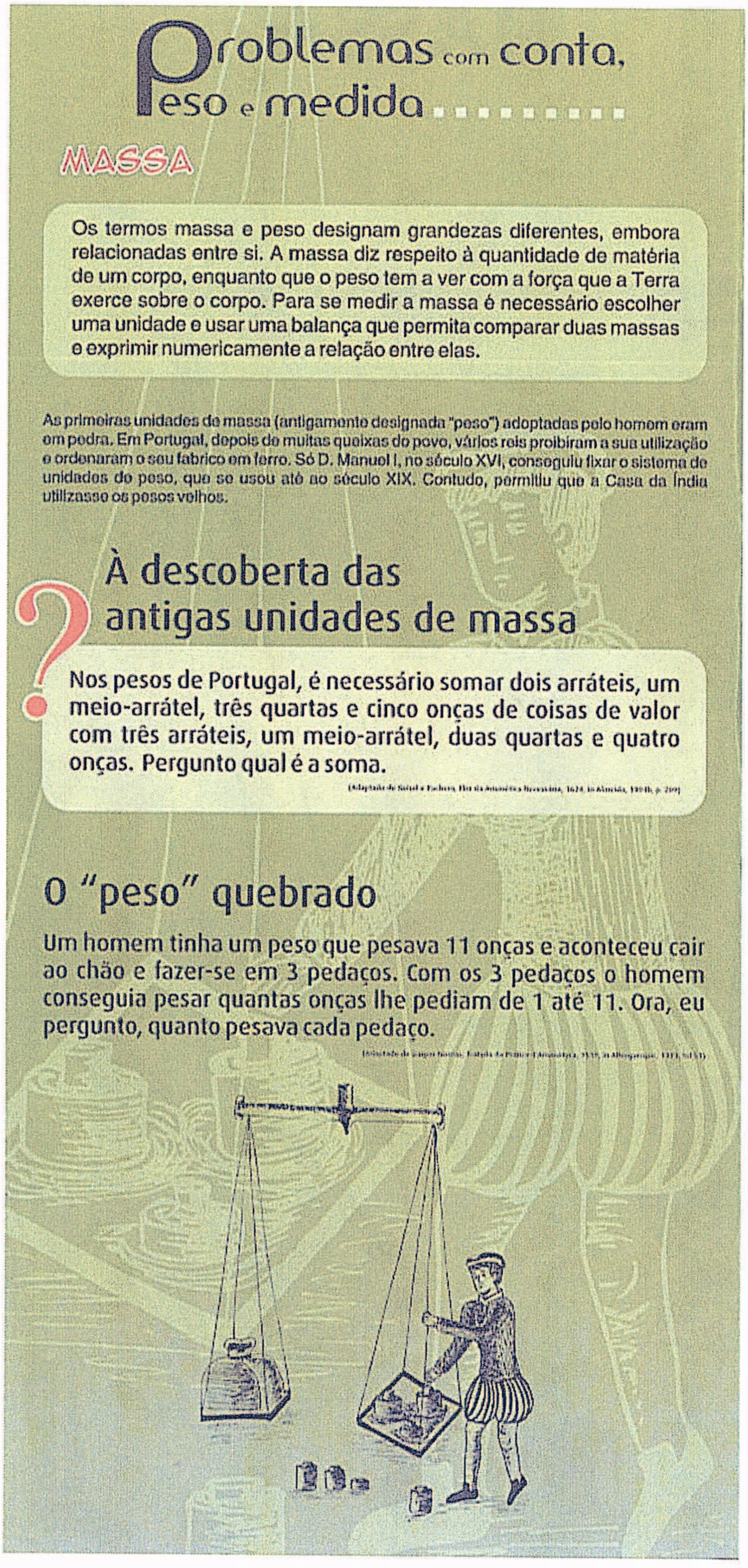


Figura 11. Painel do módulo Massa

À DESCOBERTA DAS ANTIGAS UNIDADES DE MASSA

Nos pesos de Portugal, é necessário somar dois arráteis, um meio-arrátel, três quartas e cinco onças de coisas de valor com três arráteis, um meio-arrátel, duas quartas e quatro onças. Pergunto: qual é a soma?

(Adaptado de Guiral e Pacheco, Flor da Arismética Necessária, 1624, in Almeida, 1994b, p. 209)

Materiais:

Padrões do arrátel, do meio arrátel, da quarta, oitava e da onça.

Balança de pratos

Guia de resolução:

1. Sugere-se a identificação de todas as unidades de massa referidas no problema: arrátel, meio arrátel, quarta e oitava. Por comparação e recorrendo à balança de pratos, estabelecer relações entre elas. Por exemplo:

1 arrátel = 2 meios arráteis	1 meio arrátel = 2 quartas
1 arrátel = 4 quartas	1 quarta = 2 oitavas
1 arrátel = 8 oitavas	1 oitava = 2 onças
1 arrátel = 16 onças	

2. Para o cálculo da soma das duas massas (expressas em unidades de diferentes espécies) sugere-se que se comece por calcular a soma das unidades das diferentes espécies:

	2 arráteis	1 meio-arrátel	3 quartas	5 onças
+	3 arráteis	1 meio-arrátel	2 quartas	4 onças
	5 arráteis	2 meios-arráteis	5 quartas	9 onças

3. Há agora que entrar em linha de conta com as relações entre as diferentes unidades. A redução das unidades processa-se a partir da de mais ínfima espécie, isto é, a onça. Por comparação directa ou fazendo uso da relação inicialmente estabelecida, conclui-se que a soma pedida é igual a 7 arráteis, 1 meio-arrátel, 1 quarta e 1 onça:

	2 arráteis	1 meio-arrátel	3 quartas	5 onças
+	3 arráteis	1 meio-arrátel	2 quartas	4 onças
	7 arráteis	1 meios-arrátel	1 quarta	1 onça

O PESO QUEBRADO

Um homem tinha um peso que pesava 11 onças e aconteceu cair ao chão e fazer-se em três pedaços. Com os três pedaços o homem conseguia pesar quantas onças lhe pediam de 1 até 11. Ora eu pergunto quanto pesava cada pedaço.

(Adaptado de Gaspar Nicolas, Tratado da Prática d'Arismétyca, 1519, fol.51)

Materiais:

«Peso» com massa de 11 onças

Vários pedaços com massas de 1 a 11 onças.

Sacos de «coisas de valor» com massas de 1 a 11 onças.

Balança de pratos

Guia de resolução:

1. O problema requer a descoberta das massas dos três pedaços do «peso» que caiu ao chão e se partiu. Tal pode ser feito com recurso à balança. Num dos pratos coloca-se o «peso» de 11 onças e no outro conjuntos de três massas que permitam equilibrar a balança. Do ponto de vista aritmético tal traduz-se em obter todas as decomposições de 11 como uma soma de três parcelas (inteiras).

11 = 1 + 1 + 9	11 = 2 + 2 + 7	11 = 3 + 3 + 5
11 = 1 + 2 + 8	11 = 2 + 3 + 6	11 = 3 + 4 + 4
11 = 1 + 3 + 7	11 = 2 + 4 + 5	
11 = 1 + 4 + 6		
11 = 1 + 5 + 5		

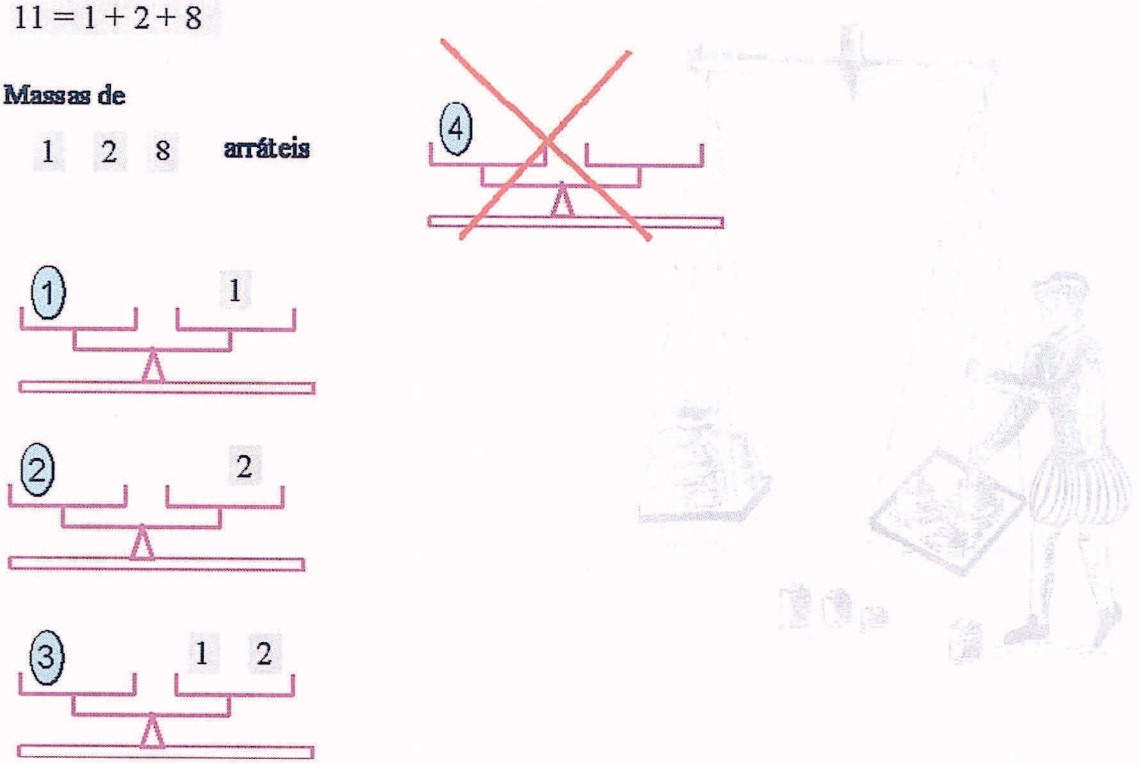
2. Há agora que averiguar se os valores das massas obtidas em cada decomposição nos permitem pesar os sacos de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11 onças

Por exemplo, se a massa dos três pedaços for de 1, 2 e 8 onças, não é possível pesar um saco de 4 onças (ver figura).

$11 = 1 + 2 + 8$

Massas de

1 2 8 **arráteis**

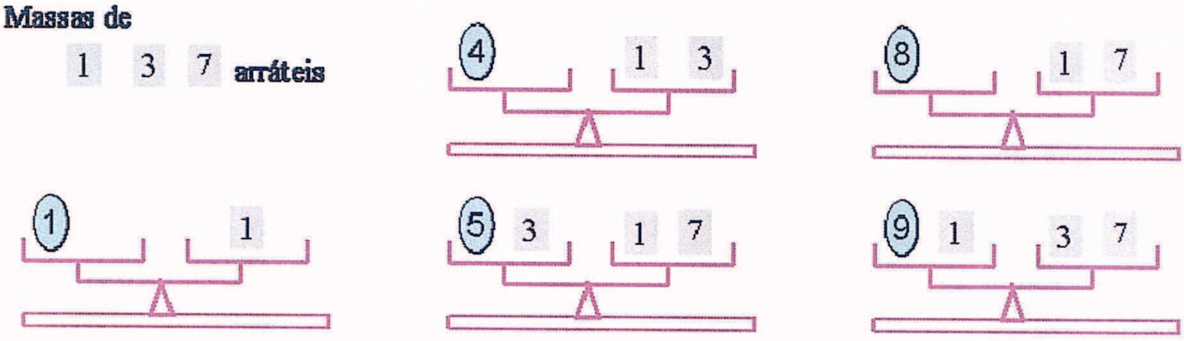


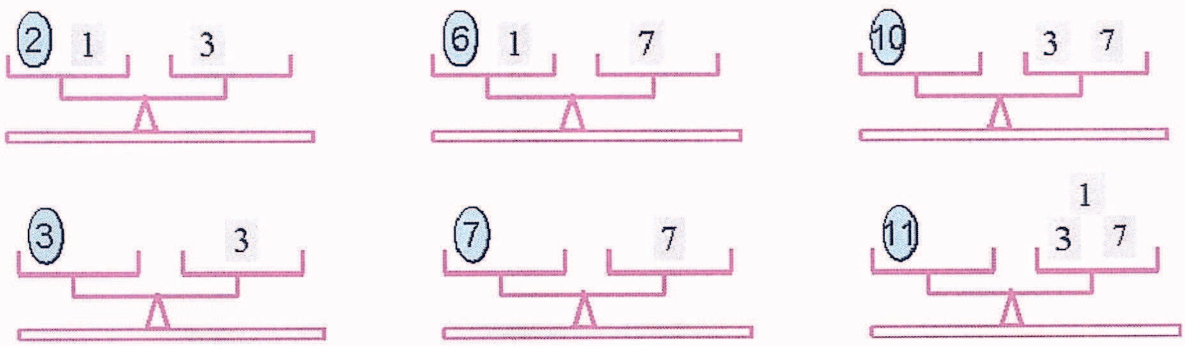
Em contrapartida, se a massa dos três pedaços for de 1, 3 e 7 onças é possível pesar todos os sacos de 1 a 11 onças (ver figura):

$11 = 1 + 3 + 7$

Massas de

1 3 7 **arráteis**





Obtemos assim uma solução para o problema. Haverá outras? Há que testar.

As possíveis decomposições e as massas que os elementos de cada terno não permitem medir estão sintetizadas na seguinte tabela:

Decomposição	Massas que esta decomposição não permite pesar
1 + 1 + 9	3 onças
1 + 2 + 8	4 onças
1 + 3 + 7	Permite pesar coisas de valor com massas de 1 a 11 onças
1 + 4 + 6	8 onças
1 + 5 + 5	2 onças
2 + 2 + 7	1 onças
2 + 3 + 6	10 onças
2 + 4 + 5	8 onças
3 + 3 + 5	1 onças
3 + 4 + 4	2 onças

Portanto, os três pedaços pesam 1, 3 e 7 onças e esta solução é única.

BIBLIOGRAFIA

Gomes, J. R. da C. (1940). A introdução do sistema métrico e a evolução dos serviços de pesos e medidas. In *Anuário de Pesos e Medidas*, nº 1 (pp.31-54). Lisboa: Ministério da Economia, Repartição de Pesos e Medidas, Editorial Império.

Jorge, F. R. (2008). Formação Inicial de Professores do Ensino Básico:Um percurso centrado na história da matemática. Dissertação de Doutoramento (não publicada). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Lopes, J. B. (1849). Memória sobre a Reforma dos Pesos e Medidas em Portugal segundo o Systema Métrico – Decimal. Lisboa: Imprensa Nacional.

Oliveira Marques, A. H. (1992). Pesos e Medidas. In Joel Serrão (DIr.), *Dicionário de História de Portugal*, Volume V. Porto: Livraria Ferreirinha.

Marques de Almeida, A. A. (1994a). *Aritmética como Descrição do Real (1519-1679)*, Volume I. Lisboa: Imprensa Nacional, Casa da Moeda.

Marques de Almeida, A. A. (1994b). *Aritmética como Descrição do Real (1519-1679),* volume II. Lisboa: Imprensa Nacional, Casa da Moeda.

Nicolas, G. (1519). *Tratado da Prática D' Arismétyca*. Edição fac-similada. Porto: Livraria Civilização Editora,1963.

Guiral e Pacheco, A. (1624). *Flor da Arismética Necessária*. Lisboa: Geraldo da Vinha.

Trigoso, S. F. (1815). Sobre os Pesos e Medidas Portuguezas, e sobre a Introdução do Systema Metro-Decimal. In *Memórias Económicas da Academia Real das Sciencias de Lisboa para o Adiantamento da Agricultura, das Artes e da Indústria em Portugal, e suas Conquistas, Tomo V* (pp.336-411). Lisboa: Typografia da Academia Real das Sciencias.