



**UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA**  
**INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO**

**FACTORIZAÇÃO MEROMORFA E GENERALIZADA NUMA**  
**ÁLGEBRA DE FUNÇÕES MATRICIAIS  $2 \times 2$**

Catarina Maria Queirós Monteiro Ventura Gavinhos  
(Licenciada)

**Dissertação para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática**  
**Aplicada**

**Orientador Científico:**

Doutora Maria Cristina Carvalho de Aguiar Câmara

**Júri:**

**Presidente:** Doutor Francisco Ferreira dos Santos

**Vogais:** Doutor Viktor Gregorievich Kravchenko

Doutora Maria Cristina Carvalho de Aguiar Câmara

Agosto de 2002



**UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA**  
**INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO**

**FACTORIZAÇÃO MEROMORFA E GENERALIZADA NUMA  
ÁLGEBRA DE FUNÇÕES MATRICIAIS  $2 \times 2$**

Catarina Maria Queirós Monteiro Ventura Gavinhos  
(Licenciada)

**Dissertação para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática  
Aplicada**

**Orientador Científico:**

Doutora Maria Cristina Carvalho de Aguiar Câmara

**Júri:**

**Presidente:** Doutor Francisco Ferreira dos Santos

**Vogais:** Doutor Viktor Gregorievich Kravchenko

Doutora Maria Cristina Carvalho de Aguiar Câmara

Agosto de 2002

# Resumo

Neste trabalho faz-se o estudo das relações entre a factorização generalizada e a factorização meromorfa de funções matriciais  $2 \times 2$ , em particular de várias classes do tipo Daniele-Khrapkov. Para estas mostra-se que se pode obter uma factorização meromorfa dentro da mesma classe, uma vez conhecida uma solução de um dado problema de Riemann-Hilbert associado à matriz estudada. Serão estudados vários casos sucessivamente mais complexos de funções matriciais  $2 \times 2$ , para os quais, partindo de uma factorização meromorfa, se obtêm condições de existência de factorização generalizada canónica, e expressões explícitas para os factores. .

## Palavras Chave:

Factorização meromorfa; factorização generalizada; factorização canónica; classe Daniele-Khrapkov; problema de Riemann-Hilbert.

# Abstract

In this work we study the relationship between generalized factorization and meromorphic factorization for  $2 \times 2$  matrix-valued functions, namely for some classes of Daniele-Khrapkov type. For these it is possible to show that we can obtain a meromorphic factorization, with factors inside the same class, whenever it is known a solution for some Riemann-Hilbert problem associated to the considered matrix. We also study some examples of  $2 \times 2$  matrix-valued functions, for which, starting from a meromorphic factorization, existence conditions for a canonical generalized factorization are obtained, and factors explicitly written.

**Key - words:**

Meromorphic factorization; generalized factorization ; canonical factorization ; Daniele-Khrapkov class and Riemann-Hilbert problem.

# Agradecimentos

Quero manifestar a minha gratidão à Professora Maria Cristina Câmara pela orientação científica e o incentivo incondicionalmente prestados.

Ainda uma palavra de apreço à Escola Superior Agrária do Instituto Politécnico de Castelo Branco pelas facilidades concedidas e um imenso Bem Haja à minha família e aos meus amigos, pois sem o seu apoio não teria sido possível a concretização deste projecto.

# Índice Geral

Resumo	i
Abstract	ii
Agradecimentos	iii
Índice Geral	iv
<b>1 Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1 Conjuntos . . . . .	5
1.2 Factorização de Funções Matriciais . . . . .	8
1.2.1 Factorização de funções matriciais racionais . . . . .	9
1.2.2 Factorização em álgebras decomponíveis . . . . .	11
1.3 Factorização Generalizada . . . . .	13
1.3.1 Factorização generalizada de funções matriciais contínuas	14
1.3.2 Factorização generalizada de funções matriciais contínuas à Hölder . . . . .	15
1.3.3 Factorização generalizada de funções matriciais seccio- nalmente contínuas . . . . .	16

1.4	Factorização Meromorfa . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Classe <math>C(Q_1, Q_2)</math> e Estrutura de Factores</b>	<b>20</b>
2.1	Exemplos . . . . .	21
2.1.1	A Classe de Daniele-Khrapkov . . . . .	21
2.1.2	A Classe $\mathcal{D} - \mathcal{N}$ . . . . .	21
2.1.3	A Classe de Rawlins-Williams . . . . .	23
2.1.4	A Classe de Daniele-Khrapkov Generalizada . . . . .	23
2.2	Caracterização de $C(Q, Q) = C(Q)$ . . . . .	24
2.3	Caracterização de $C(Q_1, Q_2)$ . . . . .	30
2.4	A Equação do Produto . . . . .	33
2.5	Estrutura de Factores . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Da factorização meromorfa para a generalizada</b>	<b>41</b>
3.1	Da factorização meromorfa para a generalizada . . . . .	41
3.2	Da factorização meromorfa para a generalizada canónica . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Aplicações a <math>C(Q)</math></b>	<b>54</b>
4.1	Como obter uma factorização meromorfa . . . . .	54
4.2	Como obter uma factorização generalizada . . . . .	59
4.2.1	1 <sup>a</sup> caso $q = 0$ . . . . .	59
4.2.2	2 <sup>o</sup> caso $\sqrt{q} \neq 0$ é uma função racional . . . . .	64
4.2.3	3 <sup>o</sup> caso $q = \frac{\xi-a}{\xi-b}$ , $R^2 = qI$ , $R$ matriz companheira . . . . .	71
4.2.4	4 <sup>o</sup> caso $q = \frac{\xi-a}{\xi-b}$ , $R^2 = qI$ . . . . .	72
4.2.5	5 <sup>o</sup> caso $q = \frac{(\xi-a_1)(\xi-a_2)}{(\xi-b_1)(\xi-b_2)}$ ( $b_1 = b_2$ ou $a_1 = a_2$ ) . . . . .	80
4.2.6	6 <sup>o</sup> caso $q = \frac{(\xi-a_1)(\xi-a_2)}{(\xi-b_1)(\xi-b_2)}$ ( $b_1 \neq b_2, a_1 \neq a_2$ ) . . . . .	87

**Bibliografia**

**93**

# Introdução

Ao operador integral singular  $S_{\mathbb{R}} : L_p(\mathbb{R}) \rightarrow L_p(\mathbb{R})$ ,  $p > 1$ , definido por

$$S_{\mathbb{R}}f(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in \mathbb{R},$$

onde o integral é entendido no sentido do valor principal de Cauchy, isto é,

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi i} \int_{|\tau - t| > \delta} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau,$$

estão associadas duas projecções complementares

$$P^+ = \frac{1}{2}(I + S_{\mathbb{R}}), \quad P^- = \frac{1}{2}(I - S_{\mathbb{R}})$$

onde  $I$  é o operador identidade em  $L_p(\mathbb{R})$ . Representa-se por  $L_p^+$  e  $L_p^-$  as imagens de  $P^+$  e  $P^-$ , respectivamente, em  $L_p(\mathbb{R})$ .

Uma função matricial  $G \in \mathcal{G}L_{\infty}(\mathbb{R})^{n \times n}$  admite factorização generalizada relativamente a  $L_p(\mathbb{R})$ ,  $1 < p < \infty$ , se a matriz  $G$  puder ser escrita na forma

$$G = G_- D G_+,$$

onde os factores  $G_{\pm}$  e  $D$  satisfazem as seguintes condições (para  $q = \frac{p}{p-1}$ ):

1.

$$r_+ G_+ \in L_p^+(\mathbb{R})^{n \times n}, \quad r_+ G_+^{-1} \in L_q^+(\mathbb{R})^{n \times n}$$

$$r_-G_- \in L_q^-(\mathbb{R})^{n \times n}, \quad r_-G_-^{-1} \in L_p^-(\mathbb{R})^{n \times n}$$

$$D = \text{diag}(r^{k_j})_{j=1}^n$$

em que  $r(\xi) = \frac{\xi-i}{\xi+i}$ ,  $r_{\pm}(\xi) = \frac{1}{\xi \pm i}$  para  $\xi \in \mathbb{R}$  e  $k_1 \geq \dots \geq k_n$  inteiros, sendo estes denominados índices parciais de  $G$ .

2. O operador  $G_-P^+G_-^{-1}I$  é um operador definido num subconjunto denso de  $L_p^n(\mathbb{R})$  e tem uma extensão limitada a  $L_p^n(\mathbb{R})$ .

Diz-se que  $G \in \mathcal{GC}_{\mu}(\mathbb{R})^{2 \times 2}$  admite uma factorização meromorfa se pode ser escrita na forma:

$$G = M_-RM_+$$

com  $R \in \mathcal{GR}(\mathbb{R})^{2 \times 2}$  e tal que existem polinómios  $p_{\pm}$  e  $q_{\pm}$  sem zeros em  $\mathbb{C}^{\pm} \cup \mathbb{R}$ , respectivamente, que satisfazem:

- i-)  $q_-M_+, p_-M_+^{-1} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^+)^{2 \times 2}$
- ii-)  $q_+M_-, p_+M_-^{-1} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^-)^{2 \times 2}$
- iii)  $(M_{\pm})_{jk}, (M_{\pm}^{-1})_{jk} = \mathcal{O}(|\xi + i\eta|^{\omega})$ , quando  $|\xi + i\eta| \rightarrow \infty$  em  $\mathbb{C}_{\alpha}^{\pm} = \{z = \xi + i\eta \in \mathbb{C}^{\pm} : |\eta| \geq \alpha > 0\}$ , para algum  $\omega \geq 0$ ,

onde  $\mathcal{H}(\mathbb{C}^+)^{2 \times 2}$ , respectivamente  $\mathcal{H}(\mathbb{C}^-)^{2 \times 2}$ , designa o conjunto das funções matriciais contínuas com extensão analítica a  $\mathbb{C}^+$ , respectivamente a  $\mathbb{C}^-$ .

O conceito de factorização generalizada, que está incluído no que é vulgarmente conhecido como factorização de Wiener-Hopf, tem um papel importante em muitos problemas, nomeadamente na resolução de problemas de Riemann-Hilbert relativos a um contorno no plano complexo, com inúmeras

aplicações à física e à engenharia. Contudo não há um procedimento sistemático que permita calcular explicitamente os factores de uma factorização generalizada para funções que não sejam escalares ou racionais. Mesmo no caso  $2 \times 2$  apenas certas classes de funções matriciais foram estudadas.

No presente trabalho abordamos este problema mediante o estudo das relações entre factorização generalizada e factorização meromorfa de funções matriciais  $2 \times 2$ . Em particular, para funções matriciais  $G \in C_\mu(\mathbb{R})^{2 \times 2}$ , estabelecemos condições de existência de factorização generalizada canónica e expressões explícitas para os factores, partindo de uma factorização meromorfa. Para funções matriciais pertencentes a algumas classes do tipo Daniele-Khrapkov, mostra-se como obter uma factorização meromorfa dentro da mesma classe, uma vez conhecida uma solução de um dado problema de Riemann-Hilbert associado à matriz estudada. Assim, para estas classes, apresentamos um método para abordar o problema da existência e construção de factorização generalizada canónica, método que deve ser comparado com o utilizado em [13].

No primeiro capítulo apresentamos os resultados e as definições básicas de que necessitaremos.

No segundo capítulo, baseado em [13], estudamos as matrizes pertencentes à classe  $C(Q_1, Q_2)$ , definida como sendo o conjunto de todas as funções matriciais  $(2 \times 2), G$ , com entradas em  $L_\infty(\mathbb{R})$ , invertíveis, que satisfazem uma relação

$$G^T Q_1 G = h Q_2, \tag{1}$$

onde  $T$  denota a transposição de matrizes,  $Q_1$  e  $Q_2$  são duas matrizes simétricas,

dadas, de funções racionais sem polos em  $\mathbb{R}$  e  $h$  é uma função escalar invertível em  $L_\infty(\mathbb{R})$  e dependente de  $G$ ; com mais detalhe caracterizamos as funções matriciais pertencentes a  $C(Q, Q) = C(Q)$ , que, caso  $Q$  seja invertível, coincide com a classe de Daniele-Khrapkov. Estudamos também a estrutura dos factores de tais funções matriciais, nomeadamente, através da equação do produto

$$h_+(\phi^+)^T Q_2 \phi^+ = h_-^{-1}(\phi^-)^T Q_1 \phi^-,$$

que se obtém do problema de Riemann-Hilbert homogéneo

$$G\phi^+ = \phi^-, \quad \phi^\pm \in L_2^\pm(\mathbb{R})^2$$

associado a este tipo de funções matriciais.

No terceiro capítulo apresentamos resultados que nos permitem obter uma factorização generalizada de  $G \in C^\mu(\mathbb{R})^{2 \times 2}$  a partir de uma factorização meromorfa [8]. A partir de uma factorização deste tipo, estabelecemos também um processo de estudar a existência de uma factorização generalizada canónica de  $G$  ( $G = G_- G_+$ ), que, caso exista, é mesmo possível explicitar.

No quarto capítulo apresentamos formas de obter uma factorização meromorfa para funções matriciais  $G \in C(Q)$ ; damos alguns exemplos em  $C(Q)$  da passagem de uma factorização meromorfa para uma generalizada e estudamos a existência de factorização canónica para alguns casos (que explicitamos quando existe), usando os resultados dos capítulos anteriores.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Conjuntos

Representa-se por  $L_p(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq p < \infty$ , o espaço das funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , mensuráveis em  $\mathbb{R}$ , tais que  $|f|^p$  é integrável em  $\mathbb{R}$ , com norma

$$\|f\|_p = \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

e por  $L_\infty(\mathbb{R})$  o espaço de Banach das funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mensuráveis e essencialmente limitadas em  $\mathbb{R}$ , com norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \text{ess} |f(t)|.$$

O operador integral singular  $S_{\mathbb{R}} : L_p(\mathbb{R}) \rightarrow L_p(\mathbb{R})$ ,  $p > 1$ , é definido por

$$S_{\mathbb{R}} f(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in \mathbb{R},$$

onde o integral é entendido no sentido do valor principal de Cauchy, isto é,

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi i} \int_{|\tau - t| > \delta} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

## 1.1. Conjuntos

A partir do operador  $S_{\mathbb{R}}$ , podem definir-se duas projecções complementares

$$P^+ = \frac{1}{2}(I + S_{\mathbb{R}}), \quad P^- = \frac{1}{2}(I - S_{\mathbb{R}}) \quad (1.1)$$

onde  $I$  é o operador identidade em  $L_p(\mathbb{R})$ .

Representa-se por  $L_p^+$  e  $L_p^-$  as imagens de  $P^+$  e  $P^-$ , respectivamente, em  $L_p(\mathbb{R})$ .

Representa-se por  $L_{\infty}^+$  ( $L_{\infty}^-$ , respectivamente) o espaço das funções essencialmente limitadas que admitem uma extensão analítica limitada a  $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}$  ( $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z < 0\}$ , respectivamente). O espaço das funções definidas em  $\mathbb{R}$  que admitem uma extensão analítica a  $\mathbb{C}^+$  ( $\mathbb{C}^-$ , respectivamente) é representado por  $\mathcal{H}(\mathbb{C}^+)$  ( $\mathcal{H}(\mathbb{C}^-)$ , respectivamente).

Por  $C(\mathbb{R})$  designa-se a álgebra das funções  $f$  com valores em  $\mathbb{C}$  contínuas em  $\mathbb{R}$  e tais que

$$\begin{aligned} f(+\infty) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) \\ f(-\infty) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) \end{aligned}$$

são finitos e iguais, com norma

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|.$$

Defina-se

$$C^{\pm}(\mathbb{R}) = C(\mathbb{R}) \cap L_{\infty}^{\pm}$$

$$C_0^-(\mathbb{R}) = \{a \in C(\mathbb{R})^- : a(\infty) = 0\}.$$

$C_{\mu}(\mathbb{R})$  representa o espaço das funções contínuas à Hölder de ordem  $\mu \in ]0, 1[$ , isto é, o subespaço das funções em  $C(\mathbb{R})$  que satisfazem

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq C|t_1 - t_2|^{\mu}, \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R} \quad \text{e}$$

## 1.1. Conjuntos

$$|\varphi(\frac{1}{t_1}) - \varphi(\frac{1}{t_2})| \leq C'|t_1 - t_2|^\mu, \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

com  $C$  e  $C'$  constantes positivas que dependem de  $\varphi$ .  $C_\mu^0(\dot{\mathbb{R}})$  designa o subespaço das funções de  $C_\mu(\dot{\mathbb{R}})$  que se anulam em  $\infty$ .

Por  $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}(\dot{\mathbb{R}})$  designa-se o espaço das funções racionais limitadas e sem polos em  $\mathbb{R}$ . Tem-se ainda

$$\mathcal{R}^\pm \equiv \mathcal{R}^\pm(\dot{\mathbb{R}}) = \mathcal{R}(\dot{\mathbb{R}} \cap C^\pm(\dot{\mathbb{R}}))$$

$$\mathcal{R}_0^\pm \equiv \mathcal{R}_0^\pm(\dot{\mathbb{R}}) = \{r \in \mathcal{R}^\pm(\dot{\mathbb{R}}) : r(\infty) = 0\}$$

$$\mathcal{R}_0 \equiv \mathcal{R}_0(\dot{\mathbb{R}}) = \{r \in \mathcal{R}(\dot{\mathbb{R}}) : r(\infty) = 0\}.$$

Toda a função  $r \in \mathcal{R}$  pode ser escrita, de modo único, na forma

$$r = r_+ + r_-, \quad r_+ \in \mathcal{R}^+, \quad r_- \in \mathcal{R}_0^-$$

o que implica poder escrever

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^+ \dot{+} \mathcal{R}_0^-.$$

A projecção de  $\mathcal{R}$  sobre  $\mathcal{R}^+$  paralelamente a  $\mathcal{R}_0^-$  pode ser feita em termos do operador integral singular  $S_{\mathbb{R}}$ :

**Proposição 1** [15] *Seja  $r = r_+ + r_-$  a decomposição de  $r \in \mathcal{R}$ , onde  $r_+ \in \mathcal{R}^+$  e  $r_- \in \mathcal{R}_0^-$ . Então*

$$S_{\mathbb{R}}r(t) = r_+(t) - r_-(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

*Assim,  $r_+ = P^+r$  e  $r_- = P^-r$ , onde  $P^+$  e  $P^-$  são definidos em (1.1).*

## 1.2. Factorização de Funções Matriciais

$PC(\mathbb{R})$  representa a álgebra das funções a definidas em  $\mathbb{R}$ , contínuas excepto num número finito de pontos e tais que, em cada ponto de descontinuidade  $t_0$ , os limites laterais

$$a(t_0 + 0) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} a(t), \quad a(t_0 - 0) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} a(t)$$

são finitos, bem como os limites

$$a(\infty \pm 0) = a(\pm\infty) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} a(t).$$

## 1.2 Factorização de Funções Matriciais

Representa-se por  $\mathcal{G}A$ , o grupo dos elementos invertíveis numa álgebra  $A$ .

Dado um espaço linear  $X$ ,  $X^n$  ( $n$  inteiro positivo) é o espaço linear dos vectores com  $n$  coordenadas em  $X$  e por  $X^{n \times n}$  o espaço linear das matrizes quadradas de ordem  $n$ , com entradas em  $X$ .  $\mathcal{G}X^{n \times n}$  é o grupo dos elementos invertíveis em  $X^{n \times n}$ . Diz-se que uma função matricial  $G \in \mathcal{G}C(\mathbb{R})^{n \times n}$  admite uma factorização relativamente a  $\mathbb{R}$  se se puder escrever na forma

$$G = G_- D G_+$$

onde  $G_{\pm} \in \mathcal{G}C^{\pm}(\mathbb{R})^{n \times n}$  e  $D$  é uma matriz diagonal da seguinte forma :

$$D = \text{diag}(r^{k_j})_{j=1}^n$$

em que  $r(\xi) = \frac{\xi-i}{\xi+i}$ , para  $\xi \in \mathbb{R}$  e  $k_1 \geq \dots \geq k_n$  são inteiros, denominados índices parciais da factorização. O inteiro

$$k = \sum_{j=1}^n k_j$$

## 1.2. Factorização de Funções Matriciais

é denominado o índice total da factorização. No caso em que  $k_1 = \dots = k_n = 0$  tem-se  $G = G_-G_+$  e diz-se que  $G$  admite factorização canónica relativamente a  $\mathbb{R}$ .

O seguinte teorema afirma que os índices parciais são univocamente determinados pela matriz  $G$ , assumindo que  $G$  admite factorização.

**Teorema 2** [2] *Suponha-se que  $G \in \mathcal{GC}(\mathbb{R})^{n \times n}$  admite duas factorizações  $G = G_-DG_+$  e  $G = \tilde{G}_-\tilde{D}\tilde{G}_+$  relativamente a  $\mathbb{R}$ . Então os elementos das matrizes diagonais  $D$  e  $\tilde{D}$  são iguais.*

Consideremos seguidamente algumas classes de funções matriciais para as quais existe uma factorização deste tipo.

### 1.2.1 Factorização de funções matriciais racionais

Começemos pelo caso mais simples da factorização de funções matriciais racionais.

Para melhor compreensão da factorização de funções matriciais racionais relativamente a  $\mathbb{R}$ , convém começar pelo estudo da factorização no caso escalar.

Seja  $q = \frac{q_1}{q_2} \in \mathcal{R}$ , onde  $q_1$  e  $q_2$  são polinómios primos entre si, isto é, sem raízes comuns. Considera-se que  $q_1$  e  $q_2$  não têm zeros em  $\mathbb{R}$ .

Denote-se por

$$\begin{aligned}(\xi_j^i)_+, \quad j = 1, 2, \dots, (n_i)_+ \\ (\xi_l^i)_-, \quad l = 1, 2, \dots, (n_i)_-\end{aligned}$$

os zeros do polinómio  $q_i$  ( $i = 1, 2$ ), que pertencem respectivamente a  $\mathbb{C}^+$  e a  $\mathbb{C}^-$ , repetidos de acordo com a sua multiplicidade.

## 1.2. Factorização de Funções Matriciais

Tem-se então

$$q(\xi) = q_-(\xi) \left( \frac{\xi - i}{\xi + i} \right)^k q_+(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

onde

$$q_-(\xi) = \alpha \frac{\prod_{j=1}^{(n_1)_+} \left[ 1 - \frac{(\xi_j^1)_+ - i}{\xi - i} \right]}{\prod_{j=1}^{(n_2)_+} \left[ 1 - \frac{(\xi_j^2)_+ - i}{\xi - i} \right]} \quad e \quad q_+(\xi) = \alpha \frac{\prod_{l=1}^{(n_1)_-} \left[ 1 - \frac{(\xi_l^1)_- + i}{\xi + i} \right]}{\prod_{l=1}^{(n_2)_-} \left[ 1 - \frac{(\xi_l^2)_- + i}{\xi + i} \right]},$$

onde  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $k = (n_1)_+ - (n_2)_+ = (n_2)_- - (n_1)_-$ ,

$$(q_+)^{\pm 1} \in \mathcal{R}^+ = \mathcal{R} \cap C^+(\mathbb{R})$$

$$(q_-)^{\pm 1} \in \mathcal{R}^- = \mathcal{R} \cap C^-(\mathbb{R})$$

$$\text{ind } q = k.$$

A factorização de  $q$  relativa a  $\mathbb{R}$  é única se se impuser, por exemplo, a condição  $q_-(\infty) = 1$ . As funções racionais  $q$  nas condições indicadas possuem sempre factorização.

Quanto à factorização de matrizes invertíveis de funções racionais podemos afirmar que:

### Teorema 3 [2]

Seja  $R \in \mathcal{GR}^{n \times n}$ .  $R$  admite uma factorização

$$R = R_- D R_+$$

onde  $R^\pm$  estão em  $[\mathcal{GR}^\pm]^{n \times n}$  e  $D$  é uma matriz diagonal da seguinte forma:

$$D = \text{diag}(r^{k_j})_{j=1}^n$$

em que  $r(\xi) = \frac{\xi - i}{\xi + i}$ , para  $\xi \in \mathbb{R}$  e  $k_1 \geq \dots \geq k_n$  são inteiros.

## 1.2. Factorização de Funções Matriciais

Para esta classe de funções matriciais, tal como no caso escalar, existe um método sistemático para obter explicitamente os factores  $R_{\pm}$ . Este método, que é semelhante ao que mais tarde apresentaremos para passar de uma factorização meromorfa para uma factorização generalizada, pode ser encontrado, por exemplo, em [2].

### 1.2.2 Factorização em álgebras decomponíveis

Viu-se que os elementos não singulares de  $\mathcal{R}^{n \times n}$  admitem factorização, pertencendo os factores ainda à mesma classe. Uma generalização natural dos resultados anteriores é obtida considerando álgebras de funções cujos elementos não singulares admitem factorização, pertencendo os factores ainda à mesma álgebra.

Seja  $\mathcal{C}$  uma álgebra de Banach de funções contínuas em  $\mathbb{R}$  com valores em  $\mathbb{C}$ . Denote-se por  $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}$  a norma de  $\mathcal{C}$  e suponha-se que a função identidade  $e(\xi) \equiv 1$  pertence a  $\mathcal{C}$ .

Defina-se

$$\mathcal{C}^{\pm} = \mathcal{C} \cap C^{\pm}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_0^{\pm} = \mathcal{C} \cap C_0^{\pm}(\mathbb{R}).$$

Da desigualdade

$$\|f\|_{\mathbb{R}} \leq \frac{1}{\|e\|_{\mathcal{C}}} \|f\|_{\mathcal{C}}$$

vem que  $\mathcal{C}^{\pm}$  e  $\mathcal{C}_0^{\pm}$  são subálgebras fechadas em  $\mathcal{C}$  [2].

Considera-se que  $\mathcal{C}$  satisfaz as seguintes condições:

1.  $\mathcal{C}$  contém o conjunto  $\mathcal{R}$ ;
2. se  $a \in \mathcal{C}$  e  $a(\xi) \neq 0$  para todo o  $\xi \in \mathbb{R}$ , então  $a^{-1} \in \mathcal{C}$ .

## 1.2. Factorização de Funções Matriciais

As álgebras de funções contínuas que satisfazem estas condições têm a seguinte propriedade:

Se  $G \in \mathcal{C}^{n \times n}$  e  $\inf_{\xi \in \mathbb{R}} |\det G(\xi)| > 0$  então  $G^{-1} \in \mathcal{C}^{n \times n}$ .

Uma álgebra de Banach  $\mathcal{C} \subset C(\dot{\mathbb{R}})$  diz-se uma álgebra decomponível de funções contínuas se puder ser escrita na forma :

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ + \mathcal{C}_0^-.$$

**Teorema 4** [15, 2] *Uma álgebra de Banach  $\mathcal{C} \subset C(\dot{\mathbb{R}})$  é decomponível se e só se*

$$S_{\mathbb{R}}f(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

*é um operador limitado em  $\mathcal{C}$*

Uma álgebra de Banach  $\mathcal{C}$  de funções contínuas em  $\mathbb{R}$  contendo  $\mathcal{R}$  diz-se uma álgebra- $\mathbb{R}$  se  $\mathcal{R}$  é denso em  $\mathcal{C}$ . Toda a álgebra- $\mathbb{R}$  é separável e fechada para a inversão.

Tem-se, para funções matriciais pertencentes a uma álgebra deste tipo, o seguinte resultado:

**Teorema 5** [15] *Seja  $\mathcal{C}$  uma álgebra- $\mathbb{R}$  decomponível. Toda a matriz  $G \in \mathcal{GC}^{n \times n}$  admite factorização relativa a  $\mathbb{R}$  em  $\mathcal{C}$ .*

Apesar de  $C_{\mu}(\dot{\mathbb{R}})^{n \times n}$  não ser uma álgebra- $\mathbb{R}$ , é também decomponível e tem-se o seguinte resultado:

**Teorema 6** [15] *Toda a função matricial invertível pertencente a  $C_{\mu}(\dot{\mathbb{R}})^{n \times n}$ , admite factorização relativa a  $\mathbb{R}$  em  $C_{\mu}(\dot{\mathbb{R}})^{n \times n}$ .*

### 1.3 Factorização Generalizada

Diz-se que a matriz de funções  $G \in \mathcal{GL}_\infty(\mathbb{R})^{n \times n}$  admite factorização generalizada relativamente a  $L_p(\mathbb{R})$ ,  $1 < p < \infty$  se a matriz  $G$  puder ser factorizada na forma

$$G = G_- D G_+,$$

onde os factores  $G_+$  e  $D$  satisfazem as seguintes condições (para  $q = \frac{p}{p-1}$ ):

1.

$$r_+ G_+ \in L_p^+(\mathbb{R})^{n \times n}, \quad r_+ G_+^{-1} \in L_q^+(\mathbb{R})^{n \times n}$$

$$r_- G_- \in L_q^-(\mathbb{R})^{n \times n}, \quad r_- G_-^{-1} \in L_p^-(\mathbb{R})^{n \times n}$$

$$D = \text{diag}(r^{k_j})_{j=1}^n$$

em que  $r(\xi) = \frac{\xi-i}{\xi+i}$ ,  $r_\pm(\xi) = \frac{1}{\xi \pm i}$  para  $\xi \in \mathbb{R}$  e  $k_1 \geq \dots \geq k_n$  inteiros, sendo estes denominados índices parciais de  $G$ .

2. O operador  $G_- P^+ G_-^{-1} I$  é um operador definido num subconjunto denso de  $L_p^n(\mathbb{R})$  que tem uma extensão limitada em  $L_p^n(\mathbb{R})$ .

Quando uma função matricial  $G \in \mathcal{GL}_\infty(\mathbb{R})^{n \times n}$  admite uma factorização generalizada relativa a  $L_p(\mathbb{R})$ ,  $p < \infty$ , associa-se-lhe o índice total  $k$  dado por

$$k = \sum_{j=1}^n k_j.$$

Quando  $k_1 = \dots = k_n = 0$ , a factorização generalizada diz-se canónica. Se  $G_\pm \in \mathcal{GL}_\infty^\pm(\mathbb{R})^{n \times n}$  diz-se que é uma factorização limitada.

Tal como acontece na factorização relativamente a  $\mathbb{R}$ , os índices parciais são determinados pela matriz  $G$ :

### 1.3. Factorização Generalizada

**Proposição 7** [2] *Seja  $G \in \mathcal{GL}_\infty(\mathbb{R})^{n \times n}$  e suponha-se que  $G$  admite factorização generalizada relativa a  $L_p$ , onde  $1 < p < \infty$ . Então os índices parciais de  $G$  são univocamente determinados por  $G$  e  $p$ .*

**Proposição 8** [2] *Se uma matriz de funções  $G \in \mathcal{GL}_\infty(\mathbb{R})^{n \times n}$  admite factorização generalizada  $G = G_- D G_+$  relativa a  $L_p$ , então os factores de qualquer outra factorização generalizada  $G = \tilde{G}_- D \tilde{G}_+$  relativa a  $L_p$ , são dados por*

$$\tilde{G}_+ = P G_+$$

$$\tilde{G}_- = G_- D P^{-1} D^{-1}$$

onde  $P \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$  é uma função matricial racional não singular com determinante constante.

A factorização relativamente a  $\mathbb{R}$ , que antes definimos, pode ser considerada como um caso particular de uma factorização generalizada em qualquer  $L_p$ .

#### 1.3.1 Factorização generalizada de funções matriciais contínuas

Toda a função matricial contínua em  $\mathbb{R}$ , com inversa do mesmo tipo, admite factorização generalizada não dependente do valor de  $p$ :

**Teorema 9** [15] *Toda a matriz  $G \in \mathcal{GC}(\mathbb{R})^{n \times n}$  admite uma factorização generalizada, onde:*

1.  $r_+ G_+^{\pm 1} \in L_p^+(\mathbb{R})^{n \times n}$  e  $r_- G_-^{\pm 1} \in L_p^-(\mathbb{R})^{n \times n}$  para todo o  $p$  tal que  $1 < p < \infty$ ;

### 1.3. Factorização Generalizada

2. O operador  $G_- P^+ G_-^{-1}$  é limitado em  $L_p^n(\mathbb{R})$  para todo o  $p$  tal que  $1 < p < \infty$ ;
3.  $\text{ind}(\det G) = \sum_{j=1}^n k_j$ , onde  $k_j$  são os índices parciais da factorização da matriz  $G$ .

**Teorema 10** [6] *Sejam  $r \in ]1, \infty[$  e  $G \in \mathcal{GC}(\dot{\mathbb{R}})^{n \times n}$ . Então, qualquer factorização generalizada de  $G$  em  $L_r(\mathbb{R})$  é também uma factorização generalizada de  $G$  em  $L_p(\mathbb{R})$ , para  $p \in ]1, \infty[$ .*

Note-se que se  $G \in \mathcal{GC}(\dot{\mathbb{R}})^{n \times n}$  admite factorização generalizada, isso não quer dizer que os factores estejam na mesma classe, isto é, que  $G_{\pm} \in \mathcal{GC}(\dot{\mathbb{R}})^{n \times n}$ . Se  $G = G_- D G_+$  em que  $G_+^{\pm 1} \in L_{\infty}^+(\mathbb{R})^{n \times n}$  e  $G_-^{\pm 1} \in L_{\infty}^-(\mathbb{R})^{n \times n}$ , diz-se que  $G$  admite factorização limitada. Isto sucede, em particular quando  $G$  pertence a uma álgebra decomponível.

#### 1.3.2 Factorização generalizada de funções matriciais contínuas à Hölder

$G \in C_{\mu}(\dot{\mathbb{R}})^{n \times n}$  admite uma factorização generalizada em  $C_{\mu}(\dot{\mathbb{R}})^{n \times n}$  (logo limitada) se e só se

$$\det G(\xi) \neq 0 \text{ para todo } \xi \in \dot{\mathbb{R}}.$$

Nesse caso o índice total é  $k = \text{ind} \det G$ . Se  $G \in \mathcal{GC}_{\mu}(\dot{\mathbb{R}})^{n \times n}$  tem índice total igual a zero então possui factorização canónica se e só se o problema de Riemann-Hilbert homogéneo

$$G\phi^+ = \phi^-, \quad \phi^{\pm} \in L_2^{\pm}(\mathbb{R})^n$$

### 1.3. Factorização Generalizada

admite apenas a solução trivial  $\phi^+ = \phi^- = 0$ .

Em todo este trabalho assumimos que as matrizes estudadas pertencem a  $\mathcal{GC}_\mu(\mathbb{R})^{2 \times 2}$ , embora os resultados possam ser estendidos a conjuntos mais gerais.

**Proposição 11** [11] *Seja  $G \in C_\mu(\mathbb{R})^{2 \times 2}$  uma matriz de funções que admite factorização generalizada canónica. Então essa factorização pode ser obtida determinando duas soluções  $(\phi^+, \phi^-)$  e  $(\psi^+, \psi^-)$ , da equação*

$$G\phi^+ = r\phi^-, \quad \phi^\pm \in L_2^\pm(\mathbb{R})^2 \quad (r(\xi) = \frac{\xi - i}{\xi + i}),$$

tais que

1.  $\det[\phi^+, \psi^+](\xi) \neq 0$  para algum  $\xi \in \mathbb{C}^+$  ou
2.  $\det[\phi^-, \psi^-](\xi) \neq 0$  para algum  $\xi \in \mathbb{C}^-$ .

Nesse caso uma factorização canónica é  $G = G_- G_+$  com

$$G_- = [\phi^-, \psi^-] \quad e \quad G_-^{-1} = [\phi^+, \psi^+].$$

#### 1.3.3 Factorização generalizada de funções matriciais seccionalmente contínuas

Verifica-se que para funções matriciais seccionalmente contínuas,  $G \in PC(\mathbb{R})^{n \times n}$ , a factorização generalizada relativa a  $L_p(\mathbb{R})$  depende de  $p$ .

Sejam  $z_1, z_2$  pontos de  $\mathbb{C}$  e  $\delta \in ]0, \pi[$ . Denota-se por  $l(z_1, z_2 : \delta)$  o arco circular orientado que une  $z_1$  a  $z_2$  com as seguintes propriedades:

- Em qualquer ponto  $z$  do arco  $l(z_1, z_2 : \delta)$  ( $z \neq z_1, z_2$ ), os segmentos  $[z_1, z]$  e  $[z, z_2]$  formam um ângulo  $\delta$  em  $z$ ;

### 1.3. Factorização Generalizada

• Quando se percorre o arco  $l(z_1, z_2 : \delta)$  de  $z_1$  a  $z_2$ , o segmento  $[z_1 z_2]$  fica à esquerda.

Para  $\delta \in ]\pi, 2\pi[$ , faz-se  $l(z_1, z_2 : \delta) = l(z_1, z_2 : 2\pi - \delta)$ . Note-se que quando  $\delta = \pi$ ,  $l(z_1, z_2 : \delta)$  é o segmento de recta  $[z_1, z_2]$ .

Considere-se agora  $p$  fixo,  $1 < p < \infty$ . Associa-se a cada elemento  $a \in PC(\dot{\mathbb{R}})$ , a função  $a_p$  definida em  $\dot{R} \times \bar{R}$ , do seguinte modo:

$$a_p(t, \mu) = \frac{1}{2}[a(t-0) + a(t+0)] + \frac{1}{2}[a(t-0) - a(t+0)] \coth(\pi(\frac{i}{p} + \mu)),$$

com  $(t, \mu) \in \dot{R} \times \bar{R}$ , onde se tem  $a(\pm\infty) = a(\infty \pm 0)$ .

A imagem da função  $a_p$  consiste na imagem da função  $a$  acrescentada dos arcos  $l(a(t_{j-}), a(t_{j+}) : \frac{2\pi}{p})$ ,  $j = 1, \dots, n$ , onde  $t_1, \dots, t_n$  são os pontos de descontinuidade de  $a$ .

Uma função  $a \in PC(\dot{\mathbb{R}})$  diz-se não singular relativamente a  $L_p(\mathbb{R})$  se  $a_p(t, \mu) \neq 0$ , em  $\dot{R} \times \bar{R}$ .

O índice de uma função  $a$  não singular relativamente a  $L_p(\mathbb{R})$  é definida como o  $\text{ind}_p a$  da curva

$$a_p : \dot{R} \times \bar{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

relativamente ao ponto zero:

$$\text{ind}_p a = \frac{1}{2\pi} [\arg a_p(t, \mu)]_{\dot{R} \times \bar{R}}$$

Considera-se a orientação ao longo do arco na direcção de  $a(t_j - 0)$  para  $a(t_j + 0)$ . Se  $a \in C(\dot{\mathbb{R}})$ , então  $a_p(t, \mu) = a(t)$  e  $\text{ind}_p a = \text{ind} a$ .

Analogamente, para  $G \in [PC(\dot{\mathbb{R}})]^{n \times n}$ , com  $p$  fixo,  $1 < p < \infty$ , associa-se-lhe a matriz de funções  $G_p(t, \mu)$  definida em  $\dot{R} \times [0, 1]$  com valores em  $\mathbb{C}^{n \times n}$ ,

$$G_p(t, \mu) = \frac{1}{2}[G(t-0) + G(t+0)] + \frac{1}{2}[G(t-0) - G(t+0)] \coth(\pi(\frac{i}{p} + \mu)),$$

## 1.4. Factorização Meromorfa

com  $(t, \mu) \in \dot{R} \times [0, 1]$ .

A função matricial  $G$  diz-se não singular ou regular relativamente a  $L_p(\mathbb{R})$  se  $\det G_p(t, \mu) \neq 0$ , em  $\dot{R} \times [0, 1]$ .

**Teorema 12** [6] *Seja  $G \in [PC(\dot{\mathbb{R}})]^{n \times n}$  uma matriz não-singular. Então são equivalentes as proposições:*

- *A matriz  $G$  admite factorização generalizada relativamente a  $L_p(\mathbb{R})$ ;*
- *$G$  é não singular relativamente a  $L_p(\mathbb{R})$ .*

## 1.4 Factorização Meromorfa

Verifica-se que é, por vezes, mais fácil obter uma factorização meromorfa em vez de uma factorização generalizada, sendo uma factorização meromorfa uma factorização que admite que os seus factores, ou os inversos destes, tenham crescimento algébrico numa vizinhança de um número finito de pontos. Ora, como se verá ao longo deste trabalho, em certas condições é possível construir uma factorização generalizada a partir de uma factorização meromorfa.

**Definição 13** *Seja  $G \in L_\infty(\mathbb{R})^{n \times n}$ . Diz-se que  $G$  admite factorização meromorfa (relativa a  $L_2(\mathbb{R})$ ) se*

$$G = M_- R M_+$$

onde  $R \in \mathcal{GR}(\mathbb{R})^{n \times n}$  e existem polinómios  $p_\pm$  e  $q_\pm$  sem zeros em  $\mathbb{C}^\pm \cup \mathbb{R}$ , respectivamente, satisfazendo:

1.  $q_+ M_+, p_- M_+^{-1} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^+)^{n \times n}$ ;

#### 1.4. Factorização Meromorfa

2.  $q_+M_-, p_+M_-^{-1} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^-)^{n \times n}$ ;
3.  $(M_{\pm})_{jk}, (M_{\pm}^{-1})_{jk} = \mathcal{O}(|\xi + i\eta|^\omega)$  com  $|\xi + i\eta| \rightarrow \infty$  em  $\mathbb{C}_\alpha^\pm = \{z = \xi + i\eta \in \mathbb{C}^\pm : |\eta| \geq \alpha > 0\}$  para  $\omega \geq 0$ .

Em particular se  $G \in C_\mu(\dot{\mathbb{R}})^{n \times n}$ , a definição de factorização meromorfa coincide com a que atrás foi apresentada.

## Capítulo 2

# Classe $C(Q_1, Q_2)$ e Estrutura de Factores

Neste capítulo relembramos os resultados apresentados em [13] que nos serão essenciais nos capítulos posteriores.

Para começar apresentamos uma classe de funções matriciais, mais vasta do que aquela em que este trabalho se centrará, mas à qual os resultados aqui apresentados podem ser estendidos.

**Definição 14** *Sejam  $Q_1$  e  $Q_2$  duas matrizes simétricas, dadas, de funções racionais sem polos em  $\mathbb{R}$ . Defina-se  $C(Q_1, Q_2)$  como sendo o conjunto de todas as matrizes  $G \in \mathcal{GL}_\infty(\mathbb{R})^{2 \times 2}$ , que satisfazem a relação*

$$G^T Q_1 G = h Q_2, \tag{2.1}$$

onde  $T$  denota a transposição de matrizes, e  $h$  é uma função escalar invertível em  $L_\infty(\mathbb{R})$  e dependente de  $G$ .

## 2.1. Exemplos

**Nota 15** Esta definição faz todo o sentido se  $G$  for uma função matricial  $n \times n$  mas neste trabalho apenas consideraremos funções matriciais  $2 \times 2$ .

**Nota 16** Se  $Q_1 = Q_2 = Q$ , é fácil verificar que esta classe é um grupo multiplicativo de matrizes de funções ( $2 \times 2$ ).  $C(Q, Q)$  denota-se por  $C(Q)$ .

Há várias classes de funções matriciais com relevante interesse nas aplicações que se incluem nesta classe que acabamos de referir. Daremos alguns exemplos dessas classes, começando por aquela que mais nos interessará nesta exposição:

## 2.1 Exemplos

### 2.1.1 A Classe de Daniele-Khrapkov

Seja  $R \in L_{\infty}^{2 \times 2}(\mathbb{R})$  uma função matricial racional com  $tr R = 0$ , ou seja tal que  $R^2 = qI$ , para  $q = -\det R$  ( $I$  matriz identidade em  $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ ). Então a classe Daniele-Khrapkov associada a  $R$  é definida por

$$C_{DK} = \{G \in L_{\infty}^{2 \times 2}(\mathbb{R}) : G = \alpha I + \beta R, \quad \alpha, \beta \in L_{\infty}(\mathbb{R})\}.$$

Mostra-se que  $C_{DK} \subset C(Q)$  para um certo  $Q$  relacionado com  $R$ . De facto as duas classes coincidem quando  $Q$  é invertível, resultado que demonstraremos mais tarde.

### 2.1.2 A Classe $\mathcal{D} - \mathcal{N}$

Considerem-se todas as matrizes  $G \in L_{\infty}^{2 \times 2}(\mathbb{R})$  tais que

$$G = \alpha I + \beta R + \gamma N$$

## 2.1. Exemplos

onde  $R^2 = qI$ ,  $q \neq 0$  e  $RN + NR = 0$ .

Se  $R$  é dado por

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q^{-2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

então a menos da multiplicação por uma função escalar tem-se

$$N = \begin{pmatrix} 1 & q \\ -q^{-1} & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

Suponha-se que  $R$  e  $N$  são dadas como em (2.2) e (2.3), e considere-se  $G = \alpha I + \beta R + \gamma N$ . Sendo  $Q$  a matriz  $2 \times 2$  simétrica e singular dada por  $Q = JN$  onde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

pode-se facilmente verificar que

$$R^T Q + QR = 2q^{-1}Q \quad N^T Q = 0 = QN \quad R^T QR = q^{-2}Q.$$

Da definição e destas relações tem-se :

$$\begin{aligned} G^T Q G &= (\alpha I + \beta R^T + \gamma N^T) Q (\alpha I + \beta R + \gamma N) = \\ &= \alpha^2 I + \alpha\beta(R^T Q + QR) + \alpha\gamma(N^T Q + QN) + \\ &+ \beta\gamma(R^T QN + N^T QR) + \beta^2 R^T QR + \gamma^2 N^T QN = \\ &= (\alpha + \beta q^{-1})^2 Q, \end{aligned}$$

ou seja,  $G \in C(Q)$  para  $Q$  definido como anteriormente. Mais, uma vez que qualquer matriz  $\tilde{G}$  pertencente à classe  $\mathcal{D} - \mathcal{N}$  é semelhante a  $G = \alpha I + \beta R + \gamma N$ , ou seja, existe sempre uma matriz racional  $A$  tal que  $\tilde{G} = A G A^{-1}$ , com  $R$  e  $N$  definidas como em (2.2) e (2.3), podemos concluir que  $\mathcal{D} - \mathcal{N} \subset C(Q)$ .

### 2.1.3 A Classe de Rawlins-Williams

Esta classe é o conjunto de todas as funções matriciais limitadas da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -ab \end{pmatrix}$$

onde  $a, b \in L_\infty(\mathbb{R})$  admitem factorizações limitadas  $a = a_- a_+$  com  $a_-^2$  racional ou  $b = b_- b_+$  com  $b_+^2$  racional.

Se generalizarmos um pouco a definição de  $C(Q_1, Q_2)$ , pensando no conjunto de todas as matrizes de funções limitadas  $2 \times 2$  que satisfaçam

$$G^T Q_1^- G = h Q_2^+, \quad (2.4)$$

onde  $Q_1^- \in (\mathcal{R}(\mathbb{R}) + L_\infty(\mathbb{R}))^{2 \times 2}$  e  $Q_2^+ \in (\mathcal{R}(\mathbb{R}) + L_\infty^+(\mathbb{R}))^{2 \times 2}$ , vemos que as matrizes deste tipo pertencem a uma classe  $C(Q_1, Q_2)$ . Em particular se  $a_-^2$  for racional tem-se

$$Q_1^- = b_-^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Q_2^+ = 2b_+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a_-^2 \end{pmatrix}.$$

Ficará claro que o método proposto neste trabalho também se aplica a esta classe de funções.

### 2.1.4 A Classe de Daniele-Khrapkov Generalizada

Esta classe consiste no conjunto de todas as funções matriciais da forma

$$G = \begin{pmatrix} \alpha & \rho_1 \theta \\ q \theta & \alpha \rho_1 \end{pmatrix}$$

onde  $\alpha, \theta \in C_\mu(\mathbb{R})$  e  $\rho_1^2$  e  $q$  são ambos quocientes de dois polinômios sem zeros em  $\mathbb{R}$ .

## 2.2. Caracterização de $C(Q, Q) = C(Q)$

Usando

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -q \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\rho^2 q^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad h = \alpha^2 - q\theta^2,$$

verifica-se facilmente que  $G \in C(Q_1, Q_2)$ .

## 2.2 Caracterização de $C(Q, Q) = C(Q)$

Começamos por nos lembrar da definição da classe de Daniele-Khrapkov. Seja  $R \in L_\infty^{2 \times 2}(\mathbb{R})$  uma matriz de funções racionais com  $\text{tr} R = 0$ , ou seja tal que  $R^2 = qI$ , para  $q = -\det R$  ( $I$  matriz identidade em  $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ ). Então a classe Daniele-Khrapkov associada a  $R$  é definida por

$$C_{DK} = \{G \in L_\infty^{2 \times 2}(\mathbb{R}) : G = \alpha I + \beta R, \quad \alpha, \beta \in L_\infty(\mathbb{R})\}.$$

A matriz  $R$  da definição pode ter uma das seguintes três formas:

$$\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\rho & 0 \\ 0 & -\rho \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{q-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$$

em que  $a, b \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$  e  $\rho^2 = q$ .

Os dois primeiros casos são triviais e portanto consideramos apenas o 3º caso, ou seja matrizes do tipo

$$R = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{\rho^2 - a^2}{b} & -a \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Para

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ \frac{q^2 - a^2}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

## 2.2. Caracterização de $C(Q, Q) = C(Q)$

temos que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{\rho^2 - a^2}{b} & -a \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \rho^2 & 0 \end{pmatrix} A^{-1}. \quad (2.6)$$

Estudemos agora o caso com  $a = 0$  e  $b = 1$ :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos então  $G = \alpha I + \beta R$  onde  $R^2 = qI$ . Facilmente se vê que os valores próprios de  $R$  são  $\rho$  e  $-\rho$ , logo  $R$  é uma matriz diagonalizável, ou seja, existe  $H$  tal que

$$R = H \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & -\rho \end{pmatrix} H^{-1}.$$

Como

$$\begin{pmatrix} -\rho & 1 \\ q & -\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -\rho x + y = 0$$

e

$$\begin{pmatrix} \rho & 1 \\ q & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \rho x + y = 0,$$

um vector próprio associado a  $\rho$  é, por exemplo,  $(1, \rho)$  e um vector próprio associado a  $-\rho$  é, por exemplo,  $(1, -\rho)$ . Podemos então definir

## 2.2. Caracterização de $C(Q, Q) = C(Q)$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho & -\rho \end{pmatrix},$$

pelo que

$$H^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \rho^{-1} \\ 1 & -\rho^{-1} \end{pmatrix}.$$

Assim, designando por  $D_1$  a matriz diagonal

$$D_1 = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & -\rho \end{pmatrix},$$

tem-se

$$\begin{aligned} G = \alpha I + \beta R &\Leftrightarrow G = \alpha H H^{-1} + \beta H^{-1} D_1 H \Leftrightarrow G = H^{-1}(\alpha H + \beta D_1 H) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow G = H^{-1}(\alpha I + \beta D_1)H. \end{aligned}$$

Fazendo  $D = \alpha I + \beta D_1$ , tem-se

$$D = \begin{pmatrix} \alpha + \beta\rho & 0 \\ 0 & \alpha - \beta\rho \end{pmatrix}$$

Sejam  $d_1 = \alpha + \beta\rho$  e  $d_2 = \alpha - \beta\rho$ . Supondo que  $d_1$  e  $d_2$  têm factorização canónica  $d_1 = d_{1-}d_{1+}$  e  $d_2 = d_{2-}d_{2+}$ , tem-se então:

$$G = H \begin{pmatrix} d_{1-}d_{1+} & 0 \\ 0 & d_{2-}d_{2+} \end{pmatrix} H^{-1} = H \begin{pmatrix} d_{1-} & 0 \\ 0 & d_{2-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1+} & 0 \\ 0 & d_{2+} \end{pmatrix} H^{-1} =$$

## 2.2. Caracterização de $C(Q, Q) = C(Q)$

$$= H \underbrace{\begin{pmatrix} d_{1-} & 0 \\ 0 & d_{2-} \end{pmatrix}}_{M_-} H^{-1} H \underbrace{\begin{pmatrix} d_{1+} & 0 \\ 0 & d_{2+} \end{pmatrix}}_{M_+} H^{-1}$$

Ou seja  $G = M_- M_+$ , com

$$M_- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} d_{1-} + d_{2-} & \rho^{-1}(d_{1-} - d_{2-}) \\ \rho(d_{1-} - d_{2-}) & d_{1-} + d_{2-} \end{pmatrix}$$

e

$$M_+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} d_{1+} + d_{2+} & \rho^{-1}(d_{1+} - d_{2+}) \\ \rho(d_{1+} - d_{2+}) & d_{1+} + d_{2+} \end{pmatrix}.$$

**Nota 17** Repare-se que quando  $\rho$  é uma função racional então  $G = M_- M_+$  é uma factorização meromorfa de  $G$ , resultado que aprofundaremos no 3º Capítulo. Para o caso geral  $a \neq 0$  ou  $b \neq 1$  veremos mais tarde como obter uma factorização meromorfa a partir do caso mais simples acima estudado, fazendo uso da relação (2.6).

Depois de termos estudado algumas das propriedades das matrizes da classe Daniele-Khrapkov temos o seguinte resultado, já mencionado anteriormente:

**Teorema 18** Seja  $R \in [L_\infty(\mathbb{R})]^{2 \times 2}$  uma matriz de funções racionais tal que  $R^2 = qI$  com  $q \neq 0$ . Então a classe de Daniele-Khrapkov associada a  $R$  está contida em  $C(Q, Q) = C(Q)$ , para um certo  $Q$  relacionado com  $R$ . De facto, as duas classe coincidem quando  $Q$  é invertível.

## 2.2. Caracterização de $C(Q, Q) = C(Q)$

**Demonstração:**

Seja  $G$  uma matriz da classe Daniele-Khrapkov associada a

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja  $G = \alpha I + \beta R$ . Defina-se  $Q$  como sendo a matriz simétrica que satisfaz

$$QR + R^T Q = 0. \quad (2.7)$$

É fácil de ver que  $Q = R^T J$  satisfaz esta relação para

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e que  $Q$  é invertível (como matriz de funções racionais), ou seja,  $\det Q$  não é identicamente nulo. Note-se que  $Q$  é único a menos de normalização e que

$$Q = \begin{pmatrix} -q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tendo em conta (2.7) e que

$$R^T QR = -QR^2 = -qQ,$$

concluimos que

$$\begin{aligned} G^T Q G &= (\alpha I + \beta R^T) Q (\alpha I + \beta R) = \alpha^2 Q + \alpha \beta (R^T Q + QR) + \beta^2 R^T QR \\ &= (\alpha^2 - q\beta^2) Q. \end{aligned}$$

Assim  $G \in C(Q)$  com  $h = \alpha^2 - q\beta^2$ .

Suponha-se agora que  $G \in C(Q)$  onde  $Q$  é uma matriz simétrica e invertível de funções racionais.

## 2.2. Caracterização de $C(Q, Q) = C(Q)$

Neste caso a equação (2.11) fica

$$D = SGS^{-1},$$

com

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

(assumindo que  $h = \det D$ ) e portanto  $G$  é diagonalizável. Sejam

$$\alpha = \frac{d_1 + d_2}{2}, \quad \beta = \frac{d_1 - d_2}{2\rho},$$

para  $\rho = (\det Q)^{\frac{1}{2}}$ . Então

$$G = S^{-1}DS = \alpha I + \beta R$$

para

$$R = \rho S^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} S.$$

Assim tem-se que  $R^2 = \rho^2 I$  e  $\text{tr} R = 0$ . Falta apenas mostrar que  $R$  é racional.

Tem-se

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} S^T \tilde{J} S = \frac{1}{2} S^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} J S = \frac{1}{2} S^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (S^T)^{-1} (S^T J S) \\ &= \frac{1}{2} \rho^{-1} R^T (\det S J) = \frac{1}{2} \rho^{-1} \det S (R^T J). \end{aligned}$$

Como  $\det S = -2\rho$  vê-se que

$$Q = -R^T J,$$

e assim tem-se

$$R = -JQ^T \tag{2.8}$$

é racional.  $\square$

### 2.3 Caracterização de $C(Q_1, Q_2)$

Iremos agora caracterizar as matrizes  $G \in C(Q_1, Q_2)$ , ou seja matrizes tais que  $G^T Q_1 G = h Q_2$ .

Seja  $Q$  uma matriz de funções racionais  $2 \times 2$ , simétrica. A menos da multiplicação por uma função escalar racional, podemos escrever  $Q$  na forma:

$$Q = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} \quad \text{com } q_0 = 0 \quad \text{ou} \quad q_0 = 1. \quad (2.9)$$

Então tem-se

$$Q = \frac{1}{2} S^T \tilde{J} S, \quad \text{com } \tilde{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & q_1 + \rho \\ 1 & q_1 - \rho \end{pmatrix} \quad \text{com } \rho^2 = -\det Q = q_1^2 - q_2 \quad \text{se } q_0 = 1$$

$$\text{ou } S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2q_1 & q_2 \end{pmatrix} \quad \text{se } q_0 = 0.$$

Da mesma forma tem-se (com  $S_1$  e  $S_2$  análogos a  $S$  para  $Q = Q_1$  e  $Q = Q_2$ , respectivamente)

$$Q_1 = \frac{1}{2} S_1^T \tilde{J} S_1, \quad Q_2 = \frac{1}{2} S_2^T \tilde{J} S_2. \quad (2.10)$$

De agora em diante pensaremos em  $Q_1$  e  $Q_2$  como sendo matrizes invertíveis cujo determinante não seja o quadrado de uma função racional. Neste caso é claro que  $S_1$  e  $S_2$  também são invertíveis. Seja

$$D = S_1 G S_2^{-1}. \quad (2.11)$$

### 2.3. Caracterização de $C(Q_1, Q_2)$

Por (2.1) e (2.10)

$$\begin{aligned} (S_{-1}^{-1}DS_2)^T \left(\frac{1}{2}S_1^T \tilde{J}S_1\right) (S_1^{-1}DS_2) &= h \frac{1}{2}S_2^T \tilde{J}S_2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow S_2^T D^T \tilde{J}DS_2 &= hS_2^T \tilde{J}S_2 \Leftrightarrow D^T \tilde{J}D = h\tilde{J} \Leftrightarrow \tilde{J}D = h(D^T)^{-1}\tilde{J}. \end{aligned}$$

Por outro lado, como

$$h^2 = \det G^2 \det Q_1 \det Q_2^{-1} = \det G^2 \det S_1^2 \det S_2^{-2},$$

tem-se que

$$h = \pm \det S_1 G S_2^{-1} = \pm \det D.$$

$D$  é portanto diagonal se  $h = \det D$  ou anti-diagonal se  $h = -\det D$ .

Vale a pena reparar que de (2.10) se tem

$$(S_1^T)^{-1}Q_1(S_1)^{-1} = (S_2^T)^{-1}Q_2(S_2)^{-1},$$

e assim

$$(S_1^{-1}S_2)^T Q_1 (S_1^{-1}S_2) = Q_2,$$

ou seja,  $S_1^{-1}S_2 \in C(Q_1, Q_2)$ . Isto mostra em particular que  $C(Q_1, Q_2)$  é não vazio para  $Q_1$  e  $Q_2$  invertíveis e que a forma geral de qualquer  $G \in C(Q_1, Q_2)$  é :

$$S_1^{-1}S_2(\alpha I + \beta R_2) \quad \text{com} \quad R_2 = -JQ_2.$$

Para finalizar esta secção apresenta-se um teorema que relaciona  $C(Q_1, Q_2)$  a  $C(Q)$

**Teorema 19** *Sejam  $Q_1$  e  $Q_2$  matrizes racionais invertíveis  $(2 \times 2)$  de funções mensuráveis e limitadas em  $\mathbb{R}$ . Suponha-se que existe uma matriz invertível  $H \in C(Q_1, Q_2)$ , ou seja  $H^T Q_1 H = h_0 Q_2$  para algum  $h_0 \in L_\infty(\mathbb{R})$ , e seja  $G \in GL_\infty^{2 \times 2}(\mathbb{R})$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

### 2.3. Caracterização de $C(Q_1, Q_2)$

$$i-) G \in C(Q_1, Q_2)$$

$$ii-) G = H\tilde{G} \text{ para algum } \tilde{G} \in C(Q_2)$$

$$iii-) G = \tilde{G}H \text{ para algum } \tilde{G} \in C(Q_1)$$

**Demonstração:**

$$i-) \Rightarrow ii-)$$

Suponha-se que  $G \in C(Q_1, Q_2)$ . Como  $H$  é invertível podemos escrever  $G = H\tilde{G}$ . Assim,

$$(H\tilde{G})^T Q_1 (H\tilde{G}) = hQ_2 \Leftrightarrow \tilde{G}^T H^T Q_1 H \tilde{G} = hQ_2.$$

Mas por hipótese  $H^T Q_1 H = h_0 Q_2$ , logo

$$\tilde{G}^T Q_1 \tilde{G} = h_0^{-1} h Q_2$$

e assim  $\tilde{G} \in C(Q_2)$ , com  $\tilde{h} = h_0^{-1} h$ .

$$ii-) \Rightarrow i-)$$

Supondo que  $G = H\tilde{G}$ , com  $\tilde{G} \in C(Q_2)$ , ou seja,  $\tilde{G}^T Q_2 \tilde{G} = \tilde{h} Q_2$ , então

$$(H^{-1}G)^T Q_2 (H^{-1}G) = \tilde{h} Q_2 \Leftrightarrow G^T (H^{-1})^T Q_2 H^{-1} G = \tilde{h} Q_2.$$

o que, usando a hipótese  $H^T Q_1 H = h_0 Q_2$ , implica que

$$G^T Q_1 G = h_0 \tilde{h} Q_2$$

e portanto  $G \in C(Q_1, Q_2)$  com  $h = h_0 \tilde{h}$ .

A demonstração de  $i-) \Leftrightarrow iii-)$  é inteiramente análoga.  $\square$

## 2.4 A Equação do Produto

Seja  $G \in C(Q_1, Q_2)$  e considere-se o problema de Riemann-Hilbert homogéneo

$$G\phi^+ = \phi^-, \quad \phi^\pm \in L_2^\pm(\mathbb{R})^2. \quad (2.12)$$

Aplicando a transposição de matrizes a (2.12) e multiplicando o resultado por  $Q_1$  e por (2.12) tem-se

$$(G\phi^+)^T Q_1 G\phi^+ = (\phi^-)^T Q_1 \phi^- \Leftrightarrow (\phi^+)^T G^T Q_1 G\phi^+ = (\phi^-)^T Q_1 \phi^-$$

e portanto

$$h(\phi^+)^T Q_2 \phi^+ = (\phi^-)^T Q_1 \phi^-. \quad (2.13)$$

Note-se que se ignorarmos os polos de  $Q_1$  e  $Q_2$  este é um problema de Riemann-Hilbert escalar para as incógnitas

$$(\phi^+)^T Q_2 \phi^+ \quad \text{e} \quad (\phi^-)^T Q_1 \phi^-.$$

Supondo que  $h$  tem factorização canónica generalizada  $h = h_- h_+$  (o que é uma suposição natural, pois um factor da forma  $r^k$  na factorização generalizada de  $h$  pode sempre ser incluído em  $Q_1$  ou  $Q_2$ ) tem-se:

$$h_+(\phi^+)^T Q_2 \phi^+ = h_-^{-1}(\phi^-)^T Q_1 \phi^-. \quad (2.14)$$

A esta equação dá-se o nome de equação do produto associada a  $G$ .

Pensando em (2.11) e tomando

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix},$$

então (2.12) é equivalente a

## 2.5. Estrutura de Factores

$$\begin{aligned} d_1 \Psi_s^+ &= \Psi_s^- \\ d_2 \Psi_d^+ &= \Psi_d^- \end{aligned} \tag{2.15}$$

onde

$$\begin{aligned} \Psi_s^+ &= (\phi_1^+ + \tilde{q}_1 \phi_2^+) + \rho_2 \phi_2^+ \\ \Psi_s^- &= (\phi_1^- + q_1 \phi_2^-) + \rho_1 \phi_2^- \\ \Psi_d^+ &= (\phi_1^+ + \tilde{q}_1 \phi_2^+) - \rho_2 \phi_2^+ \\ \Psi_d^- &= (\phi_1^- + q_1 \phi_2^-) - \rho_1 \phi_2^- \end{aligned}$$

para  $q_1, \tilde{q}_1, \rho_1$  e  $\rho_2$  tais que

$$\begin{aligned} Q_1 &= \begin{pmatrix} 1 & q_1 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} & Q_2 &= \begin{pmatrix} 1 & \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_1 & \tilde{q}_2 \end{pmatrix} \\ \rho_1^2 &= -\det Q_1 & \rho_2^2 &= -\det Q_2. \end{aligned}$$

Vê-se assim que a equação do produto pode obter-se, alternativamente, por multiplicação ordenada das duas equações de (2.15), daí o seu nome.

## 2.5 Estrutura de Factores

Para calcular os factores de uma factorização  $G = G_- G_+$ , depois de sabermos que  $G$  tem factorização canónica, temos de resolver o problema de Riemann-Hilbert em  $[L_2^\pm(\mathbb{R})]^2$

$$G\phi^+ = r\phi^- \quad \phi^\pm \in [L_2^\pm(\mathbb{R})]^2$$

para  $r(\xi) = \frac{\xi-i}{\xi+i}$  com alguma condição de normalização, por exemplo  $\phi^+(i) = (1, 0)$ . Claro que a resolução deste problema nos dá apenas uma coluna de cada factor  $G_+^{-1}$ ,  $G_-$  e à primeira vista teríamos que resolver um problema

## 2.5. Estrutura de Factores

semelhante com uma condição de normalização diferente, de maneira a obter as outras duas colunas linearmente independentes das primeiras, respectivamente. No entanto isto pode ser evitado se conseguirmos obter as segunda coluna a partir da primeira, tanto em  $G_+^{-1}$ , como em  $G_-$ .

Seja  $G \in C(Q_1, Q_2)$ , isto é

$$G^T Q_1 G = g Q_2, \quad (2.16)$$

onde assumimos que  $g = \det G$  ( $\det Q_1 = \det Q_2$ ) e que  $g$  admite uma factorização canónica generalizada  $g = g_- g_+$ . Além disso, seja  $G = G_- G_+$  uma factorização canónica generalizada de  $G$ .

**Nota 20** *Assumir que  $g = \det G$ , não implica qualquer perda de generalidade, quanto aos resultados essenciais. De facto, se apenas impusermos  $g \in \mathcal{GL}_\infty(\mathbb{R})$ ,  $g = g_- g_+$  e  $\det G = d = d_- d_+$ , tem-se*

$$G^T \tilde{Q}_1 G = d \tilde{Q}_2,$$

onde  $\tilde{Q}_1 = d_- g_-^{-1} Q_1$  e  $\tilde{Q}_2 = d_+^{-1} g_+ Q_2$ . Assim

$$\tilde{Q}_1 \in (\mathcal{R}(\mathbb{R}) + L_\infty^-(\mathbb{R}))^{2 \times 2}$$

$$\tilde{Q}_2 \in (\mathcal{R}(\mathbb{R}) + L_\infty^+(\mathbb{R}))^{2 \times 2}$$

e portanto todos os resultados se mantêm excepto se  $Q_1$  e  $Q_2$  forem substituídos por  $\tilde{Q}_1$  e  $\tilde{Q}_2$  não racionais.

Designando por  $f^+$  e  $s^+$ , respectivamente, a primeira e a segunda coluna de  $G_+^{-1}$  e  $f^-$  e  $s^-$ , respectivamente, a primeira e a segunda coluna de  $G_-$ ,

## 2.5. Estrutura de Factores

tem-se:

$$Gf^+ = f^-, \quad Gs^+ = s^-. \quad (2.17)$$

Da equação do produto resulta que:

$$g_+(f^+)^T Q_2 f^+ = g_-^{-1}(f^-)^T Q_1 f^- = r_1 \quad (2.18)$$

com  $r_1 \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$ . Por outro lado, aplicando a transposição de matrizes à equação  $Gs^+ = s^-$  e multiplicando por  $Q_1$  e por  $Gf^+ = f^-$  obtêm-se

$$(s^+)^T G^T Q_1 G f^+ = (s^-)^T Q_1 f^-$$

ou seja

$$g_+(s^+)^T Q_2 f^+ = g_-^{-1}(s^-)^T Q_1 f^-.$$

Como o lado esquerdo da igualdade é meromorfo em  $\mathbb{C}^+$  e o lado direito é meromorfo em  $\mathbb{C}^-$ , pode-se concluir que ambos os lados desta igualdade têm que representar uma função racional tal que

$$g_+(s^+)^T Q_2 f^+ = g_-^{-1}(s^-)^T Q_1 f^- = \tilde{r}_1 \quad (2.19)$$

com  $\tilde{r}_1 \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$ .

**Teorema 21** *Seja  $G \in C(Q_1, Q_2)$  admitindo uma factorização generalizada canónica  $G = G_- G_+$  e sejam  $f^+$  e  $s^+$ , respectivamente, a primeira e a segunda coluna de  $G_+^{-1}$  e  $f^-$  e  $s^-$ , respectivamente, a primeira e a segunda coluna de  $G_-$ . Então existe  $\tilde{r}_1 \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$  tal que*

$$s^- = M_1 f^-, \quad s^+ = M_2 f^+$$

onde  $M_1 = r_1^{-1}(\tilde{r}_1 I - JQ_1)$ ,  $M_2 = r_1^{-1}(\tilde{r}_1 I - JQ_2)$ ,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

## 2.5. Estrutura de Factores

e  $r_1$  é o encontrado em (2.18).

**Demonstração:**

De (2.18) e (2.19) tem-se:

$$(f^+)^T Q_2 f^+ = g_+^{-1} r_1 \quad \text{e} \quad (s^+)^T Q_2 f^+ = g_+^{-1} \tilde{r}_1.$$

Multiplicando ambos os lados desta última equação por  $f^+$ , obtém-se

$$f^+(s^+)^T Q_2 f^+ = g_+^{-1} \tilde{r}_1 f^+.$$

Como

$$f^+(s^+)^T = s^+(f^+)^T + g_+^{-1} J,$$

tem-se

$$s^+(f^+)^T Q_2 f^+ = g_+^{-1} \tilde{r}_1 f^+ - g_+^{-1} J Q_2 f^+;$$

logo

$$s^+ = r_1^{-1} (\tilde{r}_1 I - J Q_2) f^+. \quad (2.20)$$

Analogamente se obtém

$$s^- = r_1^{-1} (\tilde{r}_1 I - J Q_1) f^-. \quad (2.21)$$

□

**Nota 22** *Pela demonstração deste teorema é claro que  $r_1$  é explicitamente conhecido da equação do produto e depende apenas das primeiras colunas  $f^+$  e  $f^-$ .*

Quanto à determinação de  $\tilde{r}_1$  temos o seguinte resultado:

## 2.5. Estrutura de Factores

**Teorema 23** *Sejam  $G$ ,  $f^+$ ,  $f^-$  e  $r_1$  nas condições do teorema anterior. Então  $\forall \tilde{r}_1 \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$ , as funções  $s^+$  e  $s^-$  definidas no teorema anterior satisfazem o problema de Riemann-Hilbert  $Gs^+ = s^-$ , bem como as relações*

$$(f^+)^T J s^+ = g_+^{-1} \quad e \quad (f^-)^T J s^- = g_- . \quad (2.22)$$

**Demonstração:**

Começemos por provar que para  $G$  satisfazendo

$$G^T Q_1 G = g Q_2$$

é válida a seguinte relação:

$$G J Q_2 = J Q_1 G, \quad (2.23)$$

De facto,

$$Q_1 G = g (G^T)^{-1} Q_2. \quad (2.24)$$

Como

$$G J G^T = \det(G) J = g J,$$

tem-se

$$G^{-1} = \frac{-J G^T J}{\det G} \quad (J^{-1} = J^T = -J)$$

e portanto de (2.24) tem-se:

$$Q_1 G = g (-J G^T J g^{-1})^T Q_2 \Leftrightarrow Q_1 G = -J G J Q_2 \Leftrightarrow J Q_1 G = G J Q_2.$$

Agora,

$$G s^+ = G [r_1^{-1} (\tilde{r}_1 I - J Q_2)] f^+ = r_1^{-1} (\tilde{r}_1 G f^+ - G J Q_2 f^+).$$

## 2.5. Estrutura de Factores

Mas, tendo em conta a primeira equação de (2.17) e a relação (2.23), tem-se

$$Gs^+ = r_1^{-1}(\tilde{r}_1 f^- - JQ_1 f^-) = s^-.$$

Quanto à primeira das igualdades em (2.22) tem-se

$$(f^+)^T J s^+ = (f^+)^T J r_1^{-1}(\tilde{r}_1 I - JQ_2) f^+ = r_1^{-1}(\tilde{r}_1 (f^+)^T J f^+ + (f^+)^T Q_2 f^+).$$

Como  $(f^+)^T J f^+ = 0$  e  $(f^+)^T Q_2 f^+ = r_1 g_+^{-1}$ , tem-se

$$(f^+)^T J s^+ = r_1^{-1} r_1 g_+^{-1} = g_+^{-1}.$$

A segunda igualdade de (2.22) prova-se de forma análoga.  $\square$

Uma consequência deste teorema é que se tem um critério para determinar  $\tilde{r}_1$  tal que  $s^+$  e  $s^-$  definidas em (2.20) e (2.21) podem ser tomadas como sendo as segundas colunas de  $G_+^{-1}$  e  $G_-$  respectivamente. De facto  $s^+$  e  $s^-$  definidas dessa forma satisfazem a igualdade  $Gs^+ = s^-$  e são linearmente independentes de  $f^+$  e  $f^-$ , respectivamente, no semi-plano correspondente, independentemente da escolha de  $\tilde{r}_1$ . Isto leva a concluir que a única condição a impor a  $\tilde{r}_1$  é a de que  $s^\pm$  sejam analíticas em  $\mathbb{C}^\pm$  e  $r_\pm s^\pm \in (L_2^\pm(\mathbb{R}))^2$ .

**Corolário 24** *Com as hipóteses do teorema anterior, uma factorização canónica de  $G$  é  $G = G_- G_+$  onde  $G_- = [f^- s^-]$ ,  $G_+^{-1} = [f^+ s^+]$ , com  $s^+$ ,  $s^-$  definidas em (2.20) e (2.21) para qualquer função racional  $\tilde{r}_1$  tal que  $r_\pm s^\pm \in (L_2^\pm(\mathbb{R}))^2$ .*

**Corolário 25** *Com as hipóteses do teorema 21. Se  $Q_1 = Q_2 = Q$ ,  $G \in C(Q)$ , então  $M_1 = M_2 \in C(Q)$*

**Demonstração:**

## 2.5. Estrutura de Factores

Basta reparar que  $M = \bar{r}_1 I - JQ$  satisfaz a relação

$$M^T Q M = (\bar{r}_1^2 + \det Q) Q.$$

□

No artigo [13] aplicam-se estes resultados na determinação da estrutura dos factores de  $G \in C(Q)$  quando  $q = -\det Q$  é o quociente de dois polinómios do primeiro grau ou o quociente de dois polinómios do segundo grau. Nos capítulos seguintes faremos o mesmo através da obtenção de uma factorização meromorfa e só posteriormente uma factorização generalizada canónica caso exista, realçando que os resultados que iremos obter são perfeitamente análogos aos obtidos em [13].

## Capítulo 3

# Da factorização meromorfa para a generalizada

### 3.1 Da factorização meromorfa para a generalizada

**Definição 26** Diz-se que  $G \in \mathcal{GC}_\mu(\mathbb{R})^{2 \times 2}$  admite uma factorização meromorfa se pode ser escrita na forma:

$$G = M_- R M_+$$

Com  $R \in \mathcal{GR}(\mathbb{R})^{2 \times 2}$  e tal que existem polinómios  $p_\pm$  e  $q_\pm$  sem zeros em  $\mathbb{C}^\pm \cup \mathbb{R}$ , respectivamente, que satisfazem:

i-)  $q_- M_+, p_- M_+^{-1} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})^{2 \times 2}$

ii-)  $q_+ M_-, p_+ M_-^{-1} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})^{2 \times 2}$

### 3.1. Da factorização meromorfa para a generalizada

iii)  $(M_{\pm})_{jk}, (M_{\pm}^{-1})_{jk} = \mathcal{O}(|\xi + i\eta|^{\omega}),$  quando  $|\xi + i\eta| \rightarrow \infty$  em  $\mathbb{C}_{\alpha}^{\pm} = \{z = \xi + i\eta \in \mathbb{C}^{\pm} : |\eta| \geq \alpha > 0\},$  para algum  $\omega \geq 0.$

Vê-se facilmente que a factorização generalizada definida anteriormente, é um caso particular de factorização meromorfa. Assim  $G \in \mathcal{GC}_{\mu}(\dot{\mathbb{R}})^{2 \times 2}$  admite factorização meromorfa pois:

**Proposição 27** [2]

$G \in \mathcal{GC}_{\mu}(\dot{\mathbb{R}})^{2 \times 2}$  admite uma factorização generalizada se e só se  $\det G(\xi) \neq 0$  para todo  $\xi \in \dot{\mathbb{R}}.$

Começemos por apresentar alguns resultados que nos irão permitir passar de uma factorização meromorfa para uma factorização generalizada, dadas certas condições:

**Teorema 28** [8]

Seja  $T_+$  uma função matricial tal que  $T_+ \in C^{\mu+}(\dot{\mathbb{R}})^{2 \times 2}$  e  $\det(T_+)$  tenha um número finito de zeros em  $\mathbb{C}^+.$  Então podem-se construir matrizes  $R, Q, C_+$  e  $D_+$  tais que  $R, M \in \mathcal{GR}(\mathbb{R})^{2 \times 2}$  e  $C_+, D_+ \in C^{\mu+}(\dot{\mathbb{R}})^{2 \times 2},$  com  $\det C_+ \neq 0$  e  $\det D_+ \neq 0$  para todo o  $z \in \mathbb{C}^+$  e

$$T_+ = RC_+ = D_+Q.$$

**Demonstração:**

Sejam  $z_1, \dots, z_N$  os zeros de  $\det(T_+)$  em  $\mathbb{C}^+$  (tendo em conta a sua multiplicidade) e seja  $T_+ = [t_1, t_2]^T$  uma representação de  $T_+$  em termos de vectores linha.

### 3.1. Da factorização meromorfa para a generalizada

Como  $\det T_+(z_1) = 0$ , os vectores  $t_1(z_1)$  e  $t_2(z_1)$  são linearmente dependentes. Assim, para certas constantes não simultaneamente nulas  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  tem-se:

$$\alpha_1 t_1(z_1) + \alpha_2 t_2(z_1) = 0.$$

Seja

$$t'_p(\xi) = \frac{\xi + i}{\xi - z_1} (\alpha_1 t_1(\xi) + \alpha_2 t_2(\xi)),$$

$$p = 1, 2$$

e seja  $T'_+$  a matriz que se obtém de  $T_+$  substituindo  $t_p$  por  $t'_p$ . Tem-se claramente  $T'_+ \in C^{\mu+}(\mathbb{R})^{2 \times 2}$  mas o seu determinante já só tem os zeros  $z_2, \dots, z_N$  em  $\mathbb{C}^+$ .

Por outro lado tem-se  $T_+ = R_1 T'_+$  onde  $R_1$  é a matriz que se obtém da identidade  $2 \times 2$ , substituindo a linha  $p$  por

$$\left( -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_2} \frac{\xi - z_1}{\xi + i} \right)$$

ou

$$\left( \frac{1}{\alpha_1} \frac{\xi - z_1}{\xi + i}, -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)$$

conforme  $p = 2$  ou  $p = 1$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} & \frac{1}{\alpha_2} \frac{\xi - z_1}{\xi + i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t'_2 \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1} \frac{\xi - z_1}{\xi + i} & -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t'_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

### 3.1. Da factorização meromorfa para a generalizada

Repetindo este argumento para  $T'_+$  tem-se

$$T_+ = RC_+$$

e com um procedimento análogo para colunas tem-se a segunda identidade

$$T_+ = D_+Q.$$

□

**Corolário 29** *Seja  $T_-$  uma função matricial tal que  $T_- \in C^{\mu-}(\dot{\mathbb{R}})^{2 \times 2}$  e  $\det(T_-)$  tenha um número finito de zeros em  $\mathbb{C}^-$ . Então podem-se construir matrizes  $R', Q', C_-$  e  $D_-$  tais que  $R', M' \in \mathcal{GR}(\mathbb{R})^{2 \times 2}$  e  $C_-, D_- \in [C^{\mu-}(\mathbb{R})]^{2 \times 2}$ ,  $\det C_-(z) \neq 0$  e  $\det D_-(z) \neq 0$  para todo o  $z \in \mathbb{C}^-$  e*

$$T_- = R'C_- = D_-Q'.$$

Finalmente tem-se:

**Teorema 30** *Seja  $G \in C^{\mu}(\dot{\mathbb{R}})^{2 \times 2}$  uma matriz que admite uma factorização meromorfa*

$$G = M \cdot RM_+$$

que satisfaça as seguintes condições

$$i-) r_+^{(gr)(q-)} q_- M_+ \in C^{\mu+}(\dot{\mathbb{R}})^{2 \times 2}$$

$$ii-) r_+^{(gr)(p-)} p_- M_+^{-1} \in C^{\mu+}(\dot{\mathbb{R}})^{2 \times 2}$$

$$iii-) r_-^{(gr)(q+)} q_+ M_- \in C^{\mu-}(\dot{\mathbb{R}})^{2 \times 2}$$

$$iv-) r_-^{(gr)(p+)} p_+ M_-^{-1} \in C^{\mu-}(\dot{\mathbb{R}})^{2 \times 2}$$

### 3.1. Da factorização meromorfa para a generalizada

onde  $r_{\pm} = \frac{1}{\xi \pm i}$ . Então podem-se construir matrizes  $G_-, G_+, R$  tais que:

$$G_+^{+1} \in C_{\mu}^+(\dot{\mathbb{R}})^{2 \times 2}$$

$$G_-^{\pm 1} \in C_{\mu}^-(\dot{\mathbb{R}})^{2 \times 2}$$

$$R \in \mathcal{GR}(\mathbb{R})^{2 \times 2}$$

e

$$G = G_- R G_+.$$

Se  $R = R_- D R_+$  é uma factorização generalizada de  $R$  então

$$G = (G_- R_-) D (R_+ G_+)$$

é uma factorização generalizada de  $G$  relativa a  $[C_{\mu}^-(\dot{\mathbb{R}})]^{2 \times 2}$ .

#### Demonstração:

Seja  $G \in C^{\mu}(\dot{\mathbb{R}})^{2 \times 2}$  uma matriz que admite uma factorização meromorfa

$$G = M_- R M_+$$

que satisfaz as hipótese do teorema. Pode-se então reescrever isso como

$$G = \tilde{G}_- \tilde{R} \tilde{G}_+$$

com  $\tilde{R} \in \mathcal{GR}(\mathbb{R})^{2 \times 2}$  e

$$\tilde{G}_- = r_-^{gr q_+} q_+ M_- \in C^{\mu-}(\dot{\mathbb{R}})^{2 \times 2}$$

$$\tilde{G}_+ = r_+^{gr q_-} q_- M_+ \in C^{\mu+}(\dot{\mathbb{R}})^{2 \times 2}$$

$$\tilde{R} = (q_+^{-1} q_-^{-1} r_-^{-gr q_+} r_+^{-gr q_-}) R.$$

### 3.1. Da factorização meromorfa para a generalizada

Mas  $\det \tilde{G}_-$  só pode ter um número finito de zeros em  $\mathbb{C}^-$ , uma vez que  $(\det \tilde{G}_-)^{-1} = \det \tilde{G}_-^{-1}$  tem no máximo um nº finito de polos em  $\mathbb{C}^-$ , e, analogamente,  $\det \tilde{G}_+$  só pode ter um número finito de zeros em  $\mathbb{C}^+$ . Portanto  $\tilde{G}_-^{-1}$ , respectivamente  $\tilde{G}_+^{-1}$ , pode não ser holomorfo em  $\mathbb{C}^-$ , respectivamente em  $\mathbb{C}^+$ , e assim

$$G = \tilde{G}_- \tilde{R} \tilde{G}_+$$

não é em geral uma factorização generalizada de  $G$ .

No entanto, pelo teorema anterior, podemos escrever

$$\tilde{G}_+ = R_1 G_+$$

onde  $R_1$  é uma matriz racional sem polos em  $\mathbb{C}^+$ ,  $G_+$  é holomorfa em  $\mathbb{C}^+$  e  $\det G_+(z) \neq 0$  para todo o  $z \in \mathbb{C}^+$ . Logo

$$G_+^{\pm 1} \in C_\mu^+(\dot{\mathbb{R}})^{2 \times 2}.$$

Analogamente podemos escrever

$$\tilde{G}_- = G_- R_2$$

onde  $R_2$  é uma matriz racional sem polos em  $\mathbb{C}^-$ ,  $G_-$  é holomorfa em  $\mathbb{C}^-$  e  $\det G_-(z) \neq 0$  para todo o  $z \in \mathbb{C}^-$ . Logo

$$G_-^{\pm 1} \in C_\mu^-(\dot{\mathbb{R}})^{2 \times 2}.$$

Portanto tem-se

$$G = G_- R_2 \tilde{R} R_1 G_+.$$

Como  $R_2 \tilde{R} R_1$  admite uma factorização generalizada (que pode se explicitamente obtida pelas técnicas usuais [2]), tem-se  $R_2 \tilde{R} R_1 = R_- D R_+$ . Logo

$$G = (G_- R_-) D (R_+ G_+)$$

### 3.2. Da factorização meromorfa para a generalizada canónica

é uma factorização generalizada de  $G$  relativamente a  $C_{\mu}^{-}(\mathbb{R})^{2 \times 2}$ .  $\square$

Estes resultados dão-nos uma preciosa ajuda para passarmos de uma factorização meromorfa para uma generalizada.

## 3.2 Da factorização meromorfa para a generalizada canónica

Os resultados anteriores (estabelecidos em [8]), no entanto, só nos permitem saber se a matriz  $G$  admite uma factorização canónica após a determinação explícita da factorização. Podemos, no entanto, ir mais longe estabelecendo critérios que nos permitam, por um lado, a partir de uma factorização meromorfa, sabermos se existe ou não factorização canónica sem necessariamente a determinar e, por outro lado, determina-la, de forma eventualmente mais simples, quando existe.

**Teorema 31** *Seja  $G \in C^{\mu}(\mathbb{R})^{2 \times 2}$  tal que*

$$\det G(\xi) \neq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

e

$$G = M_{-} M_{+},$$

*uma factorização meromorfa de  $G$ . Então  $G$  admite factorização canónica  $G = G_{-} G_{+}$  se e só se existir uma matriz racional invertível  $R$  ( $\det R \neq 0$ ) tal que :*

1.  $M_{-} R \in \mathcal{GC}_{\mu}^{-}(\mathbb{R})^{2 \times 2}$

### 3.2. Da factorização meromorfa para a generalizada canónica

$$2. R^{-1}M_+ \in \mathcal{GC}_\mu^+(\mathbb{R})^{2 \times 2}.$$

**Nota 32** Nas condições deste teorema, sabemos já que existem matrizes racionais  $R_1$  e  $R_2$  tais que

$$G = M_- R_1 (R_1^{-1} R_2^{-1}) R_2 M_+ = M_- R_1 (R_- \text{diag}(r^{k_1}, r^{k_2}) R_+) R_2 M_+$$

fornece uma factorização generalizada de  $G$ :

$$G = G_- D G_+$$

com

$$G_- = M_- R_1 R_- \quad \text{e} \quad G_+ = M_+ R_2 R_+,$$

supondo que  $R_1^{-1} R_2^{-1} = R_- \text{diag}(r^{k_1}, r^{k_2}) R_+$  é uma factorização generalizada de  $R$ .

Nos resultados anteriormente estabelecidos, porém, não nos é dada uma relação entre  $R_1$  e  $R_2$ . No teorema que acabamos de enunciar estabeleceu-se que no caso de existir factorização generalizada canónica para  $G$ ,  $R_1$  e  $R_2$  podem ser escolhidos como matrizes inversas uma da outra, o que nos permitirá, mais adiante, estabelecer condições de existência de factorização generalizada canónica para  $G$  e determinar os factores  $G_-$ ,  $G_+$  a partir de  $M_-$  e  $M_+$ , por um processo distinto do que foi apresentado nos teoremas 30, 28 e 29.

**Demonstração:**

Se  $G$  admite uma factorização canónica  $G = G_- G_+$ , então tem-se

$$G_- G_+ = M_- M_+ \iff G_- M_-^{-1} = M_+ G_+^{-1}$$

### 3.2. Da factorização meromorfa para a generalizada canónica

e conclui-se que ambos os membros representam uma matriz racional  $R$  e além disso,  $\det R \neq 0$ .

Temos portanto

$$G_- M_-^{-1} = M_+ G_+^{-1} = R \quad \text{e} \quad \det R \neq 0,$$

donde

1.  $M_- R = G_- \in \mathcal{GC}_\mu^-(\mathbb{R})^{2 \times 2}$
2.  $R^{-1} M_+ = G_+ \in \mathcal{GC}_\mu^+(\mathbb{R})^{2 \times 2}$ .

Reciprocamente, se existir uma matriz racional  $R$  invertível tal que

1.  $M_- R \in \mathcal{GC}_\mu^-(\mathbb{R})^{2 \times 2}$
2.  $R^{-1} M_+ \in \mathcal{GC}_\mu^+(\mathbb{R})^{2 \times 2}$ ,

então, fazendo

$$G_- = M_- R, \quad G_+ = R^{-1} M_+,$$

temos  $G = G_- G_+$ , que é uma factorização generalizada canónica (limitada) para  $G$ .  $\square$

**Corolário 33** *Admitindo as mesmas condições do teorema anterior, se*

$$\det M_- \in \mathcal{GC}_\mu^-(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \det M_+ \in \mathcal{GC}_\mu^+(\mathbb{R}), \quad (3.1)$$

*então  $\det R$  é uma constante (não nula).*

### 3.2. Da factorização meromorfa para a generalizada canônica

**Demonstração:**

Tem-se do teorema anterior  $G_- M_-^{-1} = M_+ G_+^{-1} = R$  e portanto

$$\begin{cases} \det R = (\det G_-)(\det M_-^{-1}) \in \mathcal{G}C_\mu^-(\mathbb{R}) \\ \det R = (\det G_+^{-1})(\det M_+) \in \mathcal{G}C_\mu^+(\mathbb{R}) \end{cases}.$$

Logo  $\det R$  é uma constante (não nula).  $\square$

**Corolário 34** *Nas mesmas condições do corolário, anterior a matriz  $G$  admite factorização generalizada canônica se e só se existir uma matriz racional invertível  $R$  com determinante constante, tal que :*

1.  $M_- R \in C_\mu^-(\mathbb{R})^{2 \times 2}$
2.  $R^{-1} M_+ \in C_\mu^+(\mathbb{R})^{2 \times 2}$ .

**Nota 35** *Este corolário garante que  $G_- = M_- R$  e  $G_+ = R^{-1} M_+$  têm inversos em  $C_\mu^-(\mathbb{R})^{2 \times 2}$  e  $C_\mu^+(\mathbb{R})^{2 \times 2}$ , respectivamente.*

**Demonstração:**

Sendo  $\det R = k \neq 0$ , tem-se

$$\begin{cases} \det(G_- R) = k \det M_- \in \mathcal{G}C_\mu^-(\mathbb{R}) \\ \det(G_+ R) = k \det M_+ \in \mathcal{G}C_\mu^+(\mathbb{R}) \end{cases}.$$

Logo  $\det M_-$  e  $\det M_+$  não têm zeros nem polos nos semi-planos correspondentes e portanto tem-se também

1.  $(M_- R)^{-1} \in C_\mu^-(\mathbb{R})^{2 \times 2}$

### 3.2. Da factorização meromorfa para a generalizada canónica

$$2. (R^{-1}M_+)^{-1} \in C_\mu^+(\mathbb{R})^{2 \times 2}.$$

□

Concretizando o que atrás foi dito, suponhamos que os factores meromorfos  $M_\pm$  referidos no corolário anterior são dados por

$$M_- = \begin{pmatrix} \psi_{11}^- & \psi_{12}^- \\ \psi_{21}^- & \psi_{22}^- \end{pmatrix}, \quad M_+^{-1} = \begin{pmatrix} \psi_{11}^+ & \psi_{12}^+ \\ \psi_{21}^+ & \psi_{22}^+ \end{pmatrix},$$

e procuremos os factores  $G_-, G_+$  da factorização generalizada canónica  $G = G_-G_+$ , sendo

$$G_- = \begin{pmatrix} \phi_{11}^- & \phi_{12}^- \\ \phi_{21}^- & \phi_{22}^- \end{pmatrix}, \quad G_+^{-1} = \begin{pmatrix} \phi_{11}^+ & \phi_{12}^+ \\ \phi_{21}^+ & \phi_{22}^+ \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

De acordo com os resultados prévios,  $G$  admite uma tal factorização se, e só se, existir

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \quad \text{com } \det R = k \neq 0,$$

com  $k$  constante, onde os  $r_{ij}$  são tais que

$$(I) \begin{cases} r_{11}\psi_{11}^- + r_{21}\psi_{12}^- = \phi_{11}^- \\ r_{11}\psi_{21}^- + r_{21}\psi_{22}^- = \phi_{21}^- \end{cases} \quad (\text{com } \phi_{11}^-, \phi_{21}^- \in C_\mu^-(\mathbb{R})) \quad (3.3)$$

$$(II) \begin{cases} r_{11}\psi_{11}^+ + r_{21}\psi_{12}^+ = \phi_{11}^+ \\ r_{11}\psi_{21}^+ + r_{21}\psi_{22}^+ = \phi_{21}^+ \end{cases} \quad (\text{com } \phi_{11}^+, \phi_{21}^+ \in C_\mu^+(\mathbb{R})) \quad (3.4)$$

e analogamente

$$(III) \begin{cases} r_{12}\psi_{11}^- + r_{22}\psi_{12}^- = \phi_{12}^- \\ r_{12}\psi_{21}^- + r_{22}\psi_{22}^- = \phi_{22}^- \end{cases} \quad (\text{com } \phi_{12}^-, \phi_{22}^- \in C_\mu^-(\mathbb{R})) \quad (3.5)$$

### 3.2. Da factorização meromorfa para a generalizada canónica

$$(IV) \begin{cases} r_{12}\psi_{11}^+ + r_{22}\psi_{12}^+ = \phi_{12}^+ \\ r_{12}\psi_{21}^+ + r_{22}\psi_{22}^+ = \phi_{22}^+ \end{cases} \quad (\text{com } \phi_{12}^+, \phi_{22}^+ \in C_\mu^+(\mathbb{R})) \quad (3.6)$$

Note-se que (I)-(IV) significam precisamente que, definindo  $G_-$  e  $G_+^{-1}$  como em (3.2), se tem

$$M_-R = G_-, \quad M_+^{-1}R = G_+^{-1},$$

onde

$$G_- \in \mathcal{GC}_\mu^-(\mathbb{R})^{2 \times 2}, \quad G_+^{-1} \in \mathcal{GC}_\mu^+(\mathbb{R})^{2 \times 2}$$

$$\det G_- = k \det M_-, \quad \det G_+^{-1} = k \det M_+, \quad k \neq 0,$$

ou seja, se existir solução para (I)-(IV),  $G = G_-G_+$  é de facto uma factorização generalizada canónica limitada para  $G$ .

Do sistema (I) tem-se :

$$r_{11} = \frac{\phi_{11}^- \psi_{22}^- - \phi_{21}^- \psi_{12}^-}{\psi_{11}^- \psi_{22}^- - \psi_{12}^- \psi_{21}^-}, \quad r_{21} = \frac{\phi_{21}^- \psi_{11}^- - \phi_{11}^- \psi_{21}^-}{\psi_{11}^- \psi_{22}^- - \psi_{12}^- \psi_{21}^-}$$

e de (II) tem-se:

$$r_{11} = \frac{\phi_{11}^+ \psi_{22}^+ - \phi_{21}^+ \psi_{12}^+}{\psi_{11}^+ \psi_{22}^+ - \psi_{12}^+ \psi_{21}^+}, \quad r_{21} = \frac{\phi_{21}^+ \psi_{11}^+ - \phi_{11}^+ \psi_{21}^+}{\psi_{11}^+ \psi_{22}^+ - \psi_{12}^+ \psi_{21}^+}.$$

Como

$$\psi_{11}^- \psi_{22}^- - \psi_{12}^- \psi_{21}^- = \det M_-$$

não se anula em  $\tilde{\mathbb{C}}^-$  e analogamente

$$\psi_{11}^+ \psi_{22}^+ - \psi_{12}^+ \psi_{21}^+ = \det M_+^{-1} = \det G_{0+}^{-1}$$

não se anula em  $\tilde{\mathbb{C}}^+$ , vemos que  $r_{11}$  é uma função racional, limitada no infinito, que apresenta, quando muito, polos nos pontos de  $\mathbb{C}^+$  em que  $\psi_{22}^+$  e

### 3.2. Da factorização meromorfa para a generalizada canónica

$\psi_{12}^+$  têm polos e nos pontos de  $\mathbb{C}^-$  em que  $\psi_{22}^-$  e  $\psi_{12}^-$  têm polos. Analogamente se pode raciocinar em relação a  $r_{21}$ , ficando assim definidos os denominadores e os graus dos numeradores de  $r_{11}$  e  $r_{21}$ .

Por outro lado, como devem ser satisfeitas as condições dos sistemas (I) e (II), sendo  $\phi_{11}^-$  e  $\phi_{21}^-$  analíticos em  $\mathbb{C}^-$  e  $\phi_{11}^+$ ,  $\phi_{21}^+$  analíticos em  $\mathbb{C}^+$ , isso define certas condições de anulamento em determinados pontos, condições essas que envolvem os valores de  $r_{11}$  e  $r_{21}$  e que vão determinar a forma dos seus numeradores.

Analogamente se pode proceder para determinar  $r_{12}$  e  $r_{22}$ .

Para um melhor esclarecimento desta técnica devem ver-se o 4º e 5º caso do próximo capítulo.

## Capítulo 4

### Aplicações a $C(Q)$

Neste capítulo, vamos numa primeira secção, determinar factorizações meromorfas de funções matriciais pertencentes à classe de Daniele-Khrapkov em vários casos. E numa segunda secção vamos dar exemplos concretos, por simplicidade de cálculo, do estudo da existência de factorização canónica a partir de uma factorização meromorfa e caso exista determinar essa factorização.

#### 4.1 Como obter uma factorização meromorfa

Pensemos em  $C(Q)$  como sendo a classe Daniele-Khrapkov;  $G \in C(Q)$  tem a forma  $G = \alpha I + \beta R$  com  $\alpha, \beta \in C^\mu(\mathbb{R})$  e  $R = -JQ^T$ , (2.8), tal que  $R^2 = qI$  sendo  $\rho = \sqrt{q}$  uma função racional, sem polos sobre  $\mathbb{R}$  a factorização meromorfa de  $G$  obtêm-se de uma forma muito simples, pois como já se viu

#### 4.1. Como obter uma fatorização meromorfa

no capítulo anterior  $G = M_- M_+$ , onde

$$M_- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} d_{1-} + d_{2-} & \rho^{-1}(d_{1-} - d_{2-}) \\ \rho(d_{1-} - d_{2-}) & d_{1-} + d_{2-} \end{pmatrix} = \frac{d_{1-} + d_{2-}}{2} I + \frac{d_{1-} - d_{2-}}{2\rho} R$$

e

$$M_+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} d_{1+} + d_{2+} & \rho^{-1}(d_{1+} - d_{2+}) \\ \rho(d_{1+} - d_{2+}) & d_{1+} + d_{2+} \end{pmatrix} = \frac{d_{1+} + d_{2+}}{2} I + \frac{d_{1+} - d_{2+}}{2\rho} R,$$

é, caso  $\rho$  seja racional, uma fatorização meromorfa de  $G$  com os factores em  $C(Q)$ .

Como obter uma fatorização meromorfa de  $G$ , com os factores dentro da mesma classe  $C(Q)$ , quando  $\rho$  não é uma função racional?

Considere-se

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \tilde{R} = \begin{pmatrix} 0 & q^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

As matrizes  $G = \alpha I + \beta R$  têm a forma

$$G = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ q\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Se designarmos por  $[f_1, f_2]^T$  a primeira coluna de  $G$ , a segunda coluna,  $[s_1, s_2]^T$ , exprime-se na forma

$$[s_1, s_2]^T = \tilde{R}[f_1, f_2]^T = \left( \begin{pmatrix} 0 & q^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ q\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \right),$$

#### 4.1. Como obter uma factorização meromorfa

portanto as matrizes desta classe têm a forma

$$[f \quad s] = [f \quad \tilde{R}f] \quad \text{onde} \quad f = [f_1, f_2]^T.$$

Ora, se  $f_{\pm}$  são soluções de  $Gf_{\pm} = f_{\pm}$ , então, como  $G$  comuta com  $R$  (e  $\tilde{R}$ ), temos

$$G\tilde{R}f_{\pm} = \tilde{R}Gf_{\pm} \Leftrightarrow G\tilde{R}f_{\pm} = \tilde{R}f_{\pm}$$

e portanto

$$G[f_{\pm} \quad \tilde{R}f_{\pm}] = [f_{\pm} \quad \tilde{R}f_{\pm}].$$

Sejam  $M_{+}^{-1} = [f_{+} \quad \tilde{R}f_{+}]$  e  $M_{-} = [f_{-} \quad \tilde{R}f_{-}]$ , o que significa que  $GM_{+}^{-1} = M_{-}$ . Por outro lado, tem-se

- $\det M_{+}^{-1} = f_{1+}^2 - q^{-1}f_{2+}^2$
- $\det M_{-} = f_{1-}^2 - q^{-1}f_{2-}^2$

e, da equação do produto, sabemos que se  $Gf_{\pm} = f_{\pm}$  então

$$\det G(f_{1+}^2 - q^{-1}f_{2+}^2) = f_{1-}^2 - q^{-1}f_{2-}^2,$$

ou seja, supondo  $G \in C^{\mu}(\mathbb{R})^{2 \times 2}$ , e admitindo que  $\text{ind } G = 0$ , e portanto  $\det G$  tem factorização limitada,

$$(\det G)_{+}(f_{1+}^2 - q^{-1}f_{2+}^2) = (\det G)_{-}(f_{1-}^2 - q^{-1}f_{2-}^2).$$

vem que os seus membros são iguais a uma função racional. Se impusermos que  $f_{1+}$  ou  $f_{1-}$  seja diferente de zero num dos zeros de  $q^{-1}$ , temos a garantia de que esta função racional não é identicamente nula. Logo  $G = M_{-}M_{+}$  é uma factorização meromorfa de  $G$  e os factores estão na mesma classe  $C(Q)$ .

#### 4.1. Como obter uma factorização meromorfa

Vamos agora supor que  $R$  é uma matriz racional qualquer  $2 \times 2$  tal que  $R^2 = qI$ , não necessariamente com a forma referida em (4.1). Como já vimos no capítulo 2,(2.5)  $R$  tem a forma

$$R = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{q-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}.$$

Também do capítulo 2 (2.6) tem-se que existe uma matriz  $A$  invertível e racional tal que, sendo

$$R_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix},$$

$R = AR_0A^{-1}$ . Portanto  $G = \alpha I + \beta R = A(\alpha I + \beta R_0)A^{-1} = AG_0A^{-1}$ , onde  $G_0$  é da forma

$$G_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ q\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

considerada anteriormente.

Vamos mostrar que  $G$  tem uma factorização meromorfa na mesma classe, mas há uma outra factorização meromorfa que, em princípio, é mais fácil de obter, e da qual se pode tirar uma factorização generalizada.

Note-se que, para garantir que  $G = M_-M_+$ , onde  $M_+, M_- \in C^{\mu \pm}(\mathbb{R})^{2 \times 2}$ , seja uma factorização meromorfa, temos que mostrar que os  $\det M_{\pm}$  não são identicamente nulos; além disso convém conhecer  $\det M_{\pm}$  e saber os seus zeros para podermos passar a uma factorização generalizada.

Assim: sejam então  $\phi^{\pm} \in C_{\mu}^{\pm}(\mathbb{R})^2$  tais que

$$G\phi^+ = \phi^-;$$

#### 4.1. Como obter uma factorização meromorfa

como  $G = AG_0A^{-1}$ , temos que  $AG_0A^{-1}\phi^+ = \phi^- \Rightarrow G_0(A^{-1}\phi^+) = A^{-1}\phi^-$ .

Definindo

$$\phi_0^+ = A^{-1}\phi^+ \quad \text{e} \quad \phi_0^- = A^{-1}\phi^-, \quad (4.2)$$

tem-se então  $G_0\phi_0^+ = \phi_0^-$ , embora agora  $\phi_0^\pm$  não sejam analíticos, mas sim meromorfos em  $\mathbb{C}^\pm$ .

De qualquer modo, se  $G_0\phi_0^+ = \phi_0^-$ , então  $G_0(\tilde{R}_0\phi_0^+) = \tilde{R}_0\phi_0^-$ , com  $\tilde{R}_0 = q^{-1}R_0$ , e repetem-se os raciocínios anteriores, isto é, existe uma factorização  $G_0 = M_{0-}M_{0+}$  com  $M_{0+}^{-1} = [\phi_0^+ \quad \tilde{R}_0\phi_0^+]$  e  $M_{0-} = [\phi_0^- \quad \tilde{R}_0\phi_0^-]$  que são, como se viu, da forma

$$\begin{aligned} \bullet \quad M_{0+}^{-1} &= \begin{pmatrix} (\phi_0^+)_1 & q^{-1}(\phi_0^+)_2 \\ (\phi_0^+)_2 & (\phi_0^+)_1 \end{pmatrix} \\ \bullet \quad M_{0-} &= \begin{pmatrix} (\phi_0^-)_1 & q^{-1}(\phi_0^-)_2 \\ (\phi_0^-)_2 & (\phi_0^-)_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Definindo  $\tilde{M}_\pm = AM_{0\pm}A^{-1}$  obtemos, fazendo  $\tilde{R} = A\tilde{R}_0A^{-1}$  e atendendo a (4.2),  $G = \tilde{M}_-\tilde{M}_+$  com

$$\tilde{M}_+^{-1} = [\phi^+ \quad \tilde{R}\phi^+]A^{-1}$$

e

$$\tilde{M}_- = [\phi^- \quad \tilde{R}\phi^-]A^{-1},$$

sendo  $\det \tilde{M}_\pm = \det M_{0\pm}$ , que, como vimos (4.2), não é identicamente nulo desde que sejam impostas condições de normalização convenientes. Desta forma obtemos uma factorização meromorfa com factores na mesma classe, logo comutativa.

## 4.2. Como obter uma factorização generalizada

**Nota 36** A factorização meromorfa  $G = \tilde{M}_- \tilde{M}_+$  (em que os factores estão na mesma classe de  $G$ ), pode no entanto não ser a mais apropriada. A factorização meromorfa mais simples é

$$G = (\tilde{M}_- A)(A^{-1} \tilde{M}_+) = M_- M_+$$

ou seja  $G = M_- M_+$  com

$$M_+^{-1} = \tilde{M}_+^{-1} A = [\phi^+ \quad \tilde{R}_0 \phi^+] \quad e \quad M_- = \tilde{M}_- A = [\phi^- \quad \tilde{R}_0 \phi^-]$$

e nesse caso

- $\det M_+^{-1} = [(A^{-1} \phi^+)_1^2 - q^{-1} (A^{-1} \phi^+)_2^2] \det A$
- $\det M_- = [(A^{-1} \phi^-)_1^2 - q^{-1} (A^{-1} \phi^-)_2^2] \det A$

## 4.2 Como obter uma factorização generalizada

### 4.2.1 1ª caso $q = 0$

Quando  $q = 0$ ,  $G = \alpha I + \beta R$  com  $\alpha$  e  $\beta \in C^\mu(\mathbb{R})$  e  $R^2 = qI$ , então  $R^2 = 0$ , ou seja, a matriz  $R$  é nilpotente e, portanto, a menos da multiplicação por uma função racional escalar pode escrever-se como sendo

$$R = \begin{pmatrix} 1 & q_1 \\ -q_1^{-1} & -1 \end{pmatrix},$$

## 4.2. Como obter uma fatorização generalizada

onde  $q_1$  é uma função racional, obtendo-se neste caso

$$G = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & \beta q_1 \\ -\beta q_1^{-1} & \alpha - \beta \end{pmatrix} \quad \det G = \alpha^2.$$

A classe de matrizes desta forma designa-se por  $\mathcal{N}$ . Aqui consideraremos  $q_1 = r = \frac{\xi - i}{\xi + i}$ , por simplicidade de cálculos.

Como é fácil de constatar,  $G \in C(Q)$ , com

$$Q = \begin{pmatrix} q_1^{-1} & 1 \\ 1 & q_1 \end{pmatrix}.$$

Suponha-se que  $\alpha$  possui fatorização limitada canónica  $\alpha = \alpha_- \alpha_+$

**Nota 37** *Pode admitir-se que  $\text{ind} G = 0$ , pois se  $\text{ind} \alpha = k$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ , como  $\det G = \alpha^2$ , tem-se  $\text{ind} G = 2k$ , e poderia considerar-se, em vez de  $G$ ,*

$$\tilde{G} = r^{-k} G = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} & \tilde{\beta} r \\ -\tilde{\beta} r^{-1} & \tilde{\alpha} - \tilde{\beta} \end{pmatrix}$$

onde  $\tilde{\alpha} = r^{-k} \alpha$ ,  $\tilde{\beta} = r^{-k} \beta$  e  $\text{ind} \tilde{\alpha} = 0$ .  $\tilde{G}$  também pertence à classe  $\mathcal{N}$  com  $\text{ind} \tilde{G} = 0$ . Após se obter uma fatorização generalizada de  $\tilde{G}$  é fácil obter uma fatorização generalizada para a matriz  $G$ .

**Teorema 38** [4] *Seja  $(\phi_+, \phi_-)$  uma solução do sistema  $G\phi_+ = r\phi_-$ , tal que*

$$\phi_{1-}(-i) \neq 0 \text{ e } \phi_{2-}(-i) = 0 \quad \text{ou} \quad \phi_{1+}(i) = 0 \text{ e } \phi_{2+}(i) \neq 0.$$

*Verifica-se então a seguinte igualdade:*

$$\alpha_+(\phi_{1+} + r\phi_{2+}) = \alpha_-^{-1} r(\phi_{1-} + r\phi_{2-}) = \frac{K}{\xi + i}, \text{ com } K \neq 0.$$

## 4.2. Como obter uma fatorização generalizada

**Demonstração:**

O sistema  $G\phi_+ = r\phi_-$  pode escrever-se na forma :

$$\begin{cases} (\alpha + \beta)\phi_{1+} + \beta r\phi_{2+} = r\phi_{1-} \\ -\beta\phi_{1+} + (\alpha - \beta)r\phi_{2+} = r^2\phi_{2-} \end{cases}.$$

Somando as duas equações do sistema, obtém-se a equação linear

$$\alpha_+(\phi_{1+} + r\phi_{2+}) = \alpha_-^{-1}r(\phi_{1-} + r\phi_{2-}),$$

onde o primeiro membro pertence  $C_\mu^+(\mathbb{R})$  e o segundo multiplicado por  $r^{-2}$  está em  $C_\mu^-(\mathbb{R})$ . Assim

$$\alpha_+(\phi_{1+} + r\phi_{2+}) = \alpha_-^{-1}r(\phi_{1-} + r\phi_{2-}) = \frac{A\xi + B}{(\xi + i)^2}, \text{ com } A, B \in \mathbb{C}.$$

Uma vez que  $\phi_{2-}(-i) = 0$ , tem-se

$$\alpha_+(\phi_{1+} + r\phi_{2+}) = \alpha_-^{-1}r(\phi_{1-} + r\phi_{2-}) = \frac{K}{\xi + i},$$

com  $K \in \mathbb{C}$ . Devido à hipótese  $\phi_{1-}(-i) \neq 0$ , tem-se  $K \neq 0$ . Pois se  $K = 0$  vem da igualdade anterior que  $r^{-1}\phi_{1-} = -\phi_{2-}$  e  $\phi_{1+} = -r\phi_{2+}$ . Substituindo  $\phi_{1+}$  na primeira equação do sistema, obtém-se

$$-(\alpha + \beta)r\phi_{2+} + \beta r\phi_{2+} = r\phi_{1-} \Leftrightarrow \phi_{2+} = \phi_{1-} = 0$$

o que contradiz a hipótese.  $\square$

**Nota 39** Se se impuser  $\phi_{1+}(i) = 0$  e  $\phi_{2+}(i) \neq 0$  obtém-se um resultado perfeitamente análogo. Basta reparar que

$$\alpha_+r^{-1}(r^{-1}\phi_{1+} + \phi_{2+}) = \alpha_-^{-1}(r^{-1}\phi_{1-} + \phi_{2-}).$$

## 4.2. Como obter uma factorização generalizada

**Corolário 40** [4] *Supondo as mesmas condições do teorema anterior se,  $G$  admite factorização canónica  $G = G_- G_+$ , tem-se:*

$$\alpha_+^{-1} r_+^{-1} (\phi_{1+} + r \phi_{2+}) = \alpha_+^{-2} = K_0 \det G_+^{-1}$$

$$\alpha_- r_-^{-1} (\phi_{1-} + r \phi_{2-}) = \alpha_-^{-2} = K_0 \det G_-,$$

onde  $K_0$  é uma constante não nula e  $r_{\pm} = \frac{1}{\xi \pm i}$ .

**Demonstração:**

Se  $G = G_- G_+$ , uma factorização canónica de  $\det G$  é dada por  $\det G = \det G_- \det G_+$ . As igualdades deste corolário resultam do teorema anterior e da unicidade da factorização canónica, a menos de um factor constante, que permite dizer que, sendo  $\det G = \alpha^2 = \alpha_-^2 \alpha_+^2$ , tem-se:

$$\alpha_-^2 = K_0 \det G_- \quad \text{e} \quad \alpha_+^2 = K_0^{-1} \det G_+$$

com  $K_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .  $\square$

É fácil ver que os primeiros membros das igualdades do corolário anterior representam respectivamente os determinantes das matrizes

$$\begin{pmatrix} r_+^{-1} \phi_{1+} & -r \alpha_+^{-1} \\ r_+^{-1} \phi_{2+} & \alpha_+^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} r_-^{-1} \phi_{1-} & -r \alpha_- \\ r_-^{-1} \phi_{2-} & \alpha_- \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Uma vez que podemos sempre escolher  $K_0 = 1$ , do resultado anterior vem que

$$\det \begin{pmatrix} r_+^{-1} \phi_{1+} & -r \alpha_+^{-1} \\ r_+^{-1} \phi_{2+} & \alpha_+^{-1} \end{pmatrix} = \alpha_+^{-2} = \det G_+^{-1}$$

e

$$\det \begin{pmatrix} r_-^{-1} \phi_{1-} & -r \alpha_- \\ r_-^{-1} \phi_{2-} & \alpha_- \end{pmatrix} = \alpha_-^{-2} = \det G_-.$$

## 4.2. Como obter uma fatorização generalizada

Verifica-se imediatamente que, fazendo

$$\tilde{\phi}_+ = \begin{pmatrix} -r\alpha_+^{-1} \\ \alpha_+^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{\phi}_- = \begin{pmatrix} -r\alpha_- \\ \alpha_- \end{pmatrix}$$

se tem  $G\tilde{\phi}_+ = \tilde{\phi}_-$ . Contudo  $\tilde{\phi}_-$  não é analítica em  $\mathbb{C}^-$  devido ao polo em  $\xi = i$ ; assim designando por  $M_+, M_-$ , respectivamente, as matrizes definidas por (4.3), tem-se  $G = M_-M_+^{-1}$ , que não é uma fatorização generalizada de  $G$ , mas sim uma fatorização meromorfa. Usando os teoremas 30 e 29, vejamos agora como obter uma fatorização generalizada para  $G$ : tem-se

$$M_- = \begin{pmatrix} r_-^{-1}\phi_{1-} & -\alpha_- \\ r_-^{-1}\phi_{2-} & r_-^{-1}\alpha_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} = T_-R.$$

Sejam  $t_1$  e  $t_2$ , respectivamente, a primeira e a segunda coluna de  $T_-$ . Como  $\det T_-(-i) = 0$ , os vectores de  $\mathbb{C}^2$ ,

$$t_1(-i) = (-2i\phi_{1-}(-i), 0) \quad \text{e} \quad t_2(-i) = (-\alpha_-(-i), 0)$$

são linearmente dependentes, logo existem duas constantes não simultaneamente nulas,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , tais que:

$$\lambda_1 t_1(-i) + \lambda_2 t_2(-i) = (0, 0) \Leftrightarrow -2i\lambda_1\phi_{1-}(-i) - \lambda_2\alpha_-(-i) = 0.$$

Fazendo  $\lambda_2 = 1$ , vem que  $\lambda_1 = \frac{\alpha_-(-i)}{-2i\phi_{1-}(-i)}$ , e assim

$$T_- = T'_-R_1 = \begin{pmatrix} r_-^{-1}\phi_{1-} & r(\lambda_1 r_-^{-1}\phi_{1-} - \alpha_-) \\ r_-^{-1}\phi_{2-} & r(\lambda_1 r_-^{-1}\phi_{2-} + r_-^{-1}\alpha_-) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_1 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix},$$

obtendo-se

$$M_- = T_-R = T'_- \underbrace{R_1R}_{R_+} = T'_- \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_1 r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

#### 4.2. Como obter uma fatorização generalizada

Tem-se então

$$G = M_- M_+^{-1} = \underbrace{T'_-}_{G_-} \underbrace{(R_+ M_+^{-1})}_{G_+},$$

e verifica-se que  $G = G_- G_+$  é uma fatorização generalizada canônica para  $G$ .

Para mais resultados sobre a classe  $\mathcal{N}$  consultar [14] e [4], nomeadamente no que diz respeito a condições de existência de fatorização não canônica.

#### 4.2.2 2º caso $\sqrt{q} \neq 0$ é uma função racional

Consideremos o exemplo

$$G = b_1 P_1 + b_2 P_2$$

com  $b_1, b_2 \in C^\mu(\mathbb{R})$ ,  $k \in \mathbb{R}^+$  fixo e

$$P_1(\xi) = \frac{1}{\xi^2 + k^2} \begin{pmatrix} \xi^2 & k\xi \\ k\xi & k^2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P_2(\xi) = \frac{1}{\xi^2 + k^2} \begin{pmatrix} k^2 & -k\xi \\ -k\xi & \xi^2 \end{pmatrix}$$

Repare-se que :

$$\text{i-)} \quad P_1 + P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{ii-)} \quad P_1 - P_2 = \frac{1}{\xi^2 + k^2} \begin{pmatrix} \xi^2 - k^2 & 2k\xi \\ 2k\xi & k^2 - \xi^2 \end{pmatrix},$$

#### 4.2. Como obter uma fatorização generalizada

ou seja,

$$(P_1 - P_2)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, fazendo  $R = P_1 - P_2$ , tem-se  $R^2 = I = P_1 + P_2$  e

$$P_1 = \frac{I + R}{2}, \quad P_2 = \frac{I - R}{2};$$

Logo

$$G = \left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)I + \left(\frac{b_1 - b_2}{2}\right)R.$$

Definindo  $\alpha = \frac{b_1 + b_2}{2}$  e  $\beta = \frac{b_1 - b_2}{2}$ , tem-se  $G = \alpha I + \beta R$  onde  $\alpha, \beta \in C^\infty(\mathbb{R})$  e  $R^2 = I$ .  $R$  tem como valores próprios 1 e  $-1$ .

Fixemos vectores próprios associados a cada um dos valores próprios: por exemplo,  $(1, \frac{k}{\xi})$  é um vector próprio associado a 1 e  $(1, -\frac{\xi}{k})$  é um vector próprio associado a  $-1$ .

Seja então

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{k}{\xi} & -\frac{\xi}{k} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad H^{-1} = \frac{1}{\xi^2 + k^2} \begin{pmatrix} \xi^2 & k\xi \\ k^2 & -k\xi \end{pmatrix};$$

assim

$$R = HD_1H^{-1}, \quad \text{onde} \quad D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

## 4.2. Como obter uma fatorização generalizada

Logo:

$$\begin{aligned} G &= \alpha I + \beta R = \alpha H H^{-1} I + \beta H D_1 H^{-1} \\ &= H(\alpha I + \beta D_1)H^{-1} = H \begin{pmatrix} \alpha + \beta & 0 \\ 0 & \alpha - \beta \end{pmatrix} H^{-1}. \end{aligned}$$

Lembrando que  $\alpha + \beta = b_1$  e  $\alpha - \beta = b_2$ , tem-se

$$G = H \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} H^{-1}.$$

Assumindo que  $b_1$  e  $b_2$  possuem fatorização canônica

$$b_1 = b_{1-} b_{1+} \quad \text{e} \quad b_2 = b_{2-} b_{2+},$$

tem-se

$$\begin{aligned} G &= H \begin{pmatrix} b_{1-} & 0 \\ 0 & b_{2-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1+} & 0 \\ 0 & b_{2+} \end{pmatrix} H^{-1} \\ &= H \begin{pmatrix} b_{1-} & 0 \\ 0 & b_{2-} \end{pmatrix} H^{-1} H \begin{pmatrix} b_{1+} & 0 \\ 0 & b_{2+} \end{pmatrix} H^{-1} = M_- M_+, \end{aligned}$$

com  $M_{\pm} = H \text{diag}(b_{1\pm}, b_{2\pm}) H^{-1}$ .

$G = M_- M_+$  não é uma fatorização generalizada de  $G$ , mas é uma fatorização meromorfa. Como  $\det G \neq 0$ , sabemos que existe uma fatorização generalizada de  $G$  que calcularemos baseados nos resultados do terceiro capítulo.

#### 4.2. Como obter uma fatorização generalizada

$$M_- = \frac{1}{\xi^2 + k^2} \begin{pmatrix} b_{1-}\xi^2 + b_{2-}k^2 & (b_{1-} - b_{2-})k\xi \\ (b_{1-} - b_{2-})k\xi & b_{1-}\xi^2 + b_{2-}k^2 \end{pmatrix}$$

$$M_+ = \frac{1}{\xi^2 + k^2} \begin{pmatrix} b_{1+}\xi^2 + b_{2+}k^2 & (b_{1+} - b_{2+})k\xi \\ (b_{1+} - b_{2+})k\xi & b_{1+}\xi^2 + b_{2+}k^2 \end{pmatrix}.$$

Seja  $\tilde{G}_- = (\xi + ik)M_-$  e  $\tilde{G}_+ = (\xi - ik)M_+$ . Então

$$\det \tilde{G}_- = b_{1-}b_{2-}(\xi + ik)^2,$$

e assim

$$\det \tilde{G}_- = 0 \Leftrightarrow \xi = -ik,$$

ou seja,  $-ik$  é um zero de  $\det \tilde{G}_-$  de multiplicidade dois. Designemos por  $t_1$  e  $t_2$  transpostas da primeira e da segunda coluna de  $\tilde{G}_-$ . Sabemos então que estas colunas são linearmente dependentes para  $\xi = -ik$  e que portanto existem duas constantes não simultaneamente nulas,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , tais que:

$$\lambda_1 t_1(-ik) + \lambda_2 t_2(-ik) = (0, 0)$$

Seja

$$t'_2 = \frac{\xi - i}{\xi + ik} (\lambda_1 t_1(\xi) + \lambda_2 t_2(\xi)).$$

Então

$$t'_2(-ik) = \left( k \frac{b_{1-}(-ik) - b_{2-}(-ik)}{2}, k \frac{b_{1-}(-ik) - b_{2-}(-ik)}{-2i} \right).$$

Fazendo, por comodidade,

$$b_{1-}(-ik) = \beta_{1-} \quad \text{e} \quad b_{2-}(-ik) = \beta_{2-},$$

## 4.2. Como obter uma fatorização generalizada

tem-se então:

$$t'_2(-ik) = \frac{k}{2}(\beta_{1-} - \beta_{2-})(1, i), \quad t'_1(-ik) = \frac{k}{2}(\beta_{1-} - \beta_{2-})(-i, 1),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \lambda_1 t_1(-ik) + \lambda_2 t_2(-ik) = (0, 0) &\Leftrightarrow \frac{k}{2}(\beta_{1-} - \beta_{2-})[\lambda_1(-i, 1) + \lambda_2(1, i)] = (0, 0) \\ &\Leftrightarrow \lambda_2 = \lambda_1 i. \end{aligned}$$

Escolhendo, por exemplo,  $\lambda_1 = 1$ , tem-se  $\lambda_2 = i$ , ou seja,

$$t'_2 = \frac{\xi - i}{\xi + ik}(t_1 + it_2) = \frac{\xi - i}{\xi + ik}(b_{1-}\xi - b_{2-}ki, b_{1-}k - b_{2-}\xi i).$$

Assim,

$$\tilde{G}_{1-} = G_{1-} \cdot R_{1-},$$

onde

$$G_{1-} = [t_1, t'_2]^T = \frac{1}{\xi - ik} \begin{pmatrix} b_{1-}\xi^2 + b_{2-}k^2 & (b_{1-}\xi - b_{2-}ki)(\xi - i) \\ (b_{1-} - b_{2-})k\xi & (b_{1-}k - b_{2-}\xi i)(\xi - i) \end{pmatrix}$$

e

$$R_{1-} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & -i\frac{\xi+ki}{\xi+i} \end{pmatrix}.$$

Ora,

$$\det G_{1-} = (\xi - i)i(\xi + ki)b_{1-}b_{2-}(\xi - ki)^2$$

tem ainda um zero em  $\mathbb{C}^-$ , desta vez de multiplicidade 1, que continua a ser  $-ki$ . Temos portanto que repetir o processo que utilizámos para passar da

#### 4.2. Como obter uma fatorização generalizada

matriz  $\tilde{G}_-$  para a matriz  $G_{1-}$ . Deste modo obtemos  $G_{1-} = G_- R_2$ , e por conseguinte

$$\tilde{G}_- = G_{1-} R_1 \Leftrightarrow \tilde{G}_- = G_- R_2 R_1,$$

onde

$$G_- = [t_1, t_2']^T = \left[ t_1, \frac{\xi - i}{\xi + ik} [(\beta_{1-} + \beta_{2-})t_1 - (\beta_{1-} - \beta_{2-})k \frac{\xi - i}{\xi + ik} (t_1 + it_2)] \right]^T$$

e

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{k(k+1)}{(\beta_{1-} + \beta_{2-})} \\ 0 & -i \frac{\xi + ki}{k(\beta_{1-} - \beta_{2-})(\xi - i)} \end{pmatrix}.$$

Seja

$$R = R_2 R_1 = \begin{pmatrix} 1 & i - \frac{i(k+1)(\beta_{1-} + \beta_{2-})(\xi + ki)}{k(\beta_{1-} - \beta_{2-})(\xi - i)} \\ 0 & \frac{-i(\xi + ki)^2}{k(\beta_{1-} - \beta_{2-})(\xi - i)^2} \end{pmatrix}.$$

Tem-se então  $\tilde{G}_- = G_- R$ .

Procedendo de forma perfeitamente análoga relativamente às linhas da matriz de  $\tilde{G}_+$ , chega-se primeiro a

$$\tilde{G}_+ = Q_1 G_{1+},$$

onde

$$G_{1+} = [l_1, l_2'] = \frac{1}{\xi + ik} \begin{pmatrix} b_{1+}\xi^2 + b_{2+}k^2 & (b_{1+} - b_{2+})k\xi \\ (b_{1+}\xi + b_{2+}ki)(\xi + i) & (b_{1+}K - b_{2+}\xi i)(\xi + i) \end{pmatrix}$$

## 4.2. Como obter uma fatorização generalizada

e

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & i\frac{\xi-ik}{\xi+i} \end{pmatrix};$$

finalmente a

$$\tilde{G}_+ = Q_1 Q_2 G_+,$$

onde

$$G_- = [l_1, l_2'] = [l_1, \frac{\xi+i}{\xi-ik} [(\beta_{1+} + \beta_{2+})l_1 - (\beta_{1+} - \beta_{2+})k \frac{\xi+i}{\xi-ik} (l_1 - il_2)]]$$

e

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{(\beta_{1+} + \beta_{2+})(k+1)}{(\beta_{1+} - \beta_{2+})} & -\frac{\xi-ki}{k(\beta_{1+} - \beta_{2+})(\xi+i)} \end{pmatrix}.$$

Seja

$$Q = Q_1 Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i + \frac{i(k+1)(\beta_{1+} + \beta_{2+})(\xi-ki)}{k(\beta_{1+} - \beta_{2+})(\xi+i)} & \frac{-i(\xi-ki)^2}{k(\beta_{1+} - \beta_{2+})(\xi+i)^2} \end{pmatrix}.$$

Tem-se então  $\tilde{G}_+ = QG_+$  (onde  $b_{1+}(ik) = \beta_{1+}$  e  $b_{2+}(ik) = \beta_{2+}$ ).

Obtivemos assim uma fatorização generalizada de  $G$  pois  $(\xi^2 + k^2)RQ$  tem fatorização generalizada  $(\xi^2 + k^2)RQ = R_- DR_+$  [2] e, portanto,

$$G = (G_- R_-) D (R_+ G_+)$$

é uma fatorização generalizada de  $G$ .

## 4.2. Como obter uma fatorização generalizada

### 4.2.3 3º caso $q = \frac{\xi-a}{\xi-b}$ , $R^2 = qI$ , $\mathbf{R}$ matriz companheira

Seja  $G = \alpha I + \beta R$ , onde  $R^2 = qI$ ,  $\alpha, \beta \in C^\mu(\mathbb{R})$  e

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$G = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ q\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Suponhamos, por simplicidade, que  $a \in \mathbb{C}^+$ . Então temos  $G = M_- M_+$ , ou seja,  $GM_+^{-1} = M_-$ , onde, com

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 0 & q^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

- $M_+^{-1} = [f_+ \quad \tilde{R}f_+] = \begin{pmatrix} f_{1+} & q^{-1}f_{2+} \\ f_{2+} & f_{1+} \end{pmatrix}$
- $M_- = [f_- \quad \tilde{R}f_-] = \begin{pmatrix} f_{1-} & q^{-1}f_{2-} \\ f_{2-} & f_{1-} \end{pmatrix}.$

Impondo, como condição de normalização sobre  $f_+$ , que

$$f_{2+}(a) = 0 \quad \text{e} \quad f_{1+}(a) \neq 0,$$

verificamos que  $M_+^{-1} \in C_\nu^+(\mathbb{R})^{2 \times 2}$  e  $M_- \in C_\nu^-(\mathbb{R})^{2 \times 2}$ , além disso, como da equação do produto, neste caso, vem que

$$(\det G)_+(f_{1+}^2 - q^{-1}f_{2+}^2) = (\det G)_-(f_{1-}^2 - q^{-1}f_{2-}^2) = K \neq 0.$$

Conclui-se que

## 4.2. Como obter uma factorização generalizada

- $\det M_+^{-1} = f_{1+}^2 - q^{-1}f_{2+}^2 = K(\det G)_+^{-1}$
- $\det M_- = f_{1-}^2 - q^{-1}f_{2-}^2 = K(\det G)_-$

o que significa que também  $M_+ \in C_\mu^+(\mathbb{R})^{2 \times 2}$  e  $M_-^{-1} \in C_\mu^-(\mathbb{R})^{2 \times 2}$ . Assim  $G = M_- M_+$  é uma factorização generalizada de  $G$  cujos factores estão na mesma classe (logo é comutativa).

**Nota 41** *Os resultados obtidos por este processo são perfeitamente análogos aos obtidos no artigo [13]. Verifica-se porém que esta é uma forma particularmente simples de os obter.*

### 4.2.4 4º caso $q = \frac{\xi-a}{\xi-b}$ , $R^2 = qI$

Mais uma vez consideremos aqui, para tornar mais clara a exposição, apenas um caso particular em que  $a = -i$  e  $b = i$ . Neste caso  $R$  não tem a forma da matriz companheira associada ao seu polinómio característico. Veremos que, ao contrário do caso anterior, a matriz  $G$  pode não ter factorização canónica. O estudo deste caso será feito recorrendo aos resultados da secção anterior.

Seja  $G = \alpha I + \beta R$ ,  $R^2 = qI$ ,  $\alpha, \beta \in C^\mu(\mathbb{R})$  e

$$R = \begin{pmatrix} \frac{\xi+2i}{\xi-2i} & \left(\frac{\xi+2i}{\xi-2i}\right)^2 - \frac{\xi+i}{\xi-i} \\ -1 & -\frac{\xi+2i}{\xi-2i} \end{pmatrix}.$$

Tem-se portanto

$$R = QR_0Q^{-1}, \quad (4.4)$$

com

$$R_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\xi+i}{\xi-i} & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & q_1 \\ 0 & -q \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad q_1 = \frac{\xi+2i}{\xi-2i}.$$

## 4.2. Como obter uma fatorização generalizada

Seja  $G_0 = \alpha I + \beta R_0$ .

É sabido que neste caso ( $q = \frac{\xi+i}{\xi-i}$ ),  $G_0$  admite fatorização canônica para todos os  $\alpha$  e  $\beta$  tais que

i-)  $\det G_0(\xi) \neq 0$ , para qualquer  $\xi \in \mathbb{R}$

ii-)  $\text{ind } G_0 = 0$

Suponhamos então que estas condições estão satisfeitas e que  $G_0 = G_{0-}G_{0+}$  é uma fatorização canônica de  $G_0$  com:

$$G_{0-} = \begin{pmatrix} \phi_{01}^- & q^{-1}\phi_{02}^- \\ \phi_{02}^- & \phi_{01}^- \end{pmatrix}, \quad G_{0+}^{-1} = \begin{pmatrix} \phi_{01}^+ & q^{-1}\phi_{02}^+ \\ \phi_{02}^+ & \phi_{01}^+ \end{pmatrix},$$

onde  $\phi_{0\pm} = (\phi_{01}^\pm, \phi_{02}^\pm)$  são tais que

$$G\phi_{0+} = \phi_{0-}, \quad \phi_{02}^-(-i) = 0 \quad \text{e} \quad \phi_{01}^-(-i) \neq 0.$$

Trata-se pois de uma fatorização dentro da mesma classe de Daniele-Khrapkov a que  $G_0$  pertence.

Uma fatorização meromorfa para  $G$  será então  $G = M_-M_+$  onde

$$M_- = QG_{0-}Q^{-1} = \begin{pmatrix} \phi_{01}^- + q_1q^{-1}\phi_{02}^- & (q_1^2q^{-1} - 1)\phi_{02}^- \\ -q^{-1}\phi_{02}^- & \phi_{01}^- - q_1q^{-1}\phi_{02}^- \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

$$M_+^{-1} = QG_{0+}Q^{-1} = \begin{pmatrix} \phi_{01}^+ + q_1q^{-1}\phi_{02}^+ & (q_1^2q^{-1} - 1)\phi_{02}^+ \\ -q^{-1}\phi_{02}^+ & \phi_{01}^+ - q_1q^{-1}\phi_{02}^+ \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

onde  $q = \frac{\xi+i}{\xi-i}$  e  $q_1 = \frac{\xi+2i}{\xi-2i}$  como anteriormente.

Usemos então o corolário 34 e procuremos  $G_-, G_+$  tais que  $G = G_-G_+$ , sendo

$$G_- = \begin{pmatrix} \phi_{11}^- & \phi_{12}^- \\ \phi_{21}^- & \phi_{22}^- \end{pmatrix}, \quad G_+^{-1} = \begin{pmatrix} \phi_{11}^+ & \phi_{12}^+ \\ \phi_{21}^+ & \phi_{22}^+ \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

## 4.2. Como obter uma fatorização generalizada

De acordo com o corolário 34, existe uma tal fatorização canónica par  $G$  se e só se existir

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \quad \text{com } \det \tilde{R} = k \neq 0,$$

onde os  $r_{ij}$ , com  $i, j = 1, 2$ , são tais que satisfazem (I)-(IV) ((3.2), (3.3), (3.4) e (3.5)).

Procuraremos então os  $r_{ij}$ , com  $i, j = 1, 2$ , do nosso caso

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{\phi_{11}^- [\phi_{01}^- - \frac{\xi+2i}{\xi-2i} \frac{\xi-i}{\xi+i} \phi_{02}^-] - \phi_{21}^- [(\frac{\xi+2i}{\xi-2i})^2 \frac{\xi-i}{\xi+i} - 1] \phi_{02}^-}{\det G_{0-}} \\ &= \frac{\phi_{11}^+ [\phi_{01}^+ - \frac{\xi+2i}{\xi-2i} \frac{\xi-i}{\xi+i} \phi_{02}^+] - \phi_{21}^+ [(\frac{\xi+2i}{\xi-2i})^2 \frac{\xi-i}{\xi+i} - 1] \phi_{02}^+}{\det G_{0+}^{-1}}, \end{aligned}$$

donde

$$r_{11} = \frac{p_{11}}{(\xi - 2i)^2},$$

sendo  $p_{11}$  um polinómio de grau  $\leq 2$ .

Analogamente se conclui que

$$r_{21} = \frac{p_{21}}{\xi - 2i},$$

sendo  $p_{21}$  um polinómio de grau  $\leq 1$ .

Ora, uma vez que (3.2) e (3.3) devem ser satisfeitos, deve ter-se, por outro lado,

$$\begin{cases} \frac{p_{11}}{(\xi-2i)^2} [\phi_{01}^+ + \frac{\xi+2i}{\xi-2i} \frac{\xi-i}{\xi+i} \phi_{02}^+] + \frac{p_{21}}{\xi-2i} [(\frac{\xi+2i}{\xi-2i})^2 \frac{\xi-i}{\xi+i} - 1] \phi_{02}^+ \in C_\mu^+(\mathbb{R}) \\ \frac{p_{11}}{(\xi-2i)^2} [-\frac{\xi-i}{\xi+i} \phi_{02}^+] + \frac{p_{21}}{\xi-2i} [\phi_{01}^+ + \frac{\xi+2i}{\xi-2i} \frac{\xi-i}{\xi+i} \phi_{02}^+] \in C_\mu^+(\mathbb{R}) \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{(\xi-2i)^3} \left[ p_{11} \frac{\xi-i}{\xi+i} (\xi+2i) + p_{21} (\xi+2i)^2 \frac{\xi-i}{\xi+i} \right] \phi_{02}^+ \right. \\ & \left. + \frac{1}{(\xi-2i)^2} p_{11} \phi_{01}^+ + \frac{1}{\xi-2i} p_{21} \phi_{02}^+ \right] \in C_\mu^+(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

## 4.2. Como obter uma factorização generalizada

c

$$\left[ \frac{1}{(\xi - 2i)^2} \left[ -p_{11} \frac{\xi - i}{\xi + i} - p_{21}(\xi + 2i) \frac{\xi - i}{\xi + i} \right] \phi_{02}^+ + \frac{1}{\xi - 2i} p_{21} \phi_{01}^+ \right] \in C_\mu^+(\mathbb{R}),$$

sendo estas equivalentes a

$$\left[ \frac{1}{(\xi - 2i)^3} [p_{11} + p_{21}(\xi + 2i)](\xi + 2i) \frac{\xi - i}{\xi + i} \phi_{02}^+ + \frac{1}{(\xi - 2i)^2} p_{11} \phi_{01}^+ + \frac{1}{\xi - 2i} p_{21} \phi_{02}^+ \right] \in C_\mu^+(\mathbb{R}) \quad (4.8)$$

c

$$\left[ \frac{1}{(\xi - 2i)^2} [p_{11} + p_{21}(\xi + 2i)] \frac{\xi - i}{\xi + i} \phi_{02}^+ + \frac{1}{\xi - 2i} p_{21} \phi_{01}^+ \right] \in C_\mu^+(\mathbb{R}). \quad (4.9)$$

- Se  $\phi_{02}^+(2i) \neq 0$ :

Temos de compensar um polo triplo para  $\xi = 2i$  em (4.8) e um polo duplo para  $\xi = 2i$  em (4.9); por outro lado, na terceira parcela de (4.8) temos um polo simples que só pode ser compensado se  $p_{21} = A(\xi - 2i)$ . Estudando o comportamento de (4.8), nesse caso, não há nenhum polinómio do 2º grau  $p_{11}$  (a não ser que  $p_{11} = p_{21} = 0$ , o que é impossível) para compensar o polo triplo. Portanto não há factorização canónica.

- Se  $\phi_{02}^+(2i) = 0$ , há duas hipóteses:

*1ª hipótese: 2i é um zero duplo*

Nesse caso vê-se logo que desaparecem todos os polos de  $M_+^{-1}$  e a factorização  $G = M_- M_+$  é uma factorização canónica (na álgebra).

## 4.2. Como obter uma fatorização generalizada

2ª hipótese:  $2i$  é um zero simples

Nesse caso temos de ver se há fatorização canónica (que em princípio já não será na álgebra).

Observamos que a primeira e a segunda parcela de (4.8) têm um polo duplo e a terceira parcela não tem polos; em (4.9) ambas as parcelas têm um polo simples, ou seja, podemos escrever:

$$\frac{1}{(\xi - 2i)^2} \underbrace{\left[ \frac{\phi_{02}^+}{\xi - 2i} (p_{11} + p_{21}(\xi + 2i)) (\xi + 2i) \frac{\xi - i}{\xi + i} + p_{11} \phi_{01}^+ \right]}_a + \frac{\phi_{02}^+}{\xi - 2i} p_{21} \in C^{\mu+}(\mathbb{R}) \quad (4.10)$$

$$\frac{1}{(\xi - 2i)} \underbrace{\left[ \frac{-\phi_{02}^+}{\xi - 2i} (p_{11} + p_{21}(\xi + 2i)) \frac{\xi - i}{\xi + i} + p_{21} \phi_{01}^+ \right]}_b \in C_{\mu}^+(\mathbb{R}) \quad (4.11)$$

onde  $a$  tem que ter um zero duplo em  $\xi = 2i$  e  $b$  tem de ter um zero simples em  $\xi = 2i$ . Destas duas condições (necessárias e suficientes) de anulamento no ponto  $\xi = 2i$ , vem o sistema:

$$\begin{cases} (A \frac{4}{3} i + \phi_{01}^+(2i)) p_{11}(2i) - A \frac{16}{3} p_{21}(2i) = 0 \\ -A \frac{1}{3} p_{11}(2i) + (-A \frac{4}{3} i + \phi_{01}^+(2i)) p_{21}(2i) = 0 \end{cases}$$

onde

$$A = \left( \frac{\phi_{02}^+}{\xi - 2i} \right)_{\xi=2i} \neq 0.$$

Ora, o determinante do sistema anterior é (para  $p_{11}(2i)$  e  $p_{21}(2i)$  tomados como incógnitas)

$$(\phi_{01}^+)^2 + A^2 \frac{16}{9} - A^2 \frac{16}{9} = (\phi_{01}^+)^2(2i) \neq 0.$$

Logo tem de se ter:

$$\begin{aligned} p_{11}(2i) = 0 &\Rightarrow p_{11} = B(\xi - \xi_0)(\xi - 2i), \quad \xi_0, B \in \mathbb{C} \\ p_{21}(2i) = 0 &\Rightarrow p_{21} = C(\xi - 2i), \quad C \in \mathbb{C} \end{aligned} \quad (4.12)$$

## 4.2. Como obter uma factorização generalizada

Substituindo  $p_{11}$  e  $p_{21}$ , na primeira parcela de (4.10), obtém-se:

$$\frac{1}{(\xi - 2i)} \underbrace{\left[ \frac{\phi_{02}^+}{\xi - 2i} (B(\xi - \xi_0) + C(\xi + 2i))(\xi + 2i) \frac{\xi - i}{\xi + i} + B(\xi - \xi_0)\phi_{01}^+ \right]}_c \in C_\mu^+(\mathbb{R}).$$

Então  $c$  tem de se anular no ponto  $\xi = 2i$ . Devemos portanto ter

$$\left( \frac{4}{3}iA + \phi_{01}^+(2i) \right) B(2i - \xi_0) - AC \frac{16}{3} = 0,$$

o que nos permite determinar  $\xi_0$  (e, portanto, também  $p_{11}$ ) se

$$\frac{4}{3}iA + \phi_{01}^+(2i) \neq 0;$$

caso contrário não podemos determinar  $p_{11}$  nas condições referidas e portanto não há factorização canónica.

Note-se que a condição  $\frac{4}{3}iA + \phi_{01}^+(2i) \neq 0$  significa que o primeiro elemento do factor meromorfo  $M_+^{-1}$ , (4.5), não se anula em  $\xi = 2i$ . Note-se também que em (4.12) não podemos ter  $B = 0$  ou  $C = 0$  porque, como o raciocínio para determinar  $r_{12}$  e  $r_{22}$  é em tudo análogo, também teria de se concluir que  $r_{12} = 0$  (se  $B = 0$ ) ou  $r_{22} = 0$  (se  $C = 0$ ) e o determinante de  $R$  seria nulo. Sintetizemos todos estes resultados no seguinte teorema

**Teorema 42** *Seja  $G = \alpha I + \beta R$ ,  $R^2 = qI$ ,  $\alpha, \beta \in C^\mu(\mathbb{R})$  e*

$$R = \begin{pmatrix} \frac{\xi+2i}{\xi-2i} & \left( \frac{\xi+2i}{\xi-2i} \right)^2 - \frac{\xi+i}{\xi-i} \\ -1 & -\frac{\xi+2i}{\xi-2i} \end{pmatrix}.$$

*Nas condições acima descritas,  $G$  tem factorização canónica na álgebra se  $\phi_{02}^+(2i) = 0$  for um zero duplo; ou, caso seja um zero simples, se  $\frac{4}{3}iA +$*

## 4.2. Como obter uma factorização generalizada

$\phi_{01}^+(2i)(= m_{11}^+(2i)) \neq 0$ .  $G$  não tem factorização canónica se  $\phi_{02}^+(2i) \neq 0$  ou se  $\phi_{02}^+(2i) = 0$  for um zero simples e  $\frac{4}{3}iA + \phi_{01}^+(2i)(= m_{11}^+(2i)) = 0$ .

**Nota 43** Na determinação de condições de existência de factorização canónica, encontramos os  $r_{ij}$ . Logo para obter explicitamente a factorização canónica, basta aplicar o corolário 34.

É interessante estudar como se poderiam obter as mesmas conclusões pela via da passagem da factorização meromorfa para a factorização generalizada apresentado em 3.1. Consideraremos um dos casos anteriormente estudados, nomeadamente aquele em que  $\phi_{02}^+(2i) = 0$  é um zero simples.

Voltando à factorização meromorfa: temos, supondo  $\phi_{02}^+(2i) = 0$  um zero simples,

$$M_-^{+1} \in C_\mu^-(\mathbb{R})^{2 \times 2}$$

e  $M_+^{-1}$  da forma:

$$M_+^{-1} = \begin{pmatrix} m_{11}^+ & \frac{\xi+2i}{\xi-2i} m_{12}^+ \\ m_{21}^+ & m_{22}^+ \end{pmatrix},$$

onde  $m_{21}^+(2i) = 0$  e  $m_{12}^+(2i) \neq 0$ .

Procuramos a partir desta factorização meromorfa confirmar as condições de existência de factorização canónica.

Temos:

$$M_+^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} m_{11}^+ & m_{12}^+ \\ m_{21}^+ & m_{22}^+ \frac{\xi-2i}{\xi+2i} \end{pmatrix}}_{\tilde{M}_+^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\xi+2i}{\xi-2i} \end{pmatrix}}_{D_1}$$

onde  $m_{21}^+ = -q^{-1}\phi_{02}^+$  se anula em  $\xi = 2i$ . Portanto,  $\det \tilde{M}_+^{-1} = 0$  para  $\xi = 2i$  (nota-se que não pode haver mais zeros porque o determinante total tem de

## 4.2. Como obter uma fatorização generalizada

ser igual a  $\det G_{0+}^{-1}$ ). E, assim podemos utilizar mais uma vez os teoremas 28 e 30. Existem  $\lambda_1, \lambda_2$  não simultaneamente nulos tais que

$$\begin{aligned} \lambda_1 \begin{pmatrix} m_{11}^+(2i) \\ m_{21}^+(2i) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} m_{12}^+(2i) \\ (m_{22}^+ \frac{\xi-2i}{\xi+2i})_{\xi=2i} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} m_{11}^+(2i) \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} m_{12}^+(2i) \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\lambda_2 = -\lambda_1 \frac{m_{11}^+(2i)}{m_{12}^+(2i)}.$$

Note-se que  $m_{12}^+(2i) \neq 0$  porque senão o zero de  $\phi_{02}^+$  em  $\xi = 2i$  seria duplo. Portanto  $\lambda_2$  fica assim bem definido. Façamos  $\lambda_1 = 1$ , ou seja,  $\lambda_2 = -\frac{m_{11}^+(2i)}{m_{12}^+(2i)}$ .

Então:

$$\tilde{M}_+^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\xi+2i}{\xi-2i}m_{11}^+ - \frac{m_{11}^+(2i)}{m_{12}^+(2i)}\frac{\xi+2i}{\xi-2i}m_{12}^+ & m_{12}^+ \\ \frac{\xi+2i}{\xi-2i}m_{21}^+ - \frac{m_{11}^+(2i)}{m_{12}^+(2i)}m_{22}^+ & \frac{\xi-2i}{\xi+2i}m_{22}^+ \end{pmatrix}}_{N_+} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\xi+2i}{\xi-2i} & 0 \\ \frac{m_{11}^+(2i)}{m_{12}^+(2i)} & 1 \end{pmatrix}}_{R_1},$$

e, portanto,

$$\tilde{M}_+^{-1} = N_+ R_1 \Rightarrow M_+^{-1} = N_+ R_1 D_1 \Rightarrow G = M_- M_+ = M_- (R_1 D_1)^{-1} N_+^{-1}.$$

Ora,

$$(R_1 D_1)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\xi-2i}{\xi+2i} & 0 \\ \frac{m_{11}^+(2i)}{m_{12}^+(2i)} & \frac{\xi+2i}{\xi-2i} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\xi+2i}{\xi-2i} & 0 \\ -\frac{m_{11}^+(2i)}{m_{12}^+(2i)} & \frac{\xi-2i}{\xi+2i} \end{pmatrix}$$

tem fatorização canônica se  $m_{11}^+(2i) = (\phi_{02}^+ \frac{\xi+2i}{\xi-2i} \frac{\xi-i}{\xi+i} + \phi_{01}^+)_{\xi=2i} \neq 0$ .

**Nota 44** Uma vez que  $\det(R_1 D_1) = 1$ ,  $(R_1 D_1)^{-1}$  tem fatorização canônica se e só se  $(R_1 D_1)^{-1} \phi^+ = \phi^-$  admite apenas a solução nula. Ora,

$$\begin{pmatrix} \frac{\xi+2i}{\xi-2i} & 0 \\ -\frac{m_{11}^+(2i)}{m_{12}^+(2i)} & \frac{\xi-2i}{\xi+2i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1^- \\ \phi_2^- \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\xi+2i}{\xi-2i} \phi_1^+ = \phi_1^- = \frac{A}{\xi-2i} \\ -\frac{m_{11}^+(2i)}{m_{12}^+(2i)} \phi_1^+ + \frac{\xi-2i}{\xi+2i} \phi_2^+ = \phi_2^- \end{cases}$$

## 4.2. Como obter uma factorização generalizada

para uma certa constante  $A \in \mathbb{C}$ . Assim,

$$\phi_1^+ = \frac{A}{\xi + 2i} \Rightarrow -\frac{m_{11}^+(2i)}{m_{12}^+(2i)} \frac{A}{\xi + 2i} + \frac{\xi - 2i}{\xi + 2i} \phi_2^+ = \phi_2^- = 0$$

e, portanto,

$$\phi_2^+ = \frac{m_{11}^+(2i)}{m_{12}^+(2i)} \frac{A}{\xi - 2i} \Rightarrow A = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{m_{11}^+(2i)}{m_{12}^+(2i)} = 0.$$

E, assim, concluímos que  $m_{11}^+(2i) \neq 0$  é condição necessária e suficiente para existir factorização canónica.

### 4.2.5 5º caso $q = \frac{(\xi - a_1)(\xi - a_2)}{(\xi - b_1)(\xi - b_2)}$ ( $b_1 = b_2$ ou $a_1 = a_2$ )

Suponhamos, para fixar ideias, que se tem  $b_1 \neq b_2$  e  $a_1 = a_2 = a \in \mathbb{C}^+$ .

Impondo, como condição de normalização para a primeira coluna  $f_+$ , que

$$f_{2+}(a) = 0 \quad \text{e} \quad f_{1+}(a) \neq 0,$$

a equação do produto dá

$$(\det G)_+(f_{1+}^2 - q^{-1}f_{2+}^2) = (\det G)_-(f_{1-}^2 - q^{-1}f_{2-}^2) = K \neq 0,$$

mas agora, ao contrário do que sucedia no caso anterior, os factores  $M_+^{-1}$  e  $M_-$ , em geral, não são analíticos, nos semi-planos correspondentes ( $\mathbb{C}^+$  e  $\mathbb{C}^-$  respectivamente). Vê-se facilmente que a factorização  $G = M_- M_+$  será uma factorização generalizada (dentro da classe) se e só se o zero de  $f_{2+}$  em  $\xi = a$  for um zero duplo.

Suponhamos que, pelo contrário,  $f_{2+}$  tem um zero simples em  $\xi = a$ . Então,  $M_-^{-1} = [f_- \quad \tilde{R}f_-] \in C_\mu^-(\mathbb{R})^{2 \times 2}$ , mas

$$M_+^{-1} = [f_+ \quad \tilde{R}f_+] = \begin{pmatrix} f_{1+} & q^{-1}f_{2+} \\ f_{2+} & f_{1+} \end{pmatrix}$$

## 4.2. Como obter uma fatorização generalizada

tem um polo simples em  $\xi = a$  no elemento da 1ª linha, 2ª coluna.

Explicitando:

$$M_+^{-1} = \begin{pmatrix} f_{1+} & \frac{(\xi-b_1)(\xi-b_2)}{(\xi-a)^2} f_{2+} \\ f_{2+} & f_{1+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1+} & \frac{\xi-b_1}{\xi-a} \tilde{f}_{2+} \\ f_{2+} & f_{1+} \end{pmatrix},$$

onde  $\tilde{f}_{2+} = \frac{\xi-b_2}{\xi-a} f_{2+} \in C_\mu^+(\mathbb{R})$  e  $\tilde{f}_{2+}(a) \neq 0$ . Podemos então escrever

$$\begin{aligned} M_+ &= \frac{1}{K}(\det G)_+ \begin{pmatrix} f_{1+} & -\frac{(\xi-b_1)(\xi-b_2)}{(\xi-a)^2} f_{2+} \\ -f_{2+} & f_{1+} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{K}(\det G)_+ \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\xi+i}{\xi-a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D_1} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\xi-a}{\xi+i} f_{1+} & -\frac{\xi-b_1}{\xi+i} \tilde{f}_{2+} \\ -f_{2+} & f_{1+} \end{pmatrix}}_{N_+}. \end{aligned}$$

ou seja, podemos substituir a fatorização meromorfa  $G = M_- M_+$  por

$$G = \frac{1}{K}(\det G)_+ M_- D_1 N_+,$$

onde  $M_\pm^{-1} \in C_\mu^\pm(\mathbb{R})^{2 \times 2}$ ,  $D_1$  é uma matriz racional diagonal (logo, facilmente fatorizável) e  $N_+ \in C_\mu^+(\mathbb{R})^{2 \times 2}$ ; mas  $N_+^{-1} \notin C_\mu^+(\mathbb{R})^{2 \times 2}$  porque  $\det N_+$  tem um zero (simples) em  $\xi = a$ , conforme se mostra a seguir:

$$\det N_+ = \frac{\xi-a}{\xi+i} \left( f_{1+}^2 - \frac{(\xi-b_1)(\xi-b_2)}{(\xi-a)^2} f_{2+}^2 \right) = \frac{\xi-a}{\xi+i} K (\det G)_+^{-1}.$$

Podemos portanto usar o teorema 30, como no exemplo que foi dado no caso de  $\rho$  ser uma função racional, para obter uma fatorização generalizada:

Seja então

$$N_+ = \begin{pmatrix} \frac{\xi-a}{\xi+i} f_{1+} & -\frac{\xi-b_1}{\xi+i} \tilde{f}_{2+} \\ -f_{2+} & f_{1+} \end{pmatrix}.$$

## 4.2. Como obter uma fatorização generalizada

Tendo em conta o teorema 28, obtemos

$$N_+ = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\xi-a}{\xi+i} & -\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_1} \underbrace{\begin{pmatrix} f_{1+} - \beta \frac{\xi+i}{\xi-a} f_{2+} & -\frac{\xi-b_1}{\xi-a} \tilde{f}_{2+} + \beta \frac{\xi+i}{\xi-a} f_{1+} \\ -f_{2+} & f_{1+} \end{pmatrix}}_{\tilde{N}_+}$$

e portanto  $G = (\frac{1}{K}(\det G)_+)M_-D_1R_1\tilde{N}_+ = (\frac{1}{K}(\det G)_+)M_-R_-\tilde{N}_+$ , onde agora

$$R_- = D_1R_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\beta \frac{\xi+i}{\xi-a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$R_- \in \mathcal{GR}(\mathbb{R})$ ,  $M_-^{\pm 1} \in C_\mu^\pm(\mathbb{R})^{2 \times 2}$  e  $(\tilde{N}_+)^{\pm 1} \in C_\mu^+(\mathbb{R})^{2 \times 2}$ . A fatorização generalizada de  $G$  (neste caso canónica) será portanto  $G = G_-G_+$  em que  $G_- = M_-R_-$  e  $G_+ = \frac{1}{K}(\det G)_+\tilde{N}_+$ .

**Nota 45** A existência de uma fatorização canónica está portanto (apenas) dependente da existência de uma solução de  $Gf_+ = f_-$  com  $f_{2+}(a) = 0$  e  $f_{1+}(a) \neq 0$

Relevante é, neste caso, a seguinte questão: será que pode sempre garantir-se a existência de uma solução da equação  $Gf_+ = f_-$  que satisfaz as condições

$$f_{2+}(a) = 0 \quad \text{e} \quad f_{1+}(a) \neq 0?$$

Suponhamos que  $G$  não tem fatorização canónica, por exemplo:

$$G = G_- \begin{pmatrix} \frac{\xi+i}{\xi-i} & 0 \\ 0 & \frac{\xi-i}{\xi+i} \end{pmatrix} G_+.$$

Suponhamos ainda que há uma solução  $(f_+, f_-)$ , com  $f_\pm \in C_\mu^\pm(\mathbb{R})^2$ , da equação  $Gf_+ = f_-$ . Então temos

$$G_- \begin{pmatrix} \frac{\xi+i}{\xi-i} & 0 \\ 0 & \frac{\xi-i}{\xi+i} \end{pmatrix} G_+f_+ = f_-.$$

## 4.2. Como obter uma factorização generalizada

ou seja,

$$\begin{pmatrix} \frac{\xi+i}{\xi-i} & 0 \\ 0 & \frac{\xi-i}{\xi+i} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} g_{11}^+ & g_{12}^+ \\ g_{21}^+ & g_{22}^+ \end{pmatrix}}_{G_+} \begin{pmatrix} f_{1+} \\ f_{2+} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} g_{11}^- & g_{12}^- \\ g_{21}^- & g_{22}^- \end{pmatrix}}_{G_-^{-1}} \begin{pmatrix} f_{1-} \\ f_{2-} \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\xi+i}{\xi-i}(g_{11}^+f_{1+} + g_{12}^+f_{2+}) = g_{11}^-f_{1-} + g_{12}^-f_{2-} = \frac{A\xi+B}{\xi-i} \\ \frac{\xi-i}{\xi+i}(g_{21}^+f_{1+} + g_{22}^+f_{2+}) = g_{21}^-f_{1-} + g_{22}^-f_{2-} = K \end{cases} \quad (4.13)$$

Portanto, da primeira igualdade, vem que, das duas uma:

(A) ou  $g_{11}^+f_{1+} + g_{12}^+f_{2+} = \frac{A\xi+B}{\xi+i}$  tem um zero em  $\mathbb{C}^+ \cup \infty$

(B) ou  $g_{11}^-f_{1-} + g_{12}^-f_{2-} = \frac{A\xi+B}{\xi-i}$  tem um zero em  $\mathbb{C}^- \cup \infty$ .

Por outro lado, da segunda igualdade, como o primeiro membro se anula para  $\xi = i$ , vemos que a constante  $K$  tem de ser igual a zero, ou seja

$$g_{21}^+f_{1+} + g_{22}^+f_{2+} = g_{21}^-f_{1-} + g_{22}^-f_{2-} = 0.$$

Suponhamos que é a hipótese (A) que se verifica. Então há um ponto  $\xi_0 \in \mathbb{C}^+$  tal que

$$\begin{cases} g_{11}^+f_{1+} + g_{12}^+f_{2+} = 0 \\ g_{21}^+f_{1+} + g_{22}^+f_{2+} = 0 \end{cases} \quad \text{para } \xi = \xi_0 \quad (4.14)$$

e, como o determinante deste sistema é obrigatoriamente nulo, conclui-se que

$$f_{1+}(\xi_0) = f_{2+}(\xi_0) = 0.$$

Mas, por outro lado, da equação do produto para este tipo de matrizes, vem que

$$(\det G)_+(f_{1+}^2 - q^{-1}f_{2+}^2) = (\det G)_-^{-1}(f_{1-}^2 - q^{-1}f_{2-}^2) = K \neq 0;$$

#### 4.2. Como obter uma fatorização generalizada

ora, se  $f_{1+}(\xi_0) = f_{2+}(\xi_0)$  para  $\xi_0 \neq a$ , teríamos  $K = 0$ ; logo o zero, a existir, terá de ser em  $a$ , isto é,  $f_{1+}(a) = f_{2+}(a) = 0$ .

**Nota 46** Se fosse  $K = 0$  seria  $f_{1+}^2 = q^{-1}f_{2+}^2$  e  $f_{1-}^2 = q^{-1}f_{2-}^2$ . Portanto, supondo por exemplo que  $b_1, b_2 \in \mathbb{C}^-$ , isto significava que  $f_{1-}^2 = \frac{(\xi-b_1)(\xi-b_2)}{(\xi-a)^2} f_{2-}^2$ , ou seja  $f_{1-}^2$  tinha dois zeros simples em  $\mathbb{C}^-$ , o que é impossível por estar ao quadrado.

**Conclusão:** Do facto de obtermos sempre uma factorização canónica a partir de uma primeira solução de  $Gf_+ = f_-$  que satisfaz as condições  $f_{2+}(a) = 0$  e  $f_{1+}(a) \neq 0$  não pode concluir-se que haja sempre factorização canónica. A factorização pode portanto ser não canónica, como se sabe já de outros estudos. De facto pode não haver uma primeira solução  $[f_+ \ f_-]$  e portanto a factorização pode não ser canónica.

A obtenção de uma condição de existência de factorização canónica pode no entanto ser obtida através do corolário 34:

Tomemos como exemplo novamente o caso anterior,  $G = \alpha I + \beta R$  com

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix}$$

e  $q(\xi) = \frac{(\xi-b_1)(\xi-b_2)}{(\xi-a)^2}$ . Estas matrizes podem relacionar-se com as do caso em que  $q = \frac{\xi-a}{\xi-b}$ , estudado anteriormente, do seguinte modo:

Seja  $\tilde{q} = \frac{\xi-a}{\xi-b_1}$ ,  $q_0 = \frac{\xi-b_1}{\xi-b_2}$ ; temos

$$R = \underbrace{\tilde{q} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{q} \end{pmatrix}}_Q \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q_0 & 0 \end{pmatrix}}_{R_0} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{q}^{-1} \end{pmatrix}}_{Q^{-1}}$$

## 4.2. Como obter uma fatorização generalizada

onde  $R_0$  é da forma considerada no caso da secção anterior ( $q_0$  é um quociente de dois polinómios do 1º grau). Portanto

$$G = \alpha I + \beta R = \alpha I + \beta q_0 Q R_0 Q^{-1} = Q \underbrace{[\alpha I + \beta q_0 R_0]}_{G_0} Q^{-1}$$

com  $\det G = \det G_0$  (logo  $\text{ind det } G_0 = 0$ ). Assim  $G_0$  admite factorização canónica  $G_0 = G_{0-} G_{0+}$  e podemos então escrever

$$G = \underbrace{Q G_{0-} Q^{-1}}_{M_-} \cdot \underbrace{Q G_{0+} Q^{-1}}_{M_+}.$$

Sejam

$$M_- = \begin{pmatrix} f_{01}^- & \tilde{q}^{-1} q_0^{-1} f_{02}^- \\ \tilde{q} f_{02}^- & f_{01}^- \end{pmatrix}, \quad M_+^{-1} = \begin{pmatrix} f_{01}^+ & \tilde{q}^{-1} q_0^{-1} f_{02}^+ \\ \tilde{q} f_{02}^+ & f_{01}^+ \end{pmatrix},$$

onde  $f_{0\pm} = (f_{01}^\pm, f_{02}^\pm)$  são tais que  $G_0 f_{0+} = f_{0-}$ .

Do corolário 34 sabemos que  $G$  admite factorização canónica se e só se existir uma matriz de funções racionais  $\tilde{R}$ , com  $\det \tilde{R} = k \neq 0$ , tal que

$$M_- \tilde{R} \in C_\mu^-(\mathbb{R})^{2 \times 2} \quad \text{e} \quad M_+^{-1} \tilde{R} \in C_\mu^+(\mathbb{R})^{2 \times 2}. \quad (4.15)$$

Vimos também que isso significa que existem  $r_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) tais que

$$r_{11} = \frac{f_{11}^- f_{01}^- - f_{21}^- \tilde{q}^{-1} q_0^{-1} f_{02}^-}{f_{01-}^2 - q_0^{-1} f_{02-}^2} = \frac{f_{11}^+ f_{01}^+ - f_{21}^+ \tilde{q}^{-1} q_0^{-1} f_{02}^+}{f_{01+}^2 - q_0^{-1} f_{02+}^2} = \frac{A\xi + B}{\xi - a}$$

e

$$r_{21} = \frac{f_{21}^- f_{01}^- - f_{11}^- \tilde{q} f_{02}^-}{f_{01-}^2 - q_0^{-1} f_{02-}^2} = \frac{f_{21}^+ f_{01}^+ - f_{11}^+ \tilde{q} f_{02}^+}{f_{01+}^2 - q_0^{-1} f_{02+}^2} = C,$$

onde  $A, B, C \in \mathbb{C}$ , e se supôs que  $f_{ij}^\pm \in C^{\mu\pm}(\mathbb{R})$  ( $i, j = 1, 2$ ).

Entrando agora em conta com a forma que devem ter as funções racionais  $r_{11}$  e  $r_{21}$ , vemos que as condições (4.15) impõem que

$$\frac{A\xi + B}{\xi - a} f_{01}^+ + C \frac{\xi - b_2}{\xi - a} f_{02}^+ \in C_\mu^+(\mathbb{R}).$$

## 4.2. Como obter uma fatorização generalizada

donde

$$\begin{aligned} & [(A\xi + B)f_{01}^+ + C(\xi - b_2)f_{02}^+]_{\xi=a} = 0 \\ & \Leftrightarrow \underbrace{(Aa + B)f_{01}^+(a) + C(a - b_2)f_{02}^+(a)}_{(I)} = 0. \end{aligned}$$

Analogamente se verificaria que as funções racionais  $r_{12}$  e  $r_{22}$  deveriam ter a forma

$$r_{12} = \frac{\tilde{A}\xi + \tilde{B}}{\xi - a} \quad \text{e} \quad r_{22} = \tilde{C}$$

onde  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in \mathbb{C}$ , de tal forma que

$$\underbrace{(\tilde{A}a + \tilde{B})f_{01}^+(a) + \tilde{C}(a - b_2)f_{02}^+(a)}_{(II)} = 0.$$

Das equações (I) e (II) vem que se tomarmos  $f_{01}^+$  e  $(a - b_2)f_{02}^+$  como incógnitas, o determinante de

$$\begin{pmatrix} r_{11}(a) & r_{12}(a) \\ r_{21}(a) & r_{22}(a) \end{pmatrix}$$

deve ser igual a zero para que o sistema formado pelas equações possa ter soluções não nulas (com  $f_{01}^+(a) \neq 0$ ). Portanto deve ter-se

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}a + \tilde{B} \\ \tilde{C} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} Aa + B \\ C \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (Aa + B)f_{01}^+(a) + C(a - b_2)f_{02}^+(a) = 0.$$

- Se  $f_{01}^+(a) = 0$ , terá de ser

$$C = 0 \Rightarrow \tilde{C} = 0 \Rightarrow r_{12} = r_{22} = 0 \Rightarrow \det \tilde{R} = 0.$$

Logo não há nenhuma matriz racional  $\tilde{R}$  invertível que satisfaça (4.15), e portanto não há fatorização generalizada canónica de  $G$ .

## 4.2. Como obter uma fatorização generalizada

• Se  $f_{01}^+(a) \neq 0$ , então, desde que  $A, B, \tilde{A}, \tilde{B}$  satisfaçam

$$B = -Aa - \frac{(a - b_2)C f_{02}^+(a)}{f_{01}^+(a)}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{A}a + \tilde{B} \\ \tilde{C} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} Aa + B \\ C \end{pmatrix} \text{ com } \lambda \neq \frac{\tilde{A}}{A},$$

temos funções racionais  $r_{ij}$  satisfazendo todas as condições para a existência de  $\tilde{R}$ , racional, invertível, tal que (4.15) é satisfeita.

**Nota 47** Temos que impor  $\lambda \neq \frac{\tilde{A}}{A}$ , pois caso contrário, com  $c \in \mathbb{C}$  constante,

$$\begin{aligned} \det \tilde{R} &= \frac{1}{\xi - a} \det \begin{pmatrix} A\xi + B & \tilde{A}\xi + \tilde{B} \\ C & \tilde{C} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\xi - a} \det \begin{pmatrix} A(\xi - a) - c & \tilde{A}(\xi - a) - \lambda c \\ C & \lambda C \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\xi - a} \det \begin{pmatrix} A(\xi - a) & \tilde{A}(\xi - a) \\ C & \lambda C \end{pmatrix} - \underbrace{c \det \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ C & \lambda C \end{pmatrix}}_{=0} \\ &= \frac{1}{\xi - a} C \det \begin{pmatrix} A(\xi - a) & \tilde{A}(\xi - a) \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tem de se ter  $C \neq 0$  e  $\lambda \neq \frac{\tilde{A}}{A}$ , para que o  $\det \tilde{R} = k \neq 0$ .

### 4.2.6 6º caso $q = \frac{(\xi - a_1)(\xi - a_2)}{(\xi - b_1)(\xi - b_2)}$ ( $b_1 \neq b_2, a_1 \neq a_2$ )

Seja  $G = \alpha I + \beta R$ , onde  $R^2 = qI$ ,  $\alpha, \beta \in C^\mu(\mathbb{R})$  e

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$G = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ q\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

## 4.2. Como obter uma fatorização generalizada

Suponhamos, para fixar idcias, que se tem  $b_1 = b_{1+}, b_2 = b_{2+} \in \mathbb{C}^+$  e  $a_1 = a_{1-}, a_2 = a_{2-} \in \mathbb{C}^-$ .

Como atrás se viu, uma fatorização meromorfa para  $G$ , dentro da classe de Daniele-Khrapkov é  $G = M_- M_+$  com

$$M_- = \begin{pmatrix} f_{1-} & q^{-1}f_{2-} \\ f_{2-} & f_{1-} \end{pmatrix}, \quad M_+^{-1} = \begin{pmatrix} f_{1+} & q^{-1}f_{2+} \\ f_{2+} & f_{1+} \end{pmatrix},$$

onde  $f_{\pm} = (f_{1\pm}, f_{2\pm})$  são tais que  $Gf_+ = f_-$ .

Como condição de normalização para a primeira coluna  $f_-$ , consideremos

$$f_{2-}(a_{1-}) = 0 \quad \text{e} \quad f_{1-}(a_{1-}) \neq 0.$$

Note-se que com estas condições de normalização  $M_+^{-1} \in \mathcal{C}_\mu^+(\mathbb{R})^{2 \times 2}$  enquanto em  $M_-$  aparece um polo para  $\xi = a_{2-}$ .

A equação do produto obtida como em 2.4 dá

$$(\det G)_+(f_{1+}^2 - q^{-1}f_{2+}^2) = (\det G)_-(f_{1-}^2 - q^{-1}f_{2-}^2) = \frac{A\xi + B}{\xi - a_{2-}};$$

com  $A, B \in \mathbb{C}$ . Admitindo  $A \neq 0$  e definindo  $z_0 = -\frac{B}{A}$ , a equação do produto escreve-se

$$(\det G)_+(f_{1+}^2 - q^{-1}f_{2+}^2) = (\det G)_-(f_{1-}^2 - q^{-1}f_{2-}^2) = \frac{\xi - z_0}{\xi - a_{2-}}. \quad (4.16)$$

Note-se que

$$\det M_+^{-1} = f_{1+}^2 - q^{-1}f_{2+}^2 \quad \text{e} \quad \det M_- = f_{1-}^2 - q^{-1}f_{2-}^2.$$

Logo das igualdades (4.16) conclui-se que um dos dois determinantes tem um zero em  $z_0$ , consoante  $z_0 \in \mathbb{C}^+$  ou  $\mathbb{C}^-$ . Por outro lado há um polo em  $M_-$  para  $\xi = a_{2-}$ .

## 4.2. Como obter uma fatorização generalizada

Podem ter-se então as seguintes situações:

- $z_0 = a_{2-}$

Nesse caso  $f_{2-}(z_0) = f_{2-}(a_{2-}) = 0$  e, portanto,  $G = M_- M_+$  é uma fatorização generalizada (dentro da classe) de  $G$ .

- $a_{2-} \neq z_0 \in \mathbb{C}^-$

Neste caso

$$M_+^{-1} = \begin{pmatrix} f_{1+} & q^{-1}f_{2+} \\ f_{2+} & f_{1+} \end{pmatrix} \in \mathcal{GC}_\mu^+(\mathbb{R})^{2 \times 2},$$

mas

$$M_- = \begin{pmatrix} f_{1-} & q^{-1}f_{2-} \\ f_{2-} & f_{1-} \end{pmatrix}$$

tem um polo em  $\xi = a_{2-}$ , logo  $M_- \notin \mathcal{GC}_\mu^-(\mathbb{R})^{2 \times 2}$ . Fazendo

$$M_- = \underbrace{\begin{pmatrix} f_{1-} & \frac{\xi - a_{2-}}{\xi - i} q^{-1} f_{2-} \\ f_{2-} & \frac{\xi - a_{2-}}{\xi - i} f_{1-} \end{pmatrix}}_{N_-} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\xi - i}{\xi - a_{2-}} \end{pmatrix}}_{R_1},$$

então  $N_-$  já não tem polos em  $\mathbb{C}^-$ , mas  $\det N_- = (\det G)_- \frac{\xi - z_0}{\xi - i}$  tem um zero em  $\xi = z_0$ . Podemos então utilizar corolário 29 e o teorema 30. Existem  $\lambda_1, \lambda_2$  não simultaneamente nulos tal que

$$\begin{aligned} \lambda_1 (f_{1-}(z_0), f_{2-}(z_0)) + \lambda_2 \frac{z_0 - a_{2-}}{z_0 - i} (q^{-1}(z_0)f_{2-}(z_0), f_{1-}(z_0)) &= (0, 0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda_1 &= -\frac{z_0 - a_{2-}}{z_0 - i} \frac{f_{1-}(z_0)}{f_{2-}(z_0)} \lambda_2. \end{aligned}$$

Fazendo  $\lambda_2 = 1$  vem que  $\lambda_1 = -\frac{z_0 - a_{2-}}{z_0 - i} \frac{f_{1-}(z_0)}{f_{2-}(z_0)}$ . Seja  $\theta = \frac{z_0 - a_{2-}}{z_0 - i}$ , tem-se então que  $N_- = \tilde{N}_- \tilde{R}$ , onde

$$\tilde{N}_- = \begin{pmatrix} f_{1-} & -\theta \frac{\xi - i}{\xi - z_0} \frac{f_{1-}(z_0)}{f_{2-}(z_0)} f_{1-} + \frac{\xi - a_{2-}}{\xi - z_0} q^{-1} f_{2-} \\ f_{2-} & -\theta \frac{\xi - i}{\xi - z_0} \frac{f_{1-}(z_0)}{f_{2-}(z_0)} f_{2-} + \frac{\xi - a_{2-}}{\xi - z_0} f_{1-} \end{pmatrix} \in \mathcal{GC}_\mu^-(\mathbb{R})^{2 \times 2}$$

#### 4.2. Como obter uma fatorização generalizada

e

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 1 & \theta \frac{f_{1-}(z_0)}{f_{2-}(z_0)} \\ 0 & \frac{\xi - z_0}{\xi - i} \end{pmatrix}.$$

Assim,  $G = \tilde{N}_- \tilde{R} R_1 M_+$ , onde

$$R_+ = \tilde{R} R_1 = \begin{pmatrix} 1 & \theta \frac{f_{1-}(z_0)}{f_{2-}(z_0)} \frac{\xi - i}{\xi - a_{2-}} \\ 0 & \frac{\xi - z_0}{\xi - a_{2-}} \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^+.$$

Assim,

$$G = \underbrace{\tilde{N}_-}_{G_-} \underbrace{\left( R_+ (\det G)_+ \frac{\xi - a_{2-}}{\xi - z_0} \begin{pmatrix} f_{1+} & -q^{-1} f_{2+} \\ -f_{2+} & f_{1+} \end{pmatrix} \right)}_{G_+},$$

ou seja,

$$G_+ = (\det G)_+ \begin{pmatrix} \frac{\xi - i}{\xi - z_0} f_{1+} + \theta \frac{f_{1-}(z_0)}{f_{2-}(z_0)} \frac{\xi - a_{2-}}{\xi - z_0} f_{2+} & -q^{-1} \frac{\xi - a_{2-}}{\xi - z_0} f_{2+} + \theta \frac{f_{1-}(z_0)}{f_{2-}(z_0)} \frac{\xi - i}{\xi - z_0} f_{1+} \\ -f_{2+} & f_{1+} \end{pmatrix}$$

(logo  $G_+ \in \mathcal{GC}_\mu^+(\mathbb{R})^{2 \times 2}$ ) e  $G = G_- G_+$  é uma fatorização generalizada canónica de  $G$  dentro da classe.

**Nota 48** Repare-se que os factores não são exactamente os mesmos que os encontrados em [13], mas multiplicando os factores aí encontrados pela matriz constante

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{f_{1-}(z_0)}{f_{2-}(z_0)} \frac{a_{2-} - i}{z_0 - i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

obtêm-se exactamente os nossos factores.

- $z_0 \in \mathbb{C}^+$

#### 4.2. Como obter uma fatorização generalizada

$$M_- = \begin{pmatrix} f_{1-} & q^{-1}f_{2-} \\ f_{2-} & f_{1-} \end{pmatrix}$$

tem um polo em  $\xi = a_{2-}$ ; fazendo

$$M_- = \underbrace{\begin{pmatrix} f_{1-} & \frac{\xi - a_{2-}}{\xi - z_0} q^{-1} f_{2-} \\ f_{2-} & \frac{\xi - a_{2-}}{\xi - z_0} f_{1-} \end{pmatrix}}_{N_-} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\xi - z_0}{\xi - a_{2-}} \end{pmatrix}}_{R_1},$$

temos agora que  $N_- \in \mathcal{GC}_\mu^-(\mathbb{R})^{2 \times 2}$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned} \tilde{M}_+ &= R_1 M_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\xi - z_0}{\xi - a_{2-}} \end{pmatrix} (\det G)_+ \frac{\xi - a_{2-}}{\xi - z_0} \begin{pmatrix} f_{1+} & -q^{-1}f_{2+} \\ -f_{2+} & f_{1+} \end{pmatrix} \\ &= (\det G)_+ \begin{pmatrix} \frac{\xi - a_{2-}}{\xi - z_0} f_{1+} & -\frac{\xi - a_{2-}}{\xi - z_0} q^{-1} f_{2+} \\ -f_{2+} & f_{1+} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

mas então  $\tilde{M}_+$  tem um polo em  $\xi = z_0$ . Fazendo

$$\tilde{M}_+ = (\det G)_+ \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\xi + i}{\xi - z_0} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_2} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\xi - a_{2-}}{\xi + i} f_{1+} & -\frac{\xi - a_{2-}}{\xi + i} q^{-1} f_{2+} \\ -f_{2+} & f_{1+} \end{pmatrix}}_{N_+},$$

vemos agora que  $\det N_+ = (\det G)_+ \frac{\xi - z_0}{\xi + i}$  tem um zero em  $\xi = z_0$ . Podemos então utilizar o teorema 28 e o teorema 30. Existem  $\lambda_1, \lambda_2$  não simultaneamente nulos tais que

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{z_0 - a_{2-}}{z_0 + i} (f_{1+}(z_0), -q^{-1}(z_0)f_{2+}(z_0)) + \lambda_2 (-f_{2+}(z_0), f_{1+}(z_0)) &= (0, 0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda_2 &= -\frac{z_0 - a_{2-}}{z_0 + i} \frac{f_{1+}(z_0)}{f_{2+}(z_0)} \lambda_1. \end{aligned}$$

#### 4.2. Como obter uma factorização generalizada

Fazendo  $\lambda_1 = 1$ , vem que  $\lambda_2 = -\frac{z_0 - a_2 -}{z_0 + i} \frac{f_{1+}(z_0)}{f_{2+}(z_0)}$ . Seja  $\mu = \frac{z_0 - a_2 -}{z_0 + i}$ ; tem-se então que  $N_+ = (\det G)_+ \tilde{N}_+ \tilde{R}$ , onde

$$\tilde{N}_+ = \begin{pmatrix} \mu \frac{\xi+i}{\xi-z_0} f_{1+} - \mu \frac{f_{1+}(z_0)}{f_{2+}(z_0)} \frac{\xi+i}{\xi-z_0} f_{2+} & -\mu q^{-1} \frac{\xi+i}{\xi-z_0} f_{2+} + \mu \frac{f_{1+}(z_0)}{f_{2+}(z_0)} \frac{\xi+i}{\xi-z_0} f_{1+} \\ -f_{2+} & f_{1+} \end{pmatrix}$$

(logo  $\tilde{N}_+ \in \mathcal{GC}_\mu^+(\mathbb{R})^{2 \times 2}$ ) e

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} \frac{\xi-z_0}{\xi+i} & -\mu \frac{f_{1+}(z_0)}{f_{2+}(z_0)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim,  $G = (\det G)_+ N_- R_2 \tilde{R} \tilde{N}_+$ , onde

$$R_- = R_2 \tilde{R} = \begin{pmatrix} 1 & -\mu \frac{f_{1+}(z_0)}{f_{2+}(z_0)} \frac{\xi+i}{\xi-z_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^-,$$

e, portanto,

$$G = \underbrace{N_- R_-}_G \underbrace{((\det G)_+ \tilde{N}_+)}_{G_+},$$

ou seja,

$$G_- = \begin{pmatrix} f_{1-} & -\mu \frac{f_{1+}(z_0)}{f_{2+}(z_0)} \frac{\xi+i}{\xi-z_0} f_{1-} + -q^{-1} \frac{\xi-a_2-}{\xi-z_0} f_{2-} \\ f_{2-} & -\mu \frac{f_{1+}(z_0)}{f_{2+}(z_0)} \frac{\xi+i}{\xi-z_0} f_{2-} + \frac{\xi-a_2-}{\xi-z_0} f_{1-} \end{pmatrix} \in \mathcal{GC}_\mu^-(\mathbb{R})^{2 \times 2}.$$

Então,  $G = G_- G_+$  é uma factorização generalizada canónica de  $G$  dentro da classe.

**Nota 49** Repare-se, mais uma vez, que os factores não são exactamente os mesmos que os encontrados em [13], mas multiplicando os factores aí encontrados pela matriz constante

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{f_{1+}(z_0)}{f_{2+}(z_0)} \frac{a_2-+i}{z_0+i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

obtêm-se exactamente os nossos factores.

## Bibliografia

- [1] L. Ahlfors. *Complex Analysis*. MacGraw-Hill, 3<sup>rd</sup> ed. edition, 1979.
- [2] K. Clancey and I. Gohberg. *Factorization of Matrix Functions and Singular Integral operators*. Basel: Birkhäuser, 1981.
- [3] M. C. Câmara. Operadores com símbolo em  $l_\infty(\mathbb{R})$  e factorização generalizada. Master's thesis, Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa, 1987.
- [4] Maria Teresa Mesquita da Cunha Machado Malheiro. Factorização generalizada de uma classe de símbolos matriciais. Master's thesis, Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa, 1999.
- [5] R. G. Douglas. *Banach algebra techniques in operator theory*. Academic Press, New York, 1972.
- [6] Roland Duduchava. *Integral equations in convolution with discontinuous presymbols*. Leipzig, 1979.
- [7] A. B. Lebre M. C. Câmara and F.-O. Speck. Meromorphic factorization, partial index estimates and elastodynamic diffraction problems. *Math. Nachr.*, 157:291–317, 1992.

## Bibliografia

- [8] A. B. Lebre M. C. Câmara and F.-O. Speck. Generalised factorisation for a class of Jones form matrix functions. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, pages 401–422, 1993.
- [9] A. F. dos Santos M. C. Câmara. A non-linear approach to generalized factorization of matrix functions. *Op. Th.: Advances and Appl.*, 102:21–37, 1998.
- [10] A. F. dos Santos M. C. Câmara. Wiener-Hopf factorization of a generalized Daniele-Khrapkov class of  $2 \times 2$  matrix symbols. *Math. Meth. Appl. Sci.*, (22):461–484, 1999.
- [11] A. F. dos Santos M. C. Câmara and M. A. Bastos. Generalized factorization for Daniele-Khrapkov matrix functions -explicit formulas. *J. Math. Analysis Appl.*, 190:295–328, 1995.
- [12] A. F. dos Santos M. C. Câmara and M. A. Bastos. Generalized factorization for Daniele-Khrapkov matrix functions -partial indices. *J. Math. Analysis Appl.*, 190:142–164, 1995.
- [13] A. F. dos Santos M. C. Câmara and M. P. Carpentier. Explicit Wiener-Hopf factorization an nonlinear Riemann-Hilbert problems. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 132A:45–74, 2002.
- [14] M. T. Malheiro M. C. Câmara. Wiener-Hopf factorization for a group of exponentials of nilpotent matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 320:79–96, 2000.
- [15] S. Mikhlin and S. Prössdorf. *Singular Integral Operators*. Springer, Berlin, 1986.