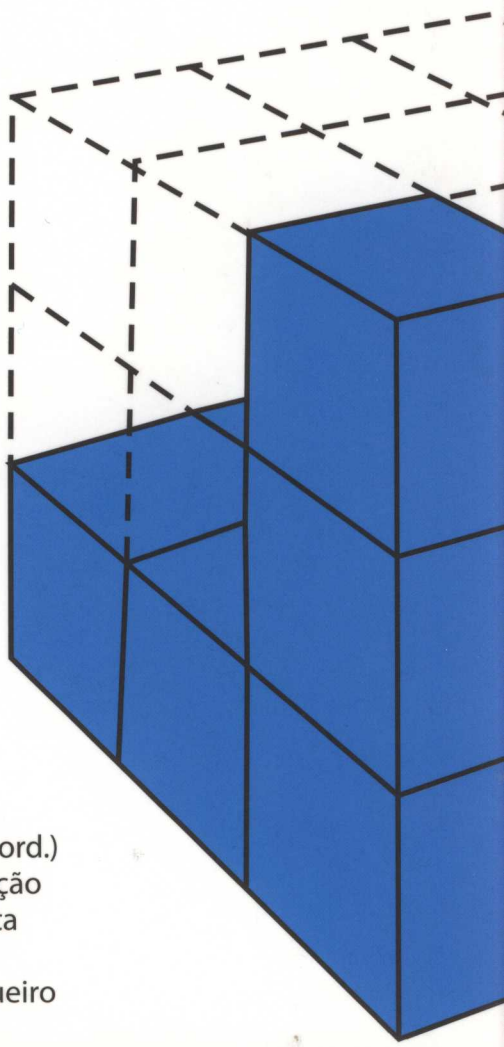
Escola Superior de Educação de Castelo Branco
25833
Aprender matemática nos primeiros anos : algumas propostas de tarefas
51 Apr

Aprender Matemática nos Primeiros Anos

Algumas Propostas de Tarefas



Paulo Afonso (Coord.)
António Conceição
Francisco Costa
José Filipe
Mafalda Serrasqueiro

Instituto Politécnico de Castelo Branco
Escola Superior de Educação

APRENDER MATEMÁTICA NOS PRIMEIROS ANOS

– ALGUMAS PROPOSTAS DE TAREFAS –

Paulo Afonso (coord.)
António Conceição
Francisco Costa
José Filipe
Mafalda Serrasqueiro

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO
CASTELO BRANCO
25833/2011
BIBLIOTECA
OFERTA

POPH POTENCIAL HUMANO
QREN QUADRO DE REFERÊNCIA ESTRATÉGICO NACIONAL
UNIÃO EUROPEIA Fundo Social Europeu

Ficha técnica

TÍTULO

• Aprender Matemática nos Primeiros Anos - Algumas Propostas de Tarefas

COORDENADOR INSTITUCIONAL

• Paulo Afonso

COLABORADORES

• António Conceição

• Francisco Costa

• José Filipe

• Mafalda Serrasqueiro

DESIGN E PRODUÇÃO FINAL

• RVJ, Editores, Lda

• Carine Pires

IMPRESSÃO

Gráfica Almondina

TIRAGEM

500 exemplares

ISBN: 978-972-99849-7-6

DEPÓSITO LEGAL: 271 102 /08

PROPRIEDADE

• Instituto Politécnico de Castelo Branco - Janeiro 2008

EDIÇÃO

Instituto Politécnico de Castelo Branco

5.1.2 – Comparação 72
5.1.3 – Seriação 73
5.1.4 – Ordenação 73
5.1.5 – Transitividade 74
5.1.6 – Correspondência termo a termo 74
6 – Composição e decomposição de números 75
7 – Adições envolvendo o Material Cuisenaire 77
8 – Padrões envolvendo o Material Cuisenaire 79
9 – Contagem envolvendo o Material Cuisenaire 80
10 – Situações problemáticas envolvendo o material Cuisenaire 81
11 – Estudo do conceito "parte de" envolvendo o Material Cuisenaire 82
12 – Estudo do conceito "fracções equivalentes" envolvendo o Material Cuisenaire 84
13 – Bases 86
14 – Operação Subtracção 90
14.1 – Algoritmos da Subtracção 90
15 – Operação Multiplicação 92
15.1 – Diversas interpretações do conceito de multiplicação 92
15.2 – Tabuada da multiplicação 94
15.3 – Algoritmo da multiplicação egípcia 94
15.4 – Algoritmo da multiplicação russa 95
15.5 – Outro algoritmo da multiplicação 95
15.6 – Algoritmo Hindu-árabe ou de Gelosia 96
15.7 – Multiplicação através das Barras de Napier 96
16 – Operação Divisão 98
16.1 – Interpretações da Divisão 98
16.1.1 – Divisão por medição 98
16.1.2 – Divisão por partição 99
16.1.3 – Divisão pelo processo multiplicativo 99
16.2 – Algoritmo da divisão 100
16.3 – Divisão na base cinco 103
17 – Números racionais 107
17.1 – Várias concepções dos números racionais 109
17.1.1 – Concepção de "parte de" 109
17.1.2 – Concepção de medida 112
17.1.3 – Concepção de quociente 113

23.1.2 – Volume do cubo 175
23.1.3 – Volume do cilindro 175
23.1.4 – Volume da pirâmide 176
23.1.5 – Volume do cone 176
23.1.6 – Volume da esfera 177
24 – Pavimentações 182
24.1 – Pavimentações envolvendo blocos padrão 183
24.1.1 – Blocos padrão 186
25 – Matemática recreativa 190
Nota final 193
Bibliografia recomendada 195

se desencadeassem espaços para a concretização de investigação-acção que teve como consequência a possibilidade de se proporcionar condições para um bom desenvolvimento profissional dos professores/formandos. Todas estas actividades formativas e pedagógicas vieram culminar em Seminários, realizados na ESECB no final de cada ano lectivo, onde se trocaram as experiências e as aprendizagens efectuadas ao longo do respectivo ano. Contudo, convém realçar, pela importância, que a maioria das Comunicações foram efectuadas pelos professores/formandos o que tornou estes eventos mais «autênticos», dado que foram o palco de vivências realizadas na 1ª pessoa, o que também denota a entrega, a satisfação e a alegria em terem participado activamente neste Programa Nacional.

A Direcção da ESECB recebeu este Programa de Formação como sendo «seu», mas agora, fruto de toda a dinâmica que gerou junto da Coordenação Institucional e dos Professores/Formandos e das suas Escolas/Agrupamentos, constata-se que é um programa de «TODOS» aqueles que nele participam!

Henrique Gil

(Director da ESECB)

1 – Introdução

Esta publicação pretende evidenciar o trabalho desenvolvido pela equipa de formadores do Programa de Formação Contínua em Matemática para professores do 1º Ciclo do Ensino Básico e para Professores de Matemática do 2º Ciclo do Ensino Básico. O mesmo diz respeito aos anos lectivos de 2005/2006 e 2006/2007, sendo que a formação ao nível do 2º Ciclo do Ensino Básico só ocorreu neste último ano.

O texto está estruturado da seguinte forma: inicialmente fazemos referência ao tema da resolução de problemas por ter sido uma forte aposta da equipa de formadores em conceptualizar a formação nesse contexto. Descrevem-se alguns conceitos inerentes ao tema, como seja o de exercício, problema, resolução de problemas, tipos de problemas, modelos de resolução de problemas e estratégias de resolução.

De seguida apresentamos um tema, igualmente transversal a toda a formação que implementámos, que é o da metacognição. Fazemo-lo, porque foi ênfase da formação promover o pensar sobre o pensar, dotando os formandos com maiores capacidades reflexivas acerca da sua forma de pensar.

Posteriormente abordamos o tema das investigações matemáticas e das conexões matemáticas, por ter sido um tema privilegiado ao nível do 2º ano da formação do 1º Ciclo do Ensino Básico.

Por fim apresentamos um conjunto vasto de temas que mais não são do que uma compilação dos materiais teórico-práticos que concebemos no âmbito das sessões de formação presencial. Todas elas estão disponibilizadas no site expressamente concebido para esta Programa a nível regional, cujo endereço electrónico é o seguinte: http://educamat.ese.ipcb.pt/0607/

2 - Resolução de problemas

Nesta secção tentamos definir os conceitos de problema e de resolução de problemas. Abordamos vários tipos de problemas, bem como alguns modelos de resolução, enfatizando as estratégias heurísticas. Para além disso, salientamos a necessidade de formar os professores nesta área da Matemática.

2.1 – Exercício, problema e resolução de problemas

Relativamente ao conceito de exercício, recorremos à definição de Palhares (1997), que diz o seguinte:

> "Um exercício é constituído por um conjunto de informações sobre uma situação e sobre uma transformação que é requerida, existe um conhecimento preciso (explícito no enunciado ou implícito na apresentação) sobre qual o procedimento a adoptar para obter uma solução" (p. 167).

Por sua vez, Pérez (1994) também refere que uma situação é entendida como sendo um exercício, se o aluno não tiver que tomar nenhuma decisão complicada acerca dos processos a utilizar para obter uma solução. Refere-se, concretamente, ao facto de o aluno ter que aplicar uma fórmula, de forma quase tácita, após ter sido acabada de explicar pelo professor.

Este autor apresenta dois tipos de exercícios. Num primeiro grupo coloca as situações que exijam a repetição de uma determinada técnica exposta previamente pelo docente. Num segundo grupo coloca as situações que impliquem não só a resposta a questões muito simples e rotineiras, mas que estejam associadas a determinado contexto real, como seja o seguinte exemplo: "[...] propomos que nos diga quantos animais há numa quinta, havendo sete galos e cinco galinhas" (Pérez, 1994, p. 61). Neste caso concreto, para além de se exigir do aluno a operação 7 + 5, exige-se que ele a associe a um caso concreto da realidade quotidiana.

Por sua vez, relativamente ao conceito de problema, concordamos com a definição proposta por Kantowski (1974):

> "Um indivíduo está perante um problema quando encontra uma questão à qual não consegue responder ou uma situação que não é capaz de resolver usando o conhecimento imediatamente disponível. Tem que pensar num caminho de combinação da informação de que dispõe, no sentido de poder chegar à solução do problema" (p.1).

Nesta linha de pensamento, Guzmán (1999) refere que um problema é um autêntico desafio, pois sabemos mais ou menos onde queremos chegar mas desconhecemos o caminho para chegar a esse fim.

Recorrendo à comparação feita por Gaulin (1982), Callejo (1990, p. 11) distingue os conceitos: exercício e problema, através dos seguintes aspectos:

Exercício		Problema
1. Através de um golpe de vista, vê-se de imediato ou quase, em que consiste a questão e qual é o modo de se poder resolvê-la [...]		1. À primeira vista não se sabe como atacar o problema e resolvê-lo; por vezes, inclusivamente, não se afigura claramente em que consiste o problema.
2. O objectivo principal do exercício é aplicar, de forma rotineira, conhecimentos e mecanismos já conhecidos e fáceis de identificar [...]		2. Para resolver o problema não é suficiente aplicar uma regra ou uma "receita" de forma rotineira mas, sim, pela força da pesquisa e da intuição, há que se elaborar uma solução, indo-se ao mais fundo dos conhecimentos e experiências anteriores [...]
3. Regra geral, a resolução de um exercício exige pouco tempo.		3. Regra geral, a resolução de um problema exige tempo.
4. Não é usual ter-se em linha de conta os aspectos afectivos que comporta a resolução de um exercício: motivação para resolvê-lo, interesse do exercício, etc.		4. A resolução de um problema exige bastante energia e afectividade: frustração inicial, vontade de resolvê-lo, perseverança na investigação, etc.
5. Regra geral são questões fechadas.		5. O problema pode ser mais ou menos aberto ou fechado.
6. Os exercícios proliferam nos livros de texto.		6. Os problemas são escassos nos livros de texto.

Segundo Polya (1981), para que uma pessoa esteja perante um problema, necessita de agir conscientemente e de modo apropriado por forma a "atacar" uma meta clara, mas dificilmente alcançável. Este autor acrescenta que para que haja problema, este tem que gerar dificuldade em quem o tente resolver. Desta última frase podemos concluir que uma mesma situação pode ser problema para um indivíduo e não passar de mero exercício para outro (Pérez e Pozo, 1994; Abrantes, 1989). Depende, pois, se a situação é novidade ou não, se se conhece, ou não, algum algoritmo imediato de resposta ou se gera no resolvedor algum tipo de dificuldade.

Na mesma linha de pensamento de Polya, problema é caracterizado por Lester e Mau (1993) como sendo uma tarefa para a qual: "a) o indivíduo ou o grupo confrontado com o problema deseja ou tem a necessidade de obter uma solução, b) não há um procedimento pronto que garanta ou determine a solução e c) o indivíduo ou o grupo deve tentar encontrar a solução" (p. 232).

No que diz respeito ao conceito de resolução de problemas, já em 1977, o National Council of Supervisors of Mathematics (NCSM) o entendia como sendo "o processo de aplicação do conhecimento previamente adquirido em situações novas e pouco usuais" (NCSM, 1977, citado por Branca, 1980, p. 14).

Passados aproximadamente dez anos sobre esta definição, Charles (1985), citado por Fernandes (1988), afirma que a resolução de problemas "é o processo de (1) compreender o problema, (2) seleccionar ou coligir os dados necessários para encontrar a solução, (3) escolher e levar a cabo uma ou mais estratégias de resolução, (4) responder à(s) questão(ões) colocada(s) pelo problema e (5) avaliar se a resposta é razoável" (p. 7).

2.2 - Tipos de problemas

Uma primeira preocupação dos estudiosos sobre a resolução de problemas, e dos docentes, é conhecerem os atributos dos bons problemas. De acordo com Krulik e Rudnick (1987), um bom problema (a) implica que a sua solução envolva a compreensão de algum conceito matemático específico ou a utilização de determinada ferramenta matemática, (b) pode ser generalizado ou estendido a outras situações e, (c) conduz a uma variedade de soluções.

Para Polya (1981) é importante que se conheçam vários tipos de problemas para que, aquando da questão "que tipo de problema é este?" (p. 118), se possa mais facilmente encontrar um caminho de resolução adequado. Este autor associa sempre à questão anterior, esta outra questão: "o que é que se pode fazer com este tipo de problemas?" (p. 118). Ele sugere uma classificação de problemas baseada no tipo de resolução. Assim, um primeiro tipo de problemas é *problemas para descobrir.* O objectivo deste tipo de problemas é o de encontrar determinado objecto, o desconhecido do problema. Outro tipo de problemas sugerido por Polya (1981) é o dos *problemas para provar*, que como o nome indica, são problemas onde o resolvedor é solicitado a provar/demonstrar algo.

Na mesma linha de pensamento, Pérez e Pozo (1994) sugerem a existência de dois tipos de problemas. Por uma lado salientam os problemas de carácter dedutivo, como por exemplo os que requerem a demonstração de uma fórmula matemática. Por outro lado salientam os problemas de carácter indutivo como, por exemplo, os que implicam o estabelecer regularidades no comportamento de entidades matemáticas.

Por sua vez, House, Wallace e Johnson (1983), citados por Blanco (1993), apresentam uma definição para aquilo que designam ser um problema matemático. Referem que se trata de uma "situação que supõe uma meta a ser alcançada, existem obstáculos para alcançar esse objectivo, requer deliberação e parte-se do desconhecimento do algoritmo útil para a sua resolução. A situação é normalmente quantitativa ou requer técnicas matemáticas para a sua solução [...]" (House, Wallace e Johnson, 1983, citados por Blanco, 1993, p. 28).

Tanto Polya (1981) como Pérez e Pozo (1994) e House, Wallace e Johnson (1983), estes últimos, citados por Blanco (1993), indiciam que os problemas têm uma relação directa com o

domínio de conteúdos matemáticos por parte dos potenciais resolvedores. Contudo, é opinião de vários investigadores que a resolução de problemas deveria ser trabalhada recorrendo-se a problemas não rotineiros, não directamente dependentes de conteúdos estritamente matemáticos, isto é, problemas diversos que também se relacionassem com aspectos da vida quotidiana dos resolvedores (Lester, 1985; Buchanan, 1987 e Fortunato et al., 1991).

Charles et al. (1987) sugerem a existência de pelo menos quatro tipos de problemas: "problemas de um passo, problemas de dois ou mais passos, problemas de processo e problemas de aplicação" (p. 11).

Para estes autores, os *problemas de um passo* são aqueles que podem resolver-se através de uma das operações básicas da aritmética. Por isso, em termos de estratégia a utilizar, aquilo que os resolvedores têm que fazer é escolher a operação aritmética adequada (Charles et al., 1987).

Os *problemas de dois ou mais passos* são os que podem resolver-se através de duas ou mais operações básicas da aritmética. Em termos de estratégia a utilizar, tal como no tipo de problemas anterior, o resolvedor terá que saber escolher as operações aritméticas adequadas (Charles et al., 1987).

À classe dos *problemas de processo* pertencem os que requerem a procura de pelo menos uma estratégia de resolução: "tentativa e erro, desenhar uma figura, fazer uma tabela, procurar um padrão, trabalhar do fim para o princípio, resolver um problema mais simples e fazer uma lista organizada" (Charles et al., 1987, p. 12). Contrariamente aos dois tipos de problemas anteriores, estes problemas poderão resolver-se sem recurso às operações aritméticas.

Finalmente, os *problemas de aplicação*, também designados por Charles et al. (1987) como sendo "problemas situacionais" (p. 13), são os que, normalmente, exigem a recolha de dados, para além dos que são fornecidos pelos enunciados, e a tomada de decisões. Estes problemas podem ter mais do que uma solução (Fernandes, 1992).

À semelhança da definição proposta por Charles et al. (1987), alguns investigadores portugueses, como sejam Fonseca (1997), Leitão e Fernandes (1997) e Palhares (1997), também definem problemas de processo como sendo problemas que necessitam a utilização de estratégias, isto é, não são susceptíveis de serem resolvidos pela aplicação imediata de um algoritmo de resolução.

2.3 – Modelos de resolução de problemas

De acordo com Pérez e Pozo (1994), nem sempre é fácil o professor ajudar os alunos no determinar dos passos ou do que necessitam fazer para conseguirem resolver os problemas. Estes autores referem que uma coisa é o professor conseguir resolver um problema, outra coisa é conseguir explicar ou descrever o que fez. Para justificarem esta dificuldade, estes autores tiram partido do exemplo de Lester (1983), de ter que explicar a um amigo como se anda de bicicleta, sem que este nunca o tenha

experimentado fazer. Contudo, Pérez e Pozo (1994) parecem não ter dúvidas que o acto de se resolver um problema implica que o resolvedor (a) comece por compreender bem a tarefa, (b) conceba um plano de resolução, (c) execute esse plano e, (d) analise se o resultado encontrado está de acordo com o previsto. No fundo, estas quatro etapas acabam por ter muito a ver como o modelo de resolução de problemas proposto por Polya (1978). De facto, este autor apresenta um modelo composto pelas seguintes etapas: (a) compreensão do problema, (b) concepção ou estabelecimento de um plano de resolução, (c) execução desse plano e (d) olhar para trás ou verificação.

Recentemente, a sua obra de 1945, intitulada "How to Solve It" foi traduzida por uma editora portuguesa, sob o título "Como resolver problemas" (Polya, 2003) e nas páginas número 16 e 17 podemos encontrar, de forma detalhada, aquilo que o resolvedor terá que fazer em cada uma destas quatro etapas de resolução.

Debruçando-nos um pouco sobre cada uma dessas quatro fases, diremos que a primeira – *Compreensão do problema* – por ser a primeira, é de facto, em nosso entender, uma fase crucial para o sucesso na resolução de um problema. Não pensamos ser possível que alguém consiga resolver um problema, que, por definição é algo que não se resolve com os conhecimentos que temos disponíveis no momento, sem dedicar um tempo, porventura longo, à leitura e à compreensão da informação que é dada, por forma a que não tenha dúvidas sobre como isso se pode relacionar com aquilo que lhe é pedido. Uma forma de vermos que o resolvedor interiorizou aquilo que era suposto interiorizar nesta fase, passa por pedir-lhe que reconte ou formule o problema por palavras suas. Se o conseguir fazer com êxito, mostrando compreensão e não apenas memorização do enunciado, isso será uma fonte de dados importantíssima para o professor/formador, porque se o aluno ou formando acabar por não ter sucesso na resolução do problema, a causa não terá estado nesta etapa inicial, mas sim noutro momento da resolução.

Pérez (1994) apresenta algumas técnicas que ajudam o resolvedor a familiarizar-se com o problema, por forma a conseguir compreendê-lo:

> ". Expressar o problema com outras palavras.
> . Explicar aos colegas em que consiste o problema.
> . Representar o problema noutro formato (gráficos, diagramas, desenhos, com objectos, etc.).
> . Indicar qual é a meta do problema.
> . Assinalar onde reside a dificuldade do problema.
> . Separar os dados relevantes dos não relevantes.
> . Indicar os dados com que conta para resolver a tarefa.
> . Assinalar que dados ausentes necessitaríamos para resolver o problema.
> . Procurar um problema semelhante que tenhamos resolvido.
> . Analisar primeiro alguns exemplos concretos quando o problema é muito geral.
> . Procurar diferentes situações (cenários, contextos, tarefas, etc.) nos quais possa apresentar o problema" (p. 74).

Ao nível da segunda etapa – *Concepção de um plano de resolução* – esta é, também, de superior importância, porque, enquanto professores, temos a noção plena de que muito do fracasso dos nossos alunos passa por não elaborarem, de forma reflectida, um plano de resolução. Muitos são os que se aventuram precocemente na resolução, propriamente dita, do problema, sem terem um rumo definido, perdendo-se na sua própria resolução ou na tentativa de esboçarem uma resolução. Pelo contrário, o que também temos vindo a verificar é que os nossos melhores alunos a resolver problemas dedicam algum tempo a reflectir sobre como podem "atacar" o problema, tirando partido dos vastos recursos disponíveis, como sejam as várias estratégias possíveis de resolução que conhecem.

Se as duas primeiras etapas forem trabalhadas de acordo com o que acabámos de descrever, a etapa seguinte – *Execução do plano* – terá, à priori, grandes possibilidades de êxito. Contudo, é importante que o resolvedor vá fazendo verificações sobre o que está a realizar, por forma a que consiga prever ou evitar possíveis acidentes de percurso. Referimos este aspecto, porque também temos verificado, com alguma frequência, na nossa experiência docente, que uma boa compreensão do problema, seguida da concepção de um plano, que tem todas as possibilidades de conduzir o resolvedor para o sucesso da resolução, podem cair por terra devido ao facto de o resolvedor cometer alguns descuidos aquando da implementação do plano. Basta ignorar algum dado importante ou cometer algum erro de cálculo ou de outro cariz.

Por último, a etapa final – *Verificação* – quando assumida pelo resolvedor de forma reflectida e sistemática, pode dar-lhe todas as garantias se aquilo que fez foi bem feito, por estar de acordo com os dados que tinha e porque a resposta encontrada serve de solução à pergunta que o desafiou inicialmente. Lamentavelmente, verificamos que os alunos nem sempre evidenciam sensibilidade para com esta importante etapa do processo de resolução de problemas. Nomeadamente ao nível dos anos mais elementares, o que era habitual vermos era o despique dos alunos para serem os primeiros a dar por terminada a resolução de determinado problema, sendo que isso coincidia com o simples facto de entenderem que tinham encontrado uma solução, sem verificarem se ela fazia sentido.

Este modelo de Polya também foi defendido por Reeves (1987) e este autor sugere que na primeira etapa, o resolvedor deve tentar entender o problema, analisando, para tal, cada componente e a relação que estabelece com a totalidade do problema. Sugere, pois, que se façam algumas análises e sínteses. Para a segunda etapa propõe que o resolvedor se questione se já alguma vez havia sido confrontado com algum problema semelhante. Na terceira etapa sugere que o resolvedor deveria questionar-se se ficava satisfeito por ter obtido uma resposta para um problema. No que diz respeito à última etapa, sugere que se verifiquem os procedimentos levados a efeito ao longo da resolução, identificando-se os aspectos que contribuíram para que o processo de resolução tivesse sido aquele e não outro. Sugere, também, que o resolvedor deveria tentar indagar acerca da possibilidade da resposta poder ser generalizável.

Por seu turno, Bransford e Stein (1984) referem a existência de cinco componentes no processo de resolução de problemas e cujas iniciais dão o nome ao modelo IDEAL: *Identify* (identificar o problema); *Define* (definir o problema com precisão); *Explore* (explorar estratégias para obter a solução do problema); *Act* (executar o plano delineado); *Look e Learn* (observar o efeito das actividades realizadas e aprender a partir da avaliação dos resultados dessas actividades).

Outro autor que se debruçou sobre este assunto foi Lester (1985). O seu modelo contempla as seguintes categorias: orientação, organização, execução e verificação. A categoria orientação relaciona-se com os aspectos a leitura, análise e compreensão do problema. A categoria organização tem a ver com a identificação de estratégias e concepção do plano de resolução. A categoria execução relaciona-se com a implementação das estratégias e a monitorização do progresso. Por último, a categoria verificação tem a ver com a avaliação das fases anteriores.

Por sua vez, Schoenfeld (1985) concebeu um modelo de resolução de problemas baseado nas seguintes fases: "1 - análise; 2 - desenho; 3 - exploração; 4 - realização e 5 - verificação" (p. 110).

No que concerne à fase da análise, o principal objectivo consiste em compreender o problema, analisar os dados, podendo-se simplificá-lo para a sua resolução. Relativamente à fase do desenho, o importante é a concepção de um plano de "ataque" ao problema. A fase da exploração é caracterizada pelo facto de se poder voltar atrás quando se encontrar um obstáculo difícil de ultrapassar. A fase da realização é caracterizada pela execução do plano que se concebeu na fase do desenho. Por último, a fase da verificação prende-se com o controle do processo de resolução, verificando todos os passos, bem como avaliar a resposta encontrada, podendo surgir outras soluções para o problema.

Também são cinco as fases do modelo de resolução de problemas que Callejo (1990) tem por hábito propor aos alunos que frequentam um clube de Matemática no Instituto de Estudos Pedagógicos Somosaguas, em Espanha. A seguir transcrevemos essas fases, bem como aquilo que é pedido aos resolvedores em cada uma delas:

> "Primeira Fase. TENTA COMPREENDER O ENUNCIADO
> - Lê o problema devagar.
> - Tenta entender todas as palavras.
> - Distingue os dados do problema (o que conheces) da incógnita (o que procuras).
> - Tenta ver a relação entre os dados e a incógnita.
> - Tenta expressar o problema por palavras próprias.
>
> Segunda Fase. TENTA COMPREENDER O PROBLEMA
> - Se for possível faz um desenho ou um esquema da situação.
> - Se os dados do problema não representam quantidades muito grandes, tenta concretizar a situação utilizando objectos (fichas, botões, papel, ...).
> - Se as quantidades que aparecem no enunciado são grandes, então imagina o mesmo problema com quantidades menores e faz o que se recomendou no ponto anterior.

- Se o problema está formulado de forma geral, atribui valores aos dados e trabalha com eles.

Terceira Fase. PROCURA ALGUMAS ESTRATÉGIAS PARA RESOLVER O PROBLEMA

A seguinte lista pode ajudar-te.

- É semelhante a outros problemas que já conheces? Como se revolvem esses? Alguma ideia poder-te-ia ser útil?
- Imagina um problema mais fácil para começar e, assim, animar-te.
- Experimenta casos particulares. Dão-te alguma pista sobre a possível solução?
- Podes tirar partido de um desenho ou de uma representação gráfica?
- Podes escolher uma boa notação para passares da linguagem natural para a linguagem matemática?
- Supõe o problema resolvido. Como se relaciona a situação inicial com a situação final?
- Imagina o contrário do que pretendes demonstrar. Chegas a alguma contradição?
- O problema apresenta alguma simetria ou regularidade? Podemos usar alguns "truques matemáticos" [...]?
- O caso geral será mais simples que este particular?

Quarta Fase. SELECCIONA UMA DAS ESTRATÉGIAS E TRABALHA COM ELA

- Não te resignes facilmente.
- Não bloqueies com esta estratégia. Se vês que não conduz a nada, abandona-a.
- Se a estratégia escolhida não resulta, recorre a outra das estratégias que seleccionaste ou a uma combinação entre elas.
- Tenta chegar até ao final.

Quinta Fase. REFLECTE SOBRE O PROCESSO SEGUIDO

- Como foi o caminho percorrido? Onde tivestes dificuldades?
- Em que momento e como conseguiste ultrapassar os obstáculos?
- Quais foram os momentos de mudança de rumo? Foram opções acertadas?
- Entendes bem a tua solução? Entendes por que funciona? Esta solução tem sentido ou é absurda?
- Sabes resolvê-lo agora de maneira mais fácil?
- Sabes aplicar o método utilizado a casos mais gerais?
- Podes resolver outras situações relacionadas com o tema, que sejam interessantes?
- Qual foi a tendência do teu pensamento?: visual, analítica, lenta, rápida, segura, duvidosa, variada, monótona...?" (Callejo, 1990, pp. 30-32).

Um modelo de resolução de problemas, bastante completo, é proposto por Borralho (1990), baseando-se nos modelos de Schoenfeld (1985) e Lester (1980), este autor atribui-lhe uma vertente metacognitiva acentuada, contemplando as seguintes fases:

"Fase 1 - Ler atentamente o problema" (p. 175). Nesta fase é importante que o aluno leia o problema com atenção, de modo a conseguir extrair toda a informação necessária do mesmo. Segundo Borralho (1990), nesta fase o professor terá que apelar à atenção dos alunos para essa tarefa.

"Fase 2 - Consciencialização do problema" (p. 175). Esta fase é a que faz do problema um verdadeiro problema para o aluno, porque é na altura em que toma consciência dele e que constata que ele não pode ser resolvido de imediato. Este autor concede importância ao facto de o problema suscitar interesse na sua resolução, portanto é nesta fase que esse sentimento de desejar resolvê-lo deve surgir.

"Fase 3 - Compreensão do problema" (p. 175). Nesta fase torna-se importante que o aluno identifique o que é pedido, identifique a informação que o enunciado contém e que ele necessita e a que não necessita. Esta é, pois, a fase em que o resolvedor interpreta a informação do problema no sentido de criar uma imagem interna do mesmo.

"Fase 4 - Análise do problema" (p. 176). Nesta fase o resolvedor terá que relacionar a informação do problema com as experiências anteriores que possui em termos de conhecimentos sobre o assunto. Esta é rotulada por Borralho (1990) como uma fase de especificação do que está para trás.

"Fase 5 - Desenvolvimento de um plano" (p. 177). Esta é a fase de concepção do caminho que terá que seguir no sentido de encontrar a resposta ao problema. Este autor apela para o papel importante que o professor poderá ter nesta fase, no sentido de não deixar desmotivar os alunos, caso estes não estejam a conseguir delinear um plano de resolução.

"Fase 6 - Implementação do plano" (p. 178). Esta é a fase onde o aluno põe em prática o plano que delineou para a resolução do problema. Este investigador refere que uma coisa é a selecção de uma estratégia de resolução para o problema, outra coisa é pô-la em prática. Por isso ele remete esta fase para uma perfeita ligação com a próxima.

"Fase 7 - Avaliação" (p. 179). Esta fase consiste numa análise e crítica às soluções encontradas. Isto pressupõe que haja uma verificação dos passos e que haja uma verificação das respostas às condições do problema. Borralho (1990) refere a importância desta avaliação não ocorrer simplesmente no fim de toda a resolução, mas sim ao longo da mesma.

"Fase 8 - Identificar aprendizagens" (p. 179). Esta é a fase em que o aluno terá de identificar o que aprendeu de novo com cada problema que resolveu. Apela-se, pois, à reflexão das aprendizagens efectuadas, contribuindo-se para a criação do hábito de controle das próprias aprendizagens.

"Fase 9 - Identificar dificuldades" (p. 180). Torna-se importante que o aluno saiba identificar as dificuldades sentidas ao longo da resolução do problema, bem como saber explicar o modo pelo qual foi conseguindo superar essas mesmas dificuldades. Esta é uma actividade de cariz meramente metacognitivo para Borralho (1990), pois, desta forma permite-se a "monitoração/gestão dos recursos e heurísticas" (p. 180).

Não obstante os vários modelos de resolução de problemas que têm surgido, é facilmente compreensível que no acto de se resolver um problema, o resolvedor não segue de forma linear cada uma das etapas do modelo de resolução que tiver adoptado (Pérez e Pozo, 1994). Inclusivamente, estes autores acrescentam que quando um resolvedor está a conceber um plano de resolução e a implementá-lo, leva a que surjam novos problemas, que impliquem a formulação de novos planos de resolução.

2.4 – Estratégias heurísticas de resolução de problemas

Como descrevemos anteriormente, independentemente do modelo de resolução de problemas adoptado, todos contemplam uma etapa onde os resolvedores terão que denotar

preocupação em conceber um plano para que consigam atingir uma possível solução. É nesta fase que urge pensar em qual ou quais estratégias heurísticas serão as mais indicadas para levar a bom fim o plano delineado.

Segundo Polya (1978), Heurística "era o nome de um certo ramo de estudo, não bem delimitado pertencente à Lógica, à Filosofia ou à Psicologia... hoje praticamente esquecido" (p. 86). Este autor refere, também, que o seu objectivo "é o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção" (p. 86).

Sanchez (1993) define estratégias heurísticas como sendo "técnicas que têm a probabilidade de conduzir à resolução de muitos tipos de problemas" (p. 6). Partindo dos trabalhos de Polya (1965), Schoenfeld (1985), Newel e Simon (1972), entre outros, enuncia as seguintes heurísticas:

> - "Representação gráfica ou simbólica: fazer um desenho ou um diagrama que resuma a informação do enunciado; representar com números ou letras as variáveis, etc.;
> - Problema análogo: procurar um problema com uma estrutura semelhante ou equivalente, que já tenha sido resolvido ou que seja mais simples;
> - Casos especiais: simplificar o problema fixando-se em casos especiais (dando valores às variáveis, etc.);
> - Sub-problemas: decompor o problema em partes (considerando, por exemplo, condições ou objectivos parciais), de modo a que a solução progressiva dessas mesmas partes conduza à solução completa do problema;
> - Registo de alternativas e exploração sistemática: procurar todas as possibilidades e analisá-las sistematicamente;
> - Voltar atrás: começar do fim para o princípio;
> - Relações intermédias: procurar relações entre os dados e a incógnita (ou entre a hipótese e a tese) que permitam transformá-los ou aproximá-los" (Sanchez, 1993, p. 6-7).

Outro dos autores, preocupado pelo estudo desta temática, é O'Daffer (1988). Para além das estratégias que já fomos referindo anteriormente, acrescentamos as que este autor também apresenta:

> "1. Escolher uma operação
> 2. Tentativa e erro
> 3. Desenhar uma figura
> 4. Fazer uma tabela
> 5. Fazer uma lista organizada
> 6. Usar o pensamento lógico
> 7. Trabalhar do fim para o princípio
> 8. Resolver um problema mais simples
> 9. Descobrir um padrão
> 10. Escrever uma equação" (O'Daffer, 1988, p. 3).

Uma das potencialidades das estratégias de resolução, que leva a que alguns autores sejam apologistas do seu ensino formal e explícito (Schoenfeld, 1979, 1985; O'Daffer, 1988), é o de que elas podem ajudar os alunos, nomeadamente os mais fracos, no acto de resolverem problemas e de as transferirem para outras situações.

Apesar do que acabámos de referir, Lopes (2002) salienta que o processo de selecção de uma

determinada estratégia de resolução não é mecânico. Além disto, acrescenta que o professor não deve influenciar o aluno nessa escolha. A justificação que apresenta para esta tomada de posição é a de que os problemas estão intimamente relacionados com a criatividade e originalidade de quem os tentar resolver. Por outro lado refere que "uma estratégia pode parecer mais óbvia para uma pessoa do que para outra. As pessoas organizam a informação de forma diferente e por isso também resolvem os problemas de forma diferente" (Lopes, 2002, p. 22). Por estes motivos, este autor é mais apologista que seja o aluno a seleccionar a estratégia que julgue mais indicada para a resolução de determinado problema e o professor, ao ver que este consegue ter um trabalho autónomo e criativo, deve incentivá-lo a tirar o máximo partido do problema, podendo chegar, nomeadamente, às extensões do problema.

2.4.1 - Exemplos de estratégias de resolução afectas a determinados problemas de processo:

a) Descobrir um padrão ou regularidade:

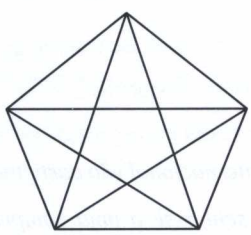
Quantos pontos serão necessários para desenhar o termo de ordem 15?

Outro exemplo: "*Quantos apertos de mão são dados por 40 amigos que já não se viam há algum tempo e que se juntaram num congresso? Por cada duas pessoas a cumprimentarem-se só se contabiliza um aperto de mão*" (Afonso, 2001, p. 162).

b) Reduzir a um problema mais simples (é por vezes descobrir um padrão ou regularidade):

Num clube de ténis vai realizar-se um campeonato numa mão, isto é, cada um dos dez atletas participantes jogará com cada um dos outros uma única vez. Quantos jogos se disputarão no campeonato?

Outro exemplo: "*Quantos triângulos existem nesta figura?*" (Afonso, 2001, p. 135).



c) Do fim para o princípio:

O João foi a uma loja e gastou metade do dinheiro que tinha e ainda mais um euro. Depois, entrou numa segunda loja e gastou metade do dinheiro que lhe restava e ainda mais um euro, tendo esgotado o dinheiro todo. Quanto dinheiro tinha ele antes de ir à primeira loja?

Outro exemplo: *"A princesa Aline foi colher maçãs douradas num jardim encantado. Quando regressava ao palácio, já com o cesto cheio, um duende mal encarado disse-lhe: - Só te deixo passar se me deres metade e mais uma das maçãs que levas nesse cesto.*
A princesa deu-lhe as maçãs que ele pediu e continuou o seu caminho. Mais adiante apanhou um susto quando um segundo duende lhe disse - Só te deixo passar se me deres metade e mais uma das maçãs que levas nesse cesto.
A princesa deu-lhe as maçãs que ele pediu e continuou o seu caminho. Quando estava mesmo a chegar ao portão do jardim, apareceu o guarda que lhe disse: - Só te deixo passar se me deres metade e mais uma das maçãs que levas nesse cesto.
A princesa deu-lhas e voltou para o palácio muito triste, porque já só tinha duas maçãs. Quantas maçãs douradas tinha colhido a princesa?

d) Tentativa e erro:

No mercado havia cestas com ovos. Umas com ovos de galinha, outras com ovos de pata. Cada cesta tinha uma etiqueta com o número de ovos que continha: 5 – 6 – 12 – 14 – 23 – 2. Se vendo esta cesta – pensava a vendedeira – ficarei com duas vezes mais ovos de galinha do que de pata. A que cesta se referia a vendedeira? (Costa, 1986, p. 29).

Outro exemplo: "*Uma criança vai passar o fim-de-semana com os pais a uma aldeia, a casa de uns familiares e propõe-se contar as cabeças e as patas de todas as galinhas e coelhos que os tios têm. O resultado é 30 cabeças e 100 patas. Quantas galinhas e quantos coelhos têm os tios da criança?*" (Afonso, 2001, p. 59).

e) Fazer uma dedução lógica:

Num debate público sobre a situação internacional vão participar três cubanos, três norte-americanos, três iraquianos e três ingleses. Irão sentar-se a uma comprida mesa virados para a assistência.

Os cubanos já fizeram saber que nenhum deles se sentará ao lado de um norte-americano. Por outro lado, os norte-americanos não querem ficar ao lado dos iraquianos e estes informaram que não aceitam nenhum vizinho inglês. Ainda por cima, a organização recebeu instruções para que não haja duas pessoas da mesma nacionalidade sentadas lado a lado. Como ficarão sentados os doze participantes?

f) Fazer um esquema/desenho/tabela:

"*Quatro corredores de fundo – Artur, Bento, Carlos e Daniel – são especialistas, não necessariamente por esta ordem, da maratona, dos 1000 metros, dos 5000 metros e dos 3000 metros obstáculos. Sabe-se que:*

1. O Artur e o especialista dos 3000 metros obstáculos correm pelo mesmo clube.

2. Bento e o maratonista nasceram no Norte.

3. Bento passou o dia do seu 21° aniversário na Madeira.

4. O especialista do 5000 metros nunca foi à Madeira.

5. A irmã do maratonista namora o Artur.

6. O especialista dos 3000 metros obstáculos esteve nos Jogos Olímpicos com o Bento e o Daniel. Quem é o especialista em quê?" (Bernardes et al, 1989, p. 18).

Outro exemplo: "*Um pastor está na margem de um rio e quer passar para a outra margem um lobo, uma cabra e uma couve. O seu velho barco só aguenta com o seu peso e o de uma das coisas que tem que transportar. Quantas viagens terá que fazer, sabendo que se deixar o lobo sozinho com a cabra, o lobo come a cabra e se deixar a cabra com a couve, a cabra come a couve?*" (Afonso, 2001, p. 160).

g) Fazer uma lista organizada:

Uma escola recebeu cinco computadores para serem distribuídos por três salas: a sala Azul, a sala Verde e a sala Rosa. Em cada sala deve ficar pelo menos um computador. De quantas maneiras pode ser feita a distribuição?

2.5 – Formação de professores em resolução de problemas

Estamos convictos da necessidade de se proporcionar formação aos professores, porque partimos do pressuposto que um professor nunca deve trabalhar o que quer que seja na sala de aula, se não tiver tido formação adequada para esse efeito.

Por outro lado, uma vez que a grande maioria dos alunos costuma ter a tendência de copiar

modelos de acção que vê nos comportamentos dos seus professores, também ao nível da temática da resolução de problemas o professor deveria assumir essa figura de modelo (Vale, 1994). Para tal, tem que conhecer alguma teoria existente sobre a resolução de problemas, como seja a diferença entre problema e exercício, os vários tipos de problemas e vários tipos de estratégias de resolução, bem como alguns modelos de resolução. Só assim poderá assumir uma postura de resolvedor de problemas merecedora de ser imitada pelos seus alunos.

Acreditamos que professores bons resolvedores de problemas podem contribuir para que os seus estudantes também sejam bons resolvedores de problemas. A comungar esta ideia, Stacey e Groves (1999) salientam que o professor é o elemento fundamental no trabalhar com os seus alunos esta temática, tal como em qualquer outra área da Matemática. Destacam que é ao professor que compete gerar um clima de confiança e de desafio, bem como ajudar os alunos nos momentos em que se deparem com alguma dificuldade. Salientam, pois, que cabe ao professor o seguinte papel:

> ". Ajudar os estudantes a aceitar os desafios: um problema não existe como tal, até que se pretenda resolvê-lo.
> . Criar um ambiente de confiança na turma que prepare os alunos para o enfrentar de situações não familiares e ajudá-los a não sentirem-se demasiado angustiados quando bloqueiam.
> . Permitir que os alunos desenvolvam as suas próprias ideias para encontrar uma solução e ajudá-los, quando necessário, sem lhes dar directamente a resposta.
> . Proporcionar um ambiente onde os alunos possam reflectir acerca de (isto é, pensar, discutir e escrever sobre) os processos em que estão envolvidos e, desta forma, aprender a partir da experiência.
> . Falar com os alunos sobre os processos envolvidos quando se faz e se aplica a Matemática, de modo que possam adquirir o vocabulário que os ajude a pensar a aprender sobre isso. Os alunos aprendem muito mais eficazmente quando o professor direcciona explicitamente a sua atenção para as estratégias e processos implicados na resolução de problemas" (Stacey e Groves, 1999, p. 15).

Em síntese, concordamos com Martín Izard (1997) quando refere que o professor deveria assumir o papel de mediador das aprendizagens do seus alunos, ajudando-os a construir o seu próprio conhecimento, proporcionando-lhe os processos necessários para a resolução dos problemas, sem contudo, lhes dar a resposta.

De acordo com Fernandes (1992), Krulik e Rudnick (1980; 1982) desenvolveram orientações relativas à formação de professores em resolução de problemas. Partindo do pressuposto que para se ensinar a resolver problemas, os professores terão que ser preparados para tal, sugerem cinco aspectos diferentes que deverão fazer parte do programa de formação que, supostamente, responde a essa necessidade. Em primeiro lugar, consideram que "é fundamental definir claramente os conceitos envolvidos e que fazem parte da linguagem específica da resolução de problemas" (Fernandes, 1992, p. 83).

Por outro lado, estes autores também sugerem que os professores devem entender que a resolução de problemas "é um processo complexo e não apenas um produto. É importante obter

respostas correctas aos problemas mas é necessário perceber que estamos a desenvolver processos quando os estamos a ensinar" (Fernandes, 1992, pp. 83-84).

Como terceiro aspecto, estes autores recomendam que os professores contactem com situações problemáticas semelhantes às que irão ser trabalhadas com os seus alunos.

O quarto aspecto prende-se com o ensino explícito de estratégias de resolução de problemas e o último aspecto destacado por Fernandes (1992), relativamente às propostas de Krulik e Rudnick (1980; 1982) é a elaboração de uma lista de dez sugestões para o ensino da temática da resolução de problemas "que vão desde a criação de uma atmosfera de sucesso na sala de aula até à resolução de problemas em pequenos grupos" (p. 84).

Em jeito de síntese, referimos que, proveniente deste fluxo de investigação e de experimentação, surgem sugestões importantes ao nível do desenvolvimento curricular, nomeadamente a indicação de que o ensino da resolução de problemas deve estruturar-se e deve organizar-se da mesma maneira que qualquer outra área da Matemática (Fernandes, 1991). Além deste aspecto, Ponte (1988), entende que a actividade de resolução de problemas ao nível elementar e secundário é "a única fonte possível de genuína motivação intrínseca para a Matemática" (p. 17).

3 - Metacognição – sua importância no processo de ensino-aprendizagem da Matemática

Nesta secção analisamos as críticas que têm sido feitas ao ensino da Matemática. De seguida salientamos a alteração que se pretende que ocorra, que é a de se perspectivar o ensino desta disciplina com vista ao desenvolvimento do "*pensar sobre o pensar*" (metacognição), em vez de ser apenas virado para o "*conhecimento*". Dada a importância que a resolução de problemas pode assumir nessa mudança, enfatizaremos a relação entre este tema e o da metacognição. Por último, abordaremos algumas sugestões que permitam o desenvolvimento de processos metacognitivos, terminando com uma chamada de atenção para a necessidade de se formarem os professores nesta área.

3.1 – Como tem sido visto o ensino da Matemática

Ainda que não se referisse concretamente às aulas de Matemática, achamos que as palavras proferidas por Lobo, em 1989, continuam presentes em grande parte das salas de aula da disciplina de Matemática:

> "É frequente observar que os nossos alunos seguem as instruções dos professores sem se interrogarem porque o fazem, raramente questionam as suas próprias estratégias de aprendizagem ou avaliam a sua eficiência nas actividades e são incapazes de explicar porque usam determinadas estratégias para resolver um problema" (Lobo, 1989, p. 4).

De facto, também ao nível da disciplina de Matemática é usual verificarmos que os estudantes não têm o hábito de questionarem o que fazem nem as razões de o fazerem assim. Isso pode dever-se ao tipo de ensino levado a efeito nas nossas escolas, que tem revelado estar desajustado daquilo que se pretende que seja hoje o papel da disciplina de Matemática na formação dos estudantes. Em detrimento de um processo de ensino-aprendizagem baseado no desenvolvimento de competências de conhecimento e de memorização, deve apostar-se, cada vez mais, no desenvolvimento da reflexão, da compreensão e da aplicação dos conhecimentos adquiridos. Além disso, importa desenvolver nos alunos, não apenas a sua capacidade analítica de conhecer aspectos meramente teóricos ou académicos mas, também, as suas capacidades criativa e prática (Sternberg e Spear-Swerling, 2000), para que venham a ser cidadãos com alguma facilidade de adaptação e de reconhecido êxito ao nível do futuro mundo do trabalho.

Deste modo, Sternberg e Spear-Swerling (2000), recorrendo à teoria do raciocínio tripartido de Sternberg, apelam para que a escola desenvolva a inteligência dos seus alunos em pelo menos uma das seguintes componentes do raciocínio: (a) *analítica* (que implica a análise, o ajuizar, o avaliar, o comparar, o confrontar e o examinar); (b) *criativa* (que implica o criar, o descobrir, o produzir, o imaginar e o supor) e, (c) *prática* (que implica o praticar, o utilizar, o aplicar e o realizar).

Mesmo ao nível da resolução de problemas, tema que, como vimos, tem sido recomendado ultimamente como devendo ser um eixo de aprendizagem, que deve atravessar todo o currículo da Matemática, os alunos continuam a manifestar concepções bastante desajustadas acerca do que deve ser a sua postura enquanto resolvedores.

Já em 1985, (a) Lester, (b) Lester e Garofalo e (c) Schoenfeld assinalavam, como possível causa do insucesso dos estudantes na resolução de problemas, o facto de o ensino conceder demasiada importância ao desenvolvimento de capacidades heurísticas em vez das capacidades de gestão necessárias para regular essas actividades. Por esse motivo, não será de estranhar que os alunos assumam uma postura incorrecta ao resolverem problemas, por se basearem em princípios ou concepções erradas, como sejam as que apresentamos a seguir:

> "(1) a dificuldade do problema é determinada pelo tamanho dos números e pela quantidade de números existentes; (2) todos os problemas matemáticos podem ser resolvidos pela aplicação directa de uma ou mais operações aritméticas; (3) as operações a utilizar são determinadas pelas palavras-chave do problema (estas palavras-chave aparecem, normalmente, na última frase ou perguntas); (4) a verificação, ou não, dos cálculos depende do tempo disponível" (Lester, 1985, p. 42).

A acrescentar ao que acabámos de referir, Mota e Guimarães (1990) salientam que, para os alunos, é normal um problema ter que ser de palavras, em que é dada a informação necessária e suficiente para a resolução, que tem sempre solução e essa solução tem que ser única e numérica. Por estes motivos, talvez possamos dizer que as concepções que os estudantes possuem sobre problema e resolução de problemas sejam uma possível causa para o insucesso na sua resolução.

Na mesma linha de pensamento, Lambdim et al. (1994), baseados nos estudos de Sowder (1988), apresentam uma lista de estratégias incorrectas usadas pela grande maioria de alunos ao resolverem problemas:

> "1. Descobrir os números e adicionar (ou subtrair, multiplicar, ou dividir, dependendo dos cálculos mais recentemente trabalhados nas aulas).
> 2. Tentativa de adivinhar a operação a ser usada.
> 3. Olham para os números e não sabem muito bem que operação efectuar.
> 4. Tentam todas as operações possíveis e escolhem a resposta mais razoável.
> 5. Procuram e ficam presos às palavras-chave ou frases que lhes sugiram as operações a efectuar.
> 6. Optam por uma de duas [possibilidades], quando a resposta deve ser maior ou menor que os números dados: se a resposta é maior que os dados, tentam adicionar e multiplicar e escolhem a resposta mais plausível. Se a resposta é inferior aos números dados, tentam subtrair e dividir e optam pela resposta mais plausível.
> 7. Escolhem a operação que lhes parece adaptar-se melhor à história" (Lambdim et al., 1994, p. 41).

Outras duas causas possíveis para o insucesso na resolução de problemas, são apresentadas

por Clement e Konold (1989). Para estes autores, uma dessas causas reside no facto de muitos alunos seguirem em frente sem terem consciência de que necessitam proceder cuidadosamente durante o processo de resolução. A outra causa é o facto de os estudantes não trabalharem, com alguma frequência, problemas de múltiplos passos, o que tem como consequência a não necessidade, por parte deles, de fazerem registos orientadores do trabalho que estão a realizar.

Em síntese, as palavras de Gaspar (1987) acabam por reflectir o que se passa no ensino e na aprendizagem em geral: "[...] muita aprendizagem é superficial, é feita sem uma reflexão profunda. A consideração deste ponto conduz ao reconhecimento da necessidade de treinar os alunos em metacognição" (p. 44).

De facto, "uma das principais críticas que se faz hoje ao ensino é que os estudantes não aprendem a raciocinar e a pensar criticamente (Hurd, 1987, citado por Cruz, 1989, p. 4). Por outro lado, concordamos com Salema (1997), quando refere que "a escola actual não tem sido capaz de dar resposta às exigências do mundo moderno e de que há, portanto, um desfasamento entre as capacidades intelectuais que a sociedade exige e aquelas que a escola promove e desenvolve" (p. 12). Por isso, entendemos que cabe à escola o papel de promover, junto dos alunos, situações de aprendizagem que possibilitem o desenvolvimento de competências de pensamento que lhes permitam enriquecer as suas capacidades de sentido crítico, de análise, de síntese e de adaptabilidade a novas situações, por forma a incrementarem a capacidade de resolução dos mais variados problemas com que se confrontarão no seu dia a dia.

No fundo, exige-se uma escola virada para a reflexão acerca: (a) daquilo que o aluno sabe, (b) daquilo que deveria saber mas não sabe e, (c) da forma como pode passar a saber aquilo que não sabe. Isto é, hoje exige-se uma nova escola que esteja virada para o "pensar sobre o pensar" e não tanto para a mera memorização ou, até mesmo, para o simples conhecimento factual ou conceptual.

3.2 – O conceito de metacognição

O conceito metacognição tornou-se num descritor do Educational Resources Information Center (ERIC) apenas em 1980 (White, 1990). Contudo, a sua utilização ocorreu pela primeira vez na década de setenta pelo psicólogo John Flavell (Valente et al., 1989a; 1989b; Salema, 1997; Burón, 1999; Lafortune e Saint-Pierre, 2001).

Entendendo-se o termo metacognição como sendo a ideia de ir mais além do conhecimento (Burón, 1999) ou da cognição, esta área do saber tem como objecto de estudo, o descobrir quais são as estratégias de inteligência mais eficazes para proporcionarem o aprender a aprender. Pela natureza do seu objecto de estudo e por ser um tema ainda recente no cenário da investigação internacional,

acreditamos que não será fácil conhecer as diversas operações mentais dos sujeitos: "percepção, atenção, memorização, leitura escrita, compreensão, comunicação, etc." (Burón, 1999, p. 11), bem como saber como, quando e para quê essas operações mentais devem ser utilizadas (Burón, 1999).

Por estes motivos, o tema tem vindo a manifestar-se como sendo muito complexo e delicado (Williamson, 1991), apesar do "estudo da metacognição ser o esforço mais sério e prático que a Psicologia fez para penetrar na mente do estudante, enquanto este realiza tarefas escolares ou tenta aprender, no sentido de averiguar o que faz e como o faz mentalmente" (Burón, 1999, p. 7).

Contudo, fruto da investigação já realizada, Flavell (1979), Lester e Garofalo (1985) e Bourón (1999) reconhecem que na metacognição estão envolvidos dois processos: (a) conhecimento dos conhecimentos e (b) gestão, verificação ou controlo desses conhecimentos. De forma similar, Williamson (1991) define metacognição como sendo o pensamento acerca do pensamento e a gestão do pensamento. Como salienta Martí (1999), o acto reflexivo que permite a determinado professor saber que as explicações que dará na última aula da tarde, após quatro horas de aulas, serão mais confusas devido ao cansaço e à menor capacidade de concentração, é um exemplo de conhecimento metacognitivo desse professor. Por seu lado, propor alterações metodológicas para essa aula, recorrendo, por exemplo a instrumentos audiovisuais que consigam captar a atenção dos alunos, é um exemplo de regulação metacognitiva (Martí, 1999).

Concretamente ao nível da resolução de problemas, Lester e Garofalo (1985) referem que o indivíduo conhece-se a si próprio, conhece as suas capacidades cognitivas e processos e, por outro lado, toma decisões sobre as estratégias que pode implementar na resolução de problemas. Ao segundo aspecto que acabámos de referir, que utiliza os conhecimentos metacognitivos para controlar o nosso próprio pensamento, Lafortune e Saint-Pierre (2001) atribuem-lhe o nome de "gestão da actividade mental" (p. 21).

Para Flavell (1987), o aspecto dos conhecimentos metacognitivos, isto é, dos conhecimentos sobre a própria cognição, provém de experiências de cariz metacognitivo com que cada pessoa contacta, de forma consciente, afectiva e cognitiva. Este autor caracteriza o conceito de experiência metacognitiva, como sendo algo que implica que determinada pessoa tenha a sensação ou dialogue consigo própria sobre: (a) se o que está a fazer é de fácil execução, compreensão ou memorização, (b) se está mais próximo ou mais longe de atingir a sua meta cognitiva ou (c) se a tarefa passou a revelar-se mais fácil ou mais difícil do que anteriormente. Por sua vez, o controlo desses conhecimentos manifesta-se nas reflexões que fazemos sobre a nossa actividade cognitiva ou mental.

Aos dois aspectos anteriores, Brown (1980), Brown e Palincsar (1982) e Costa (1984), referenciados por Valente et al., (1989b) acrescentam um terceiro, que é o da tomada de consciência desses processos.

3.2.1 – Conhecimentos metacognitivos

De acordo com Martí (1999) e Lafortune e Saint-Pierre (2001), os conhecimentos metacognitivos são relativamente estáveis, verbalizáveis e podem ter uma margem de erro. Para as duas últimas autoras, esta componente da metacognição constitui "o aspecto declarativo da metacognição" (Lafortune e Saint-Pierre, 2001, p. 22) e referem que os conhecimentos metacognitivos estruturam-se em três categorias: (a) sobre as pessoas, (b) sobre a tarefa e, (c) sobre as estratégias.

Por sua vez, Lafortune e Saint-Pierre (2001) acrescentam a divisão que Flavell (1987) faz relativamente à categoria sobre as pessoas. Para este autor, esta categoria ainda se subdivide em: (a) intra-individuais (convicções que temos sobre nós mesmos), (b) interindividuais (comparações que fazemos entre nós e os outros ou comparações apenas entre os outros) e, (c) universais (conhecimentos que temos, de forma geral, sobre o pensamento humano).

Relativamente aos conhecimentos sobre a tarefa, Lafortune e Saint-Pierre (2001) referem que dizem respeito "ao alcance, à extensão, à solicitação ou às exigências de uma tarefa, mas também aos factores e às condições que fazem com que uma tarefa seja mais difícil do que outra" (p. 23).

Por último, os conhecimentos sobre as estratégias dizem respeito aos "conhecimentos gerais e específicos sobre as estratégias de aprendizagem, bem como a consciência da sua utilidade para realizar determinado tipo de tarefas: saber onde, quando, como, porquê utilizá-las" (Lafortune e Saint-Pierre, 2001, p. 23).

3.2.2 – Gestão da actividade mental

A componente da gestão da actividade mental é descrita por Lafortune e Saint-Pierre (2001) como sendo o conjunto de actividades reflexivas que levamos a cabo para controlar e gerir o nosso pensamento. Estas autoras atribuem-lhe a função de "vigilância daquilo que se *faz*" (p. 25). Contrariamente à componente anterior, estas investigadoras referem que esta componente da metacognição é relativamente instável, essas actividades nem sempre são verbalizáveis e dependem da tarefa e da situação.

Lafortune e Saint-Pierre (2001) dividem esta etapa em três componentes: (a) estratégias de planificação, (b) estratégias de controlo e, (c) estratégias de regulação.

Relativamente às estratégias de planificação, elas estão na base da decisão que cada pessoa toma, após ter analisado a tarefa a realizar. É a partir dessa análise que o indivíduo (a) opta por determinada estratégia em detrimento de outras, (b) divide a tarefa nas suas partes constituintes, (c) avalia as possibilidades de ter sucesso na tarefa, (d) estima o tempo necessário à realização da mesma e, (e) prevê as etapas que tem que percorrer (Lafortune e Saint-Pierre, 2001).

No que respeita às estratégias de controlo, Lafortune e Saint-Pierre (2001), baseando-se em Kluwe (1987), referem que são as que "visam seguir, examinar, recolher informações sobre as actividades cognitivas que estamos a efectuar e o seu estado actual" (p. 25). De acordo com Lafortune e Saint-Pierre (2001), Kluwe divide-as em quatro categorias: (a) classificação (identificação do tipo de actividade cognitiva que estamos a efectuar, que visa dar resposta à pergunta: "O que é que estou a fazer?" (Lafortune e Saint-Pierre, 2001, p. 25)), (b) verificação (tem a ver com a forma como se realiza determinada actividade cognitiva, de onde pode surgir o seguinte exemplo: "Há qualquer coisa aqui que eu não compreendo" (Lafortune e Saint-Pierre, 2001, p. 25)), (c) avaliação (origina evidências sobre a qualidade de determinada actividade cognitiva) e, (d) antecipação (consiste na previsão de possíveis etapas a realizar, bem como de possíveis resultados a alcançar, de onde pode ocorrer o seguinte exemplo: "Se eu utilizar este método demorado, corro mais riscos de fazer erros" (Lafortune e Saint-Pierre, 2001, p. 25)).

Por último, as estratégias de regulação utilizam-se após os aspectos que foram detectados na categoria do controlo (Lafortune e Saint-Pierre, 2001). Aí podem ocorrer as seguintes situações: "introduzir correcções, alterar a estratégia, interromper um processo ou, pelo contrário, continuar a acção em curso" (Lafortune e Saint-Pierre, 2001, p. 25).

3.2.3 – Tomada de consciência da actividade mental

Lafortune e Saint-Pierre (2001) também enfatizam o carácter consciente da metacognição, como sendo um terceiro aspecto importante do acto metacognitivo. Justificam a sua importância pelo facto de esse acto consciente desenvolver a própria metacognição.

Para estas autoras, os especialistas na realização de determinada tarefa, fazem-no de forma menos consciente do que os principiantes, pois para os primeiros a tarefa, por ser de algum modo rotineira, gerou determinado tipo de procedimentos automatizados. Contudo, quando surge algum imprevisto, aí os especialistas terão que recorrer à vertente consciente da metacognição. Devido a estes motivos, Lafortune e Saint-Pierre (2001) entendem que em termos do processo de ensino-aprendizagem é importante fazer emergir ao nível do consciente, por processos de verbalização, as reflexões de natureza metacognitiva que acompanharão a realização de determinada tarefa. Justificam-no, dizendo que "é uma condição essencial para que seja possível interagir e fazer interagir, a fim de desenvolver novas aptidões metacognitivas" (p. 27).

No fundo, o que estas autoras recomendam é que os alunos e os professores consigam fazer uma "viagem retrospectiva" ao interior do seu pensamento, por forma a que (a) consigam ser conscientes dos procedimentos cognitivos utilizados, (b) consigam verbalizá-los e, (c) consigam fazer sobre eles um juízo de valor acerca da sua eficácia. Acrescentam que só assim se poderão desenvolver os seus próprios conhecimentos metacognitivos.

Outro autor, que também sugere três categorias inerentes ao comportamento intelectual, é Schoenfeld (1987). Por um lado, salienta o conhecimento acerca dos processos de pensamento. Por outro lado sugere a componente de controlo ou de auto-regulação e, por último, refere-se às crenças e intuições com que cada sujeito realiza o trabalho em Matemática.

Por sua vez, Noel (1991) também identifica três etapas ou aspectos da metacognição: (a) por um lado, o processo mental, propriamente dito, que diz respeito à consciência que o sujeito possui das actividades cognitivas que está em vias de realizar ou o seu produto; (b) o julgamento, expresso, ou não, pelo sujeito, sobre a actividade cognitiva ou o produto mental dessas actividade; (c) a decisão que o sujeito pode tomar no sentido de modificar, ou não, as suas actividades cognitivas ou o seu produto ou outro aspecto da situação, em função do resultado do seu julgamento metacognitivo.

Às etapas anteriores, Noel (1991) atribui-lhes os rótulos de "processo metacognitivo", "julgamento metacognitivo" ou "produto da metacognição" e "decisão metacognitiva" (pp. 18-19).

3.2.4 – Vantagens de se ser metacognitivo

Uma pergunta que poderemos fazer é quais são as vantagens de se ser metacognitivo? Para Flavell (1979), o facto de determinada pessoa manifestar um boa capacidade metacognitiva, leva a um melhor conhecimento de si mesma relativamente a determinada área, avalia melhor a tarefa que lhe for colocada e implica uma melhor resolução dessa tarefa.

Na mesma linha de pensamento, Guzmán (1999) salienta que quanto melhor nos conhecermos a nós mesmos, mais eficazmente poderemos utilizar os recursos de que dispomos.

Por seu turno, Salema (1997) acrescenta que à medida que os alunos adquirem maior consciência acerca dos seus processos de pensamento, compreendem e seleccionam mais facilmente os que poderão aplicar numa determinada tarefa, tendo, pois, possibilidade de controlar esses processos de pensamento.

Como que a justificar, também, a necessidade de se ensinarem os alunos em metacognição, Valente et al. (1989b) referem que os alunos treinados a desenvolver o pensamento metacognitivo aprendem não só os conteúdos e as competências específicas das áreas curriculares como desenvolvem competências gerais de "aprender a aprender". Dentro deste tipo de competências, podemos destacar algumas das que se relacionam directamente o acto de estudar: "rever, sublinhar, resumir, encontrar um local adequado para estudar, etc." (Burón 1999, p. 131).

3.3 – Relação entre metacognição e resolução de problemas

Novais e Cruz (1987) referem que existe uma relação directa entre metacognição e resolução

de problemas. Alegam que, se por um lado a resolução de problemas leva ao treino da metacognição, por outro, a metacognição "faz aumentar as capacidades cognitivas que envolve" (pp. 115-116), levando a uma melhoria da qualidade das decisões tomadas aquando da resolução de problemas (Borralho, 1990).

Na mesma linha de pensamento, Valente et al. (1989a) referem que o ensino da resolução de problemas terá efeitos mais significativos se se utilizarem estratégias metacognitivas. Lobo (1989) sugere algumas dessas estratégias, que os professores poderão assumir para com os alunos: "registar as dificuldades referidas pelo solucionador; registar as dificuldades do solucionador enquanto ele executa, em voz alta, a actividade; dizer ao solucionador as dificuldades que lhe detectou durante a realização da actividade; recordar ao solucionador as etapas percorridas durante a execução da actividade, caso este necessite" (p. 24). Para tal, sugere que seja solicitado ao resolvedor a leitura atenta da actividade, para que saliente oralmente as dificuldades sentidas durante a execução da mesma, bem como o modo como conseguiu ultrapassar essas dificuldades e salientar todo o pensamento utilizado durante a execução da actividade.

Também ao nível da resolução de problemas, Borralho (1990) refere que o facto de um resolvedor gerir e avaliar um plano de resolução que elaborou, ou seleccionar uma estratégia de entre várias estratégias que conhece, são actividades eminentemente metacognitivas.

Por sua vez, Stacey e Groves (1999) acrescentam que ao nível da resolução de problemas nunca é pedir demais aos alunos que façam uma leitura cuidadosa do enunciado do problema, porque muitos fracassos podem dever-se a uma leitura pouco atenta do mesmo. Para estes autores, essa leitura não deveria ser passiva, deveria implicar alguma acção por parte dos resolvedores, como seja a de escreverem ou desenharem a questão com palavras ou ideias próprias. Sugerem, ainda, que uma nova leitura do enunciado do problema, aquando da existência de algum bloqueio na resolução, é uma medida que consideram muito útil. Salientam, também, que os resolvedores não deveriam perder de vista as seguintes perguntas, como sendo orientadoras do seu desempenho: "O que é que sei sobre o problema? e o que é que eu quero fazer?" (Stacey e Groves, 1999, p. 19).

Depreende-se das ideias dos autores anteriores que os vários procedimentos que um resolvedor deve ter ao resolver um problema, devem ser feitos com alguma ponderação, de forma reflexiva e não pressionada pelo factor tempo. Aliás, concordamos com Guzmán (1999), quando refere que a pressa é sempre má conselheira. Este investigador sugere a necessidade de o resolvedor familiarizar-se com a situação problemática, fazendo o levantamento dos dados pertinentes para a resolução da mesma, jogando mentalmente com eles, prevendo possíveis soluções e seleccionando vários opções de caminhos para se chegar a essas soluções.

Stacey e Groves (1999) salientam como sendo, também, de muita importância, o facto de os resolvedores registarem por escrito a resolução do problema, evitando fazer a mesma coisa várias vezes e esquecerem uma boa ideia, que tiveram, por não a terem registado de imediato. Destacam,

também, que tem tanta importância escrever que houve uma ideia que não funcionou ou era impossível, como escrever algo que veio a resultar correcto.

Estes autores destacam, ainda, que para se evitarem situações de bloqueio na resolução de problemas, é fundamental que se reflicta sobre o que se sabe e sobre o que se pretende saber. Para tal sugerem que se experimentem algumas estratégias possíveis de resolução, como sejam a tentativa e erro, a procura de regularidades, etc.

Por fim, sugerem a importância de se comprovar o trabalho que vai sendo desenvolvido, não devendo deixar-se essa tarefa apenas para o final, depois de se encontrar uma solução.

Tal como acabámos de verificar nas recomendações de Stacey e Groves (1999) e de Borralho (1990), também Martí (1999) refere que o tema das estratégias de resolução de problemas está relacionado com o conceito de metacognição. Justifica essa relação através de três aspectos. Por um lado, refere que o conceito de estratégia está intimamente relacionado com a componente procedimental do conhecimento, envolvendo mecanismos reguladores da acção cognitiva. Este autor acrescenta que a implementação de determinada estratégia implica um mínimo de planificação, controlo ou avaliação, o que o leva a concluir que o conceito de estratégia esteja relacionado com o aspecto regulador da metacognição.

Uma segunda ordem de razões para justificar o relacionamento entre os conceitos de estratégia e de metacognição é, também, destacada por Martí (1999). Neste caso, refere-se ao facto de ao seleccionarem e implementarem determinadas estratégias de resolução, os sujeitos terem que agir conscientemente e de forma intencional acerca do "quê" e "como" irão encadear e desenvolver um conjunto de procedimentos para conseguirem atingir a meta a que se propõem.

O terceiro aspecto que leva a que este autor relacione estes dois conceitos, é o que diz respeito à componente do conhecimento metacognitivo acerca da pertinência das possíveis estratégias a usar.

Apesar da existência desta aparente ligação entre os conceitos de estratégia de resolução e de metacognição, Martí (1999) alerta para o facto de que não basta o professor descrever um conjunto de estratégias, com base em reflexões acerca das suas potencialidades, para que os alunos as consigam utilizar quando necessário. Justifica esta chamada de atenção, utilizando o seguinte argumento: "o que para o professor pode ser conhecimento metacognitivo (reflexão sobre a pertinência e eficácia de uma série de procedimentos) não o é, necessariamente, desde o ponto de vista do aluno" (Martí, 1999, p. 120).

O conhecimento acerca de possíveis estratégias de resolução acaba por ser apenas um de entre muitos aspectos que cada sujeito deveria conhecer ao nível da resolução de problemas. Em termos mais gerais, concordamos com Guzmán (1999), quando refere que quanto mais conhecermos a nossa capacidade de resolver problemas, mais facilmente saberemos identificar quais são os nossos pontos fortes e quais os aspectos onde temos maiores dificuldades. Este autor acrescenta

que este tipo de conhecimento pessoal pode ajudar o resolvedor a prever, com uma certa dose de confiança, o tipo de problemas onde, eventualmente, poderá ter maior ou menor sucesso. Por outro lado, refere que ao conhecermos as nossas carências podemos investir por forma a conseguirmos superá-las.

3.3.1 – Comparação entre peritos e novatos em resolução de problemas

Sendo a metacognição "um processo executivo, supervisor das competências e das estratégias cognitivas" (Salema, 1997, p. 50), pensamos ser da maior importância fazer com que alunos principiantes em resolução de problemas aproximem os seus comportamentos, enquanto resolvedores, dos comportamentos pensados e reflexivos dos "peritos" nessa área.

Uma primeira questão que pode ser colocada é se a perícia na resolução de determinada tarefa depende exclusivamente da automatização de destrezas específicas que determinada pessoa possui ou se isso também depende de processos de auto-regulação colocados em prática sobre os conhecimentos disciplinares que os "peritos" possuem (Mateos, 1999).

Segundo Mateos (1999), uma diferença entre peritos e novatos num determinado assunto, reside na quantidade, organização e acessibilidade do conhecimento específico sobre esse assunto que, no caso dos peritos é substancialmente maior do que no caso dos novatos. É por estes motivos que, por norma, os novatos demoram mais tempo na resolução de determinada tarefa do que os peritos, porque estes já tiveram, fruto da reflexão sistemática, a oportunidade de criarem determinados automatismos e aumentaram os seus conhecimentos específicos sobre a tarefa a realizar, que lhes permite concluir mais facilmente, e em menor tempo, essa tarefa.

Esta diferença entre peritos e novatos também se verifica aquando da resolução de problemas não rotineiros, para os quais os peritos não possuem conhecimentos específicos para lhe darem resposta imediata. Nestes casos, o que costuma acontecer é os peritos saberem tirar partido dos resultados da sua constante postura de supervisão e regulação que levaram a cabo anteriormente (Mateos, 1999). É, pois, esse "*habitus*" (Perrenoud, 2002, p. 13), que lhes permite ter na sua posse um conjunto de estratégias poderosas que lhes possibilitam fazer facilmente a transferência para as situações não rotineiras, com as quais se confrontam, conseguindo resolvê-las com sucesso. Comparativamente, os novatos não recorrem a mecanismos de controle da sua actuação, revelando, assim, possuírem um deficiente processamento metacognitivo (Williamson, 1991).

De acordo com Borralho (1990), um dos autores do programa "Problem Solving and Comprehension", Arthur Whimbey, assinala cinco aspectos que distinguem os bons, dos maus alunos a resolver problemas:

(a) atitude positiva - "os melhores alunos acreditam que os problemas podem ser resolvidos através de uma análise cuidada e persistente. No entanto, os maus resolvedores pensam que «ou se sabe ou não se sabe»" (Borralho, 1990, p. 45);

(b) preocupação com a exactidão - "os melhores alunos são cuidadosos. Tornam a ler as questões

que não compreendem, verificam a aritmética e asseguram-se que responderam ao que lhes foi solicitado. Os estudantes fracos são mais descuidados. Trabalham num problema sem tomarem atenção aos detalhes ou à precisão" (Borralho, 1990, p. 45);

(c) divisão do problema em partes – "os bons estudantes aprenderam que um problema complexo pode ser dividido num determinado número de problemas mais simples e que cada um destes pode ser resolvido até se chegar a uma solução. Em contrapartida, os maus resolvedores tentam resolver o problema complexo de uma só vez" (Borralho, 1990, pp. 45-46);

(d) evitar o "adivinhar" – "os bons alunos debruçam-se num problema até chegarem a uma solução. Se encontram alguma dificuldade, arranjam forma de a ultrapassar. Os alunos fracos têm tendência para adivinhar, especialmente quando se deparam com uma dificuldade" (Borralho, 1990, p. 46);

(e) actividade na resolução de problemas – "os bons alunos estudam de diversas maneiras o problema em que estão a trabalhar: falam com eles próprios, contam pelos dedos, fazem desenhos, diagramas, quadros, sublinham palavras importantes de uma questão, etc.... Os maus alunos não têm este procedimento" (Borralho, 1990, p. 46).

Como facilmente podemos concluir, a postura dos bons resolvedores de problemas, acabada de descrever, assenta num perfil de resolvedor metacognitivo, o que não se verifica nos que são rotulados por maus resolvedores de problemas. Por este motivo, pensamos que será de todo conveniente suscitar situações de aprendizagem que façam aproximar os comportamentos destes últimos sujeitos aos comportamentos, pensados e metacognitivamente geridos, que caracterizam os bons resolvedores de problemas.

3.4 – Sugestões para o desenvolvimento de processos metacognitivos

Charles et al. (1987) numa importante obra sobre avaliação em resolução de problemas, de entre várias sugestões para avaliar o processo dos alunos em resolução de problemas, sugerem a elaboração de relatórios por parte destes. Porque acreditam que os relatórios dão informação útil acerca da habilidade dos estudantes em monitorar e avaliar o seu pensamento durante ou imediatamente após a resolução do problema, estes investigadores apresentam as seguintes questões orientadoras da reflexão dos alunos aquando da elaboração do relatório sobre a resolução do problema efectuada:

> "1 - O que fizeste ou pensaste assim que viste o problema? Quais foram os teus pensamentos?; 2 - Utilizaste alguma(s) estratégia(s) de resolução de problemas? Qual ou quais? Quais é que resultaram? Como chegaste à solução?;
>
> 3 - Fizeste alguma tentativa que te obrigou a parar e a procurar outro caminho? Como te sentiste?;
>
> 4 - Encontraste a solução para o problema? Como te sentiste?;
>
> 5 - Verificaste se a tua resposta estava correcta? Tens a certeza que a tua resposta estava correcta?;
>
> 6 - Como te sentiste, de uma forma geral, nesta experiência de resolução de problemas?" (Charles et al., 1987, p. 24).

Nesta linha de pensamento, Luz (1996), tirando partido dos estudos de Guzmán (1986), também propõe a utilização de instrumentos escritos sobre os problemas, como sejam a elaboração de relatórios. Sugere que esses relatórios deveriam contemplar a justificação da solução encontrada, bem como a descrição do caminho seguido na resolução do problema, destacando-se as dificuldades e os obstáculos encontrados e as eventuais mudanças de estratégias.

Esta investigadora enfatiza esta estratégia de avaliação, alegando que assim se pode conhecer melhor o processo seguido pelo aluno, podendo-se analisar a sua capacidade argumentativa, a sua capacidade de tomada de consciência ou a sua capacidade para generalizar resultados obtidos.

Por seu turno, Salema (1997) entende que o professor pode desempenhar um importante papel na promoção de atitudes metacognitivas nos alunos se:

> ". estimular os alunos a verbalizar as suas dificuldades e os processos cognitivos utilizados nas tarefas, a avaliar os percursos realizados e a explicitar as razões das suas dificuldades ou dos seus sucessos, permitindo-lhes, assim, conhecer o próprio acto de aprender;
> . explicitar os seus próprios processos mentais na estruturação da apresentação dos conteúdos, facultando aos alunos o conhecimento de outros processos (que não os próprios) e o seu confronto com os do próprio;
> . descrever ao aluno os processos subjacentes à realização das tarefas" (Salema, 1997, p. 63).

Por sua vez, Garofalo (1987), citado por Fernandes (1989), identifica três actividades que o professor poderá desenvolver:

> "1) fazer perguntas que levem os alunos a reflectir sobre os seus conhecimentos de matemática e sobre os seus comportamentos e maneiras de pensar, a analisá-los, e a utilizá-los;
> 2) transmitir aos alunos um conjunto de ideias, de factos e conceitos inerentes ao ensino e à aprendizagem da matemática que parecem influenciar o rendimento de forma significativa nesta disciplina;
> 3) ajudar os alunos a avaliar e a regular os seus comportamentos e acções" (p. 5).

Para cada um dos três aspectos mencionados anteriormente, Fernandes (1989) caracteriza o papel que o professor terá que assumir. Assim, para o primeiro caso, o professor pode colocar algumas questões do tipo: "quais as estratégias que mais utilizas para resolver este tipo de problemas?; qual o tipo de erros que usualmente fazes quando resolves problemas?; que poderás fazer para os evitar?; que é que fazes quando tentas resolver um problema de um género diferente do habitual?" (p. 5).

Para o segundo caso, o professor terá que corrigir ideias incorrectas que os alunos tenham. Segundo Fernandes (1989), o professor terá de alertar os alunos para situações do tipo: "há problemas que não podem ser resolvidos pela simples aplicação de uma fórmula, operação ou outro procedimento mecânico; há problemas que se resolvem rapidamente, mas outros demoram muito tempo; há problemas que podem ser resolvidos de maneiras diferentes" (p. 5).

No terceiro caso "interessa que o professor em vez de apresentar a solução de um problema, se empenhe na sua resolução" (p. 5). Isto passa pelo professor explicar aos seus alunos todos os "passos mentais" que seguiu na resolução do problema.

Por seu turno, Williamson (1991) apresenta um conjunto de quatro estratégias de ensino, susceptíveis de proporcionarem o desenvolvimento de processos metacognitivos nos alunos. São elas: (a) ensinar estratégias metacognitivas juntamente com o conteúdo (leva a que se desenvolva o controle e a tomada de consciência dos processos cognitivos e ajuda a desenvolver, simultaneamente, o nível de compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos); (b) ensinar como os alunos podem tomar conta da sua própria aprendizagem (neste caso, o professor pode assumir o papel de planificador do desenvolvimento metacognitivo do aluno, pode assumir o papel de modelo metacognitivo a ser imitado pelos alunos ou pode servir de mediador, treinando a componente metacognitiva dos alunos através do questionamento sistemático e intencional); (c) conceder abertura e ênfase directa ao auto-controle dos estudantes (neste caso, os alunos podem ser solicitados a descrever nos seus diários o seu grau de envolvimento, a sua atitude, o seu nível de atenção, bem como, dizerem se o seu auto-conhecimento afecta o seu comportamento) e, (d) estabelecer um ambiente de aprendizagem interactiva (esta metodologia de trabalho pode ser um bom veículo de exteriorização verbal de pensamentos metacognitivos, susceptíveis de serem analisados posteriormente. Neste tipo de trabalho em grupos, os alunos podem ser solicitados a comentar o comportamento de outros estudantes a resolver problemas, gravados em vídeo, por forma a que possam discutir quais são os melhores e os piores comportamentos observados).

Um outro investigador que estudou o modo como se deve ensinar metacognição foi Schoenfeld (1987). Este investigador sugeriu quatro técnicas que poderão ser utilizadas na sala de aula no sentido de se desenvolverem capacidades metacognitivas.

A primeira é a utilização da tecnologia vídeo para mostrar aos alunos gravações de outros alunos a resolverem problemas. Para este investigador, esta actividade permite que os alunos tomem consciência acerca das suas próprias capacidades e recursos metacognitivos.

Na segunda, o professor serve de modelo em termos de comportamento metacognitivo pois, fala alto à medida que vai resolvendo os problemas, de modo que os alunos se apercebam dos aspectos metacognitivos envolvidos.

Na terceira técnica, os problemas são discutidos por toda a classe, com o professor servindo de moderador. A actividade do professor é mínima, pois este somente terá que estimular a participação dos alunos, sem ser ele a dar a resposta.

Por último, Schoenfeld (1987) sugere a utilização de pequenos grupos, de três ou quatro

alunos, que resolvem problemas assumindo o professor o papel de auxiliar dos alunos. Neste caso, os alunos terão que se orientar sempre por três questões-chave: o que estás a fazer?; porque estás a fazer isso?; e em que medida o que estás a fazer te ajuda a resolver o problema?

Um outro tipo de metodologia de trabalho, é proposto por Clement e Konold (1989). Estes autores sugerem trabalho em pares, em que os sujeitos vão alternando os papéis de resolvedor e ouvinte, obedecendo às seguintes sugestões orientadoras:

> "Eu não entendi o problema:
> . lê de novo o problema;
> . o que é que sei; o que tenho que saber?;
> . o que procuro?;
> . poderei reformular o problema por palavras minhas?;
> . poderei desenhar um diagrama?
>
> Eu não sei para onde ir a partir daqui:
> . ter-me-ão dado informações relevantes e eu ainda não as usei?;
> . poderei resolver parte do problema?;
> . será que há alguma informação útil "escondida" no problema?
>
> Estará a minha solução correcta?:
> . que confiança tenho na solução?;
> . qual será a resposta plausível?;
> . será que os passos da minha solução são válidos?;
> . será que há outro método que poderei usar para comprovar a minha resposta?
>
> Estou confuso:
> . sê paciente. Tem calma e prossegue lentamente;
> . organiza o que tens de uma forma mais precisa" (p. 29).

Por sua vez, Stacey e Groves (1999) sugerem:

> "- O que é que eu SEI sobre o problema?
> - O que é que eu QUERO encontrar?
> - O que é que eu posso USAR, que me possa ajudar?
> - Posso fazer uma CONJECTURA?
> - Posso COMPROVAR o que encontrei?" (p. 18).

3.4.1 – Importância da técnica do pensar alto

Ao nível da investigação, a técnica do "*pensar em voz alta*" tem sido outra maneira de o investigador e do sujeito investigado poderem analisar com algum detalhe o processo mental envolvido na actividade de resolução de problemas. Esta ideia é defendida por Schoenfeld (1979). Contudo, "*pensar em voz alta*" não é algo com que as pessoas se sintam cómodas. Por isso, este autor refere que é necessário ensinar os resolvedores a "*pensar alto*".

Contudo, sobre a técnica do "*pensar alto*", Fernandes et al. (1994) apresentam algumas limitações:

> "(a) o pensamento pode inibir a fala; (b) o pensamento pode processar-se de forma rápida e com um certo grau de aleatoriedade, de tal forma que a fala pode não acompanhar ou relatar com precisão; (c) os indivíduos podem permanecer em silêncio precisamente quando o seu pensamento está mais activo; (d) um indivíduo pode resolver um problema de forma diferente pelo facto de ter que relatar os seus pensamentos" (Fernandes et al., 1994, p. 44).

Apesar desta chamada de atenção, cremos que, ao nível da sala de aula, se os alunos tiverem adquirido o hábito de pensar em voz alta, os professores poderão aperceber-se do seu raciocínio, isto é, poderão obter pistas sobre qual o caminho seguido na resolução de determinado problema, quais foram as suas limitações e como as conseguiram ultrapassar.

Contudo, ao nível da investigação, há que se ter em linha de conta outra chamada de atenção feita por Lucas et al. (1980), citados por Fernandes et al., (1994). Estes autores salientam que quando se estabelece um processo de comunicação entre um investigador e um aluno com o objectivo de se estudarem os processos de resolução, há quatro fenómenos a considerar:

> "1. Aquilo que o aluno diz ou escreve.
> 2. Aquilo que o aluno quer significar ou está a pensar.
> 3. A forma como o investigador interpreta o que aprende ou percebe.
> 4. A forma como o investigador faz corresponder uma categoria à interpretação que faz" (p. 42).

Na análise destes quatro aspectos podem surgir fenómenos como "distorção", "veracidade" e "rigor", pois, uma coisa é o que o aluno pensa, outra coisa é o que ele verbaliza. Outra poderá ser o que o investigador ouve e outra, ainda, o que este interpreta.

Voltamos, contudo, a frisar que o que parece evidente é que se os sujeitos não ficarem calados, numa situação de resolução de problemas, muito do que pensarem e verbalizarem pode ajudar a perceber que tipo de capacidade cognitiva e metacognitiva possuem.

Se souber tirar partido da técnica de pensar em voz alta, cada resolvedor de problemas poderá tornar explícito o seu retrato heurístico. Para tal, basta ser habituado a fazer o seu auto-exame metacognitivo acerca de: (a) alguns aspectos externos, (b) alguns aspectos afectivos e, (c) alguns aspectos cognitivos (Guzmán, 1999).

Assim, de acordo com Guzmán (1999), ao nível do primeiro tipo de aspectos – *aspectos externos* – o sujeito deverá colocar a si próprio as seguintes questões:

> "Qual é o tempo [manhã, tarde, noite] que para mim é mais propício para cada um dos diversos tipos de actividade mental?
> O que é que favorece a minha concentração? O silêncio, a paz, a tranquilidade, a música (que música?), estar longe, viajar, contemplar a paisagem, passear... ou talvez tudo o contrário?
> O que é que mais me distrai? O telefone, as intrigas, as interrupções...
> Qual a postura física que resulta ser mais estimulante? Sentado, de pé, deitado, passeando, correndo, no banho...

Necessito dormir muito, pouco? O meu sono, a minha sonolência ajudam-me na resolução de problemas?

Há alguma actividade específica que favoreça o meu envolvimento frutífero nos problemas em que me ocupo?

Têm algo de comum as circunstâncias em que me parece ocorrer a inspiração?" (Guzmám 1999, pp. 281-282).

Relativamente ao segundo tipo de aspectos – *aspectos afectivos* – Guzmán (1999) sugere que o conjunto de questões introspectivas a colocar podem ser as seguintes:

"Perante a tarefa da resolução de problemas, qual é a minha atitude afectiva inicial? Gosto, não gosto, medo, angústia, repugnância, tranquilidade, diversão, indiferença, pressa, confiança, desalento...?

O que procuro na minha tarefa de resolução de problemas? Entretenimento, exercício, cumprimento de um dever, satisfação da minha curiosidade, auto-superação, preparação mais eficaz...?

Custa-me iniciar o processo de resolução? Perante que tipo de tarefas?

Costumo esforçar-me de forma prolongada? Mantenho vivo o interesse por um problema, durante um largo período de tempo?

Canso-me e aborreço-me facilmente ou sou capaz de fazer sacrifícios e esforços custosos?

Costumo ter altos e baixos? Fases cíclicas de entusiasmo e repugnância pelo trabalho? Conheço a causa?

O meu estado de ânimo relativamente ao trabalho é facilmente influenciável? Tempo, pressão atmosférica, estômago vazio, estômago cheio, manhã, tarde, noite...? Quais são os meus ritmos?

Inclino-me para o desalento ou para a constância e a pertinência?

O que é que me produz mais prazer no trabalho: pensar autónomo, observar, ver o que fazem os outros, explorar, contemplar, repetir, rever, assegurar-me, não trabalhar? O que é que me custa mais?

Sinto gosto em iniciar caminhos, não gosto de continuá-los ou ao contrário?

Tenho gosto em julgar e fazer de crítico, desgosto na própria acção, ou ao contrário?

Como me devo rotular no que respeita às minhas tendências: impulsivo, apressado, sereno, pausado, optimista, pessimista...?

O fracasso afunda-me ou tento aprender com ele?

Que medos, ansiedades, repugnâncias, costumo experimentar no decorrer do processo? Por exemplo, medo de examinar a fundo as minhas conjecturas? Repugnância perante a tarefa de voltar ao início?

Chego até ao fim ou facilmente deixo as coisas a meio, um pouco desordenadamente? Sou perfeccionista?

Tolero bem a crítica? Procuro-a? Aborreço-me com quem a formula?

Gosto do trabalho em equipa? Adapto-me bem? Ou gosto mais de trabalhar entregue a mim mesmo?

Apetece-me discutir sobre os meus temas de trabalho?" (Guzmán, 1999, pp. 282-283).

Por último, ao nível do terceiro tipo de aspectos – *aspectos cognitivos* – Guzmán (1999) propõe um novo conjunto de questões de índole metacognitiva:

"Que tipos de assuntos, trabalhos, formas de pensar, me resultam ser mais naturais?

Curiosidade? Interesso-me por temas alheios ao meu campo [de interesse]?

Leio com gosto? Em abundância?

Sinto atracção pelo que não conheço?

A fase de documentação e armazenamento de informação é-me custosa, antipática ou é o que faço com maior gosto?

Tendo ao aprofundar [das coisas/do conhecimento] ou à amplitude [das mesmas]?

Gosto da reflexão?

Gosto de me concentrar numa só coisa ou trabalhar em várias simultaneamente?

Tenho facilidade em concentrar-me e consigo defender-me de distracções?

Que tal é a minha memória? Que tipo de memória é a minha: visual, analítica, simbólica, relacional?

Tenho facilidade para perceber, imaginar, visualizar? Penso em figuras ou prefiro manipular símbolos? Sentido geométrico ou analítico?

Tenho flexibilidade em usar diferentes formas de pensamento?

Tenho sentido estético perante a obra intelectual?

Gosto de analisar a fundo e detalhadamente ou prefiro esboçar e construir estruturas globalmente?

Em mim tem predominância o sentido lógico ou avanço aos saltos, intuitivamente, deixando a lógica de lado?

Que tipo de representações auxiliares costumo usar? Imagens concretas, símbolos abstractos, fórmulas, palavras escritas...?

Tenho rotinas de acção nos momentos difíceis, de desalento, com o propósito de que me ajudem a sair desses momentos?

Tenho facilidade para a introspecção?

O meu pensamento está quase sempre sob o meu controlo ou, a espaços, anda vagueando e divagando?

Favoreço positivamente a actividade do subconsciente? Procuro activamente a sua ajuda? Estou atento aos elementos que me possa dar?

Sou tolerante perante outras formas de pensamento incongruentes com as minhas ou sou rígido para com elas?

O que é que mais me surpreende na forma dos outros abordarem os problemas?

Quais são as minhas personagens favoritas ou as odiosas? Que características têm, segundo as quais eu as rotulo assim? Quem considero que conseguiram alcançar melhor o que eu procuro?" (Guzmán, 1999, pp. 283-284).

Este é, pois, mais um forte contributo para todos os que pretendam elaborar uma introspecção acerca da sua postura heurística, no confronto com o tema da resolução de problemas que, em nossa opinião, deveria ser levado em linha de conta nos cursos dedicados à formação de professores reflexivos.

3.5 – Metacognição e formação de professores

A metacognição não pode estar relacionada apenas com os alunos, pois é a metacognição do professor que lhe permite ser consciente do "que" se passa na mente dos alunos e "como" actuam essas mentes, quando os solicita a ler, estudar, resumir, fazer um teste (Burón, 1999) ou fazer qualquer raciocínio lógico-matemático.

Daí que seja importante capacitar, também, os professores para que eles próprios desenvolvam a sua capacidade metacognitiva (Santos, 1993). Nesse sentido, concordamos com Zeichner (1993), quando salienta que os formadores de professores devem auxiliar os futuros professores a interiorizarem a ideia de reflectirem acerca de como ensinam, com o intuito de poderem ser melhores

professores ao longo do tempo. É a isso que este autor associa a designação de "ensino reflexivo" (Zeichner, 1993, p. 17).

Na mesma linha de pensamento, Burón (1999) acrescenta que os professores têm que ser preparados para: "1) terem uma ideia clara e concreta do que querem que o aluno consiga alcançar, quando lhe pedem que realize determinada tarefa, 2) saber como deve trabalhar o aluno para conseguir atingir esse objectivo, 3) ensiná-lo a fazê-lo e 4) ter recursos para comprovar que o aluno sabe fazer o que lhe pediu" (p. 133).

3.5.1 – O conceito de professor reflexivo

Na base de cada investigação que envolva a formação de professores em termos metacognitivos, costuma estar associado, explícita ou implicitamente, o conceito de "professor reflexivo". Para além dos trabalhos de Schön (1983, 1987, 1992) sobre este assunto, a nível do nosso país Alarcão é uma das investigadoras que mais tem estudado este tema. Em 1996 publicou um texto, que resultou da sua intervenção oral no 8º Congresso Nacional da Associação Portuguesa de Professores de Inglês, realizado dois anos antes. Nesse texto, esta investigadora tentou responder às seguintes questões:

> "Porquê perguntar-se se é tempo de se ser reflexivo?
> O que é ser-se reflexivo?
> Quem deverá ser reflexivo?
> Para quê ser-se reflexivo?
> Sobre quê ser-se reflexivo?
> Como ser-se reflexivo?
> É possível ser-se reflexivo?
> É desejável ser-se reflexivo?
> Para onde vamos com a nossa reflexão?" (Alarcão, 1996, p. 173).

Acerca da questão – *porquê perguntar-se se é tempo de se ser reflexivo?* – Alarcão (1996) justifica afirmativamente que o tempo actual é um tempo privilegiado para as pessoas se preocuparem em serem reflexivas, pois tem vindo a enfatizar-se a vertente humana da aprendizagem, associada a uma carga reflexiva do formando pensante, em detrimento da dimensão tecnicista.

A sua tomada de posição baseia-se em dois aspectos. Por um lado, o tema é actual e está muito associado aos conceitos de professor reflexivo, aluno reflexivo, cognição, metacognição, aprender a aprender e aprender a pensar. Por outro lado, refere-se à dimensão teórica da expressão "ser-se reflexivo", enfatizando o sentido de autonomia que o sujeito terá que ter para poder reflectir com a intenção de agir segundo essa forma autónoma, não se deixando levar por questões de moda educativa.

Sobre a questão – *o que é ser-se reflexivo?* - Alarcão (1996) entende que é a capacidade que cada pessoa pode ter para conseguir atribuir sentido às coisas. Contrariamente aos actos de rotina, a reflexão não é guiada por impulso ou por habituação, pois baseia-se "na vontade, no pensamento, em atitudes de questionamento e curiosidade, na busca da verdade e da justiça" (Alarcão, 1996, p. 175). Para além disso, associa a cognição à afectividade, ou seja, à racionalidade lógica junta "a irracionalidade inerente à intuição e à paixão do sujeito pensante" (p. 175).

Apesar do que acabámos de descrever, Perrenoud (2002) chama a atenção de que não é pelo facto de reflectirmos na acção, sobre a acção ou para a acção, que podemos dizer que somos profissionais reflexivos. Para que efectivamente consigamos atingir o conceito de prática reflexiva é necessário que o acto de reflexão não seja esporádico. Requer uma postura metódica de permanente indagação e análise da acção, isto é, pressupõe aquilo que Perrenoud (2002) designa por "uma forma de identidade, um habitus" (p. 13).

Ao questionar-se sobre – *quem deverá ser reflexivo?* – Alarcão (1996) responde que serão os alunos e os professores. Relativamente a estes últimos, chama a atenção para esta dimensão, por oposição à tipologia de professor tecnocrata, limitando-se a ser um mero consumidor de currículo delineado por terceiros. No sentido de justificar a ênfase que tem sido exercida na formação de professores reflexivos, relembra os contributos de alguns autores, como sejam Schön e Zeichner. Contudo, para Alarcão (1996), o conceito de professor reflexivo é mais abrangente do que a limitação do seu papel ao acto pedagógico. Justifica a sua opinião, referindo o seguinte:

> "Numa perspectiva de promoção do estatuto da profissão docente, os professores têm se ser agentes activos do seu próprio desenvolvimento e do funcionamento das escolas como organização ao serviço do grande projecto social que é a formação dos educandos" (Alarcão, 1996, p. 177).

Relativamente à questão – *para quê ser-se reflexivo?* – esta autora enfatiza bastante a relação entre a reflexão e a acção (reforçando as indicações de Schön a este respeito), mas também entre a reflexão e o conhecimento (por concordar com Dewey, de que não se pode agir sem se conhecer nem se pode conhecer sem se agir).

À pergunta – *sobre quê ser-se reflexivo?* – Alarcão (1996) refere-se tanto aos alunos como aos professores, alegando que ambos podem tirar partido da reflexão para conseguirem a obtenção de sentido, com as consequentes melhorias ao nível da compreensão e da acção.

No que respeita à pergunta – *como ser-se reflexivo?* – Alarcão (1996) entende que se trata de uma capacidade e, como tal, pode ser desenvolvida. Para isso, recomenda que os processos formativos, que podem levar ao desenvolvimento da capacidade reflexiva, devam implicar o cunho pessoal de cada sujeito, no sentido da "questionação do saber e da experiência numa atitude de compreensão de si mesmo e do real que o circula" (Alarcão, 1996, p. 181). Relativamente aos professores, esta autora destaca (a) o processo de autoscopia, (b) a análise de incidentes críticos ou casos de vida profissional, (c) a escrita autobiográfica, (d) a supervisão colaborativa, (e) o trabalho de projecto e, (f) a investigação-acção, como sendo possíveis veículos para a promoção desse desenvolvimento.

No que diz respeito às três últimas questões que Alarcão (1996) colocou inicialmente – *é possível ser-se reflexivo?*; *é desejável ser-se reflexivo?* e *para onde vamos com a nossa reflexão?*

– esta autora começa por referir que é possível, mas difícil, devido: (a) à falta de tradição neste domínio, (b) à falta de condições, (c) à exigência do processo de reflexão e, (d) à falta de vontade de mudar. Por outro lado, entende que todas as pessoas deveriam ser estimuladas a ser reflexivas, mesmo que isso requeira paciência. Por fim, ao referir-se à última questão, esta autora alerta para o perigo da reflexão poder tornar os professores em meros reivindicadores, com consequências negativas para a mudança educativa que deveriam proporcionar.

Ao terminar a sua intervenção, Alarcão (1996) assinala que "educar para a autonomia implica fazer um ensino reflexivo que, por sua vez, se baseia numa postura reflexiva do próprio professor" (p. 187). Para tal, pensamos que devemos levar em linha de conta os três aspectos que caracterizam o conceito de acção reflexiva proposto por Dewey, descritas por Zeichner (1993): (a) abertura de espírito (abertura à possibilidade de haver alternativas possíveis para o que quer que seja, onde o erro pode marcar presença, (b) responsabilidade (implica a ponderação das consequências provenientes de determinada opção) e, (c) sinceridade. Acrescentamos a chamada de atenção de Zeichner (1993), para que a reflexão dos professores se encaminhe para uma vertente de prática social, em detrimento do trabalho individual, por este último ser limitativo para o "crescimento" do professor.

4 – *Tarefas de investigação e conexões matemáticas*

Muitos são os autores que defendem que a importância que hoje é concedida às tarefas de investigação na disciplina de Matemática deve-se à relevância pedagógica que tem sido atribuída, nas últimas décadas, à resolução e formulação de problemas (Amaral, 2002; Mestre e Matos, 2005). Tal como na resolução e formulação de problemas, num cenário eminentemente metacognitivo (Abrantes, Leal e Ponte, 1996), as tarefas de investigação exigem dos alunos processos complexos de pensamento (Ponte e Matos, 1996; Abrantes, Leal e Ponte, 1996) ou capacidades de ordem superior, como sejam, argumentar, conjecturar, demonstrar, etc. (Segurado, 2002; Mestre e Matos, 2005).

Estas capacidades estão constantemente a ser postas em prática porque as actividades de investigação pressupõem que os alunos sejam confrontados com tarefas abertas, umas bastante elaboradas outras mais simples, cujos enunciados não estão totalmente formulados, exigindo que eles tenham que formular, testar e validar conjecturas, procurar regularidades e comunicar as conclusões aos colegas (Cunha, Oliveira e Ponte, 1995; Ponte e Matos, 1996; Abrantes, Leal e Ponte, 1996; Amaral, 2002; Brocardo, 2003; Mestre e Matos, 2005). De facto, como referem Mestre e Matos (2005), "no contexto escolar, a investigação é, geralmente, apresentada pelo professor e desencadeada a partir de uma situação vaga ou pouco definida e, como tal, não estão formuladas quaisquer questões que orientem de forma determinante a investigação" (p. 206).

No fundo, com as tarefas de investigação pretende-se que os alunos assumam um papel semelhante ao papel investigativo dos matemáticos profissionais perante a actividade matemática (Abrantes, Ferreira e Oliveira, 1995; Brunheira e Fonseca, 1995; Mestre e Matos, 2005). Concordamos, pois, com estes dois últimos autores, quando referem que "a actividade investigativa é uma característica essencial da verdadeira actividade matemática e, como tal, deve ser considerada no ensino e na aprendizagem desta disciplina" (Mestre e Matos, 2005, p. 206).

As actividades de investigação, à semelhança da resolução de problemas, desenvolvem nos alunos a capacidade de raciocinar e de comunicar, mas a investigação remete para a exploração/ procura, para a descoberta, para a curiosidade/interrogação, para a tomada de decisões, para o sentido crítico.

Estas actividades destacam-se da resolução de problemas, porque dão a oportunidade aos alunos de conjecturarem e terem total liberdade da definição dos seus objectivos. Segundo Pirie (1987), citado por Vale (2006), o objectivo de uma investigação "...é a viagem, não o destino" (p.12). Enquanto que num problema se procura o caminho para uma solução (destino), na investigação não importa onde os caminhos nos possam conduzir, procura-se o desconhecido através de explorações que nos possam levar a uma conclusão.

As actividades de investigação podem ser desenvolvidas por todas as faixas etárias

dependendo do grau de profundidade na exploração a realizar ou das competências de cada um. De acordo com Vale (2006), numa tarefa de investigação podem ser identificadas 3 fases:

> "Fase indutiva
> - Exploração inicial de modo a tomar contacto com a proposta e a ter uma ideia precisa sobre a questão central.
> - Sistematização e organização dos dados com vista ao seu relacionamento.
> - Formulação de conjecturas com base nos padrões e regularidades descobertos nos dados.
> - Generalização.
>
> Fase dedutiva
> - Argumentação com vista à justificação das conjecturas feitas.
> - Demonstração das conjecturas.
>
> Fase criativa
> - Procura de extensões da questão em estudo" (p. 12).

4.1 - Tarefas de investigação – suas vantagens

Contrariando o que é normal ocorrer nas salas de aula de Matemática, onde o professor ou o manual costumam ser os orientadores de tarefas fechadas, as tarefas de investigação permitem que seja o próprio aluno a colocar os seus próprios problemas, definir os seus próprios objectivos para a execução investigativa da tarefa, fazendo com que o mesmo se envolva com a sua própria aprendizagem (Almeida e Martins, 2003). Com este tipo de atitude promove-se, necessariamente, o sentido crítico do aluno, pois tem que saber avaliar determinadas estratégias adoptadas, e desenvolve-se a sua capacidade de argumentação, pois tem que relatar aos colegas, com convicção, a validade e as potencialidades das suas conclusões. Por tudo isto, é comum aceitar-se a ideia de que as tarefas de investigação podem ser muito úteis no desenvolvimento ou maturação de conceitos matemáticos (Ponte e Matos, 1996).

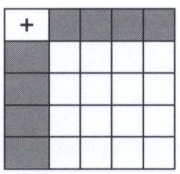
Além destes aspectos, Cunha, Oliveira e Ponte (1995) também salientam que as actividades de investigação permitem "diferentes graus de consecução a alunos com capacidades diferentes, permitindo-lhes trabalhar no seu ritmo próprio" (p. 167), ainda que alguns possam não conseguir acompanhar o raciocínio dos colegas (Brunheira e Fonseca, 1995; Afonso e Gabriel, 2007). Contudo, concordamos com Abrantes, Leal e Ponte (1996), quando referem que "no contexto educativo actual, constitui um desafio novo assumir que este tipo de experiência matemática corresponde a um objectivo essencial para todos os alunos e não apenas para uma elite" (p. 2).

Contudo, as tarefas a propor não devem ter um elevado nível de dificuldade para a maioria dos alunos, sob pena de se desencadear um sentimento de frustração nos que apresentam maiores dificuldades (Brunheira e Fonseca, 1995).

Durante a implementação da estratégia, por norma os alunos não têm o hábito de formular questões ou fazer sugestões, pois optam pelo modo afirmativo em detrimento do interrogativo (Ponte e Matos, 1996; Segurado, 2002; Brocardo, 2003). A sua grande preocupação é alcançar resultados correctos, não atribuindo importância ao processo de chegar até eles (Rocha, 2002).

Este tipo de situação pode dever-se ao facto de alguns alunos ainda estarem dependentes de uma visão limitada da Matemática, como sendo uma disciplina virada para o simples cálculo e para outros tipos de trabalho rotineiros (Rocha, 1995; Ponte e Matos, 1996; Almeida e Martins, 2003). Concordamos com Segurado (2002), quando refere que "este tipo de vivência por parte dos alunos, requer uma dinâmica na sala de aula que também não se enquadra nos processos usualmente utilizados pelos professores na condução destas" (p. 58).

4.2 – Exemplo de actividade de investigação

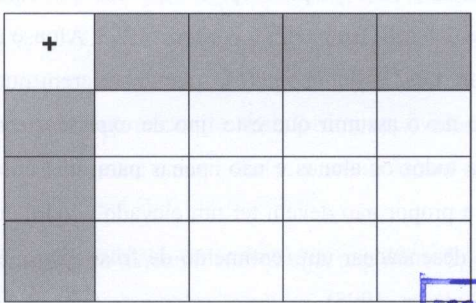


(adaptado de Cebolo, Alves e Cruz, 2006)

1 - Preencha as células sombreadas com números à escolha.
2 - Preencha a tabela com as somas dos números das linhas e colunas.
3 - Escolha uma das somas (célula) e elimine todas as outras da mesma linha e da mesma coluna.
4 - Repita a operação até não poder eliminar mais linhas e colunas e seleccione o último número.
5 - Verifique a soma dos números seleccionados com a soma dos números escolhidos na 1ª operação.

· Porque é que as duas somas são iguais?
· Será que resulta com outra tabela n x n?
· Será que resulta com outra operação?
· Que outras perguntas poderemos fazer para explorar melhor esta situação?
· Que conexões poderemos estabelecer com outras áreas?
· Será que resulta com uma tabela que tem um número diferente de colunas e de linhas?

Para se responder a esta questão é necessário propor a construção de uma tabela do tipo **m x n**, que pode ter mais linhas que colunas ou mais colunas que linhas (é indiferente). Constrói-se, então, uma tabela do tipo:



ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO
CASTELO BRANCO - BIBLIOTECA

Procede-se como no caso anterior e eliminam-se os valores das mesmas linhas e colunas dos valores seleccionados até que deixa de haver valores a seleccionar.

Neste caso vai verificar-se que há uma diferença em relação ao caso anterior, mas depois de uma pequena observação, se adicionarmos o valor da linha ou da coluna onde não há qualquer valor seleccionado, vamos obter o mesmo resultado.

É claro que para consolidar estas questões deverão ser resolvidas mais do que uma situação.

Na continuação pode fazer-se outra pergunta - será que resulta com outra operação?

Podemos adiantar se funcionará com a subtracção. Propomos, então, uma nova tabela:

-				

Neste caso, os números que vão ser o aditivo têm de ser maiores do que os números que vão ser o subtractivo, uma vez que estamos a trabalhar com números inteiros absolutos ou com números decimais positivos – a subtracção nestas condições só é possível quando o aditivo é maior que o subtractivo. No entanto, poderemos experimentar com quaisquer números de modo que os alunos se apercebam que a subtracção pode não ser possível e concluam que o aditivo tem de ser maior que o subtractivo.

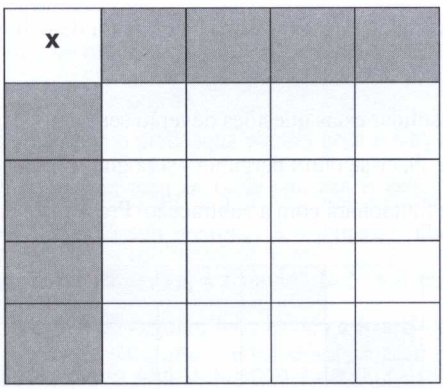
Em seguida manda-se preencher a tabela com as diferenças, mas antes disso, num papel à parte já deverá ter sido colocado o resultado da tarefa, que é a diferença entre a soma dos números do aditivo e a soma dos números do subtractivo.

Procede-se tal como nos casos anteriores, seleccionando um valor da diferença e eliminando todos os outros valores da linha e coluna do valor seleccionado. Quando não houver mais valores para seleccionar adicionam-se os valores seleccionados e compara-se esse resultado com o anterior resultante da diferença da soma dos números do aditivo com a soma dos números do subtractivo. Concluir-se-á que os valores são iguais, Porquê? É necessário encontrar-se uma explicação.

Para que a investigação fique consolidada é preciso que se preencham outras tabelas com mais linhas e colunas e com menos linhas e colunas que a anterior. Concluir-se-á que os resultados serão sempre iguais.

Podem-se criar situações em que haja menos números no aditivo que no subtractivo há que ter atenção ao que acontece.

Podemos pensar agora se também funciona com a multiplicação. Propomos, então, uma nova tabela:



O que é que vai verificar-se?

Depois de se preencher a tabela e seleccionarem e eliminarem os valores vamos concluir que o produto dos números iniciais nas linhas e nas colunas vai ser igual ao produto dos números seleccionados.

Pode fazer-se a experiência com mais e com menos linhas e colunas do que o caso anterior. E também se pode verificar o que acontece se tivermos menos linhas ou menos colunas, isto é, se a tabela for do tipo **m x n**.

Podemos, igualmente, verificar se a situação funciona com a divisão. As experiências feitas apontam para a impossibilidade de com esta operação os resultados serem iguais. Nada nos impede, no entanto, de verificar a situação, propondo a construção e preenchimento de uma tabela do tipo, de modo que as divisões efectuadas dêem sempre resto zero.

Depois de tirarmos conclusões definitivas podemos formular outras perguntas que permitam fazer uma exploração mais aprofundada da situação:

• Que outras perguntas poderemos fazer para explorar melhor esta situação?

A título de exemplo podemos perguntar, depois de ouvir as opiniões dos alunos, se será que podemos usar números decimais?

• Que conexões poderemos estabelecer com outras áreas?

Tendo em atenção o parágrafo anterior podemos incluir aqui as medidas de comprimento (perímetros, alturas de alunos,...), medidas de capacidade, medidas de massa, etc.

4.3 - Actividade de investigação envolvendo a sequência de números triangulares e com conexões ao triângulo de Pascal

(tarefa adaptada de Afonso, 2006)

1 – "Ao deslocar-se com os pais a uma grande superfície comercial existente em Castelo Branco, a Rute decidiu ir até à secção das frutas enquanto os pais faziam as compras previstas. Centrou a atenção na sua fruta preferida – manga – e verificou que existiam seis caixas contendo esta fruta tropical. As caixas continham um rótulo alusivo à proveniência geográfica dos respectivos frutos. Havia caixas com mangas do Brasil e caixas com mangas do México.

Ao contar as mangas existentes constatou que numa caixa havia apenas uma manga; noutra caixa havia três mangas; numa terceira caixa havia seis mangas; outra continha dez mangas; numa quinta caixa havia quinze mangas e, por fim, noutra caixa havia vinte e uma mangas." Com base nestes dados vamos responder às seguintes perguntas:

1.1 – Calcule o total de mangas para venda, existentes nas seis caixas.

1.2 – Com as caixas (1, 3, 6, 10, 15 e 21,) forme 2 grupos de modo que tenham o mesmo número de mangas.

1.3 – Qual a caixa de mangas a vender, de modo que o total restante permita a obtenção de dois conjuntos com igual valor numérico?

1.4 – Quais as duas caixas que se devem vender, de modo que o total restante continue a permitir a obtenção de dois conjuntos com igual valor numérico?

1.5 – Quais as três caixas que se devem vender, de modo que o total restante continue a permitir a obtenção de dois conjuntos com igual valor numérico?

1.6 – Qual a caixa a vender, de modo a que o total restante permita a obtenção de dois conjuntos em que um deles tem apenas mais uma manga que o outro?

1.7 – Descobrir dois processos que permitam a obtenção de um conjunto superior em duas mangas a outro conjunto, depois de se vender a caixa com 10 mangas.

1.8 – Será que a venda da caixa de 10 mangas é a única que permite a obtenção de dois conjuntos em que um tem apenas mais duas mangas que o outro?

1.9 – Qual a caixa a ser vendida, de modo a que o total restante permita a obtenção de dois grupos em que um tem mais três mangas que o outro?

1.10 – Quais as duas caixas a vender para que o total restante permita a obtenção de dois grupos, cujos números de mangas sejam ambos múltiplos de sete?

1.11 – Quais as duas caixas a vender para que o total sobrante permita a criação de dois grupos cujos números de mangas sejam ambos múltiplos de três?

1.12 – Quais as duas caixas a vender para que o total restante permita a obtenção de dois conjuntos em que um deles tem apenas mais duas mangas que o outro?

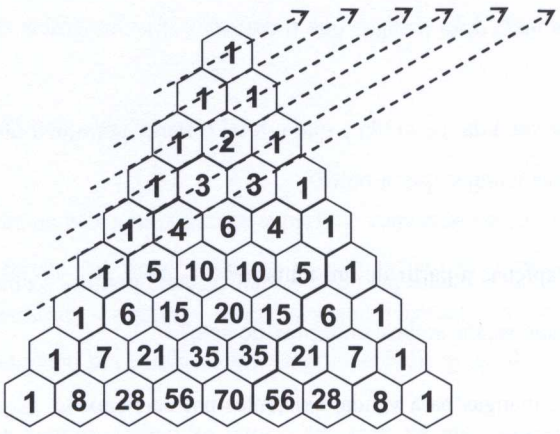
1.13 – Quais as três caixas a vender para que o total restante permita a obtenção de dois conjuntos em que um tem apenas mais uma manga que o outro?

1.14 – Quais as três caixas a vender para que o total restante possibilite a formação de dois grupos distintos, sendo um maior que o outro em apenas duas mangas?

1.15 – Quais as três caixas a vender, de modo a que o total restante origine dois grupos em que um deles equivale à quarta parte do outro?

2 – Numa quinta existe um casal de coelhos. Supondo que em cada mês, a partir do segundo mês de vida, cada casal dá origem a um novo casal de coelhos, ao fim de um ano quantos casais de coelhos estão na quinta?

3 – Considere o triângulo de Pascal seguinte e escreva à frente de cada seta a soma dos números atravessados pelas setas. O que se conclui?



4 – Se considerar que encontrou uma regularidade, escreva uma sequência com doze desses termos.

5 – Explique como se obtém o termo seguinte da sequência.

6 – Faça uma pesquisa na Internet (www.google.pt) e procure por "números de Fibonacci". O que concluiu?

7 – Escreva um número qualquer, ao acaso. Acrescente-lhe mais nove números tendo em conta o padrão de Fibonacci.

7.1 – Calcule a soma desses números.

7.2 – Compare esta soma com o sétimo termo da sequência. Será que existe alguma relação?

7.3 – Para que isto funcione, os dois primeiros números têm que ser iguais?

7.4 – Será que também funciona a partir de quaisquer dois números consecutivos da sequência de Fibonacci?

7.5 – Será que também funciona a partir de quaisquer dois números?

8 – Como se obtém de forma rápida o produto de dois ou mais factores iguais a 11?

Ex.: 11 x 11; 11 x 11 x 11; 11 x 11 x 11 x 11; ...

9 – Descubra a regularidade que existe nos seguintes produtos:

11 x 11 =
111 x 111 =
1111 x 1111 =
...

10 – Como encontrar capicuas a partir de um número?

Resoluções:

1.1 – Calcule o total de mangas para venda, existentes nas seis caixas.

Resposta: 56

1.2 – Com as caixas (1, 3, 6, 10, 15 e 21,) forme 2 grupos de modo que tenham o mesmo número de mangas.

Resposta: Será 28 + 28:
(a) 21 + 6 + 1
(b) 15 + 10 + 3

1.3 – Qual a caixa de mangas a vender, de modo que o total restante permita a obtenção de dois conjuntos com igual valor numérico?

Resposta: Como o total de mangas é um número par (cinquenta e seis), então para que, ao retirar-se uma caixa, continue a haver um número de mangas susceptível de ser dividido em duas partes iguais, ter-se-á que vender uma das caixas contendo um número par de mangas: a de 6 ou a de 10 mangas. Se fosse a caixa contendo as 10 mangas restavam quarenta e seis peças de fruta para serem vendidas, divididas em dois grupos de vinte e três. Contudo, com as caixas existentes não conseguimos obter esse valor (vinte e três), o que implica que não seja esta a caixa a ser adquirida pela Rute.
Relativamente à caixa contendo 6 mangas, é precisamente a caixa a que a Rute faz referência. De facto, se for esta a ser adquirida por ela, o total de peças de fruta para venda passa a ser cinquenta, que origina dois grupos de vinte e cinco:
(a) Brasil – 21 + 1 + 3; (b) México – 15 + 10

1.4 - Quais as duas caixas que se devem vender, de modo que o total restante continue a permitir a obtenção de dois conjuntos com igual valor numérico?

Resposta: Temos que ver os vários casos em que, após a venda de duas caixas de mangas, ainda resulte um número par de mangas para poder ser subdividido em dois pequenos grupos de igual valor numérico:

Caixas vendidas	Total de mangas para vender	Total de mangas para cada grupo	Caixas de mangas do Brasil	Caixas de mangas do México
1 + 3	**52**	26 + 26		
1 + 6	49			
1 + 10	45			
1 + 15	**40**	20 + 20		
1 + 21	**34**	17 + 17		
3 + 6	47			
3 + 10	43			
3 + 15	**38**	19 + 19		
3 + 21	**32**	16 + 16	**15 + 1**	**10 + 6**
6 + 10	**40**	20 + 20		
6 + 15	35			
6 + 21	29			
10 + 15	31			
10 + 21	25			
15 + 21	**20**	10 + 10	**6 + 3 + 1**	**10**

1.5 – Quais as três caixas que se devem vender, de modo que o total restante continue a permitir a obtenção de dois conjuntos com igual valor numérico?

Resposta:

Caixas vendidas	Total de mangas para vender	Total de mangas para cada grupo	Caixas de mangas do Brasil	Caixas de mangas do México
1 + 3 + 6	**46**	23 + 23		
1 + 3 + 10	**42**	21 + 21	**21**	**15 + 6**
1 + 3 + 15	37			
1 + 3 + 21	31			
1 + 6 + 10	39			
1 + 6 + 15	**34**	17 + 17		
1 + 6 + 21	**28**	14 + 14		
1 + 10 + 15	**30**	15 + 15		
1 + 10 + 21	**24**	12 + 12		
1 + 15 + 21	19			
3 + 6 + 10	37			
3 + 6 + 15	**32**	16 + 16		
3 + 6 + 21	**26**	13 + 13		
3 + 10 + 15	**28**	14 + 14		
3 + 10 + 21	**22**	11 + 11		
3 + 15 + 21	17			
6 + 10 + 15	25			
6 + 10 + 21	19			
6 + 15 + 21	**14**	7 + 7		
10 + 15 + 21	**10**	5 + 5		

1.6 - Qual a caixa a vender, de modo a que o total restante permita a obtenção de dois conjuntos em que um deles tem apenas mais uma manga que o outro?

Resposta: Temos que ter em consideração que, após a caixa vendida, o número de mangas restantes tem que permitir que se encontre um determinado valor de "x" e o seu sucessor "x + 1". Logo, o valor restante de mangas não pode ser um valor par, pois se assim for não permite a obtenção de um valor inteiro de "x" na expressão "2x + 1":

Caixa vendida	Total de mangas para vender	Total de mangas para cada grupo	Caixas de mangas do Brasil	Caixas de mangas do México
1	55	27 + 28	15 + 10 + 3	21 + 6
3	53	26 + 27	15 + 10 + 1	21 + 6
6	50			
10	46			
15	41	20 + 21	10 + 6 + 3 + 1	21
21	35	17 + 18	10 + 6 + 1	15 + 3

1.7 - Descobrir dois processos que permitiam a obtenção de um conjunto, superior em duas mangas a outro conjunto, depois de se vender a caixa com 10 mangas.

Resposta: Se a caixa adquirida for a de 10 mangas, ficam quarenta e seis mangas por vender. Este valor tem que ser o resultado da seguinte expressão "x + (x + 2)", ou seja: "2x + 2". Igualando a expressão ao 46, fica que "2x + 2 = 46", de onde se obtém para "x" o valor 22. Logo o "x + 2" será o valor 24. Encontramos as seguintes possibilidades:
(a) 22 = (15 + 6 + 1); 24 = (21 + 3) (b) 22 = (21 + 1); 24 = (15 + 6 + 3)

1.8 - Será que a venda da caixa de 10 mangas é a única que permite a obtenção de dois conjuntos em que um tem apenas mais duas mangas que o outro?

Resposta: A caixa a ser vendida tem que ser a que contém um número par de frutos, para que, ao igualar-se à expressão "2x + 2", o valor de "x" possa ser um número inteiro. Como a caixa de 10 mangas já verificou esta condição, resta a caixa de 6. Se se vender esta caixa, o total de mangas para venda passa a ser de cinquenta. Logo, igualando-se este valor à expressão acima, obtemos para "x" o valor 24 e para "x + 2" o valor 26:
(a) Brasil - 24 = 21 + 3 (b) México - 26 = 15 + 10 + 1

1.9 - Qual a caixa a ser vendida, de modo a que o total restante permita a obtenção de dois grupos em que um tem mais três mangas que o outro?

Resposta: A caixa a ser vendida tem que ser tal que, depois de subtrair três ao total de mangas por vender, se obtenha um número par. Falamos pois, da expressão: "x + (x + 3)" ou "2x + 3". Fazendo-se a respectiva tabela:

Caixa vendida	Total de mangas para vender	Total de mangas para cada grupo	Caixas de mangas do Brasil	Caixas de mangas do México
1	**55**	26 + 29		
3	**53**	25 + 28	**10 + 15**	**21 + 6 + 1**
6	50			
10	46			
15	**41**	19 + 22	**10 + 6 + 3**	**21 + 1**
21	**35**	19 + 16	**10 + 6 + 3**	**15 + 1**

1.10 - Quais as duas caixas a vender para que o total restante permita a obtenção de dois grupos, cujos números de mangas sejam ambos múltiplos de sete?

Resposta: Este novo desafio leva a que tenhamos que ter em consideração que o conjunto de mangas resultante da venda de duas caixas deve originar um valor que terá que ser a soma de dois múltiplos de sete, sendo eles consecutivos ou não:

Caixas vendidas	Total de mangas para vender	Total de mangas para cada grupo	Caixas de mangas do Brasil	Caixas de mangas do México
1 + 3	52			
1 + 6	**49**	**21 + 28** 14 + 35 7 + 42	**21**	**15 + 10 + 3**
1 + 10	45			
1 + 15	40			
1 + 21	34			
3 + 6	47			
3 + 10	43			
3 + 15	38			
3 + 21	32			
6 + 10	40			
6 + 15	**35**	**21 + 14** 28 + 7	**21**	**10 + 3 + 1**
6 + 21	29			
10 + 15	31			
10 + 21	25			
15 + 21	20			

Os múltiplos de sete encontrados são consecutivos!

1.11 - Quais as duas caixas a vender para que o total sobrante permita a criação de dois grupos cujos números de mangas sejam ambos múltiplos de três?

Resposta: Como sabemos que o número resultante de mangas tem que ser, também ele, um múltiplo de três, por ser a soma de dois múltiplos de três, isso só ocorre se as caixas a vender forem a de 1 e de 10 mangas. Resultaria um total de quarenta e cinco mangas para serem vendidas, o que permitia obter três respostas válidas, (a) 15 + 30, (b) 18 + 27 e (c) 21 + 24, como evidencia a tabela seguinte:

Caixas vendidas	Total de mangas para vender	Total de mangas para cada grupo	Caixas de mangas do Brasil	Caixas de mangas do México
1 + 10	45	3 + 42		
		6 + 39		
		9 + 36		
		12 + 33		
		15 + 30	**15**	**21 + 6 + 3**
		18 + 27	**15 + 3**	**21 + 6**
		21 + 24	**21**	**15 + 6 + 3**

1.12 - Quais as duas caixas a vender para que o total restante permita a obtenção de dois conjuntos em que um deles tem apenas mais duas mangas que o outro?

Resposta: As caixas a ser vendidas têm que ser tais que permitam que subtraindo o valor dois ao total de mangas por vender, se obtenha um número par. Isto implica que falemos novamente da expressão: "x + (x + 2)" ou "2x + 2":

Caixas vendidas	Total de mangas para vender	Total de mangas para cada grupo	Caixas de mangas do Brasil	Caixas de mangas do México
1 + 3	**52**	25 + 27	**15 + 10**	**21 + 6**
1 + 6	49			
1 + 10	45			
1 + 15	**40**	19 + 21	**10 + 6 + 3**	**21**
1 + 21	**34**	16 + 18	**10 + 6**	**15 + 3**
3 + 6	47			
3 + 10	43			
3 + 15	**38**	18 + 20		
3 + 21	**32**	15 + 17	**15**	**10 + 6 + 1**
6 + 10	**40**	19 + 21	**15 + 3 + 1**	**21**
6 + 15	35			
6 + 21	29			
10 + 15	31			
10 + 21	25			
15 + 21	**20**	9 + 11	**6 + 3**	**10 + 1**

1.13 - Quais as três caixas a vender para que o total restante permita a obtenção de dois conjuntos em que um tem apenas mais uma manga que o outro?

Resposta: Temos que recorrer novamente à tabela, pois só interessam as caixas que, após serem adquiridas, deixam um número ímpar de mangas para venda:

Caixas vendidas	Total de mangas para vender	Total de mangas para cada grupo	Caixas de mangas do Brasil	Caixas de mangas do México
1 + 3 + 6	46			
1 + 3 + 10	42			
1 + 3 + 15	**37**	18 + 19		
1 + 3 + 21	**31**	15 + 16	**15**	**10 + 6**
1 + 6 + 10	**39**	19 + 20		
1 + 6 + 15	34			
1 + 6 + 21	28			
1 + 10 + 15	30			
1 + 10 + 21	24			
1 + 15 + 21	**19**	9 + 10	**6 + 3**	**10**
3 + 6 + 10	**37**	18 + 19		
3 + 6 + 15	32			
3 + 6 + 21	26			
3 + 10 + 15	28			
3 + 10 + 21	22			
3 + 15 + 21	**17**	8 + 9		
6 + 10 + 15	**25**	12 + 13		
6 + 10 + 21	**19**	9 + 10		
6 + 15 + 21	14			
10 + 15 + 21	10			

1.14 - Quais as três caixas a vender para que o total restante possibilite a formação de dois grupos distintos, sendo um maior que o outro em apenas duas mangas?

Resposta: As três caixas a ser vendidas têm que permitir que ao subtrair duas unidades ao total de mangas por vender, se obtenha um número par, de modo a encontrar-se o valor de "x" e o valor de "x + 2":

Caixas vendidas	Total de mangas para vender	Total de mangas para cada grupo	Caixas de mangas do Brasil	Caixas de mangas do México
1 + 3 + 6	**46**	22 + 24		
1 + 3 + 10	**42**	20 + 22		
1 + 3 + 15	37			
1 + 3 + 21	31			
1 + 6 + 10	39			
1 + 6 + 15	**34**	16 + 18		
1 + 6 + 21	**28**	13 + 15	**10 + 3**	**15**
1 + 10 + 15	**30**	14 + 16		
1 + 10 + 21	**24**	11 + 13		
1 + 15 + 21	19			
3 + 6 + 10	37			
3 + 6 + 15	**32**	15 + 17		
3 + 6 + 21	**26**	12 + 14		
3 + 10 + 15	**28**	13 + 15		
3 + 10 + 21	**22**	10 + 12		
3 + 15 + 21	17			
6 + 10 + 15	25			
6 + 10 + 21	19			
6 + 15 + 21	**14**	6 + 8		
10 + 15 + 21	**10**	4 + 6	**3 + 1**	**6**

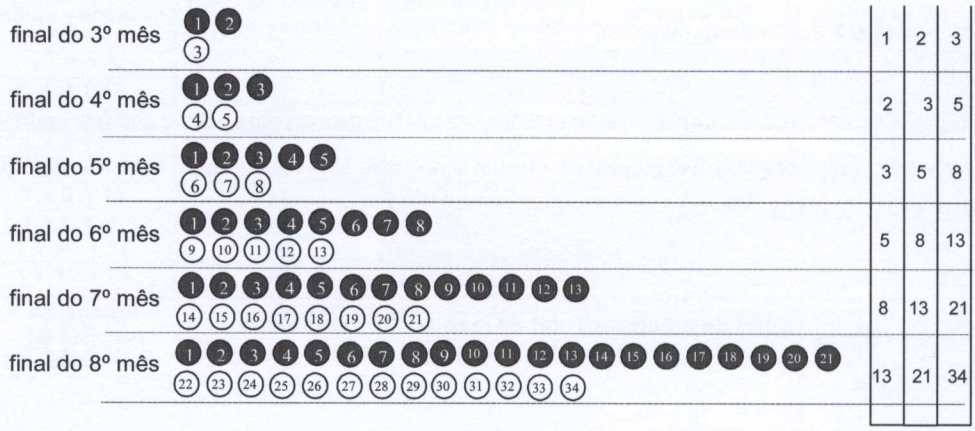
1.15 - Quais as três caixas a vender, de modo a que o total restante origine dois grupos em que um deles equivale à quarta parte do outro?

Resposta: Este novo desafio implica que se obtenha um total de mangas para vender que seja múltiplo de cinco, para poder originar dois grupos, em que um seja quatro vezes maior que o outro, ou seja, que este represente a quarta parte daquele:

Caixas vendidas	Total de mangas para vender	Total de mangas para cada grupo	Caixas de mangas do Brasil	Caixas de mangas do México
1 + 3 + 6	46			
1 + 3 + 10	42			
1 + 3 + 15	37			
1 + 3 + 21	31			
1 + 6 + 10	39			
1 + 6 + 15	34			
1 + 6 + 21	28			
1 + 10 + 15	**30**	6 + 24	**6**	**21 + 3**
1 + 10 + 21	24			
1 + 15 + 21	19			
3 + 6 + 10	37			
3 + 6 + 15	32			
3 + 6 + 21	26			
3 + 10 + 15	28			
3 + 10 + 21	22			
3 + 15 + 21	17			
6 + 10 + 15	**25**	5 + 20		
6 + 10 + 21	19			
6 + 15 + 21	14			
10 + 15 + 21	**10**	2 + 8		

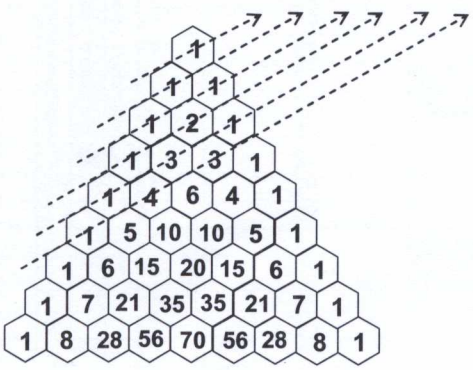
2 - Numa quinta existe um casal de coelhos. Supondo que todos os meses, a partir do segundo mês de vida, cada casal dá origem a um novo casal de coelhos, ao fim de um ano quantos casais de coelhos estão na quinta?

	○ casais de c. jovens	● casais de c. adultos	Total de casais de c.
início ①	1	0	1
final do 1º mês ● 1	0	1	1
final do 2º mês ● 1 ○ 2	1	1	2



Mês	Número de casais de coelhos jovens	Número de casais de coelhos adultos	Total de casais
(início)	1	0	1
(final do 1º)	0	1	1
(final do 2º)	1	1	2
(final do 3º)	1	2	3
(final do 4º)	2	3	5
(final do 5º)	3	5	8
(final do 6º)	5	8	13
(final do 7º)	8	13	21
(final do 8º)	13	21	34
(final do 9º)	21	34	55
(final do 10º)	34	55	89
(final do 11º)	55	89	144
(final do 12º)	89	144	223

3 - Considere o triângulo de Pascal seguinte e escreva à frente de cada seta a soma dos números atravessados pelas setas. O que se conclui?



Resposta: 1 1 2 3 5 8 - Esta sequência de números é a mesma do problema dos coelhos.

4 - Se considerar que encontrou uma regularidade, escreva uma sequência com doze desses termos.

Resposta: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 223.

5 - Explique como se obtém o termo seguinte da sequência.

Resposta: Obtém-se o termo seguinte pela adição dos dois termos imediatamente anteriores: 144 + 223 = 367

6 - Faça uma pesquisa na Internet (www.google.pt) e procure por "números de Fibonacci". O que se concluiu?

Resposta: Sugestões:
http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm203/numeros.htm#A%20espiral%20de%20Fibonacci
http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm41/problemas.htm
http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib2.htm

7 - Escreva um número qualquer, ao acaso. Acrescente-lhe mais nove números tendo em conta o padrão de Fibonacci.

Resposta: Por exemplo: 4; 4; 8; 12; 20; 32; 52; 84; 136; 220

7.1 - Calcule a soma desses números.

Resposta: 4 + 4 + 8 + 12 + 20 + 32 + 52 + 84 + 136 + 220 = 572

7.2 - Compare esta soma com o sétimo termo da sequência. Será que existe alguma relação?

Resposta: É 11 vezes maior (sempre): 572 = 11 x 52

7.3 - Para que isto funcione, os dois primeiros números têm que ser iguais?

Resposta:

Não. Por ex: 6 + 8 + 14 + 22 + 36 + 58 + 94 + 152 + 246 + 398 = **1034**

↓

7º termo ⟶ *94 x 11 = **1034***

7.4 – Será que também funciona a partir de quaisquer dois números consecutivos da sequência de Fibonacci?

Resposta: Sequência de Fibonacci: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 233; 377; ... Começando, por exemplo, por 8 e 13, temos:

$8 + 13 + 21 + 34 + 55 + 89 + 144 + 233 + 377 + 610 = \mathbf{1584}$

↓

7º termo ⟶ $144 \times 11 = \mathbf{1584}$

7.5 – Será que também funciona a partir de quaisquer dois números?

Resposta: Começando, por exemplo, por 10 e 2, temos:

$10 + 2 + 12 + 14 + 26 + 40 + 66 + 106 + 172 + 278 = \mathbf{726}$

↓

7º termo ⟶ $66 \times 11 = \mathbf{726}$

8 - Como se obtém de forma rápida o produto de dois ou mais factores iguais a 11?

Ex.: 11 x 11; 11 x 11 x 11; 11 x 11 x 11 x 11 ; ...

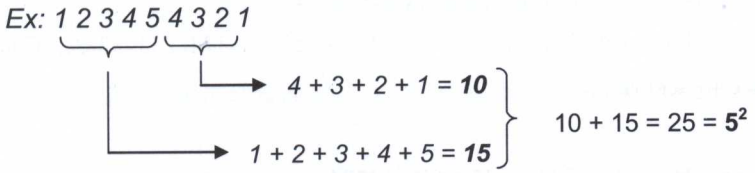
Resposta: Nas linhas do triângulo de Pascal até à quinta linha.

9 - Descubra a regularidade que existe nos seguintes produtos

11 x 11 =
111 x 111 =
1111 x 1111 =
...
Resposta:
11 x 11 = 121
111 x 111 = 12321
1111 x 1111 = 1234321
11111 x 11111 = 123454321

...

Cada um dos produtos é uma capicua cuja soma dos seus algarismos é sempre um número quadrado, ou seja, a soma de dois números triangulares consecutivos.

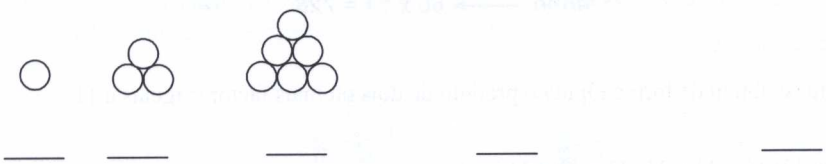


10 - Como encontrar capicuas a partir de um número?

Resposta: Adicionar ao número dado o número obtido pela inversão dos seus algarismos. Repetir esta operação com as somas obtidas até encontrar uma capicua.

4.4 - Outras conexões matemáticas

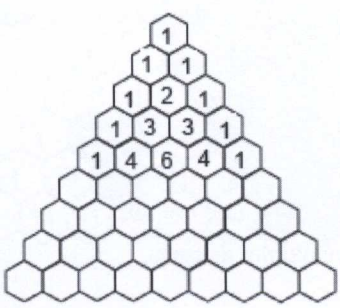
1 - Acrescente duas figuras à seguinte sequência:



2 - Escreva os números que correspondem à quantidade de círculos (**O**) existentes em cada figura.

3 - Tendo em atenção a forma das figuras anteriores, que nome se pode dar a estes números?

4 - Complete as linhas do triângulo seguinte:



5 - No triângulo anterior pinte a sequência dos números triangulares.

6 - Pinte, com outra cor, a sequência dos números naturais.

7 - Relacione a sequência dos números naturais com a sequência dos números triangulares.

8 - Uma das linhas do triângulo é 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1. Qual é a linha seguinte?

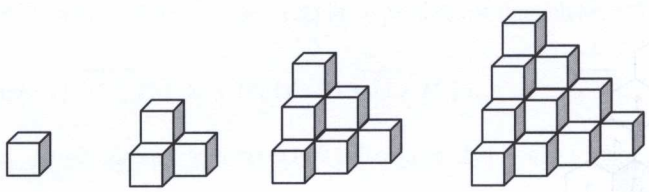
9 - Adicione os valores de cada uma das linhas. O que se pode concluir?

10 - Qual será o valor da soma da 10ª linha?

11 - Reproduza um triângulo idêntico (com 15 linhas) e pinte os múltiplos de cinco.

12 - Que outros padrões consegue descobrir?

13 - Considere a seguinte sequência de construções com cubos e preencha os espaços com o número de cubos de cada figura.



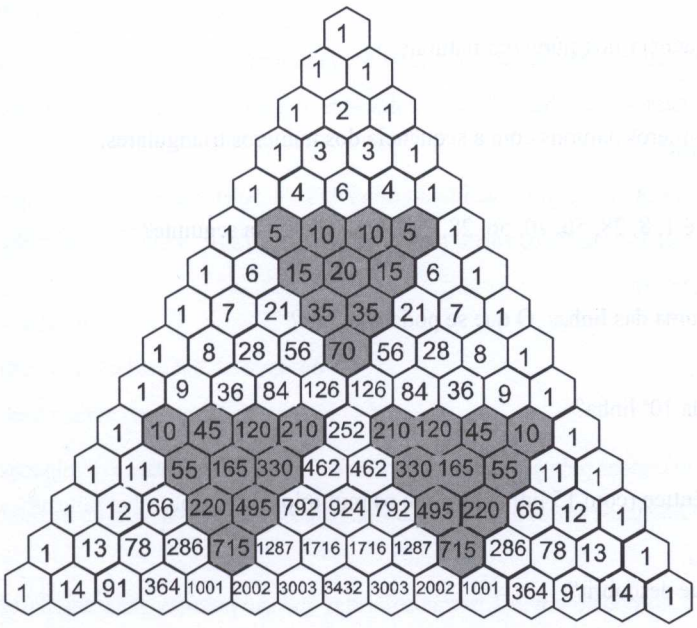
____ ____ ____ ____ ____ ____

14 - Consegue identificar, no triângulo "mágico", os números que descobriu? Pinte-os.

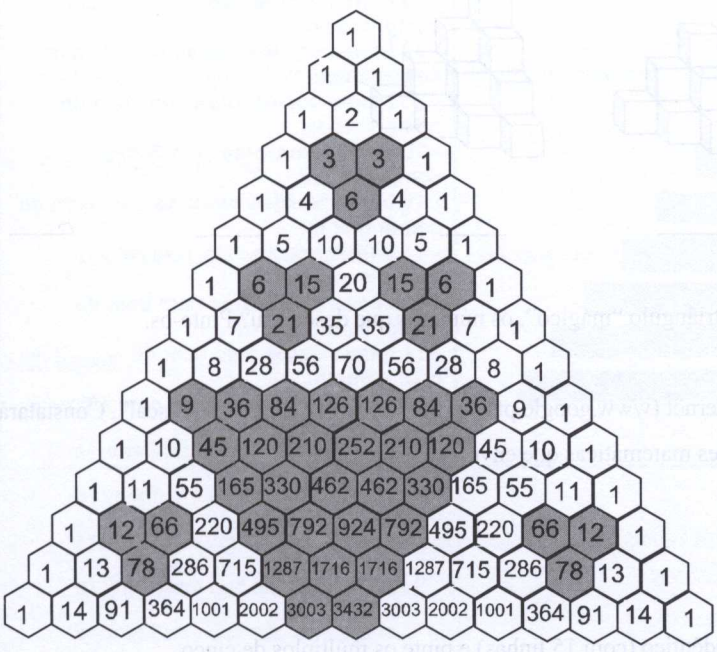
15 - Faça uma pesquisa na Internet (www.google.pt) e procure por "Triângulo de Pascal". Constatará que existem muitas explorações matemáticas que envolvem este triângulo.

Algumas resoluções:

11 - Reproduza um triângulo idêntico (com 15 linhas) e pinte os múltiplos de cinco.



12 - Que outros padrões consegue descobrir?



5 - *Conceito de número*

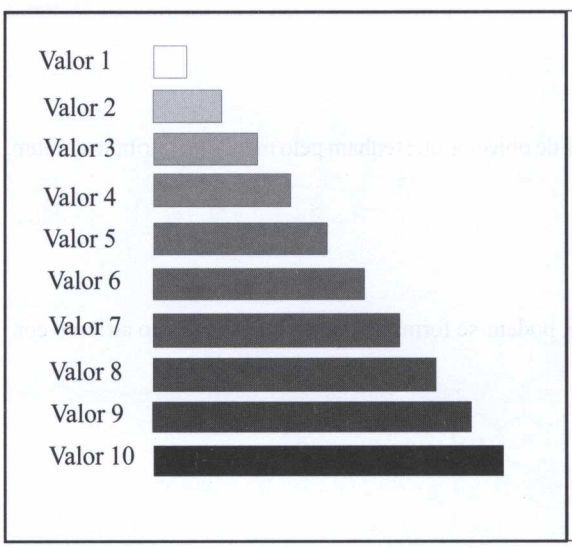
Número é a propriedade que caracteriza dois conjuntos equipotentes, isto é, conjuntos que têm a mesma quantidade de elementos – cardinal. Podem colocar-se em correspondência biunívoca ou correspondência termo a termo.

O conceito de número começa por ser introduzido ao nível da Educação Pré-escolar, pelo que se assume como fundamental trabalhar-se antes os vários conceitos pré-numéricos. Vamos abordar este assunto através do material Cuisenaire.

Material Cuisenaire:

As barras Cuisenaire foram criadas pelo professor belga Émile Georges Cuisenaire e divulgadas pelo professor espanhol Caleb Gattegno, em 1952, tentando dar resposta à necessidade de ensinar Matemática de uma forma lúdica.

É um material estruturado, composto por 241 barras coloridas que são prismas quadrangulares com 1cm de aresta na base, com 10 cores e 10 comprimentos diferentes, distribuídos do seguinte modo:



- 50 barras **brancas** com 1cm de comprimento;
- 50 barras **vermelhas** com 2cm de comprimento;
- 33 barras **verdes claras** com 3cm de comprimento;
- 25 barras **cor-de-rosa** com 4cm de comprimento;
- 20 barras **amarelas** com 5cm de comprimento;
- 16 barras **verdes escuras** com 6cm de comprimento;
- 14 barras **pretas** com 7cm de comprimento;
- 12 barras **castanhas** com 8cm de comprimento;
- 11 barras **azuis** com 9cm de comprimento;
- 10 barras **cor-de-laranja** com 10cm de comprimento;

5.1 - Conceitos pré-numéricos

Para que o conceito de número seja adquirido, compreendido e consolidado impõem-se como pré-requisitos determinados conceitos, nomeadamente:

- classificação (noção de conjunto)

simples – um atributo (ex: cor, forma...)

múltipla – mais que um atributo

- comparação (entre dois ou mais seres)

- seriação (completar séries de figuras)

- ordenação

crescente (utilização do símbolo <)

decrescente (utilização do símbolo >)

- transitividade $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ [$a < b$ e $b < c$ então $a < c$]

- conservação

quantidade (correspondência termo a termo)

volume

5.1.1 - Classificação

Classificar implica fazer agrupamentos de objectos que tenham pelo menos um atributo comum.

A – Classificação Simples

Tendo em conta o material Cuisenaire, podem-se formar conjuntos atendendo ao atributo cor.

Actividades:

1 - Escolha:

a) uma barra de cor azul;

b) uma barra de cor vermelha;

c) uma barra cor-de-rosa e outra de cor castanha. São iguais? Em que se diferenciam?;

d) uma barra que não seja amarela;

e) uma barra que não seja verde.

2 – Forme grupos de:

a) barras vermelhas;

b) barras azuis;

c) barras que tenham a mesma cor;

d) barras verdes e barras cor-de-rosa;

e) uma barra verde ou uma barra cor-de-rosa;

f) uma barra amarela e uma barra preta;

g) barras que não sejam pretas;

h) barras que não sejam azuis nem cor-de-laranja.

B – Classificação Múltipla:

Para que os alunos consigam interiorizar este conceito têm que lidar simultaneamente com pelo menos dois atributos comuns a objectos:

***Actividades*:**

1 – Forme grupos de:

a) barras com a mesma cor e tamanho cinco.

5.1.2 - Comparação

Este conceito pressupõe a identificação do atributo a comparar. No caso do material Cuisenaire podemos comparar o atributo tamanho.

***Actividades*:**

1 - Escolha:

a) uma barra mais comprida que a barra azul;

b) uma barra mais comprida que a barra verde clara;

c) uma barra menos comprida que a barra amarela;

d) uma barra menos comprida que a barra castanha;

e) as barras mais compridas que a barra preta;

f) as barras menos compridas que a barra cor-de-rosa;

g) uma barra mais curta que a barra amarela;

h) todas as barras mais curtas que a barra amarela;

i) uma barra mais curta que a barra branca (pedir explicação em relação à resposta);

j) uma barra mais comprida que a barra cor-de-laranja (pedir explicação em relação à resposta);

k) de entre um grupo de quatro peças diferentes (branca, vermelha, verde clara e cor-de-rosa), a menos comprida;

l) de entre um grupo de cinco peças (de cores castanha, azul, branca e vermelha), duas que tenham igual comprimento;

m) de entre um grupo de quatro peças (verde escura, verde clara, cor-de-rosa e amarela), a mais comprida;

n) de entre um grupo de cinco peças (de cores castanha, azul, branca e vermelha), as duas que tenham menor comprimento.

5.1.3 - Seriação

Este conceito implica que se identifique um padrão e se lhe dê continuidade.

Actividades:

1 – Complete os seguintes padrões (usando as barras Cuisenaire):

a) verde clara – amarela – preta – verde clara – _____ – _____

b) amarela – vermelha – azul – vermelha – amarela – _____ – _____

c) azul – _____ – preta – verde escura – azul – castanha – _____ – _____

d) branca – branca – amarela – azul – azul – _____ – branca – _____ – _____

5.1.4 - Ordenação

Este conceito implica que se distribuam várias peças segundo um determinado atributo (tamanho):

Actividades:

1 – Ordene as seguintes barras, começando da menor para a maior (ordem crescente):

a) azul – verde escura – castanha – amarela – vermelha;

b) cor-de-rosa – branca – preta – verde clara.

2 – Ordene as seguintes barras, começando da maior para a menor (ordem decrescente):

a) preta – cor-de-laranja – branca – azul;

b) vermelha – castanha – amarela – preta.

3 – Complete a seguinte ordenação de barras:

a) castanha - _____ - verde escura - _____ - cor-de-rosa;
b) branca - _____ - _____ - cor-de-rosa – amarela.

5.1.5 - Transitividade

Este conceito implica a comparação de dois entes extremos, através de um terceiro ente, que se situa entre eles.

***Actividades*:**

1 – Conceba três actividades para trabalhar este conceito.

Sugestão: se a barra amarela é menor que a verde escura e a verde escura é menor que a preta, qual é a barra menor, a amarela ou a preta?

5.1.6 – Correspondência termo a termo

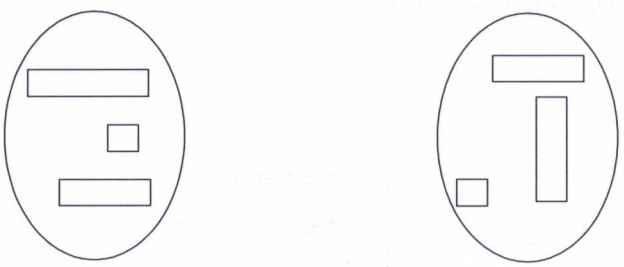
Este conceito implica a comparação, termo a termo, entre os elementos de dois conjuntos.

***Actividades*:**

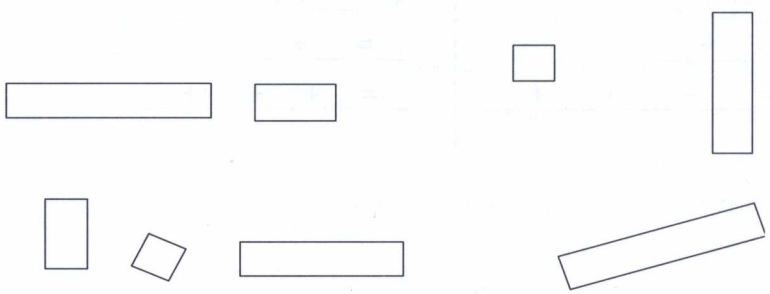
1 – Faça corresponder (através de setas) a cada elemento de um dos conjuntos um e um só elemento do outro conjunto:

2 – Pinte, com as cores respectivas, cada uma das barras das alíneas anteriores.

a)



b)

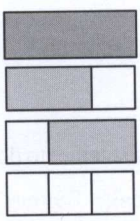


6 - Composição e decomposição de números

De acordo com Oliveira (2006) a utilização do material Cuisenaire estende-se a vários conteúdos entre os quais destacam-se: fazer e desfazer construções, fazer construções a partir de representações no plano, cobrir superfícies desenhadas em papel quadriculado, medir áreas e volumes, trabalhar simetrias, construir gráficos de colunas, estudar fracções e decimais, estudar as propriedades das operações, efectuar a decomposição de números, efectuar a ordenação de números, estudar e comparar "partes de" e resolver problemas" (p.171).

Em primeiro lugar vamos usar este material para o tema da composição e decomposição de números.

1 – Complete tomando como exemplo a primeira igualdade.



Vc = V + B

Vc = B + ___

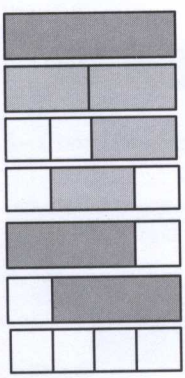
Vc = B + ___ + ___

3 = 2 + 1

3 = 1 + ___

3 = ___ + ___ + ___

2 – Complete tomando como exemplo a primeira igualdade.



R = V + V

R = B + ___ + ___

R = B + ___ + ___

R = Vc + ___

__ = __ + __

__ = ___ + ___ + ___ + ___

4 = 2 + 2

4 = 1 + ___ + ___

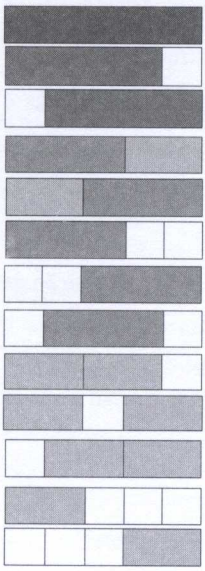
4 = 1 + ___ + ___

4 = ___ + 1

__ = __ + __

__ = __ + __ + __ + __

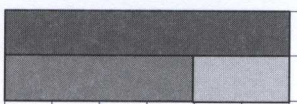
3 – De quantas maneiras podemos obter o tamanho da barra amarela usando-se o material Cuisenaire?



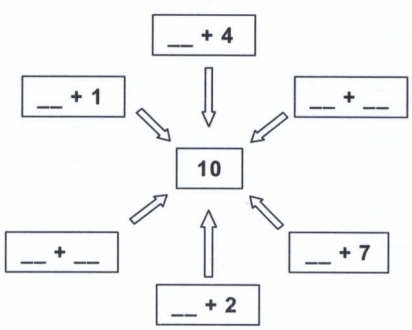
A = R + B
A = ___ + R
A = ___ + ___
___ = ___ + ___
___ = ___ + ___ + ___
___ = ___ + ___ + ___
___ = ___ + ___ + ___
___ = ___ + ___ + ___
___ = ___ + ___ + ___
___ = ___ + ___ + ___
___ = ___ + ___ + ___ + ___
___ = ___ + ___ + ___ + ___

5 = 4 + 1
5 = ___ + ___
5 = ___ + ___
___ = ___ + ___
___ = ___ + ___ + ___
___ = ___ + ___ + ___
___ = ___ + ___ + ___
___ = ___ + ___ + ___
___ = ___ + ___ + ___
___ = ___ + ___ + ___
___ = __ + __ + __ + __
___ = __ + __ + __ + __

4 – Desenhe 3 maneiras para podermos obter a barra verde-escura usando o material Cuisenaire. Escreva as adições correspondentes às decomposições.

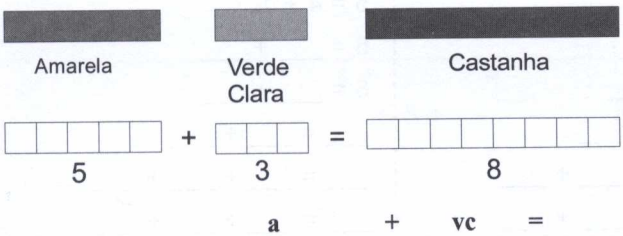
	A barra verde escura vale 6
	6 = 4+2

5 – Complete com os números que faltam:



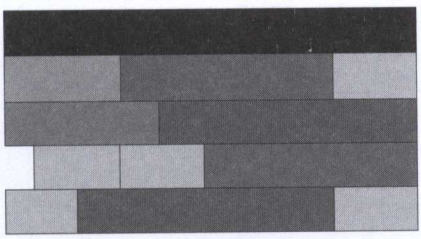
7 – Adições envolvendo o Material Cuisenaire

"Amarela + Verde-clara = Castanha"

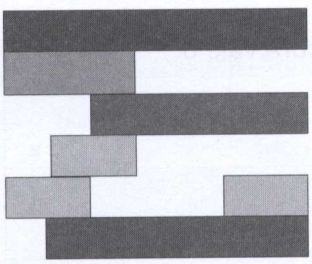


a + vc = c

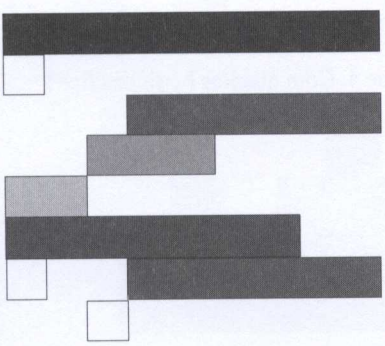
1 – Quais as adições representadas no tapete desenhado? (ver página 72)



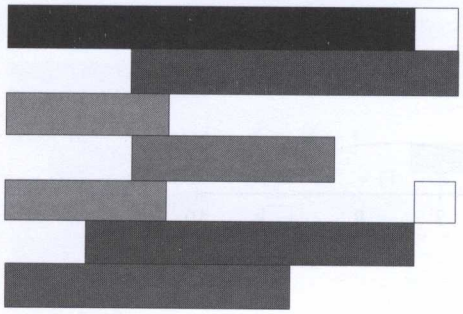
2 – Complete com as barras e escreva as adições correspondentes. (ver página 72)



3 – Complete com as barras e escreva as adições correspondentes. (ver página 72)



4 – Complete com as barras e escreva as adições correspondentes. (ver página 72)



___ + 8

4 + ___

___ + 5 + ___

4 + ___ + 1

___ + 8 + ___

7 + ___

5 – Complete:

4 + 1 = ___

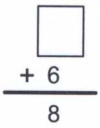
5 + 1 + ___ = 7

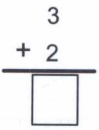
___ + 2 = 8

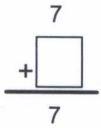
7 + ___ = 7

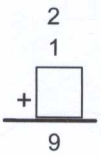
3 + ___ + ___ = 9

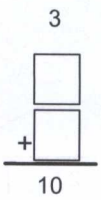
6 + ___ = 7

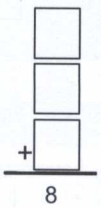












6 – Complete:

37 = 30 + ___

45 = ___ + 5

27 + ___ = 24 + ___

18 = ___ + ___

19 + ___ = ___ + 26

___ + 3 + ___ = ___ + ___ + ___

___ + ___ = 29

62 = ___ + ___

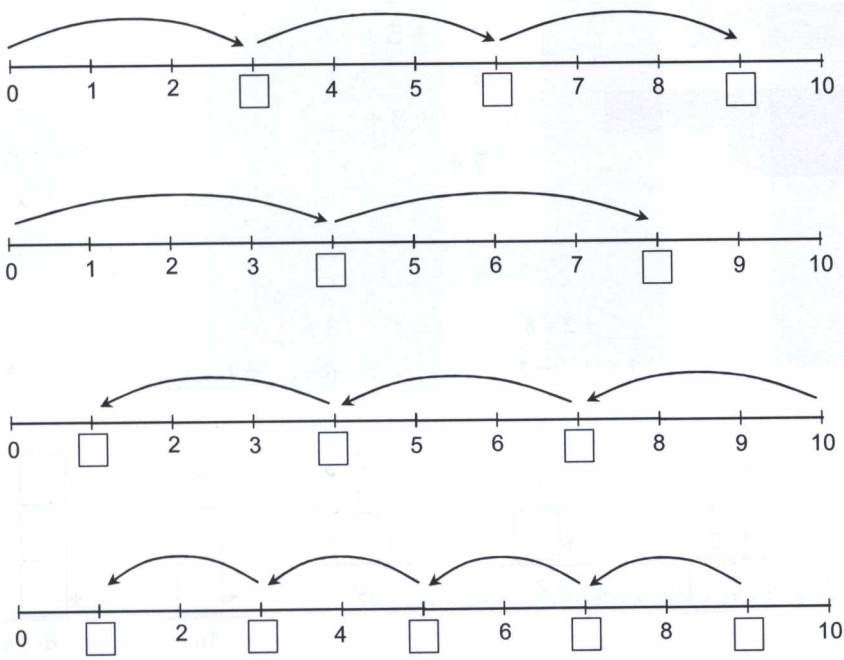
___ = 30 + 9

___ + ___ = ___ + ___

7 – Tenho 3 berlindes. O João dá-me dois e a Cristina oferece-me 4. Com quantos berlindes fico?

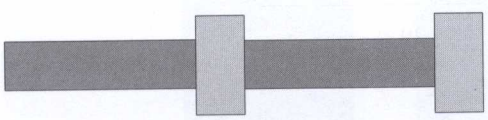
8 – Padrões envolvendo o Material Cuisenaire

1 – Complete:

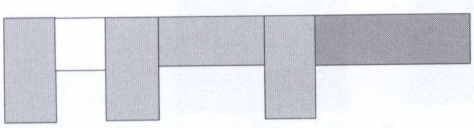


2 – Continue, colocando barras:

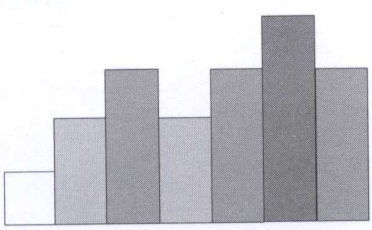
2.1 –



2.2 –

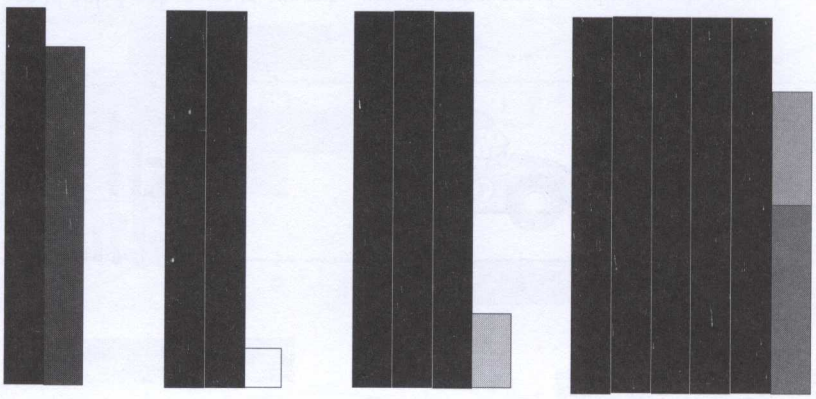


2.3 –



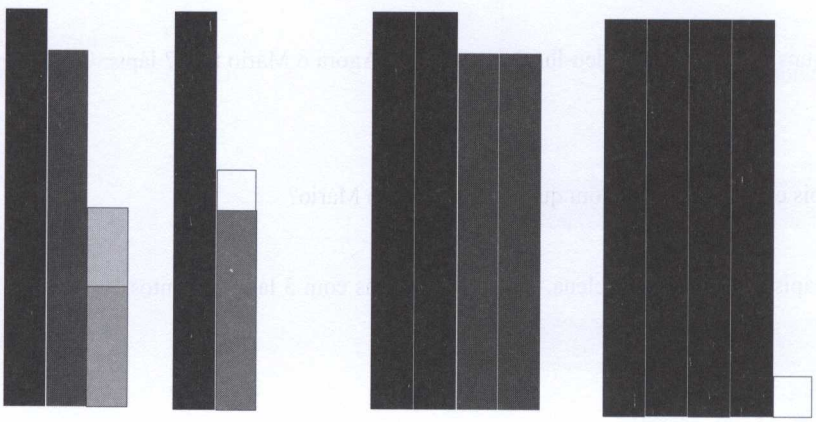
9 – Contagens envolvendo o Material Cuisenaire

1 – Escreva os números que correspondem às seguintes representações:



____ ____ ____ ____

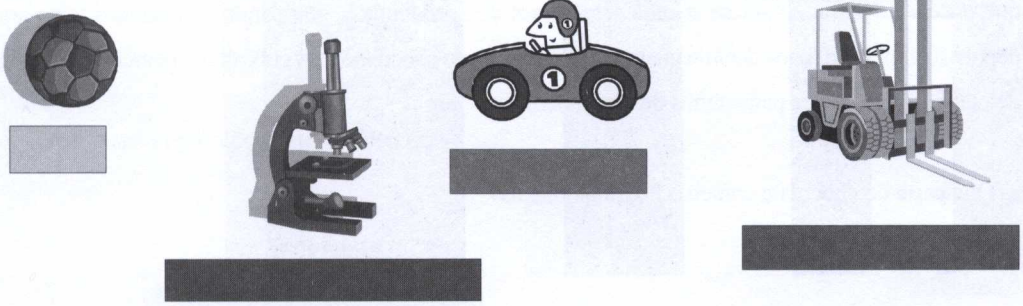
2 – Escreva os números que correspondem às seguintes representações:



____ ____ ____ ____

10 – Situações problemáticas envolvendo o Material Cuisenaire *(adaptado de Bermejo e Bermejo, in Bermejo, 2004, p. 57)*

1 – O Francisco tem 12 euros e quer comprar prendas para o João que faz anos. O que é que pode comprar?



2 – O Mário tinha 4 lápis. A Helena deu-lhe 3 novos lápis. Quantos lápis tem agora o Mário?

3 – O Mário tinha 3 lápis. A Helena deu-lhe alguns novos lápis. Se o Mário tem agora 7 lápis, quantos lápis lhe deu a Helena?

4 – O Mário tinha alguns lápis. A Helena deu-lhe 3 novos lápis. Agora o Mário tem 7 lápis. Quantos lápis tinha no início?

5 – O Mário tem 7 lápis e dá 3 à Helena. Com quantos lápis fica o Mário?

6 – O Mário tinha 7 lápis e dá alguns à Helena. Agora fica apenas com 3 lápis. Quantos lápis deu à Helena?

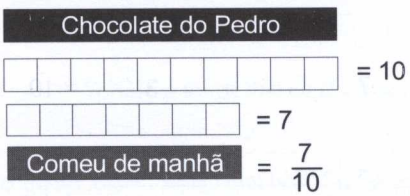
7 – O Mário tinha uma caixa de lápis. Deu 3 lápis à Helena. Agora ficou com 4 lápis. Quantos lápis havia na caixa?

11 – Estudo do conceito "parte de" envolvendo o Material Cuisenaire

"A mãe da Joana e do Pedro comprou-lhes dois chocolates iguais num supermercado. No dia seguinte, ambos repararam que cada chocolate podia dividir-se em dez pedacinhos iguais. Enquanto que o Pedro decidiu comer de manhã sete desses dez pedacinhos, guardando os restantes três para depois do almoço, a Joana decidiu guardar a maior parte do chocolate para essa altura, comendo somente de manhã, três dos dez pedacinhos do seu chocolate."

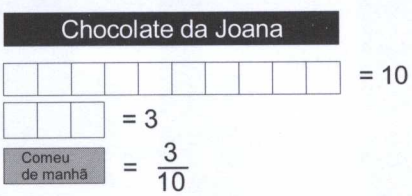
a) Que parte do chocolate comeu o Pedro de manhã?

Resolução:



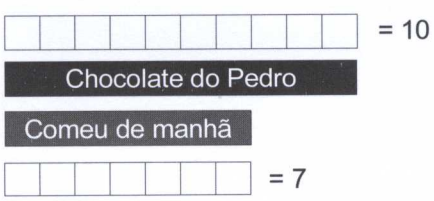
b) Que parte do chocolate comeu a Joana de manhã?

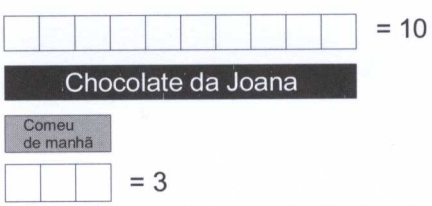
Resolução:



c) Quem comeu mais chocolate nessa parte do dia, o Pedro ou a Joana?

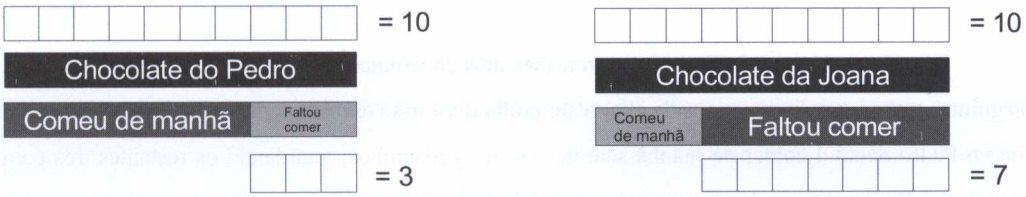
Resolução:



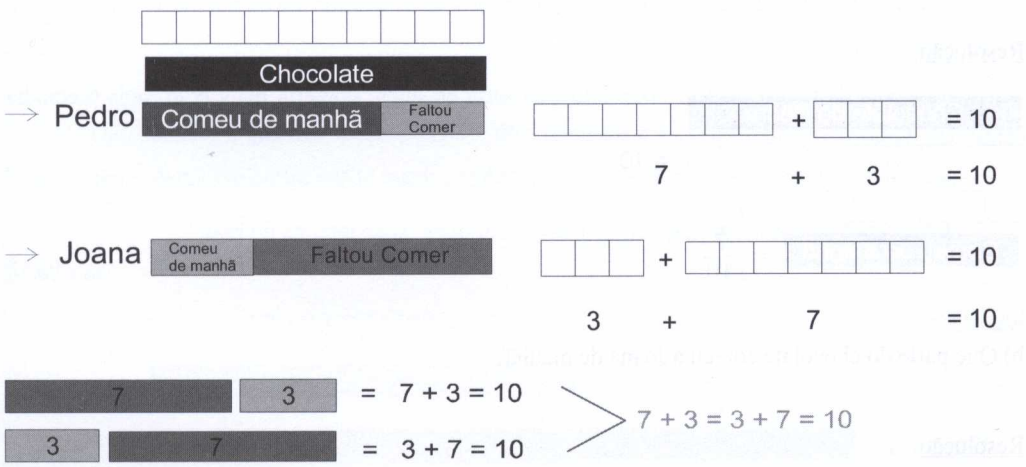


d) A quem sobrou mais chocolate para comer da parte de tarde?

Resolução:



e) Quem comeu mais chocolate no final desse dia?



12 – Estudo do conceito "fracções equivalentes" envolvendo o Material Cuisenaire

"Numa Segunda-Feira de aulas, o Ricardo tentava explicar ao seu melhor amigo, o Rui, um problema que se lhe tinha colocado à hora de almoço do dia anterior, a propósito de um bolo que comeram nesse dia. Então, contava o Ricardo:

• A minha mãe Irene, ao pegar na faca para partir o bolo disse que iria ser a pessoa que iria comer mais bolo, pois, das doze fatias que o compunham, pretendia comer metade.

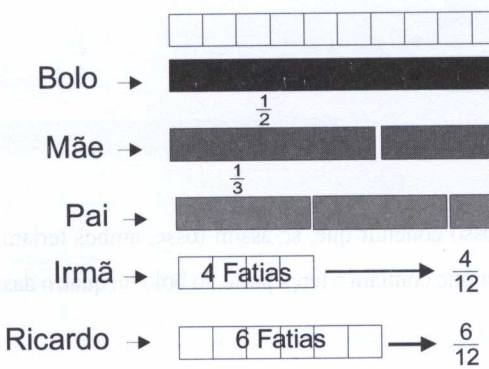
• O meu pai Artur, interrompeu-a dizendo que seria ele o que iria comer mais, uma vez que pretendia comer a terça parte do bolo.

• A minha irmã Mónica, como é muito gulosa disse que ela é que iria comer mais fatias, pois iria comer quatro fatias.

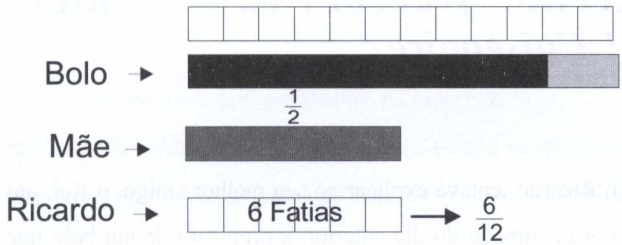
• Depois de muito pensar, disse-lhes que seria eu quem comeria mais bolo, pois pretendia comer seis fatias.

Consegues adivinhar, Rui, quem de nós comeu mais fatias inteiras do bolo?"

Resolução:



"Analisando o esquema anterior e, tendo em conta o tamanho do bolo, alguma dúvida ainda a haver estaria entre o que a tua mãe comeu e aquilo que tu comeste. Por um lado a tua mãe disse que dividia o bolo em duas partes iguais e comia uma delas. Por outro lado, tu comias seis das doze fatias. Tenho necessidade de comparar essas duas quantidades:"

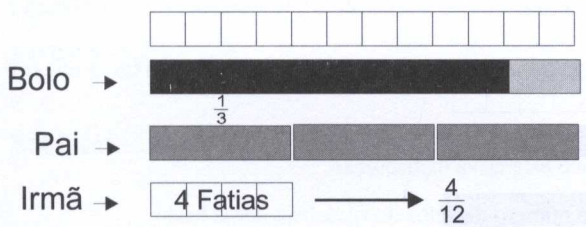


"Posso concluir que se assim fosse ambos teriam comido igual quantidade de bolo, pois seria igual dizer que comiam metade do bolo ou seis das doze fatias desse bolo."

$\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$

"Não acredito é que isso tenha ocorrido, pois o teu pai e a tua irmã não comeriam nada desse bolo! Já agora deixa-me perguntar-te quem pretendia comer mais bolo, o teu pai ou a tua irmã?"

Resolução:



"Tal como tu concluíste antes, também eu posso concluir que, se assim fosse, ambos teriam comido igual quantidade de bolo, pois seria igual dizer que comiam a terça parte do bolo ou quatro das doze fatias desse bolo."

$\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$

13 - Bases

1 - O Alfredo, coleccionador de selos, ao ter 6 selos avulso coloca-os numa mica plástica, que fica cheia. Ao ter seis micas completas coloca-as num dossiê, que fica completo. Ao ter seis dossiês coloca-os numa caixa para os guardar.

Sabendo que o filatelista tem **1** caixa, **3** dossiês, **5** micas e mais **2** selos avulso, represente no ábaco ou noutro material manipulativo (por exemplo calculador multibásico) a distribuição dos selos que compõem a sua colecção.

- Qual é o critério numérico que é utilizado na arrumação dos selos? Ou seja: a base em que está a trabalhar é...?

- Escreva o numeral que represente o número de selos do filatelista nessa base.

Resolução:

- O Alfredo está a trabalhar na base seis.

- $1352_{(seis)}$

2 - Imagine que o filatelista, utilizando o mesmo critério de arrumação tem 4 caixas, 3 micas e 1 selo.

- Represente no calculador multibásico esta nova distribuição.

- Escreva o numeral que represente o número de selos do filatelista nessa base.

Resolução:

caixas	dossiês	micas	selos
4		**3**	**1**
Unidades de ordem 3	Unidades de ordem 2	Unidades de ordem 1	Unidades simples ou de ordem 0
$4031_{(seis)}$			

3 - O Belmiro encontrou-se com o Alfredo numa feira de filatelia e revelou a este que tinha 356 selos agrupados de 8 em 8, usando também o critério das micas, dossiês e caixas.

- Qual a base em que o Belmiro está a trabalhar?

- Qual dos amigos tem mais selos?

Resolução:

- O Belmiro está a trabalhar na base oito.

- Em primeiro lugar temos que calcular quantos selos tem a Alfredo. Para isso temos que seguir o seguinte processo. O processo de agrupamento dos selos do Alfredo seria:

caixas	dossiês	micas	selos
1	**3**	**5**	**2**
Unidades de ordem 3	Unidades de ordem 2	Unidades de ordem 1	Unidades simples ou de ordem 0
1 x **6 x 6 x 6**	3 x **6 x 6**	5 x **6**	2 x 1
1×6^3 +	3×6^2 +	5×6^1 +	2×6^0
1 x 216 +	3 x 36 +	5 x 6 +	2 x 1 = **356**

1352 $_{(seis)}$ representam na base dez, 356 selos. Logo, ambos têm a mesma quantidade de selos.

4 – Qualquer computador representa um número utilizando apenas dois símbolos: 0 e 1. Para representar determinada quantia utiliza a seguinte representação 11101. Que quantia está efectivamente representada?

Resolução:

- $11101_{(dois)} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^0 = 29$

5 - O Carlos, que é um apaixonado por números, resolveu utilizar apenas três símbolos: 0, 1 e 2. Com eles representou a quantidade de moedas de prata que possui na sua colecção: 1002. Já o seu pai, também apaixonado por números e pela numismática, decidiu representar a quantidade de libras de ouro que tem, usando apenas os símbolos: 0, 1, 2, 3 e 4. Obteve a seguinte representação: 104

- Quantas moedas de prata tem o Carlos? Quantas libras de ouro tem o pai do Carlos?

Resolução:

- $1002_{(três)} = 1 \times 3^3 + 2 \times 3^0 = 27 + 2 = 29$
- $104_{(cinco)} = 1 \times 5^2 + 4 \times 5^0 = 29$

6 - Num encontro de professores, o Pedro e a Rita estavam a tentar adivinhar as idades um do outro e decidiram que cada um deveria representar a idade respectiva através de um quadro, simbolizando um calculador multibásico. Curiosamente, ambos fizeram a seguinte representação simbólica:

Vermelhas	Verdes	Amarelas
●	●	●●

Quando o Rui se juntou à conversa, foi-lhe pedido para representar a sua idade, num esquema do mesmo tipo. O Rui verificou que a sua representação era exactamente igual à dos seus amigos.

No entanto, o Pedro dizia que era mais velho que a Rita. Esta, por sua vez, afirmava que tinha mais idade que o Rui.

O Rui, professor já com dez anos de serviço, concluiu que os raciocínios do Pedro e da Rita estavam correctos e conseguiu dizer a idade de cada um.

Como é que a conclusão a que o Rui chegou pode estar correcta e qual terá sido o seu raciocínio?

Resolução:

- Idades por ordem: Rui < Rita < Pedro

$112_{(três)} = 3^2 + 3 + 2 = 14$

$112_{(quatro)} = 4^2 + 4 + 2 = 22$

$112_{(cinco)} = 5^2 + 5 + 2 = 32$

$112_{(seis)} = 6^2 + 6 + 2 = 44$

$112_{(sete)} = 7^2 + 7 + 2 = 58$

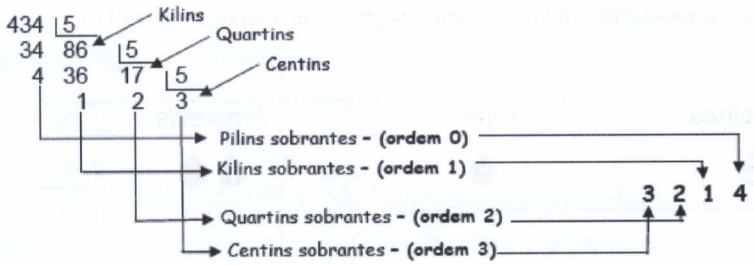
$112_{(oito)} = 8^2 + 8 + 2 = 74$

$112_{(nove)} = 9^2 + 9 + 2 = 9\,2$

- Com 10 anos de serviço a idade provável do Rui será 32
- Com 74 anos não é provável estar no activo.
- Então, Rita = 44 e Pedro = 58

7 - A Catarina foi passar férias ao planeta Yol. Para pagar a sua conta de hotel dirigiu-se à caixa multibancária mais próxima para levantar 434€. Sabe-se que neste planeta o dinheiro existe apenas nas seguintes notas: Pilin (1€), Kilin (5 Pilins), Quartin (5 Kilins) e Centin (5 Quartins). Tendo em conta que a máquina lhe deu o número mínimo possível de notas, quantas é que recebeu?

Resolução:



Então: $434 = 3214_{(cinco)}$

- Solução: Recebeu 3 + 2 + 1 + 4 = 10 notas

Mais actividades:

1 - Um avião desde que levanta voo no aeroporto de Lisboa até que aterra em Paris demora exactamente 8837 segundos. Sabendo que aterrou precisamente às 19h 45m, a que horas levantou voo em Lisboa? (Não se esqueça que em Paris é uma hora mais tarde).

2 – Calcule:

- $2231_{(cinco)} + 1434_{(cinco)} =$ _____ *(cinco)*
- $2201_{(três)} + 2202_{(três)} =$ _____ *(três)*
- $4231_{(cinco)} - 1434_{(cinco)} =$ _____ *(cinco)*
- $211_{(três)} - 102_{(três)} =$ _____ *(três)*

14 – Operação Subtracção

14.1 – Algoritmos da Subtracção

Método do empréstimo ou troca:

Ex: 73 - 46

Faz-se uma troca no aditivo de uma dezena por dez unidades:

73 – 46 = (70 + 3) - (40 + 6) =

= (60 + 13) - (40 + 6) =

= (60 - 40) + (13 - 6) =

= 20 + 7 = 27

Disposição

d	u
7	3
- 4	6
6	13
- 4	6
2	7

Algoritmo

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 6}\,\not{7}\,{\scriptstyle 13} \\ -\,4\;6 \\ \hline 2\;7 \end{array}$$

Método da compensação:

Teorema da invariância do resto – ***Numa subtracção, se adicionarmos o mesmo número ao aditivo e ao subtractivo a diferença não se altera.***

Ex: 73 – 46 = (73 + **10**) - (46 + **10**)

então:

73 - 46 = (70 + 3) - (40 + 6) =

= (70 + 3 + 10) - (40 + 6 + 10) =

=[70 + (10 + 3)] - [(40 + 10) + 6] =

= (70 +13) - (50 + 6) =

= (70 - 50) + (13 - 6) = 20 + 7 = 27

Disposição

	d	u
	7	3
	- 4	6
+1 d →	7	13
	- 5	6
	2	7

← +1 d

Algoritmo

$$\begin{array}{r} 7\,{\scriptstyle 13} \\ -\,{\scriptstyle 5}\not{4}\;6 \\ \hline 2\;7 \end{array}$$

NOTA: Método da compensação (teorema da invariância do resto) – é a técnica que habitualmente é usada.

- Curiosidade matemática (subtracção à moda antiga):

$$\begin{array}{r} 98706 \\ -\,6513 \\ \hline 92706 \\ -\,513 \\ \hline 92206 \\ -\,13 \\ \hline 92196 \\ -\,3 \\ \hline 92193 \end{array}$$

Actividades:

1 – Dê significado a cada um dos resultados das subtracções (diferença, resto e excesso) envolvidas na resolução dos seguintes problemas. Onde está o conceito de excesso, de diferença e resto nas seguintes situações problemáticas?

a) O sr. Joaquim, pequeno agricultor, produziu, no ano 2005, 2004 litros de vinho, dos quais engarrafou três quartos para venda. O que lhe sobrou é para consumo próprio. Com quantos litros de vinho ficou o senhor Joaquim? (*O conceito de resultado subjacente à operação de subtracção é o* ***resto***).

b) Acontece que o sr Joaquim tem apenas 600 garrafas de 0,75 litros para engarrafar o seu vinho. Verificou que as garrafas não eram suficientes para o engarrafar. O vinho que não conseguiu engarrafar ofereceu-o ao seu irmão. Que quantidade lhe ofereceu? (*O conceito de resultado subjacente à operação de subtracção é o* ***excesso***).

c) O sr. Joaquim em 2004 produziu 53,5 hectolitros de vinho. Quantos litros de vinho produziu a mais em relação ao ano 2005? (*O conceito de resultado subjacente à operação de subtracção é a* ***diferença***).

2 - Situações problemáticas envolvendo a subtracção (reflicta acerca da importância de cada uma delas para a apropriação do conceito de subtracção):

a) O João tem alguns berlindes no bolso e o António tem sete. O António tem mais 4 berlindes que o João. Quantos berlindes tem o João?

b) O João tem 18 berlindes e o António tem mais 5. Cada um deles ganhou 6 berlindes a jogar com os colegas. Quantos berlindes tem o António mais que o João?

c) A Rute tem 15 bonecos e oferece alguns à Inês e outros à Rita, ficando ainda com 5. Quantos bonecos ofereceu à Inês?

d) O Pedro tem 15,00€ para comprar material para a escola. Na papelaria vendem-se agrafadores a 2,00€, tubos de cola a 1,00€, estojos a 3,00€, cadernos a 2,50€ e afiadeiras a 0,50€. Que material pode comprar?

15 – Operação Multiplicação

15.1 - Diversas interpretações do conceito de multiplicação

(adaptado de Afonso, 2004)

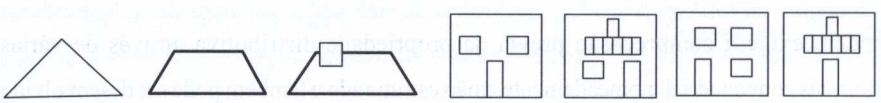
Actividades:

1 – Indique, nos vários casos, qual a interpretação que está associada a cada uma das multiplicações:

a) O Pedro come todos os dias duas peças de fruta. Quantas peças de fruta come o Pedro por semana?

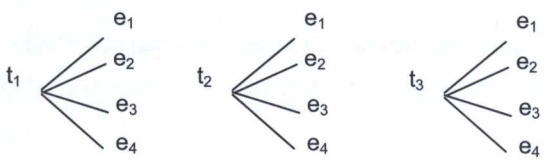
adição de parcelas iguais: $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 2 \times 7$

b) Quantos modelos de casa poderei construir se tiver os seguintes modelos de construção:



Produto cartesiano

Considerando o conjunto dos telhados **T**, formado pelos elementos: $\mathbf{t_1}$, $\mathbf{t_2}$ e $\mathbf{t_3}$, e o conjunto das estruturas das casas **E**, formado pelos elementos: $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ e $\mathbf{e_4}$, podemos ter as seguintes possibilidades:



Isto é;

$$\{t_1,t_2,t_3\} \times \{e_1,e_2,e_3,e_4\} = \{(t_1,e_1);(t_1,e_2);(t_1,e_3);(t_1,e_4);(t_2,e_1);(t_2,e_2);(t_2,e_3);(t_2,e_4);(t_3,e_1);(t_3,e_2);(t_3,e_3);(t_3,e_4)\}$$

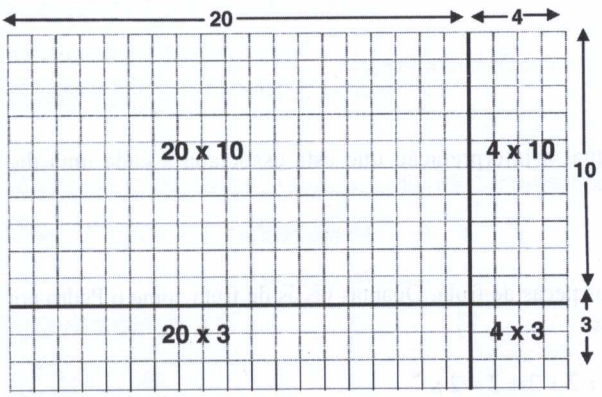
$\#T \times \#E = \#(T \times E) \Leftrightarrow 3 \times 4 = 12$

Os mesmos dados poderão ser organizados por uma tabela do tipo:

	e_1	e_2	e_3	e_4
t_1	$t_1\ e_1$	$t_1\ e_2$	$t_1\ e_3$	$t_1\ e_4$
t_2	$t_2\ e_1$	$t_2\ e_2$	$t_2\ e_3$	$t_2\ e_4$
t_3	$t_3\ e_1$	$t_3\ e_2$	$t_3\ e_3$	$t_3\ e_4$

c) Quantas placas de cimento são necessárias para a construção do campo de jogos sabendo que leva em todo o comprimento 24 placas e 13 placas na largura?

modelo de área de figuras rectangulares



$24 \times 13 = (20+4) \times (10+3) = (20+4) \times 10 + (20+4) \times 3 =$

$= \mathbf{20 \times 10} + \mathbf{4 \times 10} + \mathbf{20 \times 3} + \mathbf{4 \times 3} = 312$

Este modelo exige a compreensão prévia da propriedade distributiva através de várias experiências informais com material, nomeadamente o não estruturado e também pode ser desenvolvido da seguinte forma:

$$\begin{array}{rl} & 13 \\ & \times\ 24 \\ \hline 4 \times 3 = 12 & 12 \\ 4 \times 10 = 40 & 40 \\ 20 \times 3 = 60 & 60 \\ 20 \times 10 = 200 & +\ 200 \\ \hline & \mathbf{312} \end{array}$$

Outra representação possível: 24 x 13

x	20	4	
10	200	40	240
3	60	12	72
	260	52	**312**

15.2 - Tabuada da multiplicação

a + a + a = a x 3 ou a + a + a = 3 x a?

- multiplicador (nº de vezes que a parcela se repete)
- multiplicando (a parcela que se repete)
- o nome da tabuada está relacionado com o valor do multiplicando
- no algoritmo da multiplicação:

3 x 4 = 12

↓

Lê-se: "*3 vezes o 4*" [4+4+4]

4 ← Multiplicando

x 3 ← Multiplicador

12

Se eventualmente tivermos:

4 x 3 = 12

↓

Lê-se: "*4, 3 vezes*" [4+4+4]

4 ← Multiplicando

x 3 ← Multiplicador

12

15.3 - Algoritmo da multiplicação egípcia

Multiplicar 27 por 16 implica saber que o 16 é igual a 2 x 2 x 2 x 2 (dobro do dobro do dobro de 2). Logo temos que encontrar o dobro do dobro do dobro de 27:

27 x 2 x 2 x 2 x 2 = 54 x 2 x 2 x 2 = 108 x 2 x 2 = 216 x 2 = 432, isto é:

27 x 16	
27	1
54	2 (2 x 1)
108	4 (2 x 2)
216	8 (2 x 2 x 2)
432	16 (2 x 2 x 2 x 2)

No caso de ser 27 x 14, isto implica encontrar o produto da seguinte multiplicação:

27 x (2 + 4 + 8) = 27 x 2 + 27 x 4 + 27 x 8 = **54 + 108 + 216 = 378**

27 x 14	
27	1
54	2 (2 x1)
108	4 (2 x 2)
216	8 (2 x 2 x 2)

378

15.4 - Algoritmo da multiplicação russa

Por exemplo: **27 x 16**

27	x	16
13		32
6		64
3		128
1		256

Na coluna da esquerda: metades sucessivas, desprezando-se a parte decimal.
Na coluna da direita: dobros sucessivos

Adicionando os números da coluna da direita que correspondem aos ímpares da coluna da esquerda, temos: **16 + 32 + 128 + 256** = 432

Outro exemplo: **71 x 49**

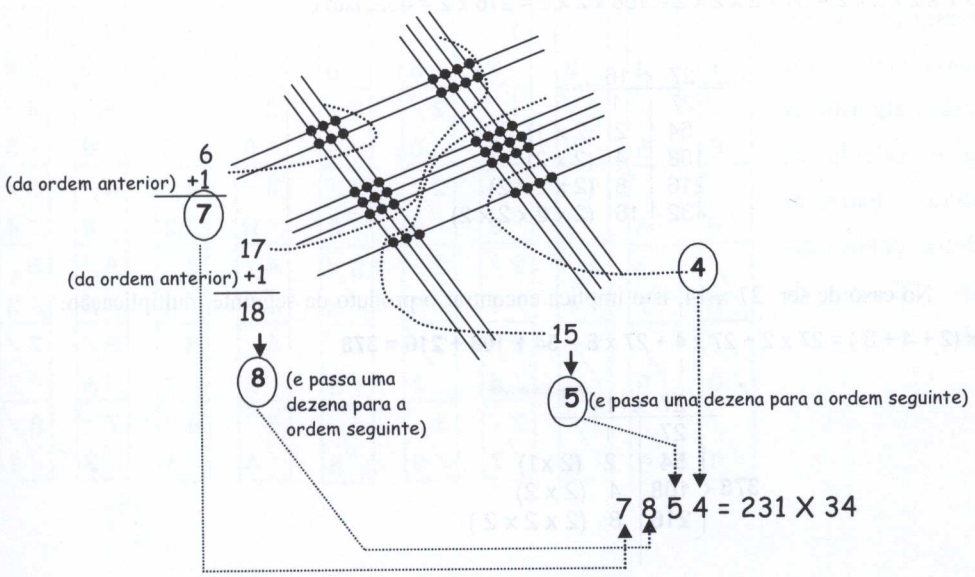
71	x	49
35		98
17		196
~~8~~		~~392~~
~~4~~		~~784~~
~~2~~		~~1568~~
1		3136

49 + 98 + 196 + 3136 = 3479

71 x 49 = 3479

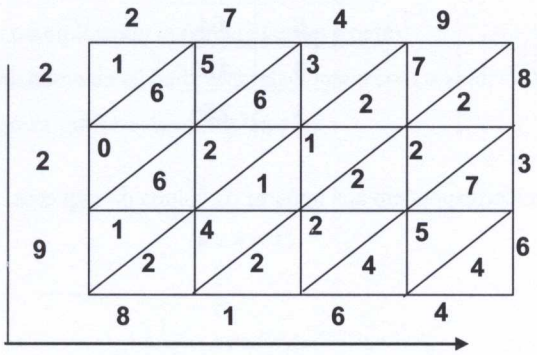
15.5 - Outro algoritmo da multiplicação

Por exemplo: **231 x 34**



15.6 - Algoritmo Hindu-árabe ou de Gelosia

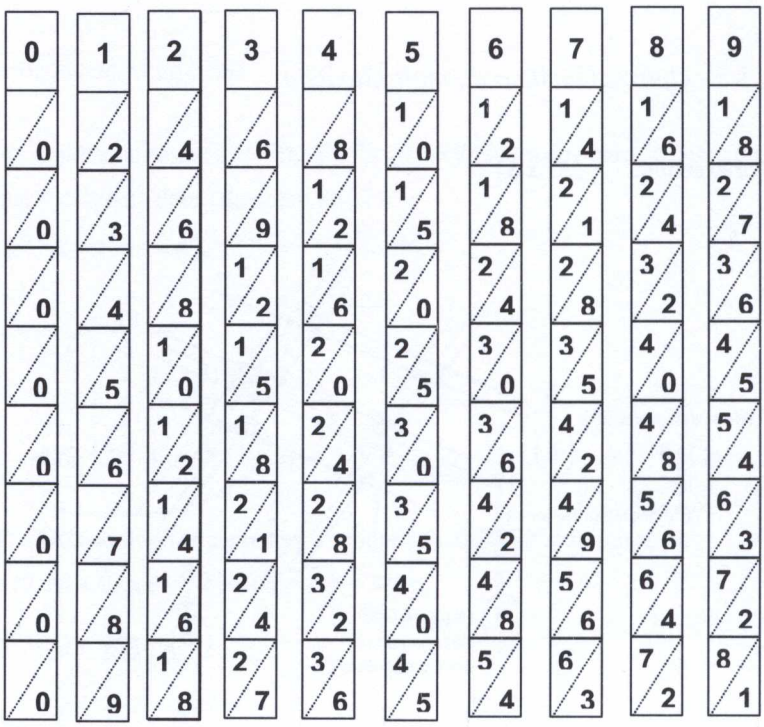
Por exemplo: **2749 x 836**



2749 x 836 = 2298164

15.7 - Multiplicação através das Barras de Napier

John Napier (1550-1617), famoso matemático escocês desenvolveu um processo algorítmico para o cálculo de produtos – barras de madeira, conhecidas pelos "Ossos de Napier":



2	9	8
4	1 / 8	1 / 6
6	2 / 7	2 / 4
8	3 / 6	3 / 2
1 / 0	4 / 5	4 / 0
1 / 2	5 / 4	4 / 8
1 / 4	6 / 3	5 / 6
1 / 6	7 / 2	6 / 4
1 / 8	8 / 1	7 / 2

Exemplo:

Multiplicando 298 por 7 implica que utilizemos as tábuas referentes aos algarismos 2, 9 e 8. Como sabemos, o produto resultante é 2086. Segundo as barras de Napier, juntamos as três envolvidas nesta multiplicação e temos que centrar a nossa atenção na sétima linha:

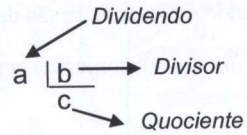
→ 165
→ + 436
2086

→

298
x 7
2086

16 - Operação Divisão

Definição: dados dois números inteiros a e b, sendo b > 0, **a : b = c** se e só se c é o único número inteiro que verifica a = b x c.



Ex: 54 : 6 = 9 => 54 = 6 x 9

Nota: A divisão nem sempre é possível em IN_0

Ex: 54 : 7

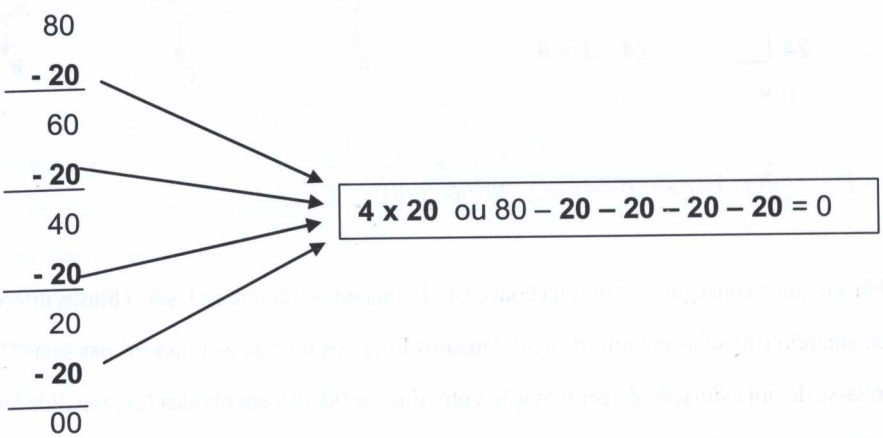
16.1 - Interpretações da Divisão

16.1.1 - Divisão por medição

"Se cada CD de música custa 20 Euros e tem 80 Euros, quantos CD's pode comprar?"

O dividendo e o divisor são da mesma espécie (ex: dinheiro, dinheiro; ovos, ovos; etc...)

Para determinar quantos CD's se podem comprar, tem que se verificar quantas vezes é que o preço de cada CD (20 €) cabe no dinheiro que tem (80 €). Neste caso, o 20 cabe 4 vezes no 80:



A divisão transforma-se em **subtracções sucessivas** (subtracção repetida), em que o divisor (20) é a "medida" de cada subconjunto (preço de cada CD) e o quociente (4) é o número de subconjuntos obtidos (nº de CD's adquiridos).

80 | 20 **80 : 20 = 4**
0 4

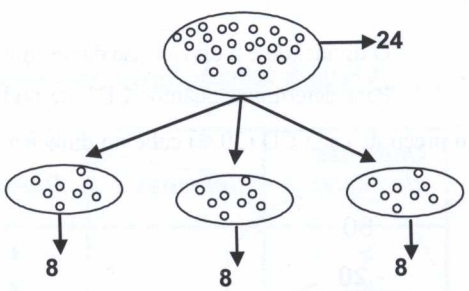
16.1.2 - Divisão por partição

"Três amigas apanharam 24 laranjas e no fim repartiram-nas igualmente entre si. Com quantas laranjas ficou cada uma?"

O dividendo e o divisor não são da mesma espécie. Contudo, o dividendo e o quociente são da mesma espécie, porque o que se pretende é saber quantos elementos tem cada um dos subconjuntos em que o dividendo vai ser "partido".

Para determinar com quantas laranjas ficou cada amiga, vamos repartir (dividir) o total (24) por três subgrupos (3 amigas), que ficarão com igual número de laranjas. Neste caso, o conjunto das 24 laranjas vai ser "partido" em 3 subconjuntos de 8 laranjas cada um.

Na divisão por partição, o divisor (3) indica o número de subconjuntos a formar (partição em 3) e o quociente (8 laranjas) indica o número de elementos com que fica cada subconjunto:

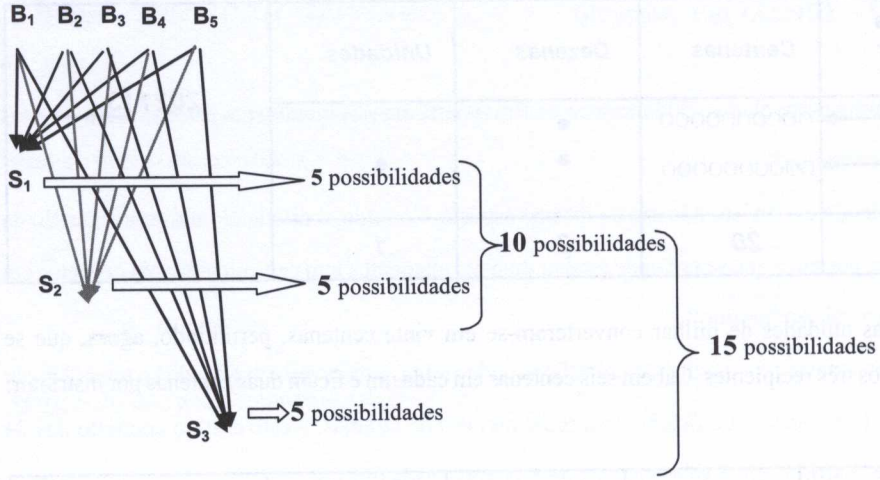


24 |3 **24 : 3 = 8**
0 8

16.1.3 - Divisão pelo processo multiplicativo

"Uma menina conseguiu vestir uma boneca de 15 maneiras diferentes. Usou 5 blusas diferentes em tons de amarelo e as saias em tons de azul. Quantos foram os tons de azul usados nas saias?"

Trata-se de uma situação de combinação entre duas entidades envolvidas (ex. tonalidades das cores das blusas e tonalidades das cores das saias). Conhecendo-se uma dessas entidades (5 blusas amarelas de diferentes tonalidades) e o total das combinações resultante (15 maneiras diferentes de vestir a boneca) temos que questionar qual será o número relativo às diferentes tonalidades da cor da saia que ao multiplicar por 5 vai dar o 15 (nesta caso a resposta é 3 saias azuis de tonalidades diferentes).

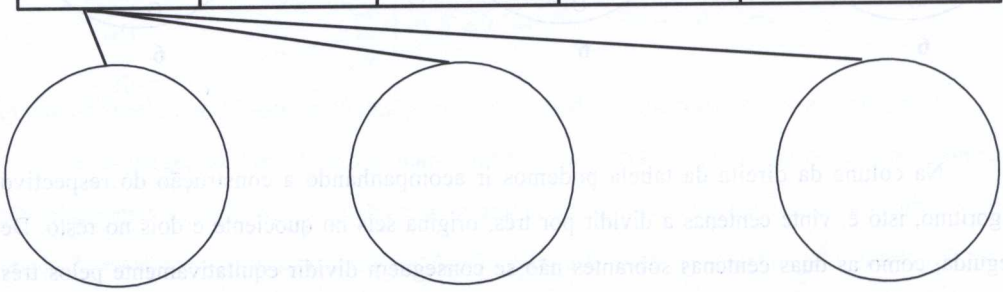


16.2 - Algoritmo da divisão

(adaptado de Afonso, 2004)

A título de exemplo, façamos um esquema para que se possa entender a seguinte divisão: **2021 : 3**:

Unidades de Milhar	***Centenas***	***Dezenas***	***Unidades***	***2021 | 3***
☆ ☆		● ●	♦	
2	***0***	***2***	***1***	

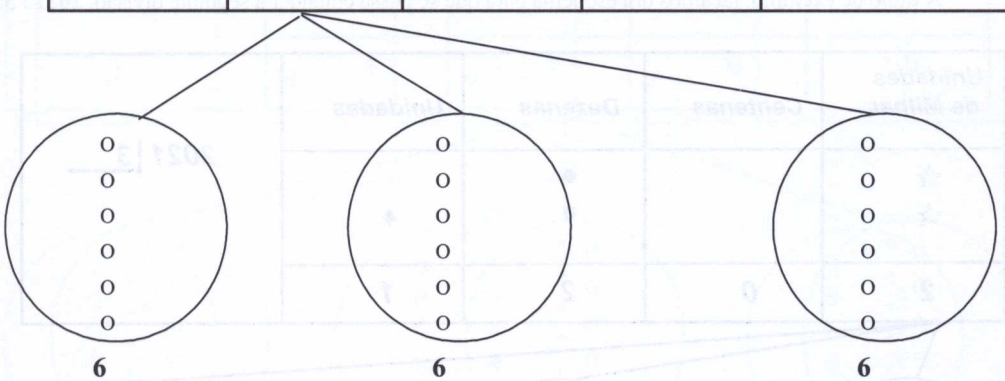


Começamos por constatar que não conseguimos distribuir equitativamente o número de unidades de milhar pelos três recipientes. Como sabemos que cada um dos elementos dessa coluna foi originado a partir de um grupo de dez centenas, necessitamos de os converter nesses grupos de centenas. O esquema passa, então, a ter o seguinte aspecto:

Unidades de Milhar	Centenas	Dezenas	Unidades	2021 | 3
☆ → ☆ →	OOOOOOOOOO OOOOOOOOOO	● ●	♦	
0	20	2	1	

As duas unidades de milhar converteram-se em vinte centenas, permitindo, agora, que se distribuam pelos três recipientes. Cabem seis centenas em cada um e ficam duas centenas por distribuir:

Unidades de Milhar	Centenas	Dezenas	Unidades	2021 | 3 2 6
	O O	● ●	♦	
0	2	2	1	



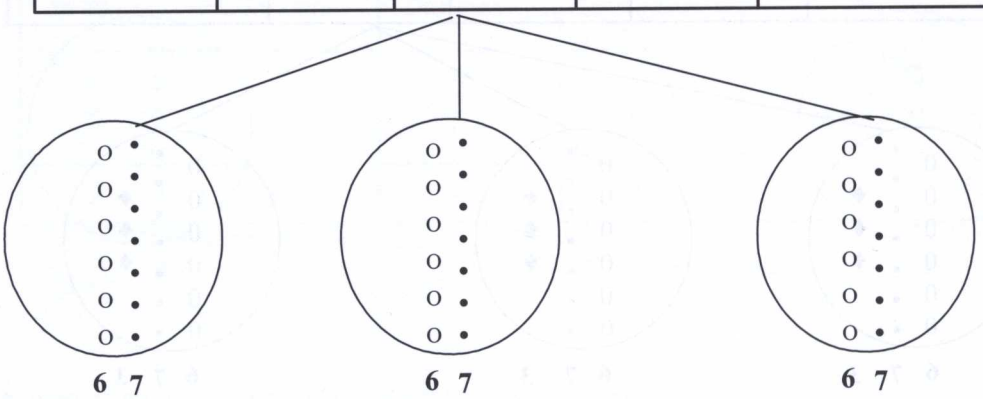
Na coluna da direita da tabela podemos ir acompanhando a construção do respectivo algoritmo, isto é, vinte centenas a dividir por três, origina seis no quociente e dois no resto. De seguida, como as duas centenas sobrantes não se conseguem dividir equitativamente pelos três recipientes, terão que ser convertidas em dois grupos de dez dezenas. Ao serem juntas com as duas dezenas já existentes nesta ordem, originam-se vinte e duas dezenas para ser distribuídas. No respectivo algoritmo, associamos os dois algarismos 2, que representam essas vinte e duas dezenas a dividir:

Na distribuição por cada um dos recipientes, originam-se sete dezenas e fica uma por distribuir:

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO
CASTELO BRANCO - BIBLIOTECA

Unidades de Milhar	Centenas	Dezenas	Unidades	
				2021 | 3 22 6
0	0	22	1	

Unidades de Milhar	Centenas	Dezenas	Unidades	
				2021 | 3 22 67 1
0	0	1	1	

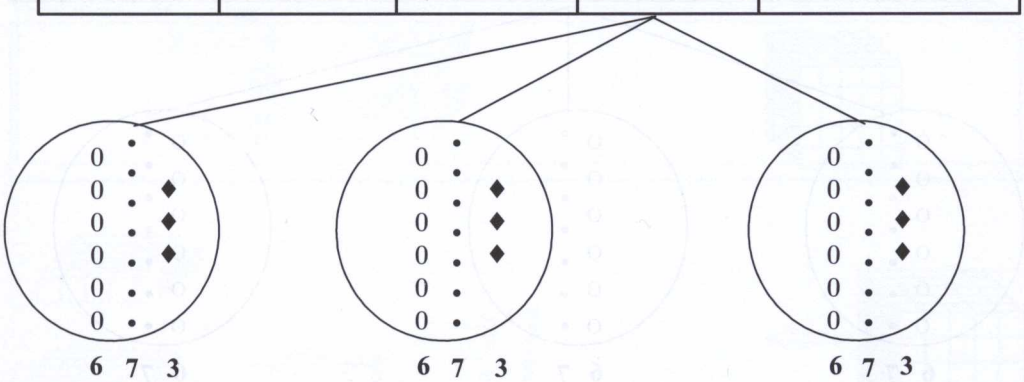


Por último, a dezena sobrante, por não poder ser dividida equitativamente pelos três recipientes, converte-se em dez unidades. Estas, ao juntarem-se com a unidade que já existe, originam onze unidades para ser distribuídas. O próprio algoritmo evidencia essa situação:

Unidades de Milhar	Centenas	Dezenas	Unidades	2021 | 3 22 67 11
			♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦	
0	0	0	11	

Ao efectuar-se a respectiva distribuição, verifica-se que existirão, em cada recipiente, três unidades, sobrando duas como sendo o resto da divisão:

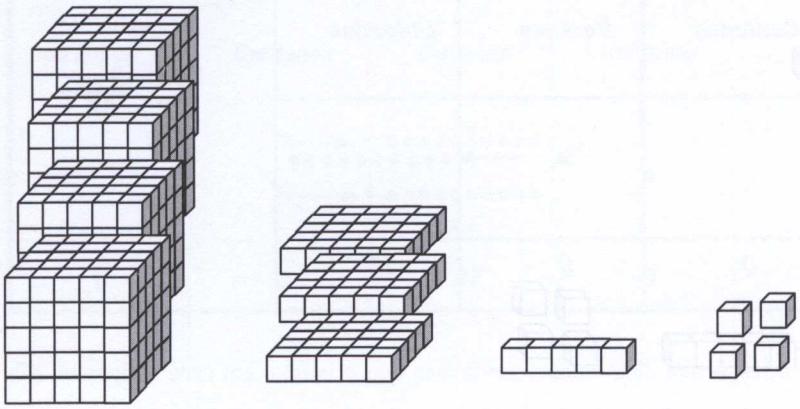
Unidades de Milhar	Centenas	Dezenas	Unidades	2021 | 3 22 673 11 2
			♦♦	
0	0	0	2	



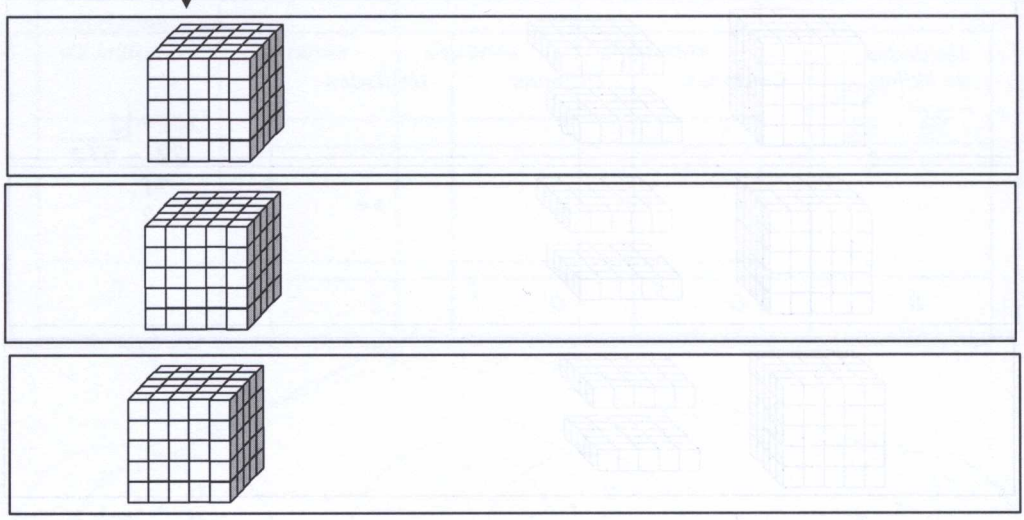
Fica, pois, facilmente percebida a resolução desta divisão, porque lhe associamos o processo de construção do respectivo algoritmo.

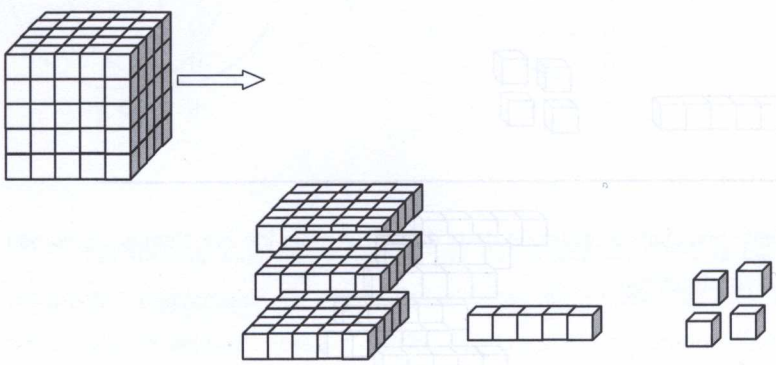
16.3 - Divisão na base cinco

Dividir $4314_{(cinco)}$ por 3:

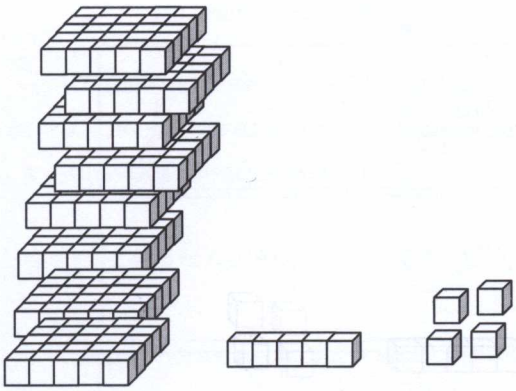


Dividindo a ordem três

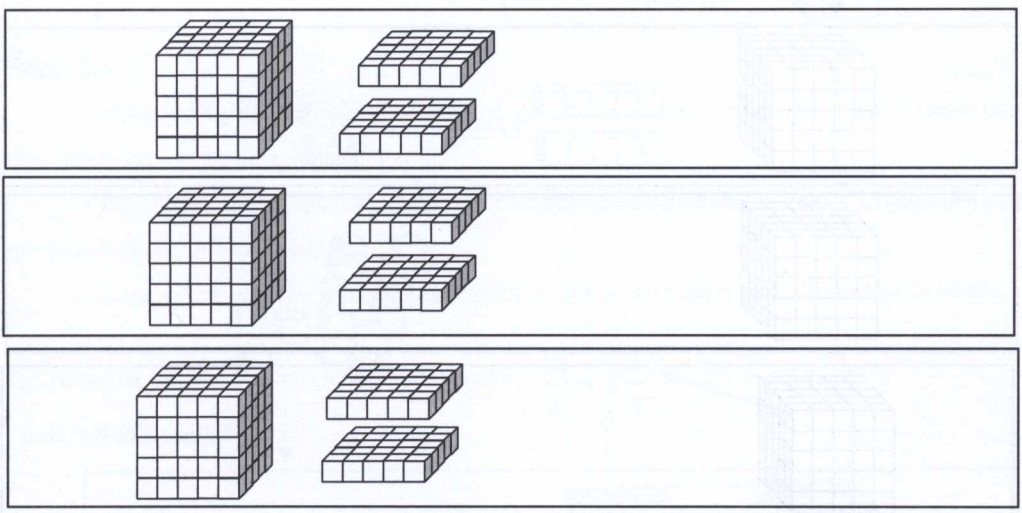


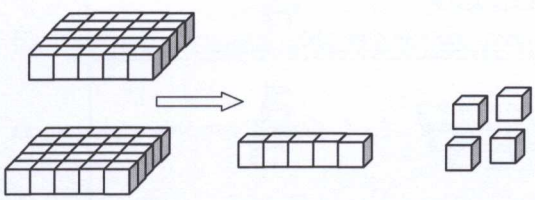


ou

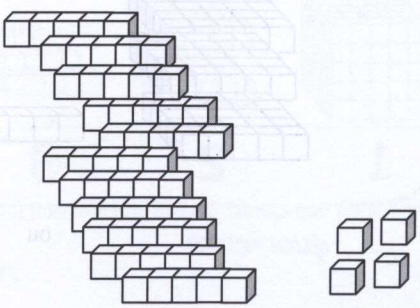


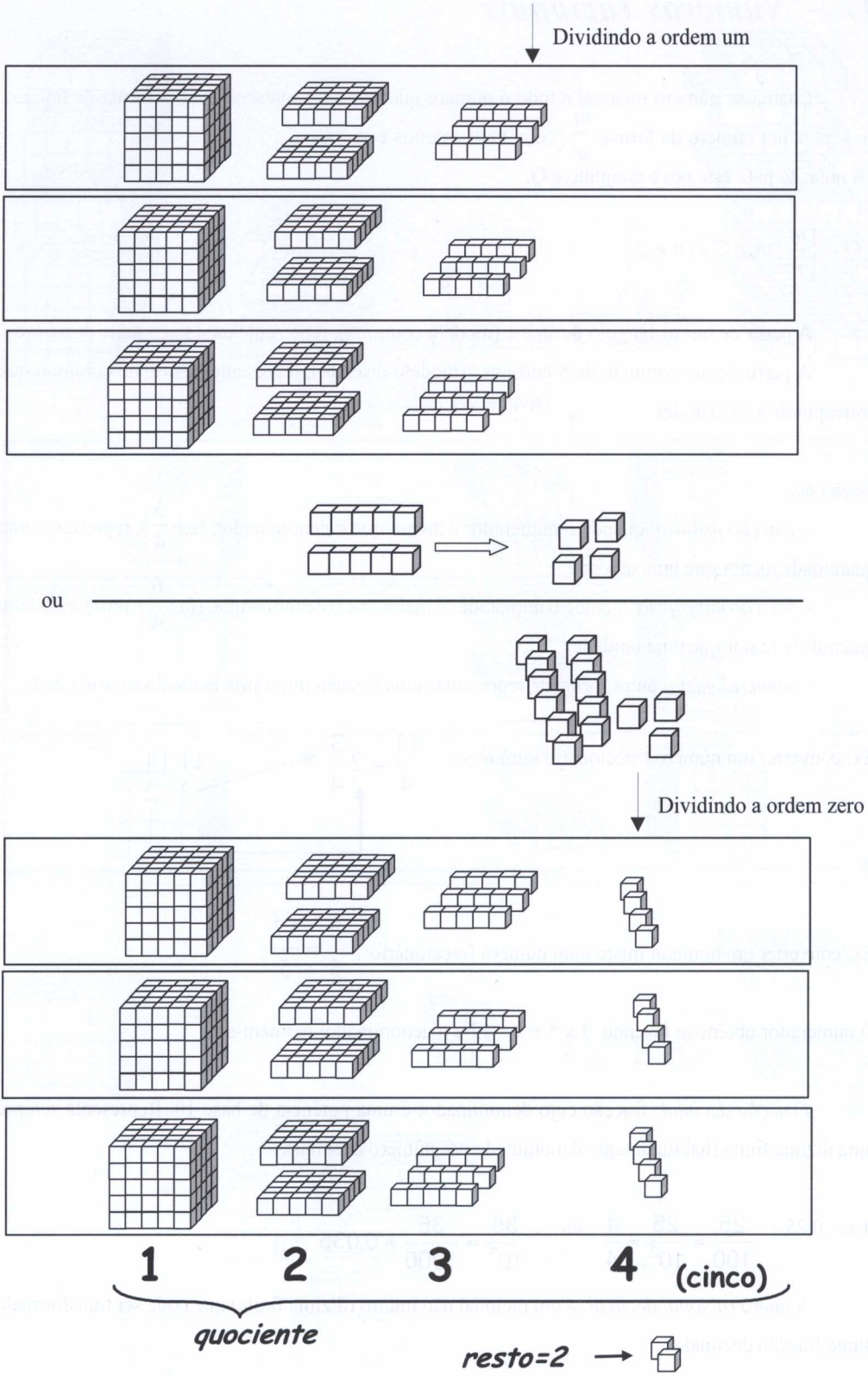
Dividindo a ordem dois





ou




Dividindo a ordem um
ou
Dividindo a ordem zero
1
2
3
4
(cinco)
quociente
resto=2

17 – Números racionais

Chama-se número racional a todo o número que se pode representar sob a forma de fracção, ou seja, a um número da forma $\frac{m}{n}$, com m, n inteiros e $n \neq 0$.

- A notação para este novo conjunto é Q.

- $Q = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in Z; n \neq 0 \right\}$

A partir de um rectângulo de área 1 (modelo contínuo), represente uma terça parte dessa área.

A partir de um conjunto de 8 berlindes (modelo discreto), represente a parte do conjunto que corresponde a 3 berlindes.

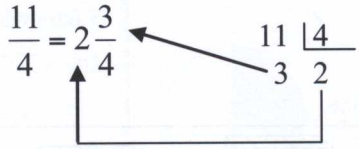
Noção de:

- *fracção própria*: quando o numerador é menor que o denominador. (ex: $\frac{3}{4}$), representa uma quantidade menor que uma unidade.

- *fracção imprópria*: quando o numerador é maior que o denominador. (ex: $\frac{6}{4}$), representa uma quantidade maior que uma unidade.

- *numeral misto*: outra forma de representar uma fracção imprópria isolando a parte inteira.

Ex: converter um número fraccionário num misto: $\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$



Ex: converter um numeral misto num número fraccionário: $3\frac{2}{5} = \frac{17}{5}$;

O numerador obtém-se fazendo 3 x 5 + 2 = 17 e o denominador mantém-se.

Fracção decimal: fracção cujo denominador é uma potência de base 10. Representa sempre uma dízima finita (habitualmente denominado por número decimal).

Ex: $0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{25}{10^2} = \frac{1}{4}$ ou $\frac{35}{10^3} = \frac{35}{1000} = 0{,}035$

Número racional decimal: é um racional não inteiro (dízima finita) que pode ser transformado numa fracção decimal.

Ex:

$$\frac{3}{8} = 0{,}375$$

$$0{,}375 = \frac{375}{1000}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{375}{1000}$$ (X 125)

Ex:

$$\frac{7}{5} = 1{,}4$$

$$1{,}4 = \frac{14}{10}$$

$$\frac{7}{5} = \frac{14}{10}$$ (X 2)

Ex:

$$\frac{107}{25} = 4{,}28$$

$$4{,}28 = \frac{428}{100}$$

$$\frac{107}{25} = \frac{428}{100}$$ (X 4)

Número racional não decimal: é um racional não inteiro (dízima infinita periódica) que não é convertível numa fracção decimal.

Ex: $\frac{2}{3} = 0{,}6666... = 0,(6)$; $\frac{12}{28} = 0{,}428571428571... = 0,(428571)$

<u>Conversão de uma dízima infinita periódica numa fracção (não decimal):</u>

Consideremos o número x = 2,777… Vamos convertê-lo em fracção:

x = 2,777…
10x = 27,777…
10x – x = 27,777… - 2,777
9x = 25
x = 25 / 9

Subtraindo membro a membro:
10x = 27,7777…
x = 2,7777…
9x = 25
Logo x = 25 / 9

Consideremos o número t = 23,4(5). Vamos convertê-lo em fracção:
Subtraindo membro a membro:

100x = 2345,555…
10x = 234,555…
90x = 2111
x= 2111 / 90

Subtraindo membro a membro:
100x = 2345,555…
10x = 234,555…
90x = 2111
Logo x = 2111 / 90

Consideremos o número w = 23,(45)... Vamos convertê-lo em fracção:

x = 23,(45)

100x = 2345,(45)

100x – x = 2322

x = 2322 / 99 = 258 / 11

Subtraindo membro a membro:

100x = 2345,4545...

x = 23,4545...

99x = 2322

Logo x = 2322 / 99 = 258 / 11

17.1 – Várias concepções dos números racionais

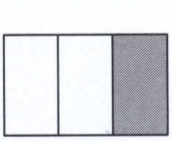
17.1.1 – Concepção de "parte de"

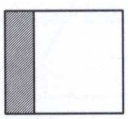
(Algumas das tarefas apresentadas a seguir foram retiradas ou adaptadas da Tese de Doutoramento de Maria José Ferreira da Silva, cujo texto se encontra no seguinte endereço: http://www.pucsp.br/pos/edmat/do/tese_maria_jose_ferreira_silva.pdf)

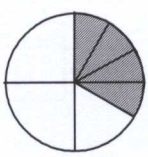
As tarefas que envolvem a "parte de" podem ser de 4 tipos:

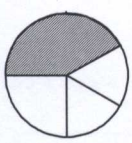
a) Identificar o número fraccionário que corresponde a uma parte da figura apresentada

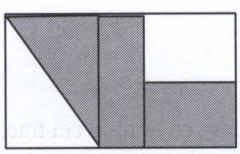
- ***modelo contínuo***

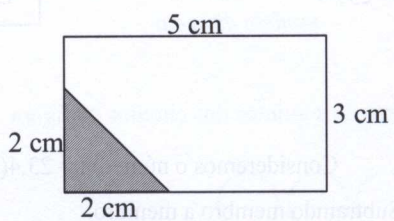






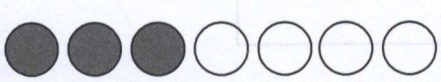




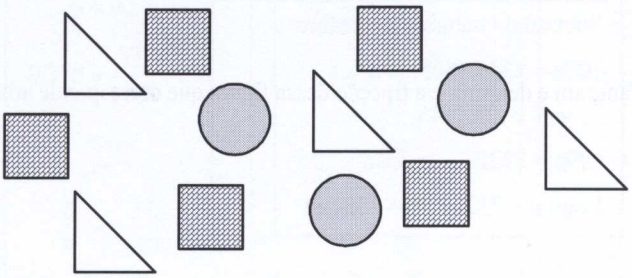


- ***modelo discreto***

Que parte dos círculos estão pintados?



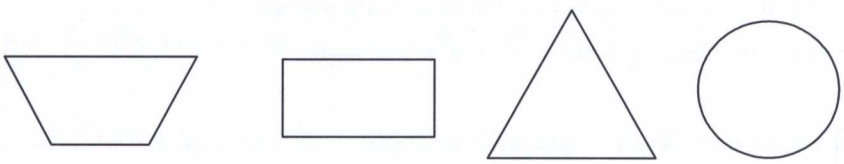
Que parte das figuras corresponde aos quadrados?



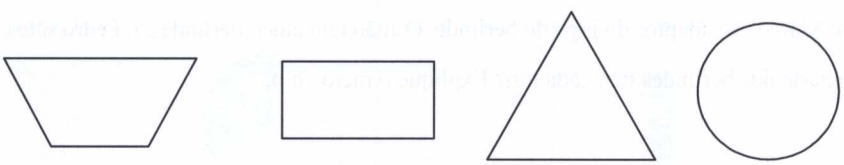
b) Identificar um número fraccionário dado numa figura

- ***modelo contínuo***

Pinte metade da figura

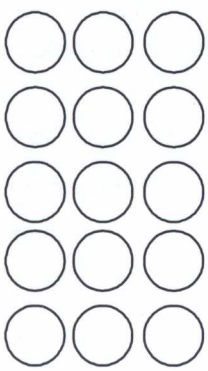


Pinte um terço da figura



- ***modelo discreto***

Pinte dois quintos dos círculos da figura

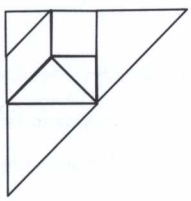


c) Compor inteiros e determine fraccionários

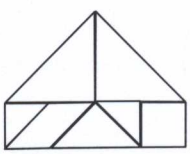
- ***modelo contínuo***

Construa uma figura com as peças do Tangram e determine a fracção dessa figura que corresponde ao:

- paralelogramo



- triângulo maior



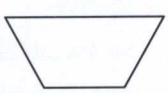
- ***modelo discreto***

O João, o Pedro e o Marco são adeptos do jogo do berlinde. O João tem cinco berlindes, o Pedro sete e o Marco seis. Que parte dos berlindes tem cada um? Explique o raciocínio.

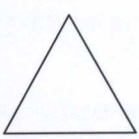
d) Reconstituir o inteiro

- ***modelo contínuo***

Se a figura abaixo é um terço do inteiro, desenhe-o



Se a figura abaixo é um quarto do inteiro, desenhe-o



- ***modelo discreto***

Se $\frac{2}{7}$ dos berlindes do Sérgio são verdes e ele tem 12 berlindes verdes, qual o total de berlindes do Sérgio?

17.1.2 – Concepção de medida

Para tarefas associadas à concepção de medida, por exemplo a medida de comprimento, temos de considerar três tipos de objectos: (a) a unidade de suporte (a recta numérica ou outro esquema de medida), (b) a subunidade de medida que corresponde à fracção ***1/b*** em que ***b*** é o número de partes em que se divide a unidade de modo a permitir a medição e (c) o número fraccionário ***a/b*** que representa o resultado da medição a realizar.

a) Determinar medidas em segmentos divididos em partes iguais

Qual a distância entre 0 e A?

Qual a distância entre B e C?

Qual a distância entre D e E?

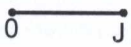
b) Determinar medidas em segmentos não divididos em partes de mesma medida

Qual a distância entre 0 e F?

Qual é a distância entre G e H?

c) Reconstituir a unidade

Se a distância entre 0 e J representa $\frac{3}{4}$ da unidade, qual é a unidade?



17.1.3 – Concepção de quociente

a/b significa que ***a*** foi distribuído em ***b*** partes iguais.

a) Distribuir igualmente **a** objectos por um número **b** de partes

Que parte de chocolate receberá cada pessoa se distribuirmos igualmente 3 chocolates por 5 pessoas?

Que parte de chocolate receberá cada pessoa se distribuirmos igualmente 5 chocolates por 4 pessoas?

b) Distribuir igualmente **a** objectos de acordo com uma quantidade dada

Quantas crianças receberão bombons, se distribuirmos igualmente 105 bombons, de tal forma que cada criança receba 15? **(modelo discreto)**

Quantas crianças receberão chocolate, se forem distribuídos igualmente 5 chocolates, de tal forma que cada uma receba 5/6? **(modelo contínuo)**

17.1.4 – Concepção de razão

Permite comparar medidas de duas grandezas ou duas medidas da mesma grandeza. Neste sentido, **a/b** ou **a : b** deve ler-se: "***a*** está para ***b***", sendo ***a*** o antecedente e ***b*** o consequente, como termos da razão.

Determine a razão entre açúcar e farinha numa receita de bolo que utiliza duas chávenas de açúcar para três chávena de farinha.

Se para fazer uma jarra de refresco utilizamos 3 copos de sumo concentrado para 12 copos de água, qual a razão de sumo concentrado para água?

No café do sr. Justino o refresco de groselha é feito na razão de 1 medida de groselha para 3 de água. No café do sr. Alberto o mesmo refresco é feito na razão de 2 dessas medidas de groselha para 5 de água.

a) Sabendo que o João é muito guloso e apreciador de refresco de groselha forte, qual deverá ser o café escolhido por ele?

b) Por sua vez, o Moisés acha que qualquer dos refrescos é demasiado forte para o seu gosto. O que deverão fazer os donos dos respectivos cafés para servirem um refresco de groselha que seja do agrado do Moisés?

c) Os amigos da Mónica frequentam habitualmente o café do sr. Justino, mas a Mónica acha que o refresco de groselha é muito fraco. O que deve fazer o Sr. Justino para agradar à Mónica?

17.1.5 – Concepção de operador

Quando o fraccionário ***a/b*** actua sobre uma quantidade, modificando-a e produzindo uma nova quantidade, considera-se o fraccionário ***a/b*** como operador.
Transformar uma grandeza pela acção de um operador fraccionário

Construa um quadrado cujo lado é $\frac{2}{3}$ do lado de um quadrado que tem 9 unidades de lado **(modelo contínuo)**

Calcule o número de cromos da Sílvia sabendo que tem $\frac{3}{5}$ do número de cromos da colecção do Josué, que tem 150 cromos **(modelo discreto)**

Se $\frac{6}{7}$ da capacidade de um recipiente são 42 litros, qual é a capacidade do recipiente?

17.2 - Inverso de um número

Uma das propriedades da multiplicação de números racionais é a do elemento inverso:
Para todo $q=a/b$ em Q, q diferente de zero, existe $q^{-1}=b/a$ em Q, tal que

$q \times q^{-1} = 1$. Esta última propriedade pode ser escrita como: $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$

Situações problemáticas:

a) O sr. Alberto, produtor de azeite, distribuiu uma bilha de 10 litros de azeite por recipientes com capacidade de $\frac{1}{10}$ da capacidade da bilha. Com quantos litros ficou cada recipiente?

b) Um caracol, que está no fundo de um poço com 5 metros de profundidade, sobe por dia $\frac{1}{5}$ desta distância. Qual a distância percorrida por dia?

c) O Joaquim estuda sempre duas horas por dia. Como tem dificuldades em Matemática, esta é a disciplina em que investe mais tempo de estudo. Assim, estuda sempre $\frac{1}{2}$ do tempo total de estudo. Quanto tempo estuda Matemática por dia?

d) O Manuel comprou duas tabletes de chocolate e comeu $\frac{2}{3}$ de uma. Logo, ainda ficou com $\frac{1}{3}$ desta e outra tablete inteira, isto é, ficou com $\frac{4}{3}$ de chocolate. Na hora do lanche comeu algum do chocolate que tinha e a irmã disse-lhe:

- Já reparaste que comeste $\frac{3}{4}$ do chocolate que tinhas?

Que quantidade de chocolate comeu o Manuel ao lanche?

Conclusão: O produto de quaisquer dois números inversos é sempre 1.

17.3 - Operações com Números Decimais

Algumas das tarefas apresentadas a seguir foram retiradas ou adaptadas do seguinte livro: (Centero, J. (1988). *Números Decimales. Por qué? Para qué?* Madrid: Síntesis)

Número Decimal – Os números racionais representados por dízimas finitas da forma a_0, a_1, a_2,... $a_k = a_0, a_1, a_2, \ldots a_k \times 10^{-k}$ (k finito) são vulgarmente designados por números decimais.

17.3.1 - Adição e Subtracção com Números Decimais

Exemplo para se compreender a adição de números decimais:

$2{,}347 + 0{,}59 = 2347 / 1000 + 59 / 100 = 2347 / 1000 + 590 / 1000 =$

$= 2937 / 1000 = 2{,}937$

Regras:

1 – Escrever o número decimal de forma que as vírgulas coincidam em coluna.

2 – Acrescentar os zeros necessários para que todos os números tenham o mesmo número de algarismos depois da vírgula.

3 – Adicionar ou subtrair seguindo as regras da adição ou subtracção de números naturais.

4 – Colocar a vírgula no resultado, em coluna com a dos termos da adição (ou subtracção), de forma que a soma (ou a diferença) tenha o mesmo número de algarismos depois da vírgula que cada um dos termos da adição (ou subtracção).

***Exemplo*:**

$$\begin{array}{r} 2{,}347 \\ +\ 0{,}59 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 2{,}347 \\ +\ 0{,}590 \\ \hline 2{,}937 \end{array}$$

17.3.2 - Multiplicação com Números Decimais

Esta operação exige maior atenção que a adição e subtracção, porque costumam surgir algumas dificuldades. Ao realizar, por exemplo, as seguintes operações:

$6 + 2 = 8$

$0{,}6 + 0{,}2 = 0{,}8$

$0{,}6 \times 0{,}2 = 0{,}12$

$7 + 2 = 9$

$0{,}7 + 0{,}2 = 0{,}9$

$0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}14$

Constata-se que a na adição ou subtracção de decimais se aplicam as mesmas regras que se conhecem para a adição ou subtracção com inteiros. Contudo, quando se trata de multiplicar, o produto já não tem o mesmo número de casas decimais que os factores.

A extensão da multiplicação dos naturais aos decimais não é imediata. Por outro lado, o modelo de multiplicação que se aprendeu para os naturais, que consiste em obter um número maior quando se o multiplica por outro, já não se aplica e é preciso construir uma nova multiplicação que tenha em conta outros números, além dos naturais e em particular os números inferiores à unidade.

***Exemplo para se compreender a multiplicação de números decimais*:**

$$8{,}79\times 27{,}3=\left(8+\frac{79}{100}\right)\times\left(27+\frac{3}{10}\right)=\frac{879}{100}\times\frac{273}{10}=\frac{879\times 273}{1000}=\frac{239967}{1000}=239{,}967$$

Regras:

1 – Multiplicar os números como se fossem inteiros.

2 – Colocar a vírgula tendo em conta que haja tantas casas decimais no resultado como a soma das casas decimais dos factores.

17.3.3 - Divisão com Números Decimais

Observemos, em primeiro lugar, que o quociente de dois decimais não é sempre um número decimal; portanto, o conjunto dos números decimais não é fechado para a divisão. Por exemplo, $\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}=\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ são números decimais, mas $\frac{2}{3}$ não é um número decimal. Não existe nenhum número decimal que multiplicado por $\frac{3}{4}$ dê $\frac{1}{2}$. Na escrita decimal: o número "0,5 : 0,75" não é um número decimal.

Em segundo lugar, vejamos que o modo de divisão válido para os números naturais também não se pode aplicar aos números decimais. De facto, quando se divide um número natural (dividendo) por outro número natural (divisor) obtém-se sempre um número mais pequeno (quociente) que o dividendo. Contudo, quando se divide um número decimal por outro número decimal, é possível obter como quociente um número maior que o dividendo. Por exemplo, 0,7 : 0,2 = 3,5.

A pergunta a fazer-se será: Qual o número que multiplicado por 0,2 origina o 0,7?

Regras:

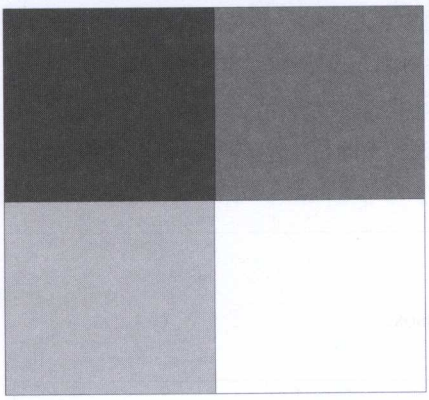
1 – No divisor desloca-se a vírgula para a direita tantas casas quantas as necessárias para que tenhamos um número inteiro, e no dividendo desloca-se a vírgula tantas casas para a direita quantas as necessárias como tenha sido necessário fazer no divisor.

2 – Realiza-se a divisão utilizando o algoritmo habitual dos números inteiros, tendo em conta que o quociente deverá ter o mesmo número de casas decimais que o novo dividendo.

***Exemplo para se compreender a divisão de números decimais*:**

$$0{,}00045:0{,}005=\frac{0{,}00045}{0{,}005}=\frac{0{,}00045\times 1000}{0{,}005\times 1000}=\frac{0{,}45}{5}=0{,}45:5=0{,}09$$

18 – Operações envolvendo o Calculador Papy



Este calculador é um ábaco particular que combina o sistema decimal com o sistema binário. Com base em determinadas regras, permite várias representações de números naturais, decimais e realização de operações.

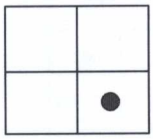
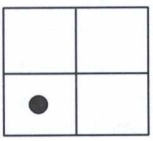
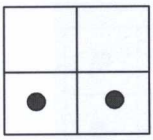
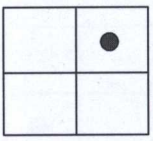
O calculador Papy consiste em placas que seguem as regras da numeração binária (em cada placa) e decimal (entre placas). Assim, para representar os números inteiros – no sistema decimal – as unidades colocam-se na 1ª placa da direita, as dezenas na 2ª, as centenas na 3ª, … e assim sucessivamente.

Cada placa está dividida em quatro células, envolvendo as seguintes cores: branco (b), vermelho (v), rosa (r) e castanho (c). Estas cores correspondem às barras de Cuisenaire para representar os números 1, 2, 4 e 8 (potências de base dois), respectivamente.

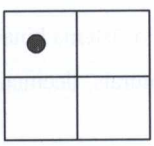
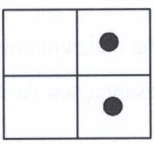
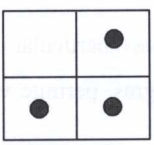
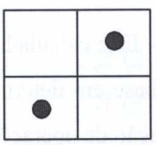
c	**r**
v	**b**

Qualquer distribuição de fichas (peças) no calculador representa um número e em cada célula só pode existir uma peça. Por outro lado, se houver uma peça na célula castanha, já não pode haver peças na célula rosa nem na célula vermelha, porque se atinge a dezena, obrigando à utilização de uma nova placa - a das dezenas.

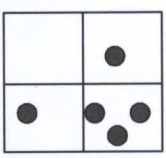
18.1 - Como funciona o calculador Papy

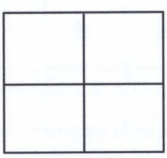
Uma unidade	Duas unidades	Três unidades	Quatro unidades
			

1 - Identifique qual o número em cada um dos seguintes casos:

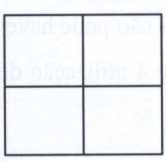
			

2 - Estará a representação seguinte correcta? No caso de pensar que não, distribua as peças correctamente e indique o número representado:

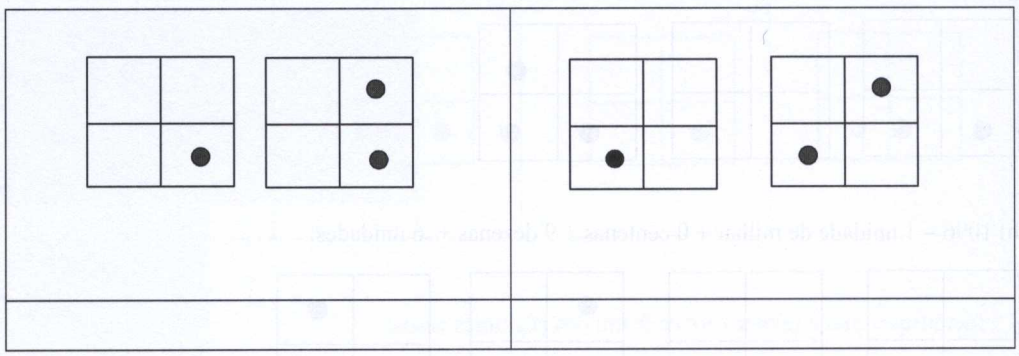




3 - Como se poderá escrever 10 neste material?



4 - Que números estão representados a seguir?



5 - De acordo com as regras deste material, represente os seguintes números:

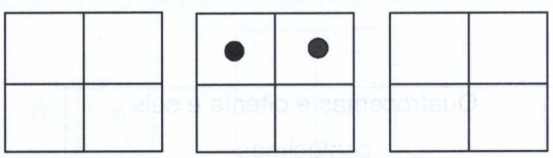
a) 12

b) 57

c) 93

6 - Como representaria 100 neste material?

7 - O João representou o seu número de ovelhas no seguinte esquema:



a) Terá mais ou menos de 100 ovelhas?

b) Quantas ovelhas tem o rebanho do João?

c) A representação que o João fez está correcta?

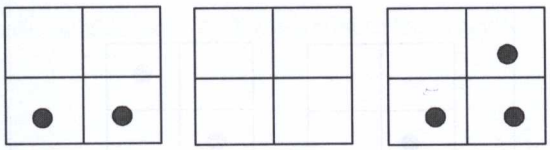
8 - Represente os seguintes números:

a) 307

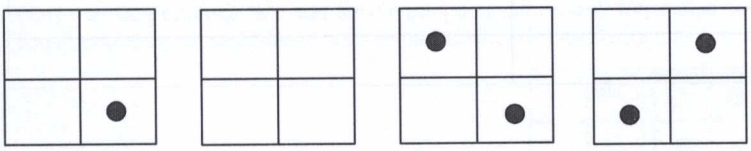
b) 1096

Solução:

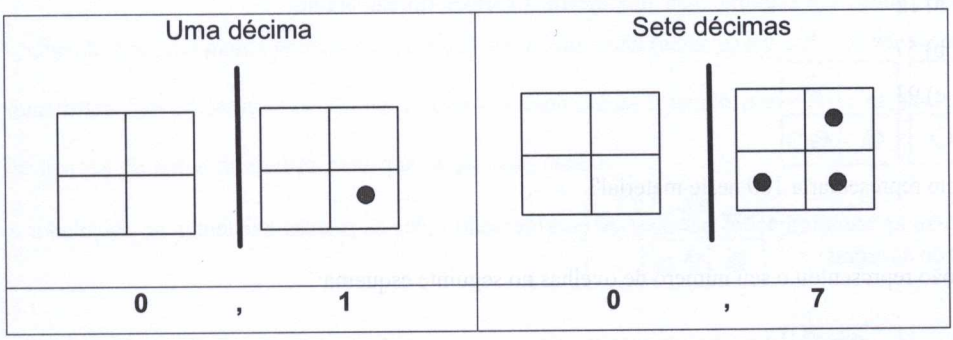
a) 307 = 3 centenas + 0 dezenas + 7 unidades:

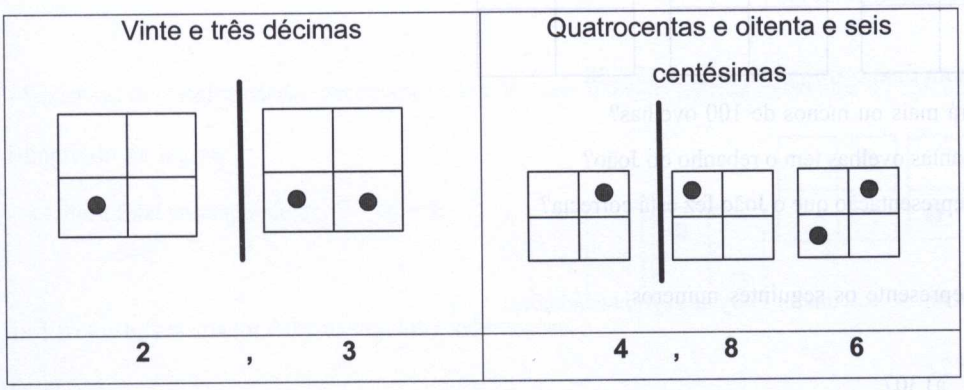


b) 1096 = 1 unidade de milhar + 0 centenas + 9 dezenas + 6 unidades:



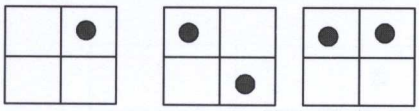
Este calculador permite que as regras se estendam aos números decimais:





9 - Represente trezentas e cinco milésimas

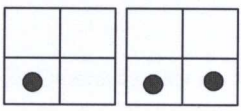
10 - Estará a representação seguinte correcta? No caso de pensar que não, distribua as peças correctamente de modo a que fique representado um número decimal:



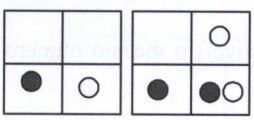
18.2 - A adição

O João comprou umas calças por 23€ e uma saia para a irmã por 15€. Quanto gastou o João?

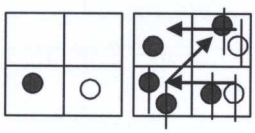
- Representamos 23€ no calculador:



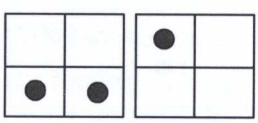
- Representamos, em seguida, 15€ nos mesmos cartões do calculador:



- Fazem-se as transformações necessárias considerando todas as marcas existentes no calculador e cumprindo as regras:



- A leitura final corresponde a: 23 + 15 = 38



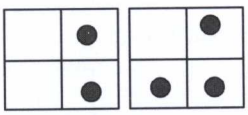
1 - Efectue no calculador Papy as seguintes adições:

a) 59 + 22
b) 27 + 32 + 29 + 25
c) 0,7 + 0,5
d) 0,26 + 0,74

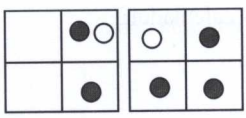
18.3 - A subtracção

O António é coleccionador de cromos, mas tem alguns repetidos. Ao todo tem 57 cromos e os não repetidos são 48. Quantos cromos tem repetidos?

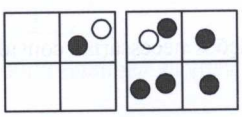
- Representamos 57 no calculador:



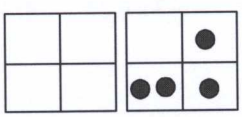
- Representamos, em seguida, 48 nos mesmos cartões do calculador mas com marcas de outra cor (branco):



- Sabendo que uma marca branca (subtractivo) anula uma preta (aditivo) em cada célula, fazem-se as transformações necessárias de forma a obter em cada célula (quando possível) o mesmo número de marcas de cores diferentes para que se possam anular:

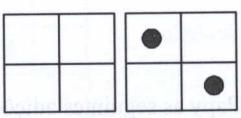


- Retiram-se as marcas que se anulam:



- Fazem-se as transformações necessárias considerando todas as marcas existentes no calculador e cumprindo as regras.

- A leitura final corresponde a: 57 – 48 = 9:



1 - Efectue no calculador Papy as seguintes subtracções:

a) 59 - 22

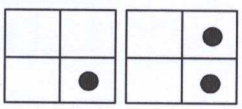
b) 4,7 - 1,3

c) 8,26 - 5,74

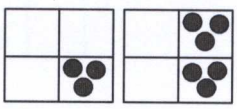
18.4 - A multiplicação

A Joana gastou 15€ na festa da sua aldeia. Sabendo que o seu irmão gastou o triplo do que ela gastou, que quantia gastou o seu irmão?

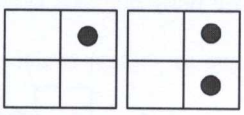
- Representamos 15€ no calculador:



- Triplicam-se as marcas em cada célula:



- Fazem-se as transformações necessárias considerando todas as marcas existentes no calculador e cumprindo as regras do calculador Papy. A leitura final corresponde a: 3 x 15 = 45:



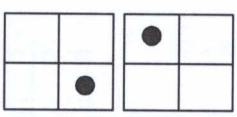
1 - Efectue no calculador Papy as seguintes multiplicações:

a) 2 x 24 b) 4 x 3,8 c) 3 x 0,27 d) 4 x 0,05

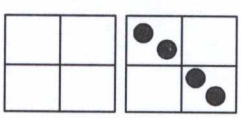
18.5 - A divisão

A Sofia gastou na confecção de dois bolos 18 ovos. Quantos ovos gastou em cada bolo?

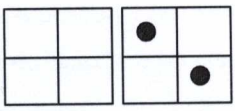
- Representamos 18 no calculador:



- Fazem-se as transformações necessárias de forma a obter em cada célula duas marcas:



- Uma vez que se pretende a divisão por 2, retira-se uma marca em cada célula:



- A leitura final corresponde a: 18 : 2 = 9.

1 - Efectue no calculador Papy as seguintes divisões:

a) 33 : 3

b) 25 : 2

c) 4,2 : 4

19 – Cálculo mental

A importância do cálculo mental torna-se evidente no dia a dia de cada um, quanto mais não seja, se pretendermos fazer compras ou efectuar as mais diversificadas relações entre grandezas que dispensam, por comodidade, o cálculo escrito. O próprio domínio do algoritmo é tanto mais fácil quanto maior for a capacidade de cálculo mental.

19.1 - A estimativa

Um dos primeiros passos para o desenvolvimento do cálculo mental será o exercício da estimativa. O aluno deverá ter a antevisão do resultado possível para determinado cálculo. Só com o exercício continuado de estimativas o aluno ganhará capacidade de avaliar os resultados que obtém.

Exercício exemplo: Observe as operações abaixo e, sem resolvê-las, assinale a opção que mais se aproxima do resultado correcto:

29 x 3 =	60	70	90
1201 + 4800 =	5000	6000	7000
3949 – 2838 =	1000	1500	2000
8004 : 2 =	40	400	4000

Alguns requisitos deverão estar presentes no domínio mental do aluno para que sinta segurança na aplicação de técnicas de cálculo mental.

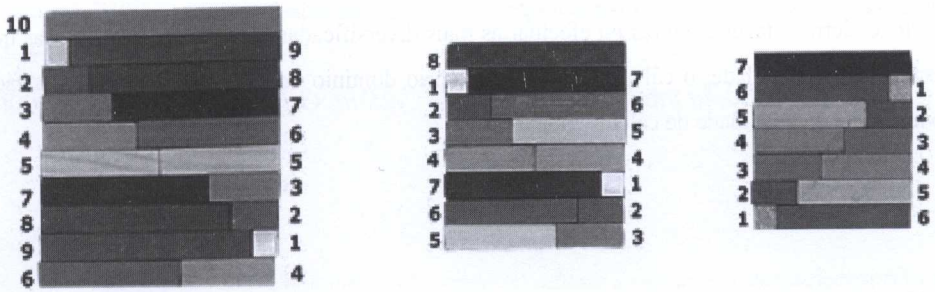
19.2 - Saber contar

É necessário o desenvolvimento de actividades que dêem oportunidade ao aluno de saber contar de dois em dois, de três em três...

19.3 - A decomposição de números

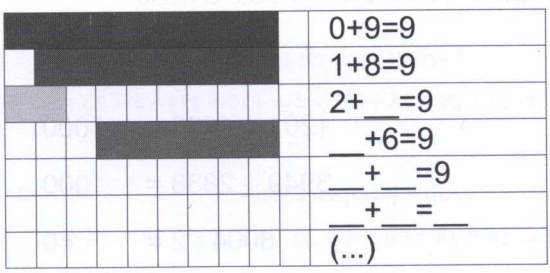
O cálculo mental será facilitado a partir do conhecimento das propriedades das operações, ainda que não sejam explicitamente identificadas. O material Cuisenaire tem todo o potencial para o desenvolvimento de actividades com o objectivo de o aluno se apropriar do domínio da adição

e subtracção com quaisquer números menores que 10. A construção do "tapete" ou "muro" com esse material é um bom exemplo disso:



É fundamental que o registo das operações, bem como o desenho das barras, seja realizado. Por exemplo:

Desenhe todas as maneiras possíveis para obter a barra azul, usando o material Cuisenaire. Escreva as adições correspondentes às decomposições feitas.



Todo o número pode ser representado como sendo a soma das suas unidades com as dezenas, com as centenas e com as demais ordens que o compõem.

O cálculo mental solicita, com muita frequência, o recurso à decomposição do número para ser operado pelas suas ordens de forma separada.

Actividades com o material multibásico, calculador multibásico e até com o próprio ábaco ajudam a visualizar como o número pode ser decomposto de diferentes maneiras. De acordo com a regra do nosso sistema de numeração (agrupamentos de 10), sempre que possível, será necessário proceder às trocas por elementos de ordem superior de modo a não ter mais que 9 agrupamentos da mesma ordem (valor posicional). Através de continuadas experiências com este material o aluno vai-se apropriando da noção do valor de posição dos números.

19.4 - A tabuada da multiplicação

Para além de ser compreendida, é necessário "sabê-la de cor". O recurso ao jogo talvez seja um meio privilegiado para a predisposição do aluno relativamente ao treino da tabuada.

Por exemplo, o **"bingo da multiplicação"**, que adaptado de diferentes formas, poderá constar na construção de várias operações (de multiplicar) por parte do aluno. Numa ficha previamente distribuída anotará as operações que satisfazem os valores que o professor vai mostrando, um a um. Faz bingo o primeiro a produzir a quantidade de operações previamente combinadas.

19.5 - Técnicas de cálculo mental (adaptado de Cadeia, Oliveira & Carvalho, 2006)

19.5.1 - Adição

- Formar dezenas:

Ex: $27 + 16 = 27 + (3 + 13) = (27 + 3) + 13 = 30 + 13 = 43$

Ex: $16 + 48 = 16 + (50 - 2) = (16 + 50) - 2 = 66 - 2 = 64$ (*contar para trás*)

Ex: $134 + 55 = 134 + (50 + 5) = (134 + 50) + 5 = 184 + 5 = 189$ (*decompor uma das parcelas*)

- Formar pares de parcelas iguais:

Ex: $25 + 29 = 25 + (25 + 4) = (25 + 25) + 4 = 50 + 4 = 54$

- Adicionar por ordens:

Ex: $64 + 28 = 60 + 4 + 20 + 8 = (60 + 20) + (4 + 8) = 80 + 12 = 92$

- Compensar para obter a dezena:

Ex: $67 + 28 = (67 + 3) + (28 - 3) = 70 + 25 = 95$

- Associar para obter múltiplos de 10:

Ex: $30 + 7 + 8 + 20 + 3 = (30 + 20) + (7 + 3) + 8 = 50 + 10 + 8 = 68$

- Decompor e associar para obter múltiplos de 10:

Ex: $36 + 37 = (35 + 1) + (35 + 2) = (35 + 35) + (1 + 2) = 70 + 3 = 73$

19.5.2 - Adição de números decimais

- O cálculo poderá ser facilitado se transformarmos os números decimais em números inteiros e aplicar as regras anteriores:

Ex: 3,42 + 5,45 = (3,42 + 5,45) x 100) : 100 = (342 + 545) : 100 =
= (300 + 500 + 40 + 40 + 2 + 5) : 100 = (800 + 80 + 7) : 100 = 887 : 100 = 8,87

- Decompor os números em parte inteira e parte decimal e adicioná-las separadamente:

Ex: 3,62 + 5,45 = (3 + 5) + (62 + 45) : 100 = 8 + (60 + 40 + 2 + 5) : 100 =
= 8 + (100 + 7) : 100 = 8 + 107 : 100 = 8 + 1,07 = 8 + 1 + 7 : 100 = 9 + 0,07 = 9,07

19.5.3 - Subtracção

- Subtrair por ordens, (*quando cada ordem do aditivo é maior do que a respectiva ordem do subtractivo*):

Ex: 96 - 34 = (90 + 6) - (30 + 4) = (90 - 30) + (6 - 4) = 60 + 2 = 62

- Compensar para igualar a ordem das unidades do aditivo e do subtractivo:

Ex: 94 - 36 = (94 + 2) - 36 - 2 = 96 - 36 - 2 = 60 - 2 = 58

- Decompor para igualar a ordem das unidades do aditivo e do subtractivo:

Ex: 94 - 36 = 94 - (34 + 2) = (94 - 34) - 2 = 60 - 2 = 58

- Compensar para obter dezena no subtractivo:

Ex: 94 - 36 = (94 + 4) - (36 + 4) = 98 - 40 = 58

- Subtrair por partes:

Ex: 94 - 36 = 94 - (30 + 6) = (94 - 30) - 6 = 64 - 6 = 58

19.5.4 - Multiplicação

- Produto de múltiplos de 10:

Ex: 30 x 400 = (3 x 10) x (4 x 100) = (3 x 4) x (10 x 100) = 12 x 1000 = 12000

- Compensar para obter dezena, centena,...:

Ex: 5 x 42 = 42 x 5 = 42 x (10 : 2) = 420 : 2 = 210

- Decompor um dos factores:

Ex: 6 x 42 = 6 x (40 + 2) = 6 x 40 + 6 x 2 = 240 + 12 = 252

Ex: 6 x 49 = 6 x (50 - 1) = 6 x 50 - 6 x 1 = 300 - 6 = 294 (*contar para trás*)

- Multiplicar por 11:

Quando o número é formado por dois algarismos: Se a soma dos dois algarismos for menor que 10, coloca-se no meio dos algarismos a sua soma.

Ex: 27 x 11 = 297

Se a soma dos dois algarismos for maior ou igual que 10, coloca-se no meio dos algarismos o algarismo das unidades da sua soma e adiciona-se 1 às dezenas (*e vai um*).

Ex: 68 x 11 = 748

Generalizando:

• Quando a soma dos dois algarismos anteriores for menor que 10:

abcd x 11 ⟶ a | a+b | b+c | c+d | d

Ex: 4536 x 11 = 49896

• Quando a soma dos dois algarismos anteriores é maior ou igual a 10, considera-se o algarismo das unidades e adiciona-se 1 à soma dos algarismos seguintes:

abcd x 11 ⟶ a+1 | (1+a+b)-10 | (1+b+c)-10 | (c+d)-10 | d

Ex: 47389 x 11 = 521279

Ex: 47189 x 11 = 519079

• Quadrado de um número cujo algarismo das unidades é 5:

Muito facilmente se pode calcular o produto de um número por si próprio quando o algarismo das unidades é 5.

O número de centenas desse produto resulta da multiplicação do número de dezenas desse número pelo seu consecutivo e sobram sempre 25 unidades.

A5 x A5 = B25; sendo B = A x (A+1)

Ex: 15 x 15 = 225

25 x 25 = 625

85 x 85 = 7225

115 x 115 = 13225

19.5.5 - Divisão

- Procurar o múltiplo de 10 mais próximo:

Ex: 154 : 2 = (150 + 4) : 2 = 150 : 2 + 4 : 2 = 75 + 2 = 77

Ex: 118 : 2 = (120 - 2) : 2 = 120 : 2 - 2 : 2 = 60 - 1 = 59

- Fazer simplificações sucessivas:

Ex: 180 : 12 = 90 : 6 = 30 : 2 = 15

Ex: 104 : 8 = 52 : 4 = 26 : 2 = 13

- Multiplicar pelo inverso:

Ex: 45 : 0,5 = 45 x 2 = 90

Ex: 25 : 0,2 = 25 x 5 = 125

19.6 - Seis sugestões para a sala de aula

Retirado de: http://novaescola.abril.com.br/ed/116_out98/html/matematica.htm

1. Ao estimular o cálculo mental, permita que os alunos utilizem papel e lápis, sobretudo no início do trabalho. Para entender uma estratégia, nada melhor do que registá-la passo a passo.

2. Cálculo mental não é fazer contas de cabeça utilizando os procedimentos tradicionais, mas sim procurar alternativas de cálculo mais confortáveis.

3. A repetição exagerada de exercícios não ajuda a desenvolver o cálculo mental. Por isso, são de evitar listas intermináveis de contas.

4. Os procedimentos de cálculo mental devem ser fruto de descobertas pessoais. Por isso, estimule a troca de ideias entre os seus alunos.

5. Não se faz cálculo mental sem o domínio da tabuada e de operações básicas, como adicionar dois números quaisquer menores do que dez.

6. Não exija resoluções com tempo marcado. A velocidade nos cálculos deve ser uma consequência e não um objectivo.

20 - Calculadora

A calculadora liberta os alunos dos grandes cálculos numéricos, quase sempre fastidiosos, ficando disponíveis para o desenvolvimento de outras capacidades, como seja a de resolução de problemas, de desafios ou de investigações matemáticas.

A sua utilização em ambiente sala de aula é, por si só, uma grande motivação para os alunos que, seguindo a orientação do professor, poderão ser encaminhados para as mais diversas áreas da Matemática.

O cálculo mental e a estimativa também poderão ser desenvolvidos com o recurso a esta ferramenta tecnológica, servindo fundamentalmente para a verificação rápida do raciocínio utilizado. Eis algumas actividades que se poderão desenvolver com recurso a esta poderosa ferramenta:

20.1 - Conhecer a calculadora

Para que servem as teclas M+, M-, MR, MC, MRC? A letra M é comum a todas as teclas. O que quererá dizer a letra M?

Siga os seguintes passos e tente perceber o que está acontecer de acordo com os resultados que se obtêm.

Situação A:

1º → 1 1 - 6 = M+

2º → 1 0 x MR =

Traduza por uma expressão numérica os cálculos efectuados.

Situação B:

1º → 5 1 - 6 = M+

2º → 2 3 - 1 8 = M+

3º → 5 M+

4º → MR

Traduza por uma expressão numérica os cálculos efectuados.

Situação C:

1º → [6] [4] [-] [1] [4] [=] [M+]

2º → [2] [9] [-] [1] [4] [=] [M-]

3º → [MR]

Traduza por uma expressão numérica os cálculos efectuados.

A tecla [MC] é utilizada quando pretendemos apagar os valores que estão em memória. Caso a sua calculadora tenha outra tecla com a letra M, experimente várias situações para descobrir a sua função.

De acordo com a máquina utilizada, registe as conclusões a que chegou.

Compare as suas conclusões com as dos seus colegas.

1º → [1] [1] [x] [5] [CE] [6] [-] [5] [=] _____

2º → [1] [1] [x] [5] [AC] [6] [-] [5] [=] _____

Troque opiniões com os seus colegas e, em grupo, faça o registo das conclusões a que chegaram.

20.2 – Outras actividades com calculadora

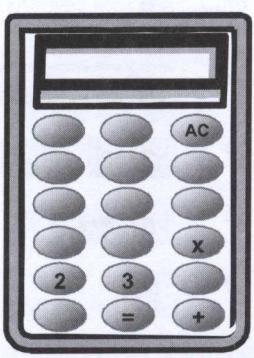
1 - Devido ao uso, os símbolos da maioria das teclas da calculadora desapareceram. Como poderei obter os seguintes números? *[registe os procedimentos]:*

6 - _____ 7 - _____

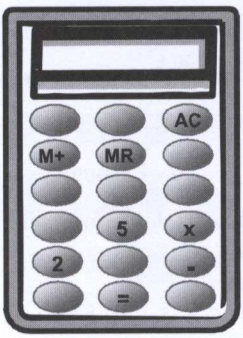
8 - _____ 10 - _____

12 - _____ 15 - _____

20 - _____ 50 - _____



2 - Devido ao uso, os símbolos da maioria das teclas da calculadora desapareceram. Como poderei obter os seguintes números? *[registe os procedimentos]:*



1 - _____ 3 - _____

10 - _____ 24 - _____

32 - _____ 100 - _____

3 - Devido ao uso, os símbolos da maioria das teclas da calculadora desapareceram. Como poderei obter os seguintes números? *[registe os procedimentos]:*

3 - _____ 4 - _____

5 - _____ 6 - _____

7 - _____ 8 - _____

9 - _____ 10 - _____

Poder-se-á recorrer a outros níveis de dificuldade em actividades interactivas no site: *http://rachacuca.com.br/calculadora-quebrada/*

4 - Utilizando a calculadora, verifique qual dos números indicados se aproxima mais do valor de 21,12 : 4

a) 5,25 b) 5,3 c) 5,289 d) 5,29

5 - Siga as instruções de cada um dos seguintes passos e faça o registo da conclusão.

1º → 9 + = = = = =

2º → 2 7 - 3 = = = = = = =

3º → 2 x = = = = = =

4º → 2 x 3 = = = = =

5º → 3 x 2 = = = =

5.1 - Discuta com o colega do lado, as conclusões a que chegaram e elabore com ele uma nova conclusão de modo a que os dois estejam de acordo.

5.2 - Compare a conclusão a que chegaram com as conclusões dos outros colegas.

5.3 - Participe no debate de forma a que seja registado no quadro negro apenas uma conclusão e em que toda a turma esteja de acordo.

6 - Encontre os resultados das expressões abaixo, utilizando o menor número de teclas. Para cada um dos casos registe a forma como procedeu.

a) 35 + 35 + 35 + 35 + 35

b) 120 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15

c) 125 - 25 - 25 - 25 - 25 - 25

d) 3 x 4 + 3 x 4 + 3 x 4 + 3 x 4 + 3 x 4

e) 34 + 7 - 5 + 7 - 5 + 7 - 5 + 7 - 5 + 7 - 5 + 7 - 5

f) 12 + 5 + 12 + 5 + 12 + 5 + 12 + 5 + 12

7 - Das opções que se seguem, escolha a que mais se aproxima do valor:

7.1 → 12 x 14

a) 158 b) 108 c) 5,01 d) 4.9

7.2 → 25,1 : 5

a) 5,20 b) 4,20 c) 5,01 d) 4.9

8 - Siga os passos que se seguem:

1º - digite na calculadora um número com três algarismos;

2º - digite novamente o mesmo número;

3º - divida por 7:

4º - divida novamente o resultado obtido por 11;

5º - finalmente, divida por 13.

Tenta encontrar uma justificação para o sucedido.

9 - Utilizando apenas a operação divisão, determine com a ajuda da calculadora o valor a pagar por meio quilograma de bananas sabendo que o quilograma custa 1,36€. Faça o registo do procedimento.

9.1 - Resolva o mesmo problema utilizando a tecla . Faça o registo do procedimento e compare-o com a alínea anterior.

10 - Calcule mentalmente: 10 : 0,25 e verifique o resultado com a calculadora.

10.1 - Para obter o mesmo resultado por quanto teria que multiplicar o 10?

10.2 - Que relação existe entre 0,25 e o número encontrado na alínea anterior?

10.3 - Tente encontrar com a ajuda dos colegas outros pares de números com a mesma relação.

10.4 - Multiplique cada um dos pares de números encontrados e registe as conclusões obtidas.

11 - Encontre uma maneira de aparecer o número 657 na calculadora sem utilizar as teclas 5, 6 e 7.

12 - Utilize a calculadora para fazer as seguintes multiplicações com a capicua 101.

a) 101 x 1122 = b) 101 x 2211 =

c) 101 x 2233 = d) 101 x 3322 =

13 - Sem calculadora tente prever o resultado das operações:

a) 101 x 1144 = b) 101 x 2211 = c) 101 x 2255 =

d) 101 x 6622 = e) 101 x 3366= f) 101 x 3377 =

13.1 - Verifique os resultados com a calculadora e tente encontrar justificação para o caso onde tenha havido mais dificuldade.

14 - Utilize a calculadora para fazer as seguintes multiplicações

a) 101 x 1212 = b) 101 x 2323 =

c) 101 x 4545 = d)101 x 2020 =

15 - Sem calculadora tente prever o resultado das operações:

a) 101 x 1515 = b) 101 x 1111 = c) 101 x 3030 =

d) 101 x 2525 = e) 101 x 3535= f) 101 x 6565 =

15.1 - Verifique os resultados com a calculadora e tente encontrar justificação para o caso onde tenha havido mais dificuldade.

16 - Pedir ao aluno que siga os seguintes passos:

1º escrever um número de três algarismos mas que não sejam todos iguais.
2º inverter o número.
3º encontrar a diferença entre os dois números.
4º pedir o algarismo das unidades.

O professor deverá dizer qual é o número que está na calculadora *[o algarismo das dezenas é sempre 9 e o número obtido, é sempre múltiplo de 9].*

Em trabalho de grupo, os alunos poderão desenvolver um pequeno trabalho de investigação para descobrir a "magia". Cada grupo deverá produzir um texto que explique as suas conclusões para serem apresentadas à turma.

17 - Pedir ao aluno que siga os seguintes passos:

1º digitar na calculadora um número qualquer (não esquecer este número).
2º multiplicar por 3;
3º adicionar 15;
4º multiplicar por 2;
5º dividir por seis;
6º subtrair o número digitado inicialmente na calculadora.

Em trabalho de grupo, os alunos poderão desenvolver um pequeno trabalho de investigação para descobrir porque é que o resultado é sempre 5.

17.1 - No caso de querermos que o resultado seja outro número qualquer, o que teremos de fazer?

21 - Estatística

21.1 - Variáveis estatísticas discretas

Durante o mês de Fevereiro foram vendidas várias camisolas na loja da D. Rita. A tabela seguinte ilustra o número de vendas:

Tabela de frequências

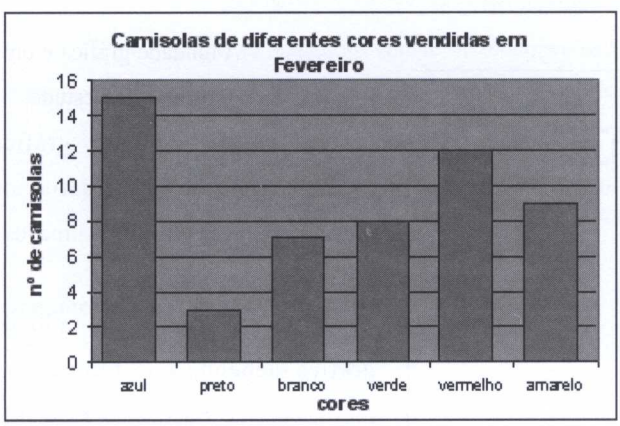
cor	nº de camisolas *freq. absoluta (f_i)*	*frequência relativa (fr_i)*
azul	15	0,28
preto	3	0,05
branco	7	0,13
verde	8	0,15
vermelho	12	0,22
amarelo	9	0,17
Total:	**54**	**1**

- frequência absoluta (f_i) é o número de vezes que um acontecimento se verifica.

- frequência relativa (fr_i) é obtida pela divisão da frequência absoluta pelo número total de observações.

A partir da tabela de frequências podem ser construídos vários gráficos para representar uma dada distribuição de variáveis discretas:

21.1.1 - Gráfico de barras

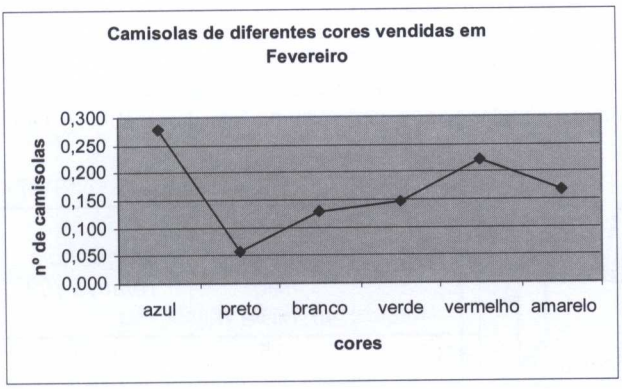


- As barras devem ter a mesma largura e estar igualmente separadas umas das outras.

- Todos os gráficos devem ter um título informativo do assunto a que se referem.

- Os eixos horizontal e vertical devem estar devidamente identificados.

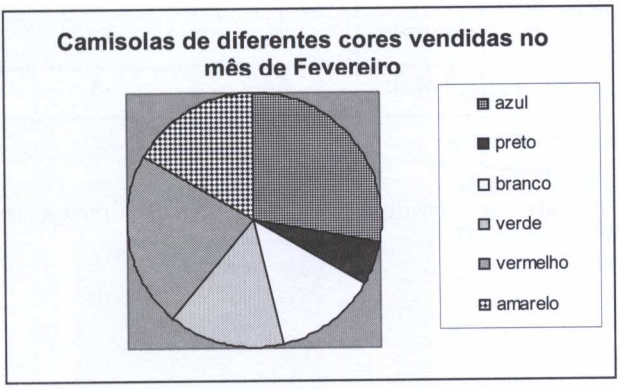
21.1.2 - Gráfico de linhas



- Este gráfico foi definido a partir das frequências relativas.

- O recurso às frequências relativas através de uma tabela de frequências ou de um gráfico poderá ser muito útil para comparar conjuntos de dados com dimensões diferentes (por exemplo, as vendas de um mês comparativamente com as vendas de um ano).

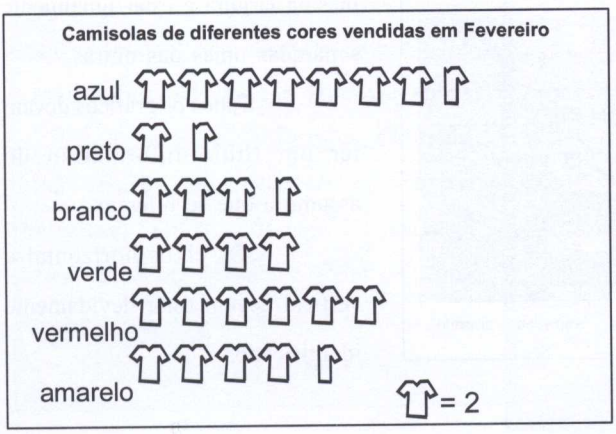
21.1.3 - Gráfico circular ou sectograma



- Num gráfico circular as amplitudes de cada sector são proporcionais às frequências que representam.

- Devem ter sempre uma legenda.

21.1.4 – Pictogramas por repetição

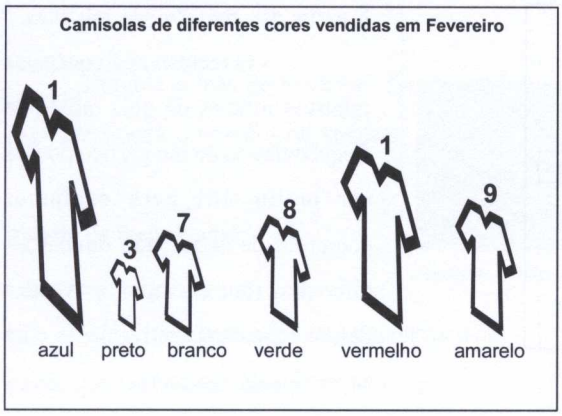


- A unidade gráfica é uma figura alusiva ao tema em estudo.

- A unidade gráfica repete-se as vezes necessárias de modo a representar cada uma das frequências.

- O valor da unidade gráfica depende das frequências registadas e deve ser sempre indicada no gráfico.

21.1.5 – Pictogramas por ampliação

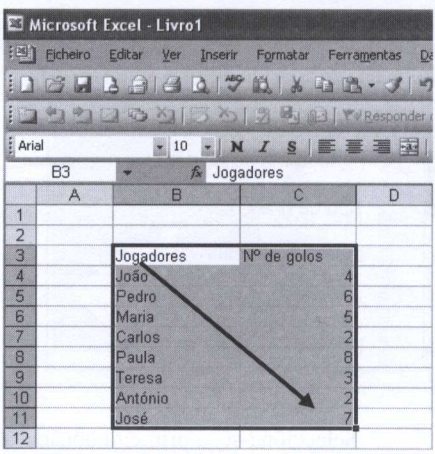


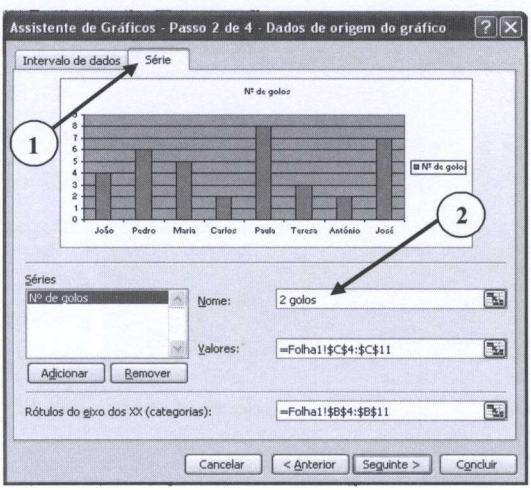
- Neste caso utiliza-se um único símbolo para cada variável, mas o seu tamanho deve ser proporcional aos valores que representam.

- Habitualmente coloca-se o valor das frequências junto às imagens.

21.1.6 - Construção de pictogramas em Excel

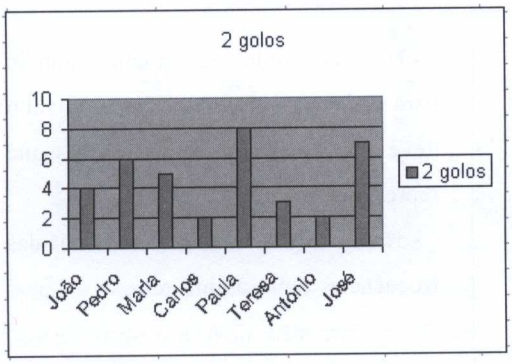
Após a construção de uma tabela no Excel poder-se-á elaborar o pictograma. Começamos por seleccionar a tabela colocando o rato na primeira célula e arrastando-o até à última do lado oposto, no sentido indicado na figura:



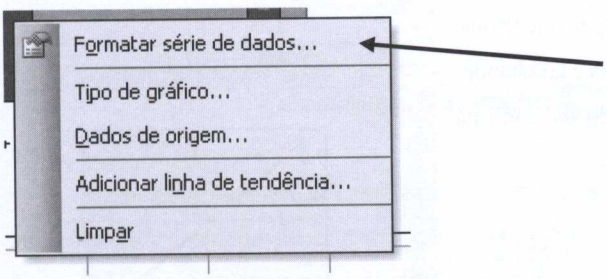


Para se construir o pictograma seguem-se os mesmos passos realizados para a obtenção do gráfico de barras. Porém, no passo 2 do "Assistente de Gráficos" deve-se clicar no separador "Série" (assinalado com 1) e alterar o conteúdo do nome da série para o valor de cada imagem do pictograma (assinalado com 2).

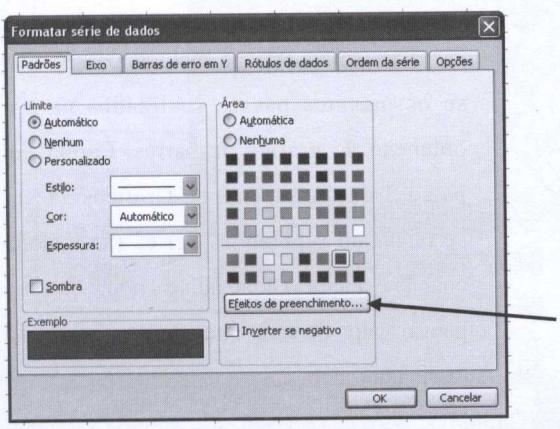
De seguida pode-se avançar no "Assistente de Gráficos", e concluir a construção do gráfico, clicando em Concluir Obter-se-á o gráfico de barras:



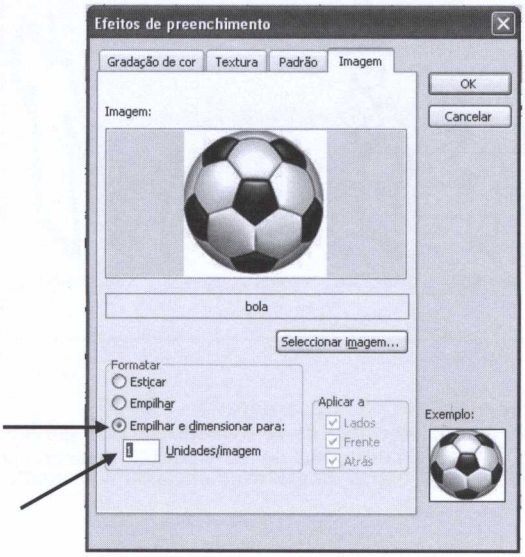
Para se colocarem os símbolos nas barras, com o objectivo de se transformar este gráfico num pictograma, basta clicar uma vez em cima de uma das barras do gráfico e clicando novamente com botão do lado direito obter-se-á:



Selecciona-se a primeira opção: "**Formatar série de dados...**". Abrir-se-á a seguinte janela:

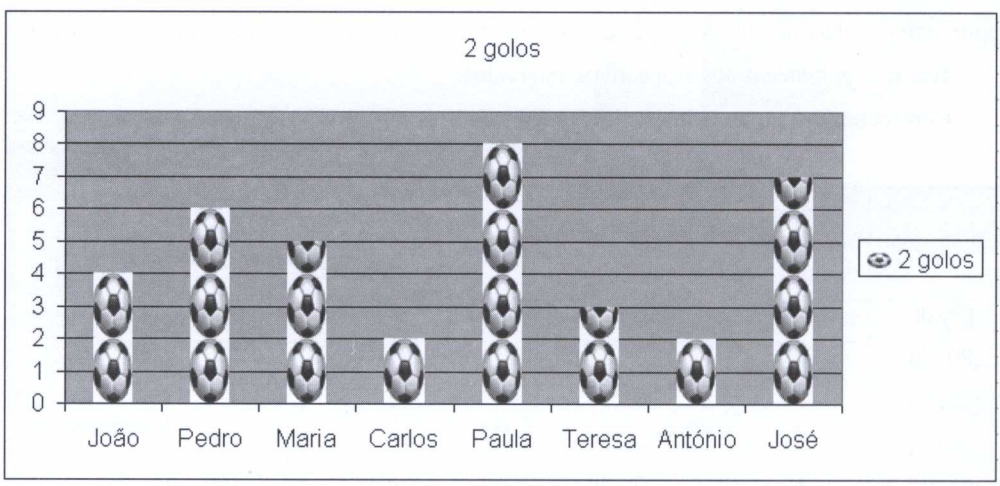


Clicando-se no botão assinalado, acima, pela seta, vamos obter a seguinte janela onde poderá seleccionar a imagem pretendida recorrendo à tecla Seleccionar imagem... onde teremos de procurar a pasta que tem a imagem que se pretende para o pictograma.

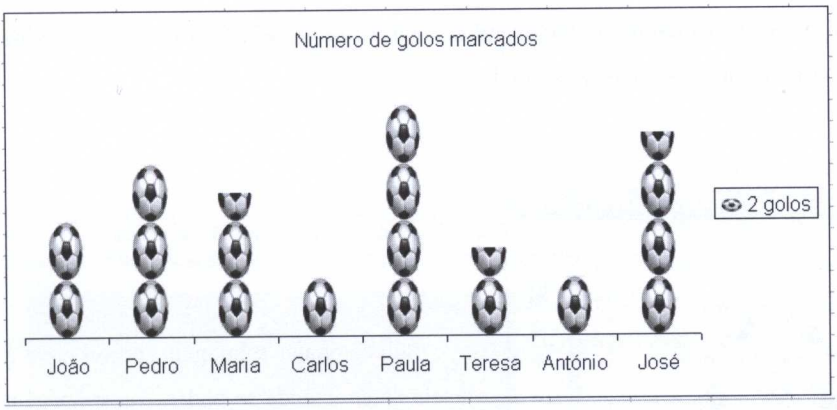


Seleccionada a imagem, regressa-se à janela anterior onde se poderá ver a imagem escolhida. Para além disso a imagem terá de ser formatada de modo que o gráfico se transforme num pictograma. Assim, na opção "**Formatar**" escolhe-se a opção assinalada pela seta e define-se a unidade por imagem.

Para finalizar, clica-se em OK e obtém-se o pictograma:



Finalmente só resta modificar o Título do Gráfico (dando 2 cliques seguidos sobre ele), seleccionar sucessivamente e apagar as "Linhas de Grelha", a "Área de Desenho" e o "Eixo de Valores":



O pictograma está construído.

21.2 - Variáveis estatísticas contínuas

As classificações de 27 alunos numa prova de exame à disciplina de Matemática, numa escala de 0 a 100, foram os seguintes:

60	51	30	25	60	85	40	18	78
47	56	45	30	15	90	38	47	52
53	52	51	48	75	93	59	75	69

Neste caso poderemos considerar os dados como sendo uma variável contínua. Assim, importa definir intervalos de números reais e considerar as frequências por contagem dos valores da variável que pertencem aos respectivos intervalos.

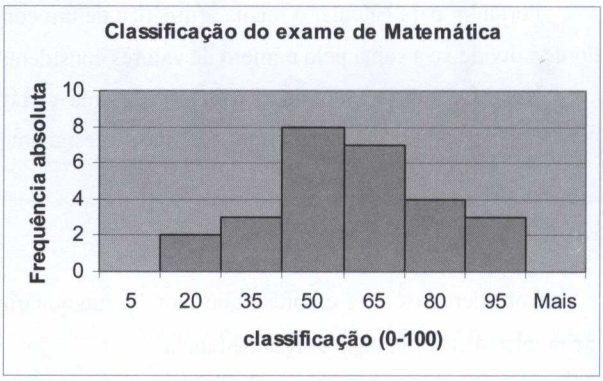
Consideremos, então, 6 intervalos, também designados por classes:

classificação	freq. absoluta (f_i)	frequência relativa (fr_i)	frequência absoluta acumulada (F_i)	frequência relativa acumulada (Fr_i)
[5,20[	2	0,074	2	0,074
[20,35[	3	0,111	5	0,185
[35,50[	8	0,296	13	0,481
[50,65[	7	0,259	20	0,741
[65,80[	4	0,148	24	0,889
[80,95[	3	0,111	27	1,000
Total:	27	1		

As frequências acumuladas (absolutas ou relativas) incorporadas nesta nova tabela, poderão ter interesse quando se pretende determinar o número ou a percentagem de observações que são menores ou iguais a um determinado valor.

21.2.1- Histograma

Histograma é um gráfico formado por um conjunto de rectângulos adjacentes cuja base é o intervalo da classe, e a altura é o respectivo valor da frequência. Servem para representar distribuições de variáveis contínuas.



Na construção do histograma:

· os dados devem ser agrupados em classes.

· no eixo horizontal representam-se os intervalos das classes.

· no eixo vertical representam-se as frequências absolutas ou relativas das classes.

21.3 - Medidas de tendência central

21.3.1 - Média

O consumo de peças de fruta num refeitório de uma escola durante uma semana foi:

Dias da semana	Peças de fruta
segunda-feira	280
terça-feira	250
quarta-feira	195
quinta-feira	210
sexta-feira	150

Durante a semana foram consumidas 280 + 250 + 195 + 210 + 150 = 1085 peças de fruta. Se este valor correspondesse a um consumo diário igual, então teríamos 1085 : 5 = 217. Logo, 217 é o consumo médio diário de peças de fruta no refeitório durante essa semana.

Chama-se média aritmética dos N valores de uma variável quantitativa $x_1, x_2, x_3, ..., x_N$ ao valor de M que também pode ser representado por $\bar{x}$,e que pode ser obtido:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_N}{N}$$

Portanto: para calcular a média aritmética de um conjunto de valores, adicionam-se todos os valores e divide-se a soma pelo número de valores considerados.

Nota: Quando se trata da distribuição de uma variável contínua, os valores da variável são considerados os pontos médios das classes, que se designam por ***marcas da classe***.

21.3.2 - Moda

Consideremos uma empresa que tem 15 funcionários remunerados por quatro escalões de vencimentos de acordo com a seguinte tabela:

Vencimentos (€)	Nº de funcionários
400	7
450	4
500	2
800	2

Verifica-se pela leitura da tabela que o vencimento com maior frequência é o de 400 €. A moda é 400.

É de referir que num conjunto de dados estatísticos, pode existir mais que uma moda (bimodal, etc.) ou até mesmo não existir (amodal).

Portanto: a **moda**, designada por M_o é o valor da variável com maior frequência.

21.3.3 - Mediana

Se escrevermos os dados do estudo anterior por ordem (crescente ou decrescente), obtemos:

400, 400, 400, 400, 400, 400, 400, 450, 450, 450, 450, 500, 500, 800, 800

O valor da variável que ocupa a posição central é a **mediana** designada por M_e ou $\tilde{x}$.

Pode, no entanto, acontecer que o conjunto de todos os dados estatísticos seja em número par. Imaginemos que a empresa anterior admitia um novo funcionário com o vencimento do escalão mais baixo. Neste caso, obtém-se dois valores centrais:

400, 400, 400, 400, 400, 400, 400, 400, 450, 450, 450, 450, 500, 500, 800, 800

A **mediana** é a semi-soma destes dois valores centrais.

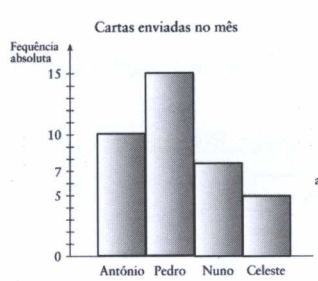
$$M_e = \frac{400 + 450}{2} = 425$$

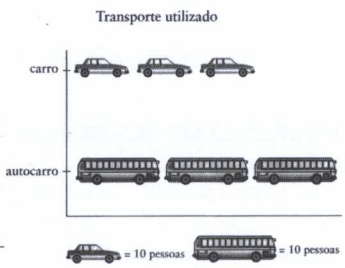
Portanto: a **mediana** é o valor do dado central ou a média aritmética dos dois valores dos dados centrais.

Nota: Enquanto que a média e a mediana só podem ser indicadas se os dados forem quantitativos (numéricos), a moda pode ser indicada mesmo quando os dados são qualitativos.

Actividades:

1 - Os gráficos seguintes estão mal construídos. Explique porquê.





2 - A tabela seguinte traduz os resultados dos testes do Ricardo, do Carlos e da Joana ao longo do ano:

Ricardo	59	48	95	58	63
Carlos	65	60	64	66	66
Joana	48	58	59	63	95

Na sua opinião, qual é o melhor aluno? Justifique a sua escolha.

3 - As turmas A, B e C foram submetidas ao mesmo teste onde se apuraram os seguintes resultados:

turma																Média	Moda	Mediana
A	16	17	18	19	15	18	16	8	15	4	3	8	9	8	5	11,9	8	15
B	11	12	13	10	11	12	9	10	13	15	14	10	11	12	12	11,7	12	12
C	6	18	10	12	13	12	11	14	10	6	6	9	16	17	18	11,9	6	12

Na sua opinião, qual a melhor turma? Justifique a sua escolha.

4 - Observe a seguinte tabela que representa a distribuição dos pesos dos alunos de uma turma.

pesos (kg)	f_i	F_i	fr_i	Fr_i
40	2			
42	5			
45	6			
51	8			
56	3			
64	1			

4.1 - Complete a tabela.

4.2 - Calcule a média dos pesos dos alunos.

4.2.1 - Diga o que significa, neste caso, o valor encontrado.

4.3 - Qual é a mediana desta distribuição? E a moda?

4.4 - Considerando as três medidas de tendência central encontradas, opine acerca da importância de cada uma delas.

22 – Geometria no plano

22.1 – Ângulos

Definição:

Porção de plano limitado por duas semi-rectas com o mesmo ponto de origem, denominado vértice do ângulo.

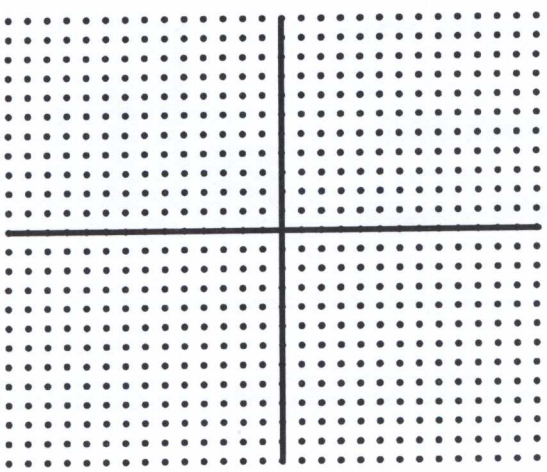
22.2 - Classificação de ângulos

sendo **a** a amplitude do ângulo;

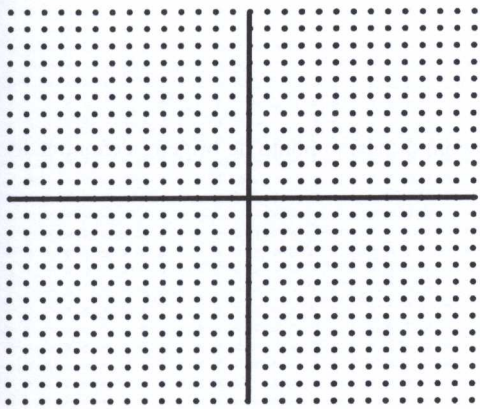
- ângulo nulo, (**a** = 0º)
- ângulo agudo, (0º<**a**< 90º)
- ângulo recto, (**a** = 90º)
- ângulo obtuso, (90º<**a**< 180º)
- ângulo raso, (**a** = 180º)
- ângulo giro ou de volta inteira, (**a** = 360º)

22.3 – Actividades que envolvem a noção de ângulo e simetria

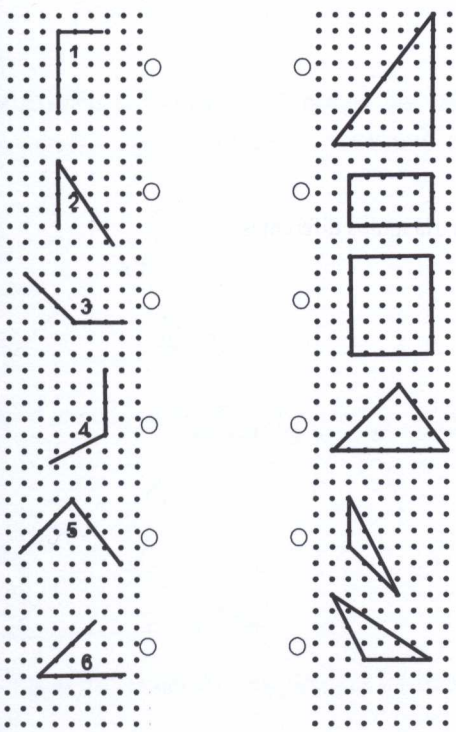
1 - Desenhe um rectângulo, um quadrado e dois triângulos diferentes.



1.1 - De cada uma das figuras anteriores, seleccione um dos ângulos e desenhe-os na malha seguinte. Classifique cada um desses ângulos.

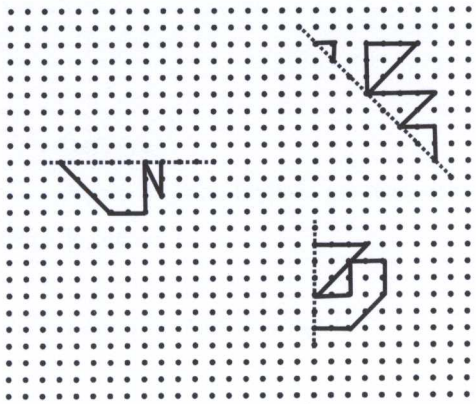


2 – Una cada um dos ângulos seguintes à figura ou figuras onde eles existem.

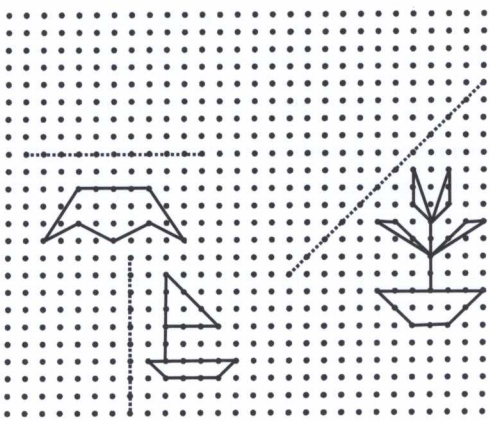


2.1 – Classifique cada um dos ângulos numerados.

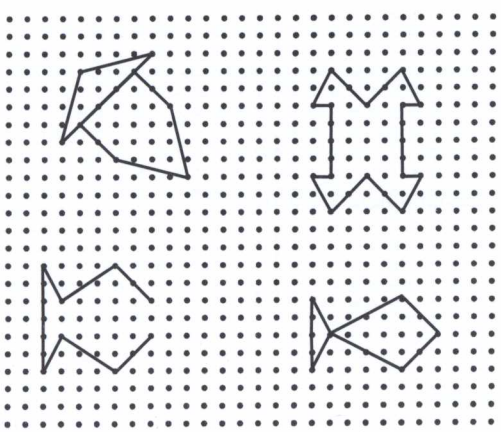
3 - Complete as figuras, considerando as rectas, a tracejado, como eixos de simetria.



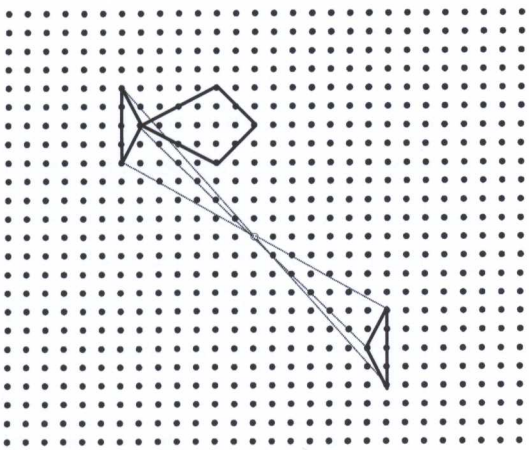
4 - Tendo em conta que as rectas a tracejado são eixos de simetria, construa as figuras simétricas das seguintes.



5 - Para cada uma das figuras seguintes, determine os eixos de simetria.



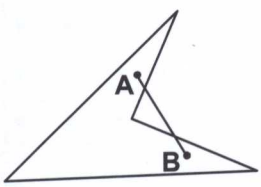
6 - Complete o peixe, tendo em conta o procedimento já iniciado com a cauda do peixe.



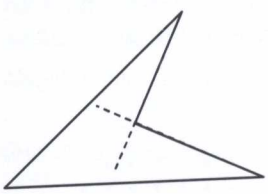
22.4 - Polígonos côncavos e polígonos convexos

Estamos perante um polígono côncavo quando:

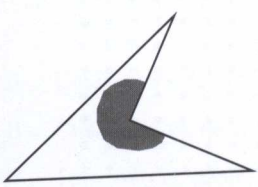
a) existem, pelos menos, dois pontos, que unidos formam um segmento de recta que não se encontra contido no polígono:



b) o prolongamento de pelo menos de um dos seus lados entra no polígono:



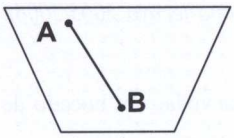
c) pelo menos um dos seus ângulos internos tem uma amplitude superior a 180º:

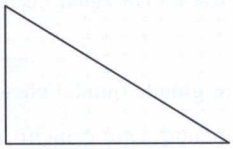


ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO
CASTELO BRANCO - BIBLIOTECA

Todos os outros casos são polígonos convexos.

Exemplos:



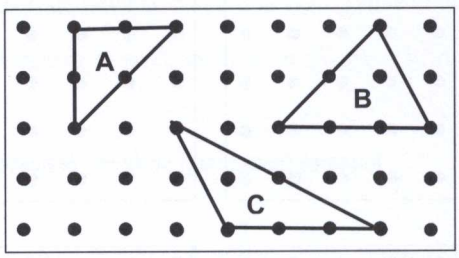


22.5 - Classificação de triângulos

22.5.1 - Quanto aos ângulos

Tendo em conta que:

- um triângulo cujos ângulos internos são todos agudos chama-se triângulo acutângulo,
- um triângulo que tenha um ângulo interno recto chama-se triângulo rectângulo,
- um triângulo que tenha um ângulo interno obtuso chama-se triângulo obtusângulo,
- classifique os seguintes triângulos quanto aos ângulos.



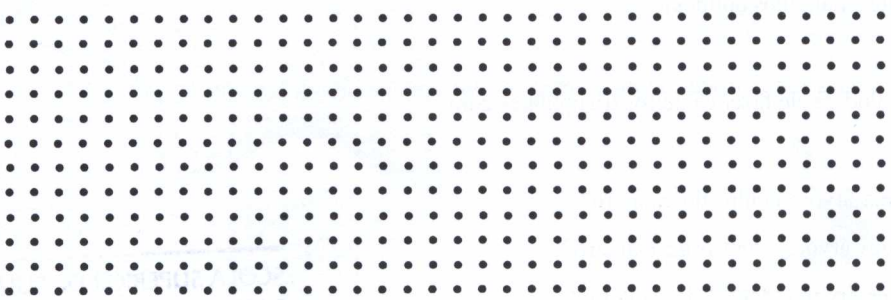
22.5.2 - Quanto aos lados

Tendo em conta que

- um triângulo cujos lados têm todos o mesmo comprimento chama-se triângulo equilátero,
- um triângulo cujos lados têm todos os comprimentos diferentes chama-se triângulo escaleno,

um triângulo que tenha pelo menos dois lados com o mesmo comprimento chama-se triângulo isósceles,

- Construa na seguinte malha de geoplano, caso seja possível, um triângulo equilátero, um triângulo isósceles e um triângulo escaleno:



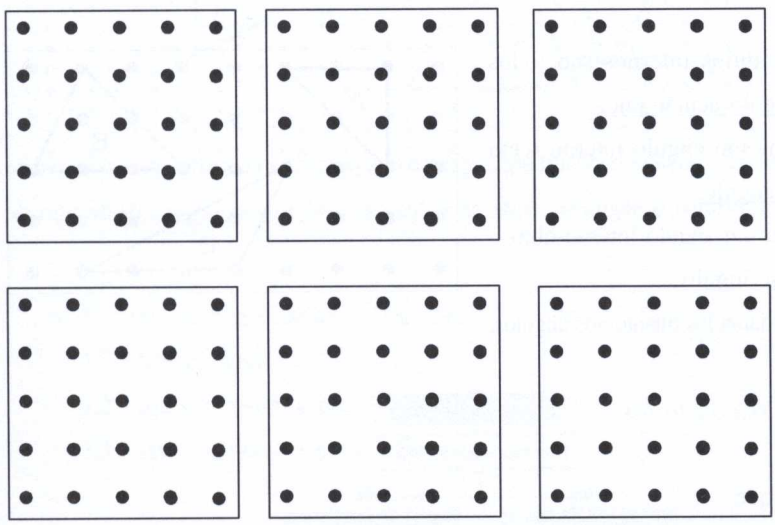
Actividades com triângulos:

Actividades propostas pela professora *Georgina Ferreira (formanda no ano lectivo 2005/2006).*

1 – O senhor Joaquim tem um grande quintal cheio de árvores e quer vedar um bocado de terreno para fazer um canteiro. No entanto, esse canteiro não pode ter árvores no meio e deve ter a forma de um triângulo. És capaz de o ajudar?

Podes usar o geoplano e o papel ponteado para representar esse canteiro (imagina que os pregos são as árvores);

Atenção: as árvores onde se prende a rede ou onde ela está encostada não contam!



2 – Compara a tua resposta com as dos teus colegas. Na folha ponteada que te é fornecida, faz o registo dos diferentes canteiros (triângulos) que surgiram.

3 – (Para responderes à próxima pergunta utiliza o geoplano e regista no papel ponteado os diferentes triângulos obtidos).

Poderá ele fazer canteiros triangulares com:

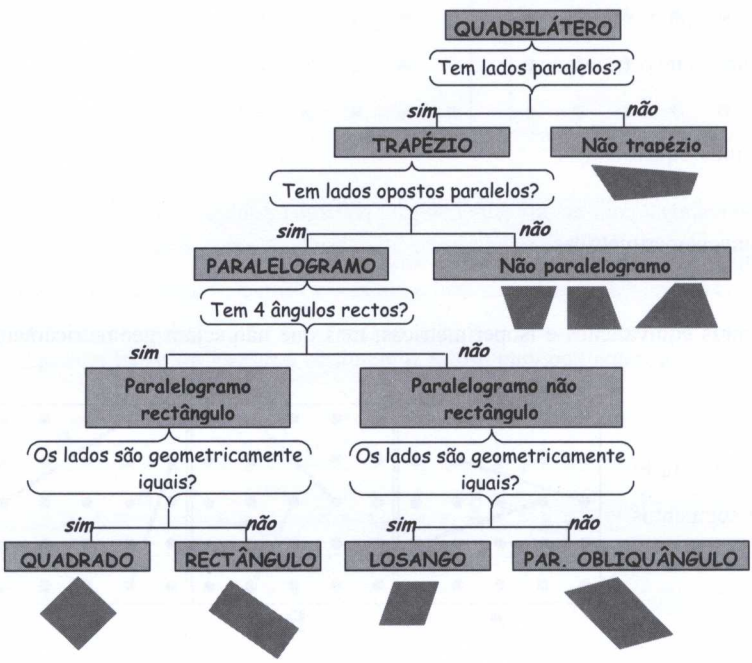
A – Uma árvore dentro do canteiro?

B – Duas árvores dentro do canteiro?

C – Três árvores dentro do canteiro?

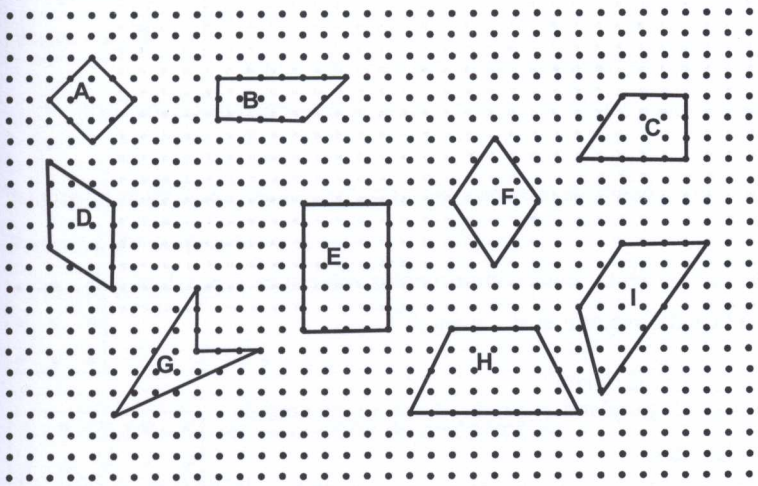
22.6 - Classificação de quadriláteros

Não sendo consensual a existência de um organigrama que permita a classificação exaustiva de todos os quadriláteros, sugerimos o seguinte, onde se apresentam alguns exemplos deste tipo de polígonos:



Actividade:

1. Tendo em conta o esquema anterior, classifique cada um dos quadriláteros seguintes (copie-os para o geoplano e para a folha de papel ponteado):



22.7 - Actividades com o geoplano

1 - Use só dois elásticos e desenhe:

1.1 - três triângulos;

1.2 - um pentágono e quatro triângulos.

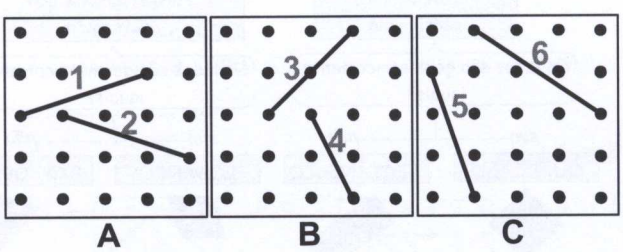
1.3 - um pentágono e cinco triângulos.

2 - Desenhe 2 figuras equivalentes.

3 - Desenhe 2 figuras isoperimétricas.

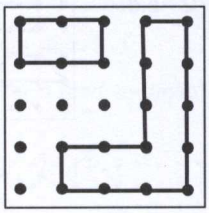
4 - Desenhe 2 figuras equivalentes e isoperimétricas, mas que não sejam geometricamente iguais.

5 - As figuras ao lado apresentam três pares de segmentos de recta. Qual o segmento maior em cada figura?



(adaptado de Serrazina, L. e Matos, J. (1988). *O geoplano na Sala de Aula*. Lisboa: APM, p. 109).

6 - Calcule o perímetro das seguintes figuras geométricas.

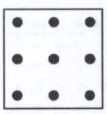


6.1 – Indique o perímetro de cada uma das figuras anteriores, se a unidade de comprimento for:

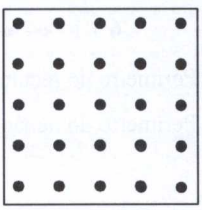
6.1.1 - o comprimento do segmento de recta que une três pregos consecutivos na horizontal;

6.1.2 - o comprimento do segmento de recta que une quatro pregos consecutivos na horizontal;

7 - Quantos segmentos de recta, com comprimentos diferentes é possível desenhar no geoplano 3 x 3? Qual o maior e qual o menor?



8 - Desenhe na malha de geoplano seguinte, cinco segmentos de recta com comprimentos diferentes.



9 - O António e o André são irmãos que têm andado numa grande discussão. Qual é o caminho mais curto para a casa da avó ?

A figura A mostra um esquema das ruas entre a casa deles e a casa da avó, com o caminho sugerido pelo António. A figura B, é o caminho proposto pelo André. O António argumenta que o caminho dele é mais curto porque só tem dois segmentos de recta. O André diz que o dele é mais curto porque o seu não faz um desvio tão grande. Quem tem razão?

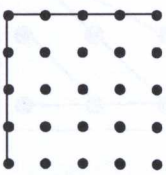


Fig.A

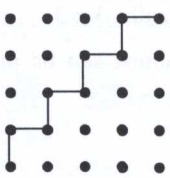
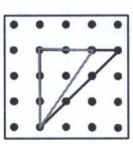


Fig.B

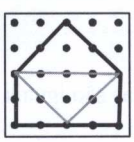
(adaptado de Serrazina, L. e Matos, J. (1988). *O geoplano na Sala de Aula*. Lisboa: APM, p. 108).

Resoluções:

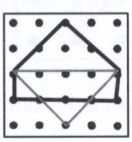
1.1 - p. e.

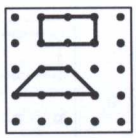
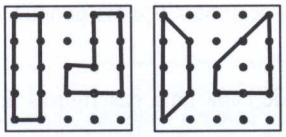
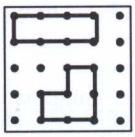


1.2 - p. e.



1.3 - p. e



2 - p.e.  3 - p.e.  4- p.e. 

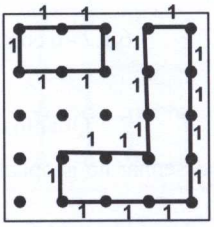
5 - Fig A – têm o mesmo comprimento; Fig. B – 3; Fig. C – 6

6 - [Para calcular qualquer perímetro tem que se definir a unidade de medida de comprimento].

Se a unidade de comprimento for ●—●, então:

Perímetro do rectângulo - 6 u. c.

Perímetro do hexágono - 14 u. c.



6.1.1 - ●—●—● → unidade de comprimento

Perímetro do rectângulo - 3 u. c.

Perímetro do hexágono - 7 u. c.

6.1.2 - ●—●—●—● → unidade de comprimento

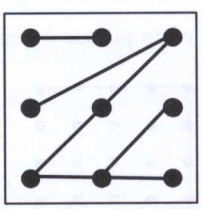
Perímetro do rectângulo – 2 u. c.

Perímetro do hexágono - $4\frac{2}{3}$ u. c.

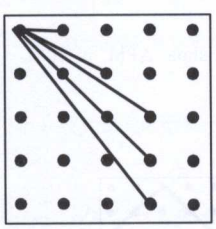
7 - Cinco segmentos de recta.

O maior é a diagonal do quadrado definido na malha 3 x 3.

O menor é o segmento de recta cujos extremos são os pregos que se encontram à menor distância entre si.



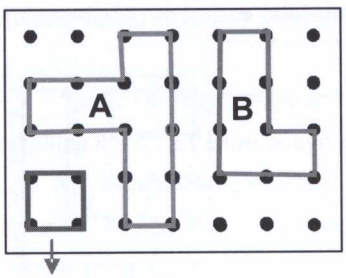
8 - Por exemplo:

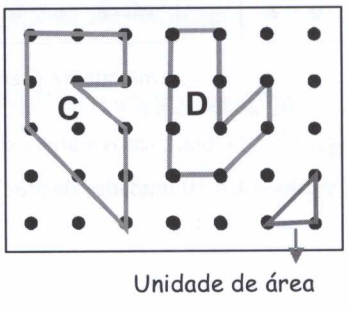


9 - Nenhum deles tem razão. As distâncias são iguais.

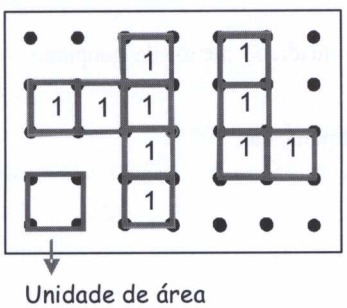
22.7.1 - Cálculo de áreas por decomposição

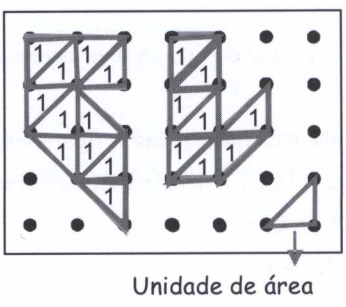
- Tendo em conta a unidade de área em cada caso, calcule a área de cada uma das figuras pelo método da decomposição:





Resolução:

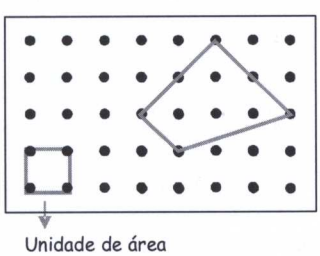


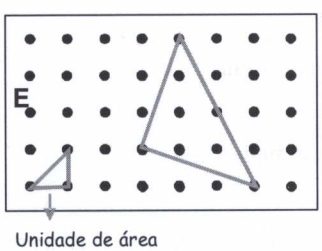


A área da figura A é 6 unidades de área. A área da figura B é 4 unidades de área. A área da figura C é 11 unidades de área. A área da figura D é 8 unidades de área.

22.7.2 - Cálculo de áreas por enquadramento

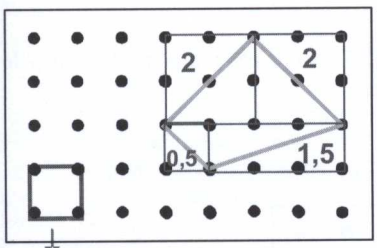
- Tendo em conta a unidade de área em cada caso, calcule a área de cada uma das figuras pelo método do enquadramento:



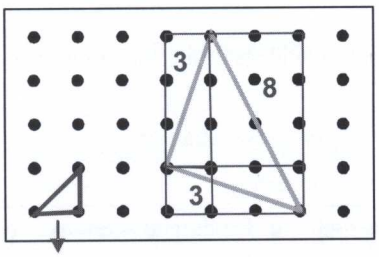


F

Resolução:



Unidade de área



Unidade de área

Área da figura E é igual à área total menos a área exterior à figura, isto é 12 – 6 = 6 unidades de área. A área da figura F = 24 – 14 = 10 unidades de área.

22.7.3 – Outras actividades com o geoplano envolvendo o cálculo de áreas e perímetros

Nota: Utilize como unidade de área, a área ocupada pelo quadrado menor do geoplano.

1 - Desenhe no geoplano e registe todas as figuras em papel ponteado.

1.1 - Uma figura com 4 lados, 2 deles paralelos e com:

1.1.1 - 1,5 quadrados de área.

1.1.2 - 2 quadrados de área.

1.1.3 - 2,5 quadrados de área.

1.1.4 - 3 quadrados de área.

1.2 - Uma figura com 6 pregos na fronteira e 3 quadrados de área.

1.3 - Um quadrado com um prego no interior e outro quadrado com cinco pregos no interior.

2 - Construa, no geoplano, um rectângulo de área 12.

2.1 - Preencha-o completamente com triângulos à sua vontade, sem os sobrepor.

2.1.1 - Quantos triângulos construiu?

2.1.2 - Qual a área de cada triângulo?

2.1.3 – Adicione a área de todos os triângulos. Qual a área obtida?

2.2 - Divida o rectângulo em triângulos equivalentes. Registe em papel ponteado o resultado.

2.2.1 - Quantos triângulos construiu?

2.2.2 - Qual a área de cada triângulo?

3 - Construa as figuras que conseguir de área 6.

4 - Construa todos os rectângulos possíveis com perímetro 16 (u.c. é a menor distância entre dois pregos).

4.1 - Registe os rectângulos em papel ponteado.

4.2 - Construa uma grelha e registe o perímetro, comprimento, largura e área de cada rectângulo.

4.3 - Analise a grelha e tire conclusões.

4.4 - Para cada rectângulo investigue se existe alguma relação entre os perímetros agora obtidos e o número de pregos existentes: (a) no maior lado de cada rectângulo; (b) no menor lado de cada rectângulo e, (c) no interior de cada rectângulo. Para tal, preencha a tabela:

Nº de pregos tocados pelo elástico (lado maior de cada rectângulo)	Nº de pregos tocados pelo elástico (lado menor de cada rectângulo)	Nº de pregos do interior de cada rectângulo	Perímetro

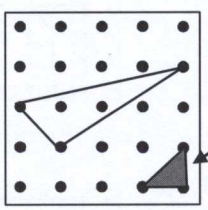
Analise a tabela com atenção e tire conclusões.

5 - Para cada figura registada na pergunta 1, preencha a seguinte tabela:

Nº de pregos tocados pelo elástico (pregos da fronteira)	Nº de pregos do interior	Área (unid. área = área de menor quadrícula do geoplano)

5.1 - Será que existe alguma regularidade entre os pregos da fronteira, os pregos do interior e a área da figura geométrica respectiva?

5.2 - Aplicando o teorema de Pick, qual será a área da figura representada no geoplano:



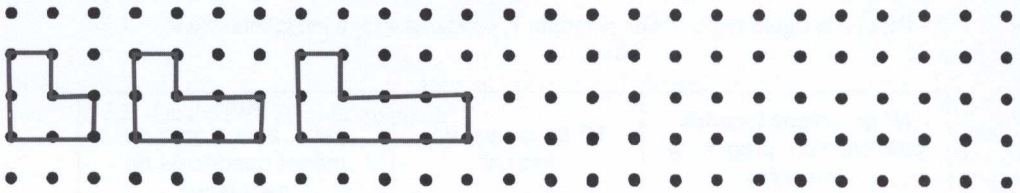
u.a.

6 - Desenhe no geoplano e no papel ponteado, figuras com os seguintes perímetros e áreas: *(adaptado de Serrazina e Matos, 1988).*

Perímetro	Área
12	9
10	4
12	8
8	4
12	6
14	10
10	5
12	7
14	9

6.1 - Compare as figuras obtidas com as dos seus colegas.

7 - Considere a sequência que se segue:



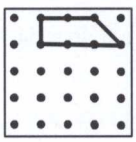
7.1 - Tendo em conta a sequência anterior, desenhe a figura que tenha de perímetro 20 unidades de comprimento. Qual a sua área? Qual a relação entre cada perímetro e a sua área?

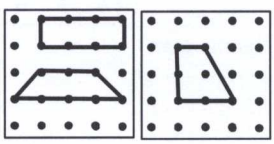
7.2 - A partir da figura obtida na alínea anterior e mantendo o seu perímetro, construa outras com área superior. Qual a maior área possível?

Resoluções:

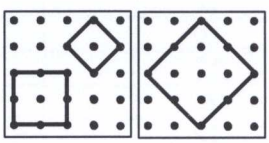
1.1.1 -

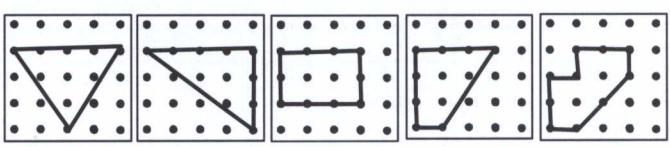
1.1.2 -

1.1.3 - 

1.1.4 - 

1.2 -

1.3 - 

3 - p.e. 

4.3 - De todos os rectângulos com perímetro 16, o quadrado é o de maior área. Neste caso, a área e o perímetro têm o mesmo valor numérico. (Haverá outros rectângulos em que isso aconteça?)

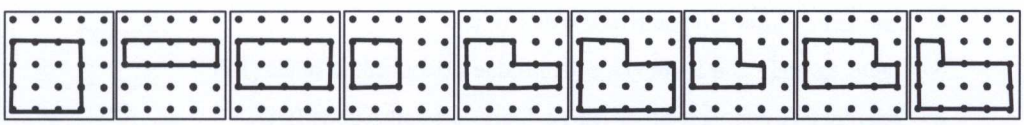
4.4 - Sendo ***c***, o número de pregos no comprimento, ***l***, o número de pregos na largura, ***i*** o número de pregos no interior e ***p*** o valor que representa o perímetro, então $p = c \times l - i$

5.1 - $A = \frac{f}{2} + i - 1$; sendo f o número de pregos da fronteira e i o número de pregos do interior da figura geométrica.

Considerando como unidade, a área ocupada pelo menor quadrado da malha utilizada, a área de uma figura geométrica representada num geoplano de malha quadrangular é a soma de metade dos pregos da sua fronteira com o nº de pregos do seu interior subtraída de um – **Teorema de Pick.**

5.2 - Dado que a unidade de área é metade da área do quadrado, então o valor da área é o dobro do valor obtido através da fórmula de Pick, ou seja: $A = 2 \times \left(\frac{f}{2} + i - 1 \right) = f + 2i - 2$. Assim temos que: $A = 3 + 2 \times 2 - 2 =$ **5 u. a.**

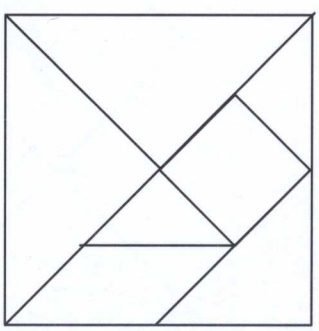
6 - p.e.



7.1 - 9 u.a.; $\mathbf{P = 2 \times A + 2}$ (sendo P e A valores numéricos do perímetro e área respectivamente)

7.2 - É um rectângulo de 2 x 8

22.8 - Actividades com o Tangram Chinês



Trata-se de um jogo chinês, muito antigo, constituído por 7 peças (2 triângulos grandes geometricamente iguais, 2 triângulos pequenos geometricamente iguais, um triângulo médio, um quadrado e um paralelogramo obliquângulo) que permitem construir mais de 1000 figuras diferentes.

Este material é propício à execução de tarefas de investigação que proporcionam o desenvolvimento de competências de elevado nível, como sejam: conjecturar, intuir, argumentar, prever, entre outras.

As actividades a desenvolver com o tangram poderão ter maior sucesso quanto maior for o conhecimento acerca deste material, nomeadamente a sua constituição e a relação existente entre as suas peças.

A exploração feita em torno deste material poderá ter maior ou menor profundidade, de acordo com o nível de conhecimentos que os alunos têm ou os objectivos que se propõem alcançar. De qualquer modo, é importante que se conheça o número de peças deste puzzle e os atributos que as relacionam. Assim, uma das primeiras actividades a realizar com o tangram deverá ter como objectivo a classificação das suas peças.

O número de lados, o seu comprimento, as peças semelhantes, as equivalentes, a relação entre as suas áreas, e a amplitude dos seus ângulos, são exemplos de itens que poderão ser explorados numa primeira abordagem sobre este material.

22.8.1 - Construção do Tangram por dobragens

1 - A partir da folha A4, obtenha um quadrado.

2 - Identifique uma diagonal do quadrado com as letras A e C.

3 - Atribua as letras B e D aos outros vértices de modo que a sequência ABCD corresponda ao sentido dos ponteiros do relógio.

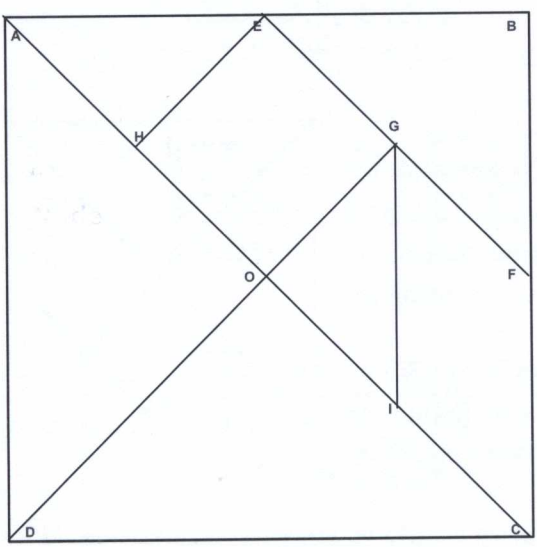
4 - Determine O, que é o ponto médio de [AC].

5 - Dobre, fazendo unir B com O, e identifique a dobra como sendo [EF].

6 - Determine G, ponto médio de [EF] e dobre de forma a obter [DG].

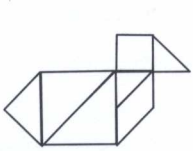
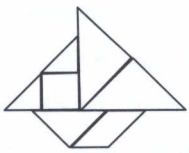
7 - Determine H, ponto médio de [OA] e dobre de forma a obter [EH].

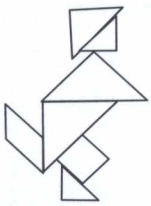
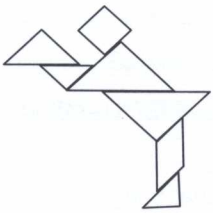
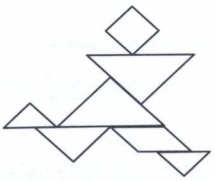
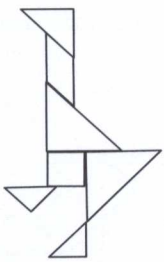
8 - Determine I, ponto médio de [CO] e dobre de forma a obter [IG].

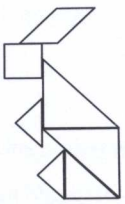
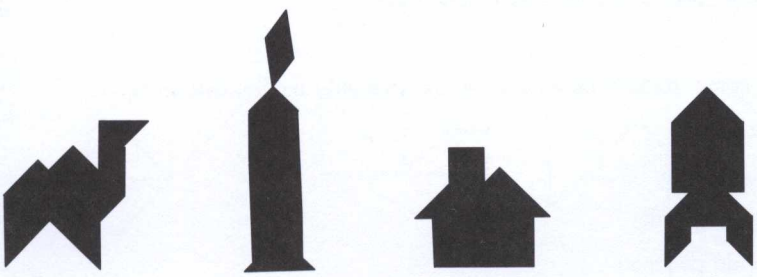


Actividades:

1 - Com as peças do Tangram, construa as seguintes figuras:

2 – Utilizando todas as peças do Tangram, construa:

a) um triângulo.

b) um rectângulo.

c) um quadrado.

d) um paralelogramo.

e) um trapézio não paralelogramo.

f) um pentágono.

g) um hexágono.

h) dois triângulos geometricamente iguais.

i) dois quadrados geometricamente iguais.

3 – Separe o quadrilátero não quadrado.

a) Construa uma figura simétrica ao lado.

b) Construa outros quadriláteros não quadrados.

4 – Com as peças deste puzzle podemos construir, de modo diferente, nove quadrados.

a) Tente descobri-los e anote cada modo de construção.

b) Quantos quadrados de diferente medida é possível construir?

5 – O número possível de triângulos a construir é superior ao dos quadrados.

a) Quantos triângulos de diferentes áreas é possível construir? (registe as soluções).

b) Tomando como unidade de medida a peça triangular pequena, qual a área de cada um dos triângulos obtidos?

6 – Considerando como unidade de área, a área do triângulo mais pequeno, determine:

a) a área do triângulo médio;

b) a área do quadrado;

c) a área do paralelogramo.

O que se pode concluir acerca das três figuras anteriores?

7 – Considerando como unidade de área a área do triângulo médio, determine:

a) a área do quadrado;

b) a área do paralelogramo;

c) a área do triângulo grande;

d) a área do triângulo pequeno.

8 – Com as peças do Tangram, construa:

a) um quadrado de área igual à de dois triângulos pequenos;

b) um quadrado de área igual à de quatro triângulos pequenos;

c) um quadrado de área igual à de oito triângulos pequenos.

Registe as figuras que construiu.

9 – Com o triângulo médio e os quadriláteros quantas figuras diferentes se podem construir, sabendo que as figuras têm que ter pelo menos um lado justaposto?

10 – Tire conclusões:

a) em relação ao número de figuras geometricamente iguais que constituem o Tangram;

b) em relação às figuras equivalentes;

c) quanto às áreas, a relação que existe entre o triângulo grande, médio e pequeno;

d) quanto às áreas, a relação que existe entre a peça quadrada e o quadrado formado por todas as peças;

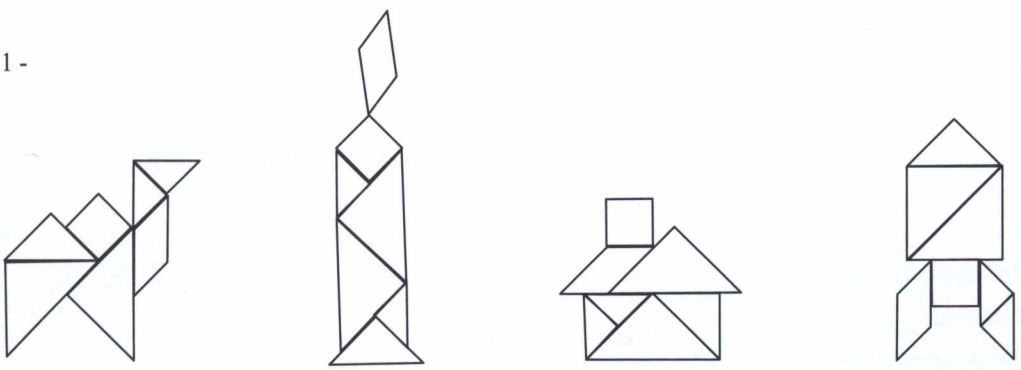
e) em relação à amplitude dos ângulos internos das figuras com a amplitude dos ângulos internos da peça quadrada;

f) quanto à soma dos ângulos internos das figuras que compõem o Tangram;

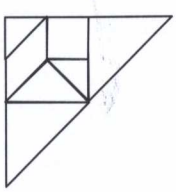
g) quanto aos comprimentos dos lados das peças do Tangram.

Resoluções:

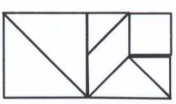
1 -



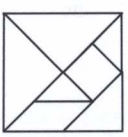
2 - a)



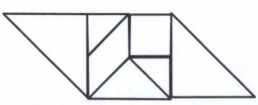
b)



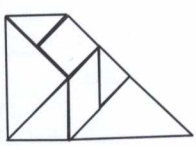
c)



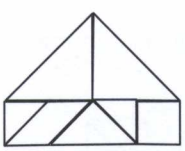
d)



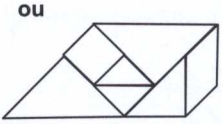
e)



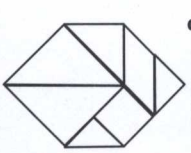
f)



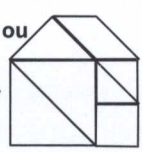
ou



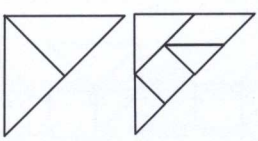
g)



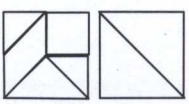
ou

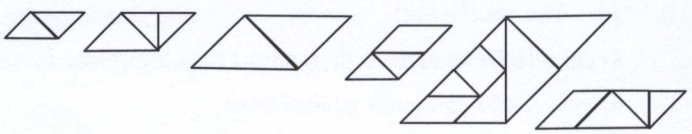


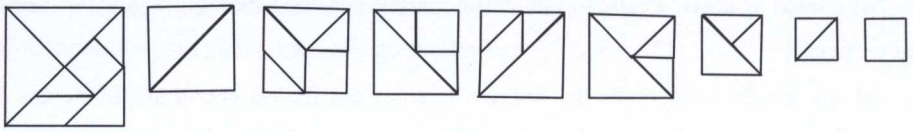
h)



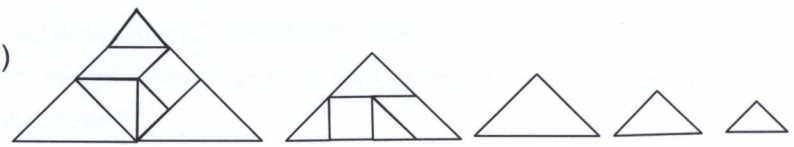
i)



3 - a) b) 

4 - a) 

4 - b) 4

5 - a) 

b) 16 △s 8 △s 4 △s 2△s 1△

6 - a)

Triângulo médio: 2 △s

Quadrado: △s

Paralelogramo: 2△s

Todas estas figuras são equivalentes.

7 - a)

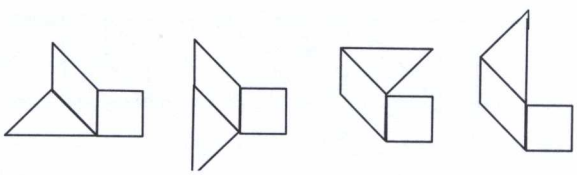
a área do quadrado: 1 △

a área do paralelogramo: 1 △

a área do triângulo grande: 2 △s

a área do triângulo pequeno: 0,5△

8 - a) b) c)

9 - 

10 -

a) Os dois triângulos maiores são geometricamente iguais; o mesmo sucede em relação aos dois triângulos mais pequenos.

b) O paralelogramo, o quadrado e o triângulo médio são figuras equivalentes pois podem obter-se através dos dois triângulos pequenos.

c) A área do triângulo maior é o dobro da área do médio e o quádruplo da área do mais pequeno.

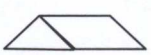
d) A área do quadrado é um dezasseis avos do Tangram.

e) Todos os triângulos têm um ângulo com a mesma amplitude de um dos ângulos do quadrado. O paralelogramo tem dois ângulos com amplitude maior e outros dois com amplitude menor relativamente a qualquer ângulo do quadrado.

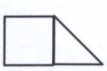
f) A soma dos ângulos internos dos triângulos é sempre 180° e soma dos ângulos internos dos quadriláteros é sempre 360°.

g)

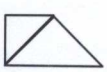
1. O lado maior do triângulo pequeno tem o mesmo comprimento que o lado maior do paralelogramo.



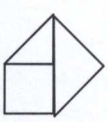
2. O lado menor do triângulo pequeno tem o mesmo comprimento que o menor lado do paralelogramo.



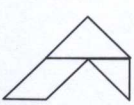
3. O menor lado do triângulo pequeno tem o mesmo comprimento que o lado do quadrado.



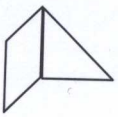
4. O maior lado do triângulo pequeno tem o mesmo comprimento que o menor lado do triângulo médio.



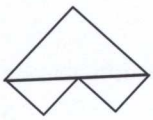
5. O comprimento do maior lado do triângulo médio é igual à soma dos comprimentos do menor lado do triângulo pequeno e do lado do quadrado.



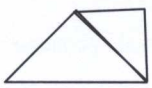
6. O comprimento do maior lado do triângulo médio é igual à soma dos comprimentos do menor lado do triângulo pequeno e do menor lado do paralelogramo.



7. O comprimento do menor lado do triângulo médio é igual ao comprimento do maior lado do paralelogramo.



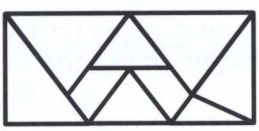
8. O comprimento do maior lado do triângulo maior é igual ao dobro do comprimento do maior lado do triângulo menor.



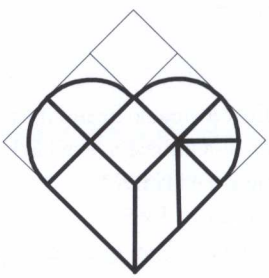
9. O comprimento do menor lado do triângulo maior é igual ao comprimento do maior lado do triângulo médio.

22.9 - Outros Tangrans

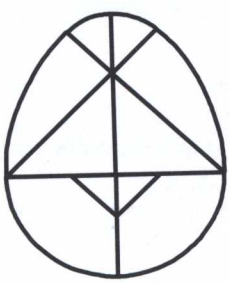
Tangram de 9 peças



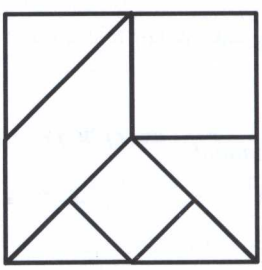
Tangram coração



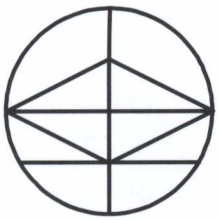
Tangram oval



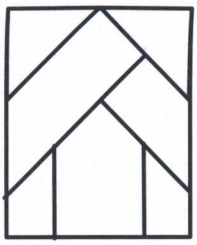
Tangram de Pitágoras



Tangram Circular

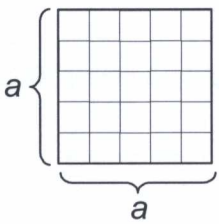


Tangram Rectangular



22.10 - Cálculo da área de figuras geométricas

22.10.1 - Quadrado



Determinar a área do quadrado será proceder à contagem das unidades de área existentes no seu interior. Poder-se-à utilizar a técnica de multiplicar o número de filas pela quantidade de unidades de áreas que existe em cada fila.
Temos, então, neste caso 5 x 5.

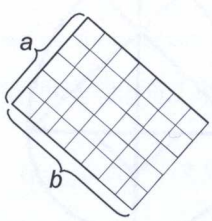
Para o caso geral em que o quadrado tem numa fila **a** unidades de áreas e tem **a** filas, a sua área é determinada por **a** x **a,** ou seja:

$$A_{quadrado} = a \times a$$

22.10.2 – Rectângulo

O mesmo sucede em relação ao rectângulo

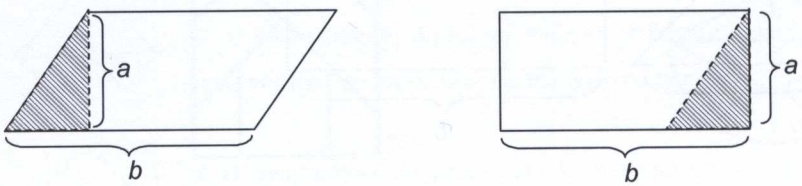
$$A_{rectângulo} = a \times b$$



22.10.3 - Paralelogramo obliquângulo

Se utilizarmos uma folha de papel com a forma de um paralelogramo obliquângulo, muito

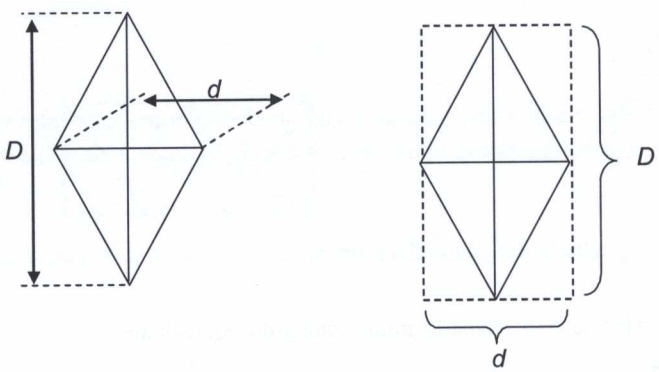
facilmente pode ser transformado num rectângulo em que a base e a altura do primeiro são respectivamente iguais ao comprimento e largura do segundo.



$$A_{p.obliq.} = a \times b$$

22.10.4 - Losango

Conhecendo as diagonais do losango, o seu produto corresponde à área do rectângulo em que está inscrito.



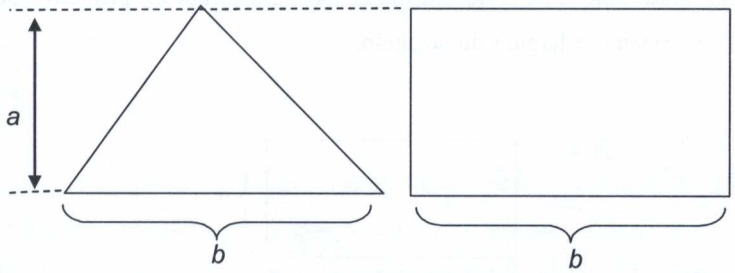
Verificando-se que a área do losango é metade da do rectângulo, então:

$$A_{losango} = \frac{d \times D}{2}$$

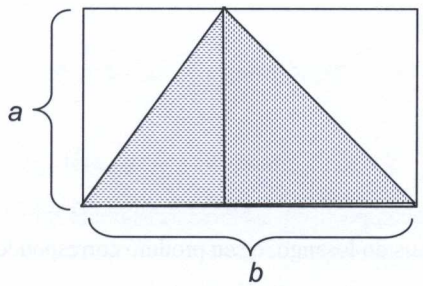
Nota: chegávamos ao mesmo resultado se utilizássemos a área do triângulo (metade do losango) como termo de comparação.

22.10.5 - Triângulo

Qualquer triângulo com a mesma base e a mesma altura de um rectângulo tem metade da área desse rectângulo.



Vejamos:

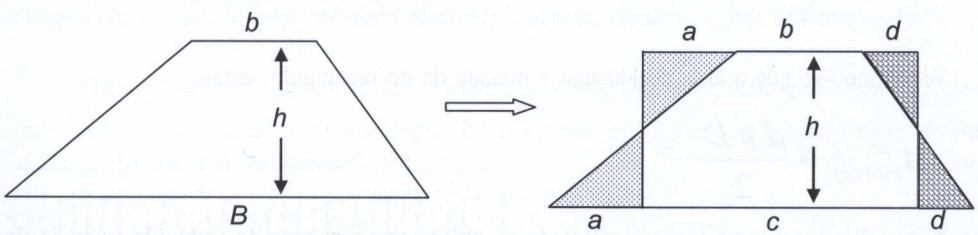


Assim a área do triângulo é dada por metade do produto da sua base pela altura.

$$A_{triângulo} = \frac{a \times b}{2}$$

22.10.6 - Trapézio

Dado o seguinte trapézio podemos transformá-lo num rectângulo equivalente:



Considerando c o comprimento de rectângulo e desenvolvendo as relações seguintes, vem.

- $c = B - a - d$
- $c = a + b + d$

Adicionando membro a membro podemos obter o valor de *c* em função das bases do trapézio.

- $c + c = B - a - d + a + b + d$

  $2 \times c = B + b$

$$c = \frac{B+b}{2}$$

Assim:

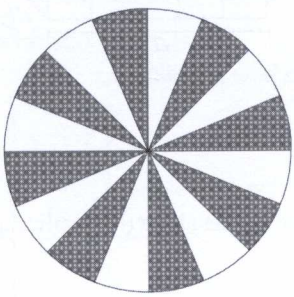
$$A_{trapézio} = A_{rectângulo} = c \times h = \frac{B+b}{2} \times h$$

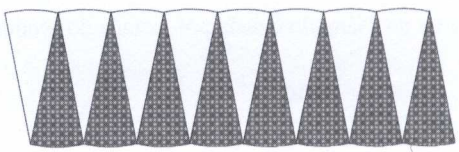
Logo;

$$A_{trapézio} = \frac{B+b}{2} \times h$$

22.10.7 - Círculo

O círculo poderá ser decomposto em sectores da seguinte forma:





No caso de dividirmos o círculo em 64 sectores iguais poderemos arrumá-los de forma a obtermos a seguinte figura:

E se dividirmos o círculo numa "infinidade" de sectores iguais? Que figura obtemos?

Pode-se concluir que a *área do círculo é aproximadamente igual à área do rectângulo*:

$$A_{círculo} = \pi \times r \times r$$

Assim:

$$A_{círculo} = \pi \cdot r^2$$

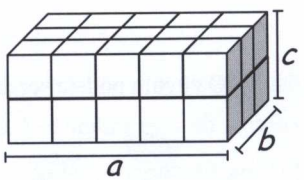
23 – Geometria no espaço

23.1 – Noção de volume

O volume de qualquer figura tridimensional está associado ao espaço que ela ocupa. Assim, para a sua medição ter-se-á que escolher uma unidade de volume que, por conveniência, poderá ser um cubo cuja aresta tenha uma unidade de comprimento. O volume de um sólido é o número de vezes que o cubo unitário "cabe" nesse sólido:

23.1.1 - Volume de um prisma quadrangular recto

Este prisma cujas arestas têm, respectivamente, 5, 3 e 2 unidades de comprimento, pode ser decomposto em 5 x 3 x 2 cubos unitários. Então a medida do volume de um prisma, cujas arestas medem *a*, *b* e *c*, é:



V = *a* x *b* x *c*

Atendendo que ***a* x *b*** é a medida da área da base do sólido (A_b) e ***c*** a sua altura (h), implica que se possa dizer que o volume do sólido é:

$V = A_b$ x h

23.1.2 - Volume do cubo

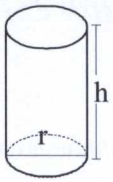
O cubo é um caso particular de um prisma quadrangular recto, dado que o comprimento das suas arestas é sempre igual: $a = b = c$. Então: $V = a \times b \times c = a \times a \times a = a^3$. Logo o volume do cubo é:

$V = a^3$

23.1.3 - Volume do cilindro

Se considerarmos o cilindro como sendo um prisma com ***n*** - número de faces laterais - em que ***n*** tende para infinito, considera-se, então, a fórmula para o cálculo do seu volume: $V = A_b \times h = r^2 \times h$. Logo, a medida do volume de um cilindro também é dada pelo produto da medida da área da base pela altura:

$$V_{cilindro} = \pi r^2 \times h$$



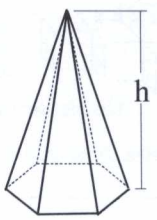
23.1.4 - Volume da pirâmide

Actividade experimental:

Construa em cartolina um prisma e uma pirâmide cujas bases sejam geometricamente iguais e que a medida das suas alturas seja igual.

Utilizando grãos de arroz ou areia, verifique que é necessário despejar três vezes o conteúdo da pirâmide no interior do prisma para o encher completamente. Assim, conclui-se que a medida do volume de uma pirâmide é um terço da medida do volume de um prisma com a mesma base e a mesma altura:

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} V_{prisma} = A_b \times h$$



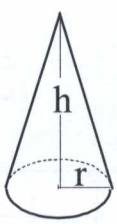
Então, o volume de uma pirâmide é

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} A_b \times h$$

23.1.5 - Volume do cone

Seguindo a mesma experiência anterior, mas agora em relação ao cilindro, chega-se à mesma conclusão:

$$V_{cone} = \frac{1}{3} V_{cilindro} = \pi r^2 \times h$$



Logo, a medida do volume de um cone é dado pela seguinte fórmula:

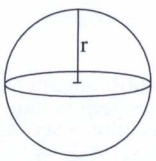
$$V_{cone} = \pi r^2 \times h$$

23.1.6 - Volume da esfera

De acordo com o site:
http://www.bibvirt.futuro.usp.br/textos/exatas/matematica/tc2000/mat2g65.pdf, a esfera é um dos sólidos mais curiosos que existem, e mostra com toda a evidência que é extremamente útil ao Homem.

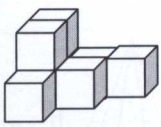
É possível demonstrar que a fórmula de cálculo do seu volume é a seguinte:

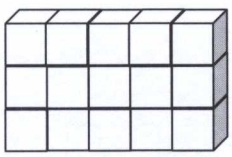
$$V_{esfera} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

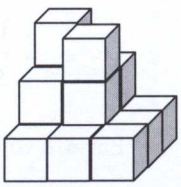


Actividades:

1 - Tendo por unidade de volume o cubo , calcule o volume de cada um dos seguintes sólidos geométricos:

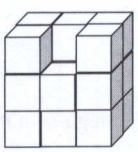


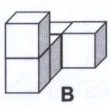


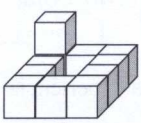


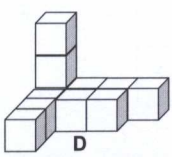
_____ _____ _____

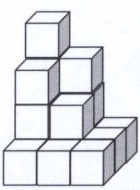
2 – Agrupe as figuras que têm o mesmo volume utilizando as respectivas letras.

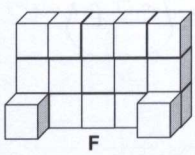

A

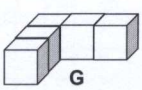

B


C

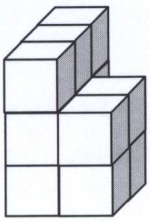

D

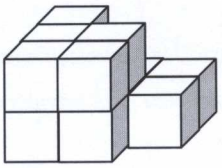

E


F


G

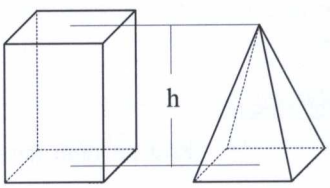
3 – Com cubos construa os sólidos seguintes:



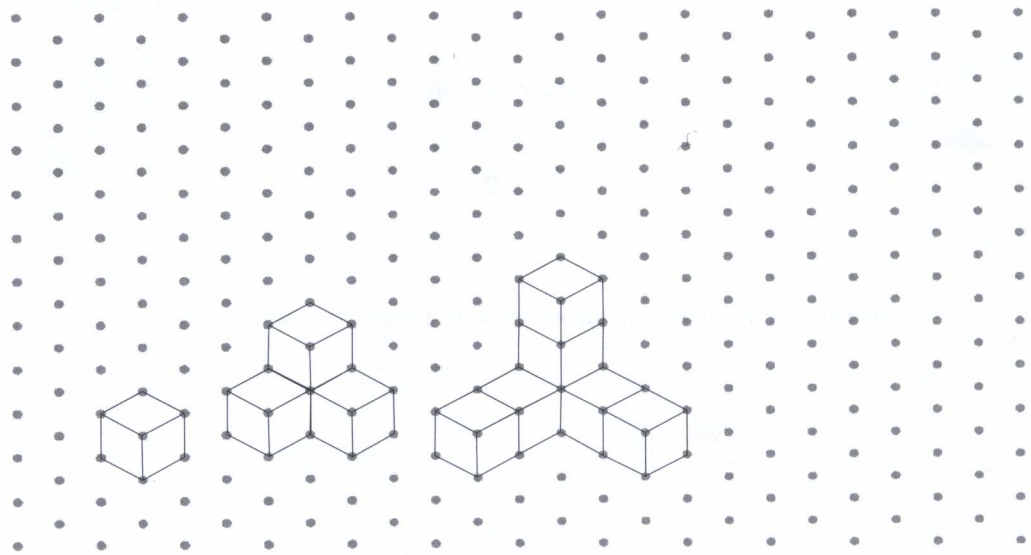


4 – Os dois sólidos que construiu, embora diferentes, ocupam igual porção de espaço. São sólidos equivalentes. Construa mais três sólidos equivalentes a estes.

5 – Construa um sólido cujo volume seja igual a 9 cubos unitários. Construa mais dois sólidos equivalentes ao anterior.



6 – Considere a seguinte sequência de sólidos:



6.1 – Desenhe o sólido que continua a sequência.

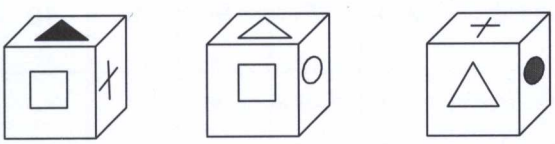
6.2 – Quantos cubos unitários são necessários para formar o 5º sólido da sequência? E o 8º? E o 10º?

7 – Tendo à disposição 27 cubos unitários, construa todos os cubos possíveis.

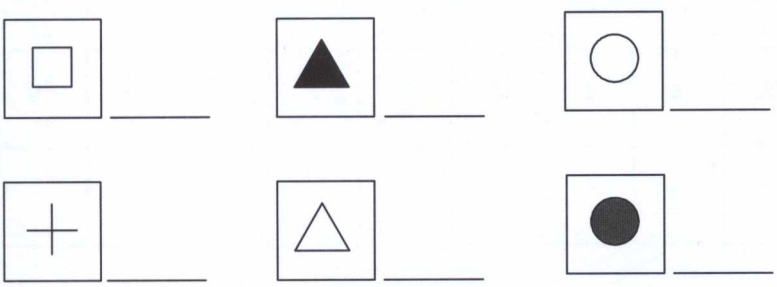
7.1 – Para construir um cubo com mais de 27 cubos unitários, quantos irá utilizar?

8 – Usando todos os 27 cubos unitários, construa os possíveis sólidos rectangulares.

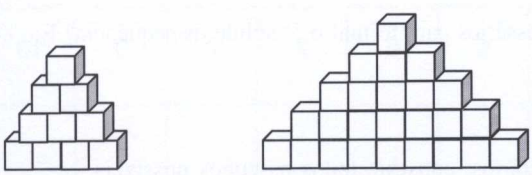
9 – Na figura estão desenhadas três faces do mesmo cubo.



9.1 - Desenhe a figura que é oposta a cada uma destas:



10 – Construa duas torres como as da figura.



Torre A Torre B

10.1 – Quantos cubos têm cada torre?

10.2 – Quantos andares tem cada uma?

10.3 – Acrescente um andar a cada uma das torres. Com quantos cubos ficou cada uma delas?

10.4 – Identifique cada uma das torres, sabendo que uma delas é a "Torre dos números inteiros".

10.5 – Construa uma torre parecida com estas, com 5 andares, a que possamos chamar "Torre dos números pares" (torre **C**).

10.6 – Quantos cubos tem a torre **C**?

10.7 – Complete as tabelas para cada uma das torres (comece de cima para baixo):

10.7.1 – Torre **A**

Nº do andar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de cubos										

10.7.2 – Torre **B**

Nº do andar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de cubos										

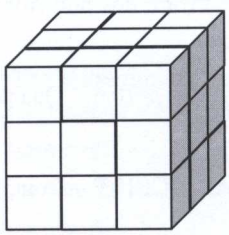
10.7.3 – Torre **C**

Nº do andar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de cubos										

10.8 – Quantos cubos são precisos para construir a torre A, a torre B e a torre C com 10 andares? Explique o raciocínio.

10.9 – Consegue descobrir de quantos cubos precisa para construir uma torre A, B ou C com 20 andares? Explique o raciocínio.

11 – Observe o seguinte cubo apresentado na figura ao lado, formado por 27 cubinhos. O João pintou o cubo de vermelho:



11.1 - Quantos cubinhos têm apenas uma face pintada?

11.2 - Quantos cubinhos têm duas faces pintadas?

11.3 - Quantos cubinhos têm três faces pintadas?

11.4 - Quantos cubinhos têm quatro faces pintadas?

11.5 - Haverá algum cubinho que não tem nenhuma face pintada? Explique o raciocínio.

12 - O Filipe gosta muito de "problemas cúbicos". Há dias surpreendeu-nos, apresentando quatro cubos maciços, do mesmo material, com diferentes alturas, a saber 6 cm, 8 cm, 10 cm e 12 cm. Para aumentar a surpresa, colocou-os numa balança, em pratos diferentes, e esta ficou em equilíbrio. Como é que o Filipe distribuiu os cubos nos pratos da balança, de modo a equilibrá-la?

24 - Pavimentações

Noção de pavimentação - "sempre que, com o uso repetido de polígonos, ou outras figuras, preenchemos completamente o plano, sem falhas nem sobreposições" (APM, 2000, p.1).

- elementos da pavimentação:

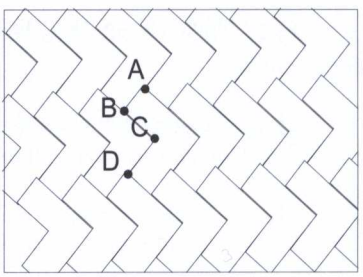
(1) ladrilhos – conjuntos fechados

(2) vértices – ponto comum a três ou mais ladrilhos

(3) arestas – ligação entre dois vértices da pavimentação

Os vértices são caracterizados pela sua Valência – nº de arcos [arestas] que concorrem no vértice.

Exemplo de pavimentações:



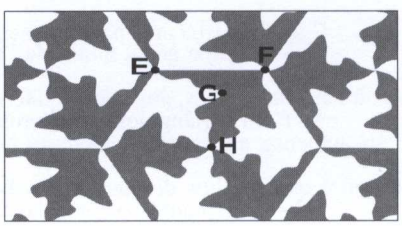
- São vértices da pavimentação os pontos A, B, D, E, F e H. Os pontos C e G não são vértices da pavimentação.

- São arestas da pavimentação, os arcos poligoniais AB, BCD, EF ou o arco EGH.

- Não são arestas da pavimentação BC, CD, EG, GH.

- A é um vértice de valência 3

- F é um vértice de valência 6

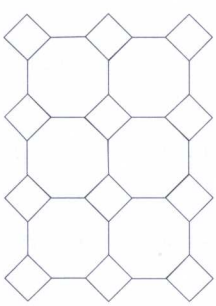


Se os ladrilhos utilizados numa pavimentação são polígonos regulares e geometricamente iguais, então trata-se uma **pavimentação regular.**

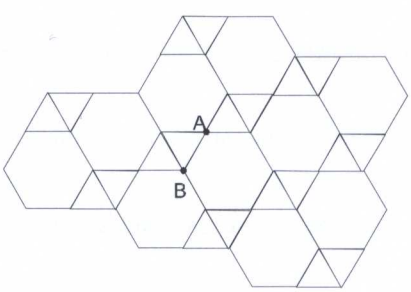
Dá-se o nome de **pavimentação semi-regular**, quando se combinam dois ou mais tipos de polígonos regulares.

Os exemplos que se seguem são pavimentações semi-regulares identificadas pelo código dos seus vértices.

Descubra o critério que dá origem aos códigos dos vértices.



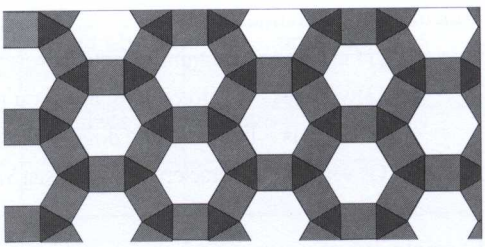
4.8.8



A – 3.6.3.6
B – 3.3.6.6

24.1 - Pavimentações envolvendo blocos padrão

Actividades:



1 - Escolha as figuras mais convenientes e reproduza no caderno, contornando as peças, a seguinte pavimentação:

2 - Com o quadrado e o triângulo, construa uma pavimentação.

2.1 - Elabore um texto com instruções para que os colegas consigam construir a sua pavimentação sem a verem.

2.2 - Compare as pavimentações produzidas pelos colegas.

2.3 - Nem todos os polígonos regulares pavimentam. Justifique esta afirmação, identificando os polígonos regulares que pavimentam.

2.4 - Construa uma pavimentação regular.

3 - Com 6 triângulos equiláteros, quantas figuras diferentes consegue construir?

3.1 - Hexiamante é o nome das figuras que descobriu. O que pode concluir em relação aos seus perímetros?

3.2 - Quais os hexiamantes que pavimentam?

3.3 - Em quantos grupos poderá dividir os hexiamantes atendendo ao número de lados?

4 - Com 5 quadrados, quantas figuras diferentes consegue construir?

4.1 Pentaminó é o nome das figuras que descobriu. Responda às perguntas seguintes e preencha a tabela:

- Quantos lados tem cada pentaminó?
- Qual o perímetro de cada pentaminó?

- Determine a sua área.

- Dobrando os pentaminós é possível, com alguns, formar caixas abertas. Quais são?

- Quais são os pentaminós que permitem fazer pavimentações?

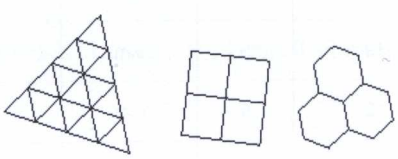
Desenho	Nº de lados	Perímetro	Área	Faz caixa	Pavimenta

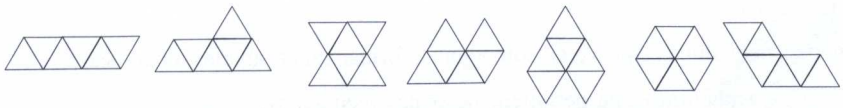
4.2 - Registe possíveis pavimentações utilizando dois pentaminós.

4.3 - Registe possíveis pavimentações utilizando três pentaminós

Algumas resoluções:

2.3 – Só pavimentam os polígonos cujas amplitudes dos ângulos internos são divisores de 360º. Logo, os polígonos regulares que pavimentam são os triângulos, quadrados e hexágonos.

2.4- 



3 -

3.1 Apenas o hexágono regular tem perímetro 6, os restantes têm perímetro 8.

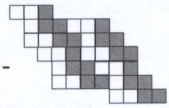
3.2. todos

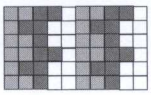
3.3 - 5 grupos: grupo A com 1 quadrilátero, grupo B com 1 pentágono, grupo C com 6 hexágonos, o grupo D com 3 heptágonos e o grupo E com 1 octógono.

4 - 12 figuras

4.1 -

Desenho	Nº de lados	Perímetro	Área	Faz caixa	Pavimenta
F	10	12	5	sim	sim
I	4	12	5	não	sim
L	6	12	5	sim	sim
N	8	12	5	sim	sim
P	6	10	5	não	sim
T	8	12	5	sim	sim
U	8	12	5	não	sim
V	6	12	5	não	sim
W	10	12	5	sim	sim
X	12	12	5	sim	sim
Y	8	12	5	sim	sim
Z	8	12	5	sim	sim

4.2 - 

4.3 - 

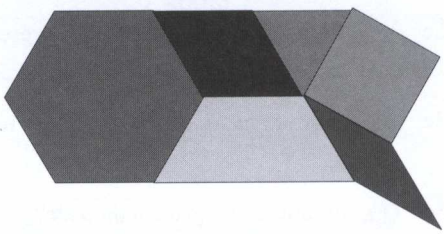
24.1.1 – Blocos padrão

Ao nível do 1º Ciclo, os blocos padrão são um material manipulável. Para além de possibilitar o desenvolvimento da criatividade, poderá ser um óptimo instrumento de trabalho para abordar de forma transversal os mais diversos conceitos matemáticos integrados nos grandes blocos da organização curricular deste ciclo de escolaridade.

O estudo dos polígonos, as suas semelhanças e características, as simetrias, os perímetros, as áreas, os ângulos são apenas alguns temas que poderão ser explorados com este material, em contexto de resolução de problemas ou de actividades de investigação.

Inicialmente, e brincando de forma livre, a criança pode começar por orientar o seu raciocínio na associação, classificação e organização das peças. Para tal, terá que ter em linha de conta os seus atributos quer na construção de imagens, na descoberta de regularidades (de natureza geométrica ou numérica), bem como na produção dos seus próprios padrões.

Eis a sua constituição:



- Paralelogramos azuis
- Trapézios vermelhos
- Hexágonos amarelos
- Triângulos verdes – têm todos os lados iguais, são os de menor tamanho, com metade da área do paralelogramo azul, uma terça parte da área do trapézio vermelho e uma sexta parte da área do hexágono.
- Quadrados cor de laranja – a sua área é aproximadamente 2,3 vezes a área do triângulo.
- Paralelogramos castanho-amarelados - trata-se de losangos com metade da área do quadrado.

Todas as figuras têm a particularidade de terem lados congruentes, excepto o trapézio em que um dos seus lados é o dobro de qualquer um dos outros lados.

Os *sites* abaixo conferem a possibilidade de se manipularem virtualmente, e de forma interactiva, os blocos padrão:
http://www.arcytech.org/java/patterns/patterns_j.shtml
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_169_g_1_t_2.html

Actividades:

1 - De acordo com a descrição feita sobre os blocos padrão, indique qual a relação entre a área:

1.1 - do paralelogramo azul e o hexágono

1.2 - do trapézio e do hexágono

1.3 - do trapézio e do paralelogramo azul

1.4 - do paralelogramo castanho-amarelado e a do triângulo

1.5 - do quadrado e do paralelogramo azul

2 - Números racionais - actividade adaptada e retirada de:
http://mason.gmu.edu/~mmankus/PBlocks/pbact/whatnum.htm

2.1 - Se for um meio, qual a figura que representa a unidade?

2.2 - Se for metade, qual a figura que representa 3 unidades?

2.3 - Se for um meio, qual a figura que representa uma unidade?

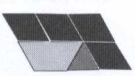
2.4 - Se for um terço, qual é a unidade?

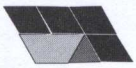
2.5 - Se for uma unidade, o que representa ?

2.6 - Se for 3 unidades, o o que representa ?

2.7 - Se for uma unidade, o que representa ?

2.8 - Se for uma unidade, o que representa ?

2.9 - Se  for a unidade, então representa ___

2.10 - Se  for a unidade, então representa ___

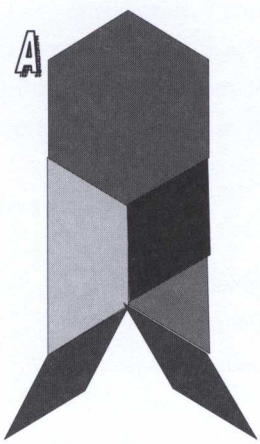
2.11 - Se + = 1, então o que representa ?

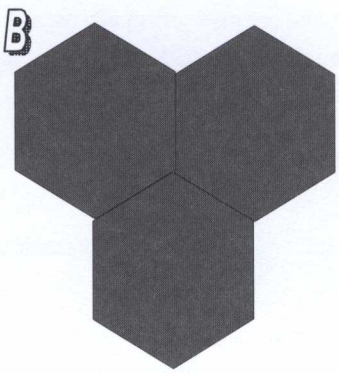
2.12 - Se + = 1, então o que representa + ?

2.13 - Se + = 1, então o que representa + ?

2.14 - Se - = 1, então o que representa + ?

3 - Reproduza com os blocos padrão as figuras A e B:





3.1 - Se duas formigas tiverem que percorrer o trajecto em toda a volta das figuras, qual é aquela que anda mais?

3.2 - Se as duas formigas tiverem que limpar toda a superfície das figuras, qual delas trabalha mais?

Resoluções:

1.1 – a área do paralelogramo azul um terço da área do hexágono.

1.2 – a área do trapézio é metade da área do hexágono.

1.3 – a área do trapézio é três meios da área do paralelogramo azul.

1.4 – a área do paralelogramo castanho-amarelado é aproximadamente 1,15 vezes a área do triângulo.

1.5 – a área do quadrado é aproximadamente 1,15 vezes a área do paralelogramo azul.

2.1 – o paralelogramo azul
2.2 – o hexágono
2.3 – o hexágono
2.4 – o hexágono
2.5 – são 2 unidades
2.6 – são 2 unidades
2.7 – são dois terços
2.8 – um terço
2.9 – um quarto
2.10 – um terço
2.11 – um nono
2.12 – um quarto
2.13 – são 4
2.14 – é 1
3.1 – a formiga A
3.2 – a formiga B

25 - *Matemática recreativa*

1 - Descubro a idade e o número em que pensou

Passos a seguir:

1º - pensar num número

2º - encontrar o dobro

3º - adicionar 5

4º - multiplicar por 50

5º - adicionar 1756 (se ainda não fez anos em 2007)

6º - subtrair o ano de nascimento

Neste momento serei capaz de dizer qual é a idade do interveniente bem como o número em que pensou.

O número lido até às centenas corresponde ao número pensado: x

O número formado pelas dezenas e unidades corresponde à idade da pessoa.

Interpretando o algoritmo:

1º - pensar num número	x
2º - encontrar o dobro	2 x
3º - adicionar 5	2 x + 5
4º - multiplicar por 50	50 (2 x + 5)
5º - adicionar 1756 (se ainda não fez anos em 2007)	50 (2 x + 5) + 1756
6º - subtrair o ano de nascimento	50 (2 x + 5) + 1756 - A

$50\,(2\,x + 5) + 1756 - A = 100\,x + 250 + 1756 - A =$ **$100\,x + 2006 - A$**

Portanto:

100 x corresponde ao número pensado multiplicado por 100. Terá então a forma ABC00, sendo ABC = x número em que se pensou. **2006 - A,** corresponde à idade da pessoa interveniente (considere-se a forma DE), caso ainda não tenha feito anos em 2007.

Então, a soma de ABC00 com DE será:

Imaginemos que se pretende aplicar esta curiosidade a um amigo no ano 2020 e que faz anos no dia 1 de Janeiro. Que alterações teremos de fazer no algoritmo?

2 - Descubro sempre o número riscado

Passos a seguir:

1º - escrever a data de nascimento num só número.

2º - escrever outro número mas com os mesmo algarismos.

3º - encontrar a diferença entre os números.

4º - colocar uma cruz por cima de um dos algarismos da diferença (excepto o zero).

5º - Os restantes algarismos são pedidos por qualquer ordem.

Neste momento serei capaz de dizer qual foi o algarismo riscado.

Interpretando o algoritmo seguindo um exemplo:

1º - escrever a data de nascimento num só número: 11091964

Aplicando o critério de divisibilidade por 9, facilmente se chega à conclusão que o número 11091964 dividido por 9 dá resto 4 ("noves fora", 4).

2º - escrever outro número mas com os mesmo algarismos: 46919011

O novo número quando dividido por 9 também terá resto 4, uma vez que é formado pelos mesmos algarismos.

3º - encontrar a diferença entre os números. 46919011 - 11091964 = 35827047

Fazendo a subtracção entre dois números que divididos por 9 têm o mesmo resto, a diferença encontrada será um múltiplo de 9 porque os restos anulam-se (35827047,"noves fora", 0) .

4º - colocar uma cruz por cima de um dos algarismos da diferença (excepto o zero).

5º - Os restantes algarismos são pedidos por qualquer ordem.

Imaginemos que o algarismo cortado seria o 8, então os algarismos fornecidos seriam: 3527047

Este número dividido por 9 dá resto 1 (35827047,"noves fora", 1), então o algarismo que falta para que seja múltiplo de 9 será o **8** (9 - 1 = 8).

Porque será que quando se pede para riscar um algarismo não se pode esquecer de pedir para não riscar o zero.

3 - Sei qual é o algarismo isolado que se encontra ao lado do número do Bilhete de Identidade.

Porque é que todos os BI's têm um dígito isolado ao lado do seu número?
Escrever o número de um BI, por exemplo 6578869 e considere-se o algarismo das unidades como sendo o primeiro. Aplicar de seguida o algoritmo:

1º - $9 \times 2 = 18$

2º - $6 \times 3 = 18$

3º - $8 \times 4 = 32$

4º - $8 \times 5 = 40$

5º - $7 \times 6 = 42$

6º - $5 \times 7 = 35$

7º - $6 \times 8 = 48$

$$\begin{array}{r|l} 233 & 11 \\ \hline 013 & 21 \\ 02 & \end{array}$$

O resto é 2, faltam, portanto, **9** para que o dividendo seja múltiplo de 11. Nove é, então, o número isolado que acompanha o nº do BI. Quer isto dizer que se trata de um número de controlo que respeita este algoritmo.

Em qualquer BI se a cada um dos algarismos (juntamente com o nº de controlo) for multiplicado pelo seu índice, a soma dos seus produtos é múltiplo de 11.

... $X_7\ X_6\ X_5\ X_4\ X_3\ X_2\ X_1$, sendo X_1 o nº de controlo.

No Bilhete de Identidade do exemplo dado, por certo que se encontrará o 9 como dígito isolado - 6578869 9, de tal modo que:

$9 \times 1 + 9 \times 2 + 6 \times 3 + 8 \times 4 + 8 \times 5 + 7 \times 6 + 5 \times 7 + 6 \times 8$ será múltiplo de 11.

Vejamos:

$$\frac{9\times1+9\times2+6\times3+8\times4+8\times5+7\times6+5\times7+6\times8}{11} =$$

$$= \frac{9+18+18+32+40+42+35+48}{11} =$$

$$= \frac{242}{11} = 22 \text{ (divisão exacta)}$$

Então se nos derem um número de BI para descobrir o número de controle e ao aplicarmos o algoritmo verificamos que o resto da divisão por 11 é 1. O que é que isso significa?

Respostas:

1 - Ter-se-á de mandar adicionar 1770 (2020 – 250 = 1770) em vez de 1756.

2 - Se admitirmos a possibilidade de riscar o zero, ficamos sem saber se o número riscado foi de facto o zero ou um 9, porque quer seja o 0 ou o 9, o resultado é o mesmo.

3 – Significa que o número de controlo deveria ser o 10, caso que nunca se verifica porque o número de controlo só admite um dígito. Neste caso é também atribuído o número zero como controlo. Quer isto dizer que se alarga a margem de erro no controlo dos números de BI. De facto, a escolha deste algoritmo para controle dos números de BI, talvez não tenha sido a mais feliz.

Nota final

No decurso deste ano formativo conceber-se-ão novas actividades que tencionamos disponibilizar numa próxima oportunidade. Além disto, espera-se que a leitura desta publicação possa desenvolver a motivação dos leitores para a Matemática, enquanto ciência e enquanto disciplina útil para a vivência quotidiana dos alunos.

Desejamos que os leitores possam contribuir com as suas sugestões ou críticas para uma eventual nova edição da publicação.

Bibliografia recomendada

Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática*, (8), 7-10.

Abrantes, P.; Ferreira, C. e Oliveira, H. (1995). Matemática Para Todos – Investigações na sala de aula. *ProfMat 95. Actas,* 243-249.

Abrantes, P., Leal, L. e Ponte, J. (1996). *Investigar para Aprender Matemática. Textos seleccionados*. Lisboa: APM.

Afonso, P. (2001). *Uma aventura matemática na Internet*. Porto: ASA.

Afonso, P. (2004). *Ensino e Aprendizagem da Matemática em Ambiente de e-Learning*. Coimbra/Castelo Branco: Alma Azul.

Afonso, P. (2006). A Magia das Conexões Matemáticas. Um caso envolvendo números triangulares. *Educação e Matemática*, 90, 35-38.

Afonso, P. e Gabriel, M. (2001). Os professores do 1º ciclo do ensino básico face à resolução de problemas. *ProfMat 2001. Actas*, 211-220.

Afonso, P. e Gabriel, M. (2007). Investigações matemáticas envolvendo alunos do 1º Ciclo do Ensino Básico. *LIBEC Line- Revista em Literacia e Bem-Estar da Criança*, 1, 23-30, ISSN 1646-7329 www.libecline.pt.tp

Afonso, P. e Nunes, S. (2005). Dos problemas aos conceitos – um exemplo de conexões matemáticas. *ProfMat 2005. Actas.* (suporte CD), Comunicação Nº 24.

Alarcão, I. (1996). Ser professor reflexivo. In I. Alarcão (Org.), *Formação reflexiva de professores. Estratégias de supervisão* (pp. 171-189). Porto: Porto Editora.

Almeida, C. e Martins, R. (2003). O que fica das investigações matemáticas: reflexões sobre os resultados de um questionário aplicado a alunos do 2º ciclo. In *Actas XIV SIEM 2003* – Seminário de Investigação em Educação Matemática, 431-6445.

Amaral, H. (2002). Actividades investigativas no 1º Ciclo. In *Actas XIII SIEM 2002* – Seminário de Investigação em Educação Matemática, 297-305.

APM (2000). *Pavimentações*. Lisboa: autor.

Bermejo, V. e Bermejo, M. (2004). Aprendiendo a sumar y restar. In V. Bermejo (coord.). *Cómo Enseñar Matemáticas para Aprender Mejor* (51-70). Madrid: Editorial CCS.

Bernardes, O. Et. Al. (1989). *Mais jogos, mais enigmas, mais problemas*. Lisboa : APM.

Blanco, L. (1993). *Consideraciones elementales sobre la resolución de problemas*. Badajoz: Universitas Editorial.

Borralho, A. (1990). *Aspectos metacognitivos na resolução de problemas de Matemática: proposta de um programa de intervenção*. (Tese de Mestrado da Universidade de Salamanca). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Branca, N. (1980). Problem Solving as a Goal, Process and Basic Skill. In S. Krulik (Ed.), *Problem solving in school mathematics – Yearbook* (pp. 3-8). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Bransford, J. e Stein, B. (1984). *The IDEAL Problem Solver. A Guide For Improving Thinking, Learning, And Creativity*. New York: W. H. Freeman And Company.

Brocardo, J. (2003). As investigações matemáticas: análise de um projecto curricular. In *Actas XIV SIEM 2003* – Seminário de Investigação em Educação Matemática, 45-61.

Brunheira, L. e Fonseca, H. (1995). Investigar na aula de Matemática. *Educação e Matemática*, nº 35, 16-20.

Buchanan, N. (1987). Factors Contributing to Mathematical Problem-Solving Performance: An Exploratory Study. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 399-415.

Burón, J. (1999). *Enseñar a Aprender: Introducción a la Metacognición*. Bilbao: Mensajero, 5ª Ed.

Cadeia, C., Oliveira, M. e carvalho, P. (2006). Cálculo Mental. In P. Pallhares e A. Gomes (coords.) (71-76). *Mat 1C – desafios para um novo rumo*. Braga: Universidade do Minho.

Callejo, M. (1990). *La resolución de problemas en un club matemático*. Madrid: Narcea.

Cebolo, V., Alves, B. e Cruz, O. (2006). Actividades de investigação. In P. Pallhares e A. Gomes (coords.) (18-38). *Mat 1C – desafios para um novo rumo*. Braga: Universidade do Minho.

Centero, J. (1988). Números Decimales. Por qué? Para qué? Madrid: Síntesis.

Charles, R. et al. (1987). *How to Evaluate Progress in Problem Solving*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Clement, J. e Konold, C. (1989). Fostering Basic Problem-Solving Skills in Mathematics. *For The Learning of Mathematics*, 9 (3), 26-30.

Costa, M. (1986). *O problema da semana*. Lisboa: APM.

Cruz, N. (1989). *Utilização de Estratégias Metacognitivas no Desenvolvimento da Capacidade de Resolução de Problemas - Um Estudo com Alunos de Física e Química do 10º Ano*. (Tese de Mestrado da Universidade de Lisboa). Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Cunha, H.; Oliveira, H. e Ponte, J. (1995). Investigações matemáticas na sala de aula. *ProfMat 95. Actas*, 61-167.

Fernandes, D. (1988). *Comparison of the Effects of Two Models of Instruction on the Problem-Solving Performance of Preservice Elementary School Teachers and on their Awareness of the Problem-Solving Stategies they Enploy*. College Station: Texas A & M University, Tese de Doutoramento.

Fernandes, D. (1989). Organizar o Ensino da Resolução de Problemas. PROFMAT 89. *Actas*. Lisboa: APM, 169-175.

Fernandes, D. (1991). Perspectivas de Formação em Educação Matemática. *Aprender*, (13), 70-74.

Fernandes, D. (1992). Resolução de Problemas: Investigação, Ensino, Avaliação e Formação de Professores. In M. Brown, D. Fernandes, J. Matos, J. Ponte (Eds.), *Educação Matemática. Temas de Investigação* (pp. 45-103). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional e Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Fernandes, D. et al. (1994). Processos de Resolução de Problemas: Revisão e Análise Crítica de Investigação que Utilizou Esquemas de Codificação. In D. Fernandes, A. Borralho e G. Amaro (Eds.), *Resolução de Problemas: Processos Cognitivos, Concepções de Professores e Desenvolvimento Curricular* (pp. 35-63). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Fernández, J. (1989). *Los numeros en color de G. Cuisenaire. Relaciones dinamicas para el descubrimiento de la matematica en el aula*. Madrid: Seco Olea.

Flavell, J. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: a new area of cognitive-developmental inquiry. *American Psychologist*, 34, 906-911.

Flavell, J. (1987). Speculations about the nature and development of metacognition. In F. Weinert e R. Kluwe (Orgs.), *Metacognition, motivation and understanding* (pp. 21-30). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Fonseca, L. (1997). Processos utilizados na resolução de problemas por futuros professores de Matemática. In D. Fernandes, F. Lester, A. Borralho e I. Vale (Coord.), *Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática: Múltiplos contextos e* perspectivas (pp. 39-70). Aveiro: Grupo de Investigação em Resolução de Problemas.

Fortunato, I. et al. (1991). Metacognition and Problem Solving. *Arithmetic Teacher*, 39 (4), 38-40.

Gaspar, A. (1987). Metacognição: Estratégias e Desenvolvimento. *Aprender a Pensar*. Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa. Projecto Dianoia.

Guzmán, M. (1999). *Para pensar mejor. Dessarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*. Madrid: Ediciones Pirámide, 4ª Ed.

Kantowski, E. (1974). *Process Involved in Mathematical Problem Solving*. University of Georgia, Tese de Doutoramento.

Krulik, S. e Rudnick, J. (1987). *Problem solving. A hanbook for teachers*. Massachusetts: Allyn and Bacon, 2ª Ed.

Lafortune, L. e Saint-Pierre, L. (2001). *A Afectividade e a Metacognição na Sala de Aula*. Lisboa: Instituto Piaget.

Lambdin, D. et al. (1994). Connecting Research to Teaching. Reflections on Mathematics Education Research over the Twenty-Five Years of JRME. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 1 (1), 38-43.

Leitão, A. e Fernandes, H. (1997). Trabalho de Grupo e Aprendizagem Cooperativa na Resolução de Problemas por futuros Professores de Matemática. In D. Fernandes, F. Lester, A. Borralho e I. Vale (Coords.). *Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática: Múltiplos contextos e perspectivas* (pp. 99-128). Aveiro: Grupo de Investigação em Resolução de Problemas.

Lester, F. (1983). Trends and Issues in Mathematical Problem-Solving Research. In R. Lesh e M. Landan (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Process* (pp. 229-261). New York: Academic Press, Inc.

Lester, F. (1985). Methodological Considerations In Research On Mathematical Problem-Solving Instruction. In E. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (pp. 41-69). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Lester, F. e Garofalo, J. (1985). Metacognition, Cognitive Monitoring and Mathematical Performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (3), 163-176.

Lester, F. e Mau, S. (1993). Teaching Mathematics via Problem solving: a Course for Prospective Elementary Teachers. *For the Learning of Mathematics*, 13 (2), 8-11.

Lobo, A. (1989). *Estratégias Metacognitivas no Desenvolvimento das Capacidades Básicas de Pensamento Envolvidas na Resolução de Problemas*. (Tese de Mestrado da Universidade de Lisboa). Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa.

Lopes, C. (2002). *Estratégias e métodos de resolução de problemas em Matemática*. Porto: ASA.

Luz, M. (1996). Evaluación de procesos y progresos del alumnado en la resolución de problemas. *UNO*, nº 8, 53-63.

Martí, E. (1999). Metacognición y estrategias de aprendizaje. In J. Pozo e C. Monereo (Coords.), *El aprendizaje estratégico* (pp. 111-121). Madrid: Aula XXI/Santillana.

Martín Izard, J. (1997). La Mediación en los Programas de "Enseñar a Pensar" Como Actos Didácticos Interactivos. *Aula*, Nº 9, 123-137.

Mateos, M. (1999). Metacognición en expertos y novatos. In J. Pozo e C. Monereo (Coords.), *El aprendizaje estratégico* (pp. 123-127). Madrid: Aula XXI/Santillana.

Mestre, R. e Matos, J. (2005). As actividades de investigação na formação de alunos matematicamente competentes – uma experiência no 1º ciclo. In *Actas XVI SIEM 2005* – Seminário de Investigação em Educação Matemática, 205-218.

Mota, G. e Guimarães, H. (1990). Resolução de problemas. Relatório acerca do grupo de discussão nº 3 do Encontro Nacional de Professores de Matemática. In *Actas do ProfMat 90*, vol. II (pp. 81-86). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Noel, B. (1991). *La métacognition*. Brouxelles: De Boeck-Wesmael.

Novais, A. e Cruz, N. (1987). O ensino e o desenvolvimento das capacidades metacognitivas. *Aprender a Pensar*. Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Projecto Dianoia.

O'Daffer, P. (Ed.). (1988). *Problem solving. Tips for teachers*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics

Oliveira, M. (2006). As Barras Cuisenaire – um material polivalente. In P. Pallhares e A. Gomes (coords.) (166-178). *Mat 1C – desafios para um novo rumo*. Braga: Universidade do Minho.

Pallhares, P. (1997). Histórias com Problemas Construídos por Futuros Professores de Matemática. In D. Fernandes, F. Lester, A. Borralho e I. Vale (Coords.), *Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática: Múltiplos contextos e perspectivas* (pp. 155-188). Aveiro: Grupo de Investigação em Resolução de Problemas.

Papy (1968). *Minicomputer*. Bruxelles: IVAC.

Perrenoud, P. (2002). *A prática reflexiva no ofício de professor: Profissionalização e razão pedagógica*. Porto Alegre: Artmed.

Pérez, M. (1994). La Solución de Problemas en Matemáticas. In J. Pozo (Coord.), *La solución de problemas* (pp. 53-83). Madrid: Santillana.

Pérez, M. e Pozo, J. (1994). Aprender a Resolver Problemas y Resolver Problemas para Aprender. In J. Pozo (Coord.), *La solución de problemas* (pp. 13-52). Madrid: Santillana.

Polya, G. (1978). *A Arte de Resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Interciência.

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery. On understanding, learning and teaching problem solving*. New York: John Wiley & Sons.

Polya, G. (2003). *Como resolver problemas*. Lisboa: Gradiva.

Ponte, J. (1988). Matemática, Insucesso e Mudança: Problema possível, impossível ou indeterminado? *Aprender*, nº 11, 10-19.

Ponte, J. e Matos, J. (1996). Processos Cognitivos e Interacções Sociais nas Investigações Matemáticas. In P. Abrantes; L. Leal e J. Ponte (Org.). *Investigar para Aprender Matemática. Textos seleccionados*. (pp. 119 – 137).Lisboa: APM.

Reeves, C. (1987). *Problem-solving Tecnhiques Helpful in Mathematics and Science*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Rocha, A. (2002). Os alunos de matemática e o trabalho investigativo. In GTI Grupo de Trabalho sobre Investigação (Org.). *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 91-124). Lisboa: APM.

Rocha, H. (1995). Investigando com a calculadora gráfica. *ProfMat 95. Actas*, 235-241.

Salema, M. (1997). *Ensinar e Aprender a Pensar*. Lisboa: Texto Editora.

Sanchez, J. (1993). Eficacia del Aprendizaje de las Matematicas por Descubrimiento. In L. Almeida, J. Fernandes e A. Mourão (Eds.), *Ensino-Aprendizagem da Matemática. Recuperação de alunos com baixo desempenho* (pp. 3-22). Riba d'Ave: Didáxis.

Schoenfeld, A. (1979). Explicit Heuristic Training as a Variable in Problem-Solving Performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 173-187.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. San Diego: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1987). What's all the fuss about metacognition? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189-215). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Schön, D. (1983). *The reflective praticioner: How professionals think in action*. Aldershot Hants, CA: Avebury.

Schön, D. (1987). *Educating the reflective practitioner. Toward a new design for teaching and learning in the professions*. São Francisco: Jossey Bass.

Schön, D. (1992). Formar professores como profissionais reflexivos. In A. Nóvoa (Coord.), *Os professores e a sua formação* (pp. 77-91). Lisboa: D. Quixote.

Segurado, I. (2002). O que acontece quando os alunos realizam investigações matemáticas?. In GTI Grupo de Trabalho sobre Investigação (Org.). *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 57-73). Lisboa: APM.

Serrazina, L. e Matos, J. (1988). *O geoplano na sala de aula*. Lisboa: APM.

Stacey, K. e Groves, S. (1999). *Resolver Problemas: Estrategias*. Madrid: Narcea.

Sternberg, R. e Spear-Swerling, L. (2000). *Enseñar a pensar*. Madrid: Aula XXI/Santillana.

Vale, I. (1994). Resolução de problemas: Desempenhos de futuros professores de matemática. *Actas do V SIEM*. Lisboa: APM, 209-222.

Valente, M. et al. (1989a). O Desenvolvimento da Capacidade de Pensar Através do Currículo Escolar: Utilização de Estratégias Metacognitivas. *Cadernos de Consulta Psicológica*, (5), 69-79.

Valente, M. et al. (1989b). A Metacognição. *Revista de Educação*, 1 (3), 2-6.

Williamson, M. (1991). *Implementing Metacognitive Processing in the Mathematics Classroom*. Vancouver: Universidade de British Columbia: (Tese de Mestrado, consultada através do ERIC).

White, R. (1990). Metacognition. In J. Keeves (Ed.), *Educational Research, Methodology, and Measurement. An International Handbook* (pp. 70-75). Oxford: Pergamon Press.

Zeichner, K. (1993). *A formação reflexiva de professores: Ideias e práticas*. Lisboa: Educa.