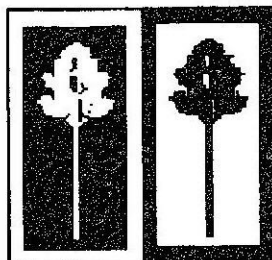


**ENCONTRO**  
**SOBRE**  
**PINHAL BRAVO**  
**MATERIAL LENHOSO E RESINA**



**Bencanta, 5 e 6 de Dezembro de 1991**

**Promovido pela**  
**Sociedade Portuguesa de Ciências Florestais**  
**com o apoio da**  
**Escola Superior Agrária de Coimbra**  
**e da**  
**Circunscção Florestal de Coimbra (D.G.F.)**

**COMUNICAÇÕES**

**ESAC**  
**Bencanta**  
**Coimbra**

**1991**

ANALISE DE FUNÇÕES DE CRESCIMENTO.  
APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ANÁLISE DE TRONCO A POVOAMENTOS  
DE Pinus pinaster Aiton. NA REGIÃO DE CASTELO BRANCO.

\*  
Cristina Alegria

RESUMO

Com base na aplicação do método de análise de tronco, pretendeu-se pesquisar as funções de crescimento que melhor se ajustavam às características do crescimento em altura dos povoamentos de pinheiro bravo na região de Castelo Branco.

Constou esta análise do ajustamento de diversos modelos de crescimento (funções empíricas: Parábola, Potência, Hiperbole, Korsun, Freese e Hossfeld; funções de base biológica: Schumacher, Logística e Gompertz). A selecção do melhor modelo teve como critérios as propriedades estatísticas destes, através da análise de diversos parâmetros de qualidade e de predição assim como, da análise do comportamento biológico e facilidade de aplicação prática dos modelos em questão. Deste modo seleccionaram-se como melhores modelos as funções de Freese e Schumacher, a primeira de melhor capacidade preditiva embora com algumas limitações de aplicação e a segunda como melhor modelo conceptual na descrição do fenómeno biológico do crescimento em altura das árvores da zona em estudo.

---

## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1 Os povoamentos de pinheiro bravo na região

De entre os cerca de  $3.1 \times 10^4$  ha (34.7%) de floresta existente em Portugal, são os povoamentos de pinheiro bravo a sua essência mais representativa com  $1.2 \times 10^4$  ha (40.5%) (DGF, 1988).

No caso do distrito de Castelo Branco, a expressão da espécie corresponde a 67% da sua área florestal.

Em termos do distrito são os concelhos de Oleiros, Vila do Rei, Sertão e Proença-a-Nova onde a expressão da espécie é notoriamente dominante. Estes concelhos incluem-se numa região, vulgarmente apelidada de "zona do pinhal".

Esta espécie actualmente representa cerca de 92.5% da área arborizada da "zona do pinhal". Nesta zona a percentagem de ocupação da espécie é maior à verificada na região centro em cerca de 28.5%, sendo superior também a percentagem de

---

\* Eng<sup>a</sup> Silvicultora (UTL/ISA); Assistente do 2º triénio do IPCB/ESA (Instituto Politécnico de Castelo Branco/Escola Superior Agrária

povoamentos puros e menor a de povoamentos dominantes e dominados. Os povoamentos puros representam cerca de 91% da sua área total e os dominantes apenas 9% e os dominados 2% (PDAR, 1990).

Estamos perante um pinhal de regeneração natural, sem intervenções culturais (limpezas, desbastes e desramações) com um representativo estrato sub-arbóreo de urzes, medronheiro e por vezes fetos, sub-lotado, com algumas excepções pontuais de sobre-lotação em novédios e bastios, e com resinagem à vida na sua maioria. Tratam-se de áreas contínuas extensas de um retalhado de proprietários, com um incipiente apoio de rede viária, aceiros e outras infra-estruturas.

## 1.2 Ambito e objectivos do estudo

A "zona do pinhal" por inerência à organização sócio-estrutural da sua produção, é carênciada em informação técnico-científica, suporte fundamental para a decisão racional do aproveitamento e gestão dessas áreas.

Pretendeu-se através da aplicação do método de análise de tronco a povoamentos de pinheiro bravo na região de Castelo Branco, recolher informação acerca do crescimento da referida espécie.

Esta abordagem preliminar ao crescimento dos povoamentos de pinheiro bravo na região, encontra-se integrado num projecto mais amplo em curso no IPCB/ESA sobre "Estudos de crescimento e produção em povoamentos de Pinus pinaster Aiton. na região da Beira Interior".

No presente trabalho pretende-se apenas realizar um estudo das funções de crescimento que caracterizam esses povoamentos. A análise centrou-se no crescimento em altura pela importância que esta componente se reveste na caracterização da qualidade das estações florestais, parâmetro este de expressão fundamental em qualquer estudo de produção.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRAFICA

### 2.1 Funções de crescimento

Para o ajustamento estatístico dos dados do crescimento recorreremos a 2 tipos de modelos de crescimento: os modelos empíricos e os modelos de natureza biológica. Os modelos empíricos, são funções de acordo com uma fórmula matemática, que pretendem traduzir o crescimento em sentido lato, estabelecendo apenas a relação variável dependente e variáveis independentes sem no entanto atender às implicações matemáticas daquelas em conformidade com a biologia do crescimento. Os modelos de natureza biológica, são modelos estabelecidos "à priori" com base no conhecimento existente sobre o processo biológico do crescimento. Neste caso, as estimativas dos parâmetros obtidos podem ser interpretados de acordo com a formulação do modelo, permitindo avançar no conhecimento das relações funcionais - causa/efeito- entre variáveis (Tomé, 1988).

Porém, analisando o processo de crescimento, que gráficamente pode ser representado por uma curva tipicamente sigmoideal, podemos apercebermos-nos que a função de crescimento a ajustar deve estar de acordo com os princípios do crescimento biológico:

1. a curva deve ser limitada pela produção zero no início e por uma produção máxima finita atingida em idade avançada (existência de uma assíptota);
2. a taxa relativa de crescimento deve apresentar um máximo na fase inicial, após o qual é decrescente; na maior parte dos casos, o máximo ocorre suficientemente cedo para podermos utilizar funções decrescentes na sua modelação;
3. o declive da curva deve aumentar com produções crescentes na fase inicial e decrescer na fase final (tem ponto de inflexão).

Nos Quadros I e II apresentam-se, respectivamente, algumas funções empíricas e as principais funções de crescimento de natureza biológica utilizadas na modelação do crescimento florestal (Tomé, 1988). Citando este autor, nenhuma das funções empíricas obedece a todos os princípios de crescimento biológico, por isso as restrições aos parâmetros correspondem às formas mais adequadas à modelação do crescimento.

### 3. MATERIAL E MÉTODOS

#### 3.1 Area de estudo

Fomos circunscrever o estudo do crescimento da espécie no distrito de Castelo Branco, à sua zona mais representativa, a "zona do pinhal". Devido ao contexto sócio-económico da produção florestal da zona em estudo, pulverização da pequena propriedade florestal e absentismo do proprietário florestal, não era viável a realização de um delineamento experimental bem direcionado para o propósito do estudo. Assim tivemos que sujeitar a recolha dos dados a povoamentos que de momento se encontrassem a corte. Para tal, utilizou-se como entidade mediadora no processo de aproximação aos empresários da região, a PORTUCEL.

Os povoamentos amostrados distribuíram-se pelos concelhos de Oleiros, Castelo Branco, Proença-a-Nova e Vila velha de Rodão.

#### LOCAIS DE AMOSTRAGEM E NUMERO DE ARVORES ANALISADAS

Concelho de Oleiros		
Freguesia de Sarnadas de S. Simão		
Barroca da Sobreira	6	árvores nº 1 a 6
Silvosa	5	árvores nº 19 a 28
Freguesia de Amieira		
Sendinho da Senhora 1	5	árvores nº 7 a 11
Sendinho da Senhora 2	7	árvores nº 12 a 18

/.../

LOCAIS DE AMOSTRAGEM E NUMERO DE ARVORES ANALISADAS (cont.)

Concelho de Castelo Branco		
Freguesia de Juncal do Campo		
Feiteira 1	3	árvores nº 30 a 32 e 34.
Feiteira 2	8	árvores nº 35 a 420
Concelho de Proença-a-Nova		
Freguesia de Peral		
Pedra do Altar	7	árvores nº 45 a 51
Freguesia de S. Pedro do Esteval		
Freixoeirinho	2	árvores nº 43 e 44
Concelho de Vila Velha de Ródão		
Freguesia de Vila Velha de Ródão		
Minas dos Ingadanais	5	árvores nº 24 a 28
<hr/>		
TOTAL	49	

3.2 Recolha de dados segundo a aplicação do método de análise de tronco

Ao nível da aplicação do método de análise de tronco, deparou-se-nos também uma condicionante. A toragem que se praticou para a recolha das rodela de lenho, não se realizou segundo as alturas propostas por Schmidt (1971) mas tivemos que nos sujeitar à toragem comercial praticada pelos empresários florestais na região: toros de 2.2m em 2.2m com despona variável.

Para a selecção das árvores a abater, procedeu-se a uma amostragem proporcional à frequência das árvores segundo classes de Dap, tendo sempre em atenção que todas as classes ficassem representadas. Visto estarmos perante povoamentos de estrutura irregular, através deste modo de selecção das árvores a abater foi possível superar a limitação acima citada, referente à representação das várias classes de idade.

Em seguida apresenta-se as várias fases que constou o trabalho:

1ª FASE- Contacto com os empresários florestais para localização do povoamento em estudo;

2ª FASE- Selecção das árvores a abater, para a aplicação do método de análise de tronco;

3ª FASE- Recolha de dados e material lenhoso

i) Medição do Dap da árvore com a fita de diâmetros;  
ii) Abate da árvore e medição da altura total da árvore;

iii) Toragem de 2.2m para extracção de rodela de lenho ao longo do tronco. O corte das rodela foi realizado tentando que a espessura destas fosse de cerca de 5 cm, o que nem sempre aconteceu. Paralelamente à toragem e extracção das rodela, iam-se recolhendo os diâmetros com casca com a fita de diâmetros, a altura de corte e a espessura real das rodela. Em seguida, catalogavam-se e armazenavam-se as rodela em sacos de

plásticos;

iv) Estimativa da idade da árvore, por contagem do nº de anéis ocorridos ao nível do cepo, aos quais se deverá adicionar a estimativa do nº de anos que as árvores neste local levam em média a atingir a altura do cepo;

A recolha d material lenhoso processou-se no período decorrido de Julho a Dezembro de 1989.

4ª FASE- Em gabinete análise de rodela de lenho - Preenchimento da ficha de análise de tronco referente ao crescimento em altura

i) Segundo a medição do diâmetro com casca da rodela realizado no campo, traçam-se os 4 raios a lápis na face inferior da rodela segundo as direcções do diâmetro médio e a sua perpendicular;

ii) Contagem do nº de anéis em cada rodela no sentido do centro para a periferia da rodela, ao longo dos raios assinalados; em situações difíceis como sejam a confirmação de falsos anéis ou a ocorrência de anéis de crescimento muito apertados recorreu-se ao uso de lupa.

Após tais procedimentos, para cada árvore abatida, dispomos de um conjunto de pares de valores altura acima do solo e idade à altura indicada, que expressam o crescimento em altura da referida árvore.

### 3.3 Procedimento de tratamento de dados e critérios estatísticos utilizados na selecção dos modelos

O ajustamento das funções de crescimento em altura foi realizado em computador Micro Vax 2000, que utiliza a linguagem DCL do sistema operativo do VAX/VMS, segundo o programa estatístico GENSTAT5, que compreende diversos pré-programas estatísticos segundo directivas que podem ser utilizadas numa linguagem própria a este software.

Nesta fase do estudo, o trabalho de análise de dados de crescimento, passou pelas seguintes etapas:

1ª ETAPA- Selecção de funções matemáticas ou modelos que possam ajustar-se à descrição do crescimento em altura da amostra - modelos candidatos;

2ª ETAPA- Ajustamento dos modelos candidatos;

i) Elaboração de ficheiros

ii) Programação em GENSTAT5 com vista a realizar:

- gráficos do crescimento em altura observado;
- ajustamento estatístico por regressão linear para uma primeira aproximação à estimativa dos coeficientes de regressão (por linearização das curvas a ajustar);
- ajustamento estatístico por regressão não linear, segundo processo iterativo, utilizando como coeficientes de regressão inicializadores, aqueles calculados na regressão linear;
- cálculo de medidas de ajustamento e predição dos 9 modelos candidatos a testar para as 49 árvores individualmente;
- gráficos das funções ajustadas;
- cálculo dos acréscimos corrente e médio anual observados e respectivos gráficos individuais.

3ª ETAPA- Estudo de cada um dos modelos segundo certos critérios estatísticos com vista à selecção do melhor modelo. As medidas de ajustamento e predicção utilizadas para a selecção do melhor modelo foram:

- Coeficiente de determinação (R2)  
Trata-se de uma medida de ajustamento do modelo.

$$R2 = SQR/SQT = 1 - (SQE/SQT)$$

onde, SQR- soma dos quadrados da regressão

$$SQR = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

SQT- soma dos quadrados total

$$SQT = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

SQE- soma dos quadrados dos erros (resíduos)

$$SQE = \sum_{i=1}^n e_i = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

- Coeficiente de determinação ajustado (R2AJ)  
É uma medida que já nos dá uma certa capacidade preditiva.

$$R2AJ = 1 - ((SQE/(n-p))/(SQT/(n-1)))$$

onde, n- nº de dados utilizados na regressão  
p- nº de parâmetros considerados no modelo

- Quadrado médio dos resíduos (QME)  
Trata-se de um estimador centrado da variância ( ), sendo uma medida de ajustamento.

$$QME = SQE/(n-p)$$

- Erros de predicção (resíduos PRESS - "Prediction Errors Sum of Squares")

São medidas da capacidade preditiva do modelo. Tratam-se de medidas de maior fiabilidade que a análise dos resíduos, já que os últimos são demasiadamente optimistas na expressão do erro cometido. Os resíduos Press são definidos supondo que se ajusta o modelo n vezes, suprimindo de cada vez uma das observações. Tal, permite gerar um conjunto de resíduos Press:

$$e_{i,-i} = y_{i,-i} - \hat{y}_{i,-i} = (y_i - \hat{y}_i)/(1-h_{ii}) = e_i/(1-h_{ii})$$

onde,  $y_{i,-i}$  - valor estimado para  $y_i$  quando esta observação foi excluída

$e_{i,-i}$  - resíduo para  $y_i$  quando esta observação foi excluída

$y_i - \hat{y}_i$  - resíduo para  $y_i$

$h_{ii}$  - valor da matriz de projecção, que é uma medida standardizada da distancia do ponto  $x_i$  a  $x$

As estatísticas PRESS e APRESS, serão definidas do seguinte modo:

$$\text{Estatística PRESS} = \sum_{i=1}^n e_{i,-i}$$

$$\text{Estatística APRESS} = \sum_{i=1}^n |e_{i,-i}|$$

Será assim de interesse que o nosso modelo apresente valores elevados de R2 e R2AJ e valores reduzidos de QME, PRESS e APRESS.

## 4. RESULTADOS

### 4.1 Elaboração de ficheiros e programação em GENSTAT5

Com base no ficheiro TOTO.DAT (variáveis altura acima do solo e idade à altura indicada), realizou-se o ajustamento das funções de crescimento para a variável altura e para cada uma das árvores abatidas, segundo o programa FUNÇÃO.GEN. Apresenta-se o programa para o ajustamento da função de Freese (Fig.1). No caso do ajustamento das outras funções o programa é idêntico, apenas adaptado à função em análise. De uma forma muito simplista o esqueleto do programa pode ser subdividido em duas partes, uma primeira que realiza a regressão linear  $Y = a + b \cdot X_1 + c \cdot X_2 + \dots + k \cdot X_n$  para a qual se torna necessário para quase todas as funções testadas proceder antecipadamente à linearização das variáveis do modelo em análise. Por exemplo na função de Freese  $H = a \cdot I^b \cdot c^I$  a linearização será  $\ln H = \ln a + b \cdot \ln I + I \cdot \ln c$  ou seja  $Y = \ln H$ ,  $X_1 = \ln I$  e  $X_2 = I$ . Os coeficientes de regressão a obter no ajustamento estatístico corresponderão a:  $A = \ln a$ ,  $B = b$  e  $C = \ln c$ .

Nesta primeira parte do programa para além do ajustamento do modelo linear, cujo principal objectivo é estimar os coeficientes da regressão, procede-se também ao cálculo dos parâmetros estatísticos da qualidade do modelo mencionados. Na segunda parte do programa vai ser realizada a regressão não linear do modelo. Este procedimento consiste de um processo interactivo para o qual se torna necessário fornecer parâmetros inicializadores que irão ser os coeficientes estimados segundo a regressão linear. Para o caso do ajustamento não linear da função de Freese, os parâmetros inicializadores serão:  $a = \exp(A)$ ,  $b = B$  e  $c = \exp(C)$ . O cálculo dos parâmetros de qualidade do modelo irão ser novamente calculados nas agora para as variáveis de base e não para as variáveis linearizadas como ocorreu na primeira parte do programa. Um pequeno comentário interessa ainda referir, que decorre do facto do ajustamento por regressão linear em GENSTAT5 prevêr o cálculo da matriz de projecção enquanto que no ajustamento não linear tal não acontece, havendo a necessidade de proceder explicitamente ao seu cálculo segundo procedimento matricial. O procedimento da análise estatística por regressão não linear é necessário, pois só desta forma se torna possível realizar uma comparação legítima dos parâmetros de qualidade dos vários modelos ajustados com vista à selecção do melhor modelo.

O programa realiza o ajustamento do modelo para as 49 árvores individualmente através de um ciclo, enviando a listagem dos parâmetros de qualidade do modelo para o ficheiro de saída, FRE.STAT (Fig.2), e envia o "output" da regressão não linear, onde se incluem a estimativa dos coeficientes de regressão, para o ficheiro FRE.LIS.

Também a partir do ficheiro TOTO.DAT, gerou-se o ficheiro de acréscimos corrente e médio anual ocorridos ao longo do tempo para as 49 árvores, ACRES.DAT, através do programa ACRES.GEN

(Fig.3). O programa realiza também respectivos gráficos conjuntos dos acréscimos para cada uma das 49 árvores, que serão enviados para o ficheiro de saída, ACRE.EST. O cálculo dos acréscimos correntes vão ser realizados em ciclo, ribuição de váriaveis sucessivas .

Em programa individual para o efeito, ou com a directiva incorporada em programas de análise mais extensos, realizaram-se os gráficos dos crescimentos em altura e as curvas de acréscimos em altura observados na amostra assim como, as curvas das funções de crescimento ajustadas.

#### 4.2 Caracterização dos dados amostrados

Amostraram-se árvores de alturas dos 8-10 metros aos 18-20 metros, embora com uma maior incidência na classe dos 14-16 metros. Quanto aos Dap's, dado a selecção das árvores se ter realizado de acordo com a representatividade das várias classes de Dap ocorridas e de modo a que todas as classes ficassem representadas, temos uma amostragem de Dap's desde a classe dos 5-10 cm aos 45-50 cm, embora com maior incidência nas classes dos 15-20 cm e 25-30 cm. Quanto às idades, em consequência do repovoamento da zona de pinhal ocorrer por regeneração natural, e portanto de estrutura essencialmente irregular, permitiu uma amostragem de idades dos 10-20 anos aos 60-70 anos, com maior incidência porém nas idades de 40 a 60 anos, que decorre directamente do estudo recair essencialmente sobre povoamentos com dimensão para corte final.

#### 4.3 Ajustamento das funções de crescimento para a variável altura. Análise estatística para selecção do melhor modelo

O ajustamento de funções de crescimento para a variável altura constou das seguintes etapas:

##### ETAPA I- SELECÇÃO DOS MODELOS CANDIDATOS

- Funções Empíricas: Freese, Korsun, Potência, Hossfeld, Parábola, Hipérbole;
- Funções de base biológica: Schumacher, Logística e Gompertz.

##### ETAPA II- PROGRAMAÇÃO EM GENSTAT5

Elaboração de programas para o ajustamento por regressão não linear das várias funções para as 49 árvores individualmente, FUNÇÃO.GEN. Estes programas geram em si um ficheiro, FUNÇÃO.STAT, onde serão armazenados os parâmetros estatísticos calculados, a utilizar como critério de selecção para a eleição do melhor modelo.

##### ETAPA III- SELECÇÃO DO MELHOR MODELO

Análise do ajustamento por regressão não linear das várias funções, para as 49 árvores, segundo:

- i) as propriedades estatísticas dos modelos ajustados, através de medidas de ajustamento e capacidade preditiva dos modelos ( R<sup>2</sup>, R2AJ, QME, PRESS e APRESS );
- ii) autovalidação, para avaliação da capacidade preditiva dos modelos ajustados;
- iii) análise do comportamento biológico dos modelos ajustados, através de pesquisa de pontos de inflexão e assíptota e

comparação com as curvas de acréscimos correntes e médios anuais observados para as 49 árvores.

Da análise dos ficheiros FUNÇÃO:STAT procedeu-se à selecção dos melhores modelos segundo os critérios referidos na ETAPA III - i), tendo-se chegado à ordenação dos modelos expressa no Quadro III. Para cada árvore e segundo o modelo seleccionado, realizou-se o cálculo dos pontos de inflexão e/ou assíptota dos referidos modelos (Quadro IV). Paralelamente, através dos valores dos acréscimos correntes e médios anuais observados para cada árvore e dos gráficos respectivos (programa de cálculo ACRE.GEN), comparou-se a aderência destes parâmetros para os vários modelos seleccionados.

## 5. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Verificamos que as funções que apresentavam melhores ajustamento e capacidade preditiva foram a função de Freese, Schumacher, Korsun e Hossfeld. Desta feita se seleccionou quais as melhores funções para cada árvore individualmente (Anexo III).

Após esta primeira abordagem à selecção dos melhores modelos foi-se aprofundar melhor o comportamento destes. Assim, através da autovalidação do modelo seleccionado observou-se a sua capacidade preditiva.

Denotaram-se algumas incongruências, por exemplo a função de Freese, dado não apresentar assíptota mas antes um máximo ocasionou frequentemente algumas estimativas a idades mais avançadas que se apresentam impossíveis do ponto de vista biológico. A função de Schumacher também, nalgumas árvores estima as alturas por defeito na parte inferior da curva, criando por vezes situações de incompatibilidade biológica dos dados estimados.

Analisaram-se também os modelos quanto ao seu comportamento biológico. Algumas limitações se depararam, de facto a maior parte das funções empíricas ou não apresentam assíptota como é caso as funções de Freese e de Korsun ou não apresentam nem assíptota nem ponto de inflexão como é o caso das funções Potência e Parábola. Apenas a função de Hossfeld preenche estes dois requisitos. Os modelos de base biológica na sua generalidade cumprem ambos os requisitos.

Para além destas limitações, os pontos de inflexão e assíptotas calculados para algumas das funções nem sempre apresentam bom ajustamento com os dados observados.

Analisando algumas árvores de crescimento menos tipificado observamos que os modelos ajustados mesmo os de base biológica, nem sempre conseguem descrever a variabilidade das situações biológicas ocorridas na natureza, como é o caso de algumas das árvores em estudo que apresentam dois pontos de inflexão.

## 6. CONCLUSÕES

Da análise realizada, chegou-se à conclusão de que os melhores modelos são a função de Freese e a função de Schumacher. O primeiro, apresenta-se como um bom modelo preditivo, embora conceptualmente não traduza da forma mais correcta a curva de

crescimento, já que não apresenta assíntota podendo mesmo a originar falsas estimativas na fase terminal do seu ajustamento quando começa a esboçar o máximo da função. Chama-se assim à atenção, para o cuidado a ter quando se pensar em realizar estimativas fora do intervalo de expressão para a qual a curva foi ajustada, já que estes não serão válidos. O segundo modelo, a função de Schumacher, apresenta-se bastante mais interessante na descrição do processo biológico do crescimento e por isso mesmo aquele que achamos ser de facto o modelo a eleger para o ajustamento dos dados de crescimento para a região em estudo.

#### AGRADECIMENTOS

A todos quanto contribuíram para a concretização deste trabalho os meus agradecimentos. Nomeadamente aos Professores do ISA Doutora Margarida Tomé e Doutor StAubin, à colega Engª Sandra Barreto, aos funcionários do IPCB/ESA Eng. Carlos Grácio e ao técnico Sr. António Serra. Também, às seguintes entidades, ao IPCB/ESA, à PORTUCEL, E.P., à COOPERATIVA AGROMORADAL, aos SERVIÇOS FLORESTAIS DA SERTÃO e a todos os produtores e empresários florestais que facultaram a recolha de dados nas suas matas.

#### 7. BIBLIOGRAFIA

- DGF.1989. Áreas florestais por distritos. nº 299.
- Oliveira, A.M.C.1982. A análise de tronco como método de estudo da produção florestal. Gabinete de economia e produção. ISA-UTL. Lisboa.
- Oliveira, A.M.C.1984. Teoria da produção florestal. CEF. ISA-UTL. Lisboa.
- PDAR.1990. Pdar da Zona do Pinhal. Documento final. Outubro, 1990. Sertão.
- Tomé, M.M.B.B.T.1988. Modelação do crescimento da árvore individual em povoamentos de Eucalyptus globulus Labill. (1ª rotação) Região Centro Portugal. ISA-UTL. Lisboa.
- Tomé, M.M.B.B.T. n.p. Funções de crescimento.
- Tomé, M.M.B.B.T. 198. Modelos de crescimento e produção na definição dos sistemas de silvicultura.

Apontamentos da matéria leccionada nas disciplinas de Biometria e Estatística e Programação em Computadores e Delineamento Experimental, no Curso de Mestrado em Produção Vegetal (1989/90).

ALGUMAS FUNÇÕES EMPÍRICAS UTILIZADAS  
NA MODELAÇÃO DO CRESCIMENTO FLORESTAL

Autor ou designação	Expressão matemática			Características		
	Forma integral (produção)	Forma diferencial (crescimento)	Restrições nos parâmetros	Valor na origem	Ponto de inflexão	Assíntota
Hipérbola	$Y = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{t}$	$\frac{dY}{dt} = -\beta_1 \frac{1}{t^2}$	$\beta_1 < 0$	$t \rightarrow 0; Y \rightarrow -\infty$	Não tem	$t \rightarrow \infty; Y = \beta_0$
—	$Y = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{t} + \beta_2 t$	$\frac{dY}{dt} = \beta_2 - \beta_1 \frac{1}{t^2}$	$\beta_1 < 0; \beta_2 > 0$	$t \rightarrow 0; Y \rightarrow -\infty$	Não tem	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow \infty$
Semilogarítmica	$Y = \beta_0 + \beta_1 \log t$	$\frac{dY}{dt} = \beta_1 \frac{1}{t}$	$\beta_1 > 0$	$t \rightarrow 0; Y \rightarrow -\infty$	Não tem	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow \infty$
Logarítmica 1	$Y = \beta_0 + \beta_1 t^{\beta_2}$	$\frac{dY}{dt} = \beta_2 (Y - \beta_0)$	$\beta_1, \beta_2 > 0; \beta_2 < 1$	$t = 0; Y = \beta_0$ $t \rightarrow 0; Y \rightarrow -\infty$	Não tem Não tem	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow \infty$ $t \rightarrow \infty; Y \rightarrow \beta_0$
Logarítmica 2	$Y = (\beta_0 + \beta_1 t)^{\beta_2}$	$\frac{dY}{dt} = \frac{\beta_0 \beta_2 Y}{\beta_0 + \beta_1 t}$	$\beta_1, \beta_2 > 0; \beta_2 < 1$	$t = 0; Y = \beta_0^{\beta_2}$	Não tem	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow \infty$
Exponencial	$Y = \beta_0 + \beta_1 e^{\beta_2 t}$	$\frac{dY}{dt} = \beta_2 (\beta_0 - Y)$	$\beta_1, \beta_2 < 0$	$t = 0; Y = \beta_0 + \beta_1$	Não tem	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow \beta_0$
Freese	$Y = \beta_0 t^{\beta_1} \beta_2$ $\beta_0 > 0$	$\frac{dY}{dt} = Y \left( \log \beta_2 + \frac{\beta_1}{t} \right)$	$\beta_1 > 0; \log \beta_2 < 0$ $\beta_1 > 0; \log \beta_2 = 0$ $\beta_1 > 0; \log \beta_2 > 0$	$t = 0; Y = 0$ $t = 0; Y = 0$ $t = 0; Y = 0$	$t = \frac{-\beta_1 \pm \sqrt{\beta_1^2 - 4 \log \beta_2}}{2 \log \beta_2}$ Não tem $t = \frac{-\beta_1 \pm \sqrt{\beta_1^2 - 4 \log \beta_2}}{2 \log \beta_2}$	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow -\infty$ $t \rightarrow \infty; Y \rightarrow \infty$ $t \rightarrow \infty; Y \rightarrow \infty$
Hossfeld	$Y = \frac{t^2}{\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2}$	$\frac{dY}{dt} = Y^2 \left( \frac{2\beta_0 + \beta_1 t}{t^3} \right)$	$\beta_0 > 0; \beta_1 < 0$ $\beta_0 > 0; \beta_1 > 0$	$t = 0; Y = 0$ $t = 0; Y = 0$	$\beta_1 \beta_2 t^2 + 3\beta_0 \beta_2 t^2 - \beta_2^2 = 0$	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow \frac{1}{\beta_2}$ $t \rightarrow \infty; Y \rightarrow \frac{1}{\beta_2}$
Kerwin (parábola logarítmica)	$Y = \beta_0 t^{\beta_1 + \beta_2 \log t}$ $\beta_0 > 0$	$\frac{dY}{dt} = \frac{Y}{t} (\beta_1 + 2\beta_2 \log t)$	$\beta_1 > 0; \beta_2 < 0$	$t \rightarrow 0; Y \rightarrow -\infty$	$x^2 - x + 2\beta_2 = 0$ $x = \beta_1 + 2\beta_2 \log t$	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow -\infty$

Fonte: (Tomé, 1988)

QUADRO II

ALGUMAS FUNÇÕES DE CRESCIMENTO DE BASE BIOLÓGICA

Autor ou designação	Expressão matemática			Características		
	Forma integral (produção)	Forma diferencial (crescimento)	Restrições nos parâmetros	Valor na origem	Ponto de inflexão	Assíntota
Schumacher	$Y = Ae^{-kt}$	$\frac{dY}{dt} = -kY$	$k > 0$	$t = 0; Y = 0$	$t = \frac{k}{2}; Y = \frac{A}{2}$	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow 0$
Johnson-Schumacher	$Y = Ae^{-kt}$	$\frac{dY}{dt} = Y \frac{k}{(t+a)^2}$	$k > 0$	$t \rightarrow 0; Y \rightarrow Ae^k$	$t = \frac{k}{2} - a; Y = \frac{A}{2}$	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow 0$
Lundqvist-Kosil	$Y = Ae^{-kt}$	$\frac{dY}{dt} = nY \frac{k}{(n+1)}$	$k > 0; n > 0$	$t \rightarrow 0; Y \rightarrow 0$	$t = \left(\frac{nk}{n+1}\right)^{-1}; Y = Ae^{-\frac{nk}{n+1}}$	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow 0$
Monomolecular	$Y = A(1 - ce^{-kt})$	$\frac{dY}{dt} = k(A - Y)$	$k > 0$	$t = 0; Y = A(1 - c)$	Não tem	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow A$
Logística	$Y = \frac{A}{1 + ce^{-kt}}$	$\frac{dY}{dt} = \frac{k}{A}(AY - Y^2)$	$k > 0$	$t = 0; Y = \frac{1+c}{1-c}$ $t \rightarrow -\infty; Y \rightarrow 0$	$t = \frac{1}{k} \log c; Y = \frac{A}{2}$	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow A$
Pearl-Reed	$Y = \frac{1 + ce^{-kt}}{1 + ce^{-kt} + a_2 t^2 + a_3 t^3}$ $F(t) = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$	$\frac{dY}{dt} = \frac{1}{A}(AY - Y^2)/F(t)$	$a_1, a_2 > 0$ $c > 0$	$t = 0; Y = \frac{1+c}{1+c}$ $t \rightarrow -\infty; Y \rightarrow 0$	Ponto de inflexão variável simétrica, se inflecte para $Y = \frac{A}{2}$	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow A$
Comperits	$Y = Ae^{-ct}$	$\frac{dY}{dt} = kY \ln \frac{A}{Y}$	$k > 0; c > 0$	$t = 0; Y = Ae^{-c}$ $t \rightarrow -\infty; Y = 0$	$t = \frac{\log c}{k}; Y = \frac{A}{c}$	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow A$
Richards	$Y = A(1 - ce^{-kt})^{1/m}$	$\frac{dY}{dt} = \frac{kY}{1 - m} \left[ \left(\frac{A}{Y}\right)^{1-m} - 1 \right]$	$k > 0$	$t = 0; Y = A(1 - c)^{1/m}$	$t = \frac{\log \left[ \frac{1 - \frac{A}{Y}}{1 - \frac{A}{Y_0}} \right]}{k}; Y = Am^{1/m}$	$t \rightarrow \infty; Y \rightarrow A$

Fonte: (Tomé, 1988)

FIG.1

FRE.GEN - ajustamento da função de Freese

```

JOB "FREESE"
OPEN 'TOTO.DAT', 'FRE.STAT'; C=2,3; I,0
FOR [NTIMES=49]
  VARI [1]NARV
  READ [C=2]NARV
  PRINT [C=3]NARV
  READ [C=2; PRINT=*; SETN=Y]H, I
  CALC N=NVAL(H)
  VARI [NV=N] ALTEST, R, RP, H1, I1
  SCAL GL, SSE, QMR, SST, QMT, PRESS, APRESS, R2, R2AJ, CONV, A, B, C, A1, B1, C1
  CALC H1=LOG(H)
  CALC I1=LOG(I)
  CALC SQT=VAR(H1)*(N-1)
  CALC QMT=VAR(H1)
  MODEL H1
  TERMS I1, I
  FIT [P=*]I1, I
  RKEEP DF=GL; DEV=SQE; F=ALTEST; LEV=HAT; EST=COEF
  EQUATE COEF; P(A1, B1, C1)
  CALC R=ALTEST-H1
  CALC QME=SQE/GL
  CALC RP=R/(1-HAT)
  CALC PRESS=SUM(RP**2)
  CALC APRESS=SUM(ABS(RP))
  CALC R2=1-SQE/SQT
  CALC R2AJ=1-QME/QMT
  PRINT [C=3; IPRINT=*; SQUASH=YES]QME, R2, R2AJ, PRESS, APRESS; \
    DEC=3(4), 2(1); F=3(9), 12, 9
  CALC A1=EXP(A1)
  CALC C1=EXP(C1)
  EXPR FREES:V=|E(ALTEST=A*I**B*C**I)
  MODEL H; FIT=ALTEST
  RCYC [MAX=300; MET=G; TOL=0.00001]P=A, B, C; INI=A1, B1, C1; STEP=0.00001, \
    0.01, 0.001
  FITN [PRIN=+; ; CALC=FRESS]
  RKEEP EST=COEF; DEV=SQE; EXIT=CONV; GRAD=WAUX
  MATR [N;3]W
  MATR [3;N]WT
  MATR [N;3]AUX
  DIAG [N]WHAT
  EQUA WAUX; WT
  CALC W=TRANS(WT)
  CALC WTW=PROD(WT; W)
  CALC WTW-I=INV(WTW)
  CALC AUX=PROD(W; WTW-I)
  CALC WHAT=PROD(AUX; WT)
  EQUA WHAT; HAT
  CALC R=ALTEST-H
  CALC SQT=VAR(H)*(N-1)
  CALC QMT=VAR(H)
  CALC QME=SQE/GL
  CALC RP=R/(1-HAT)
  CALC PRESS=SUM(RP**2)
  CALC APRESS=SUM(ABS(RP))
  CALC R2=1-SQE/SQT
  CALC R2AJ=1-QME/QMT
  PRINT [C=3; IPRINT=*; SQUASH=YES]QME, R2, R2AJ, PRESS, APRESS; \
    DEC=3(4), 2(1); F=3(9), 12, 9
ENDFOR
CLOSE
STOP

```

FIG. 2

<u>FRE. STAT</u>					<u>SCH. STAT</u>				
NARV 1.000					NARV 1.000				
QHR	R2	R2AJ	PRESS	APRESS					
0.0134	0.9973	0.9962	0.3	1.1	0.2293	0.9441	0.9347	136.8	14.6
<u>0.1742</u>	<u>0.9952</u>	<u>0.9932</u>	<u>18.3</u>	<u>7.4</u>	0.3066	0.9908	0.9893	4.2	4.7
NARV 2.000					NARV 2.000				
0.0024	0.9995	0.9993	0.2	0.9	0.2205	0.9460	0.9369	143.8	14.9
<u>0.0149</u>	<u>0.9996</u>	<u>0.9995</u>	<u>0.4</u>	<u>1.4</u>	0.1359	0.9957	0.9950	1.9	3.1
NARV 3.000					NARV 3.000				
0.0249	0.9950	0.9930	0.9	1.7	0.3122	0.9251	0.9126	319.2	21.3
0.5532	0.9886	0.9841	109.9	14.6	<u>0.3211</u>	<u>0.9921</u>	<u>0.9908</u>	<u>3.9</u>	<u>4.6</u>
NARV 4.000					NARV 4.000				
0.0177	0.9969	0.9953	0.4	1.3	0.2463	0.9454	0.9345	193.3	16.5
0.4582	0.9867	0.9801	32.1	9.7	<u>0.2673</u>	<u>0.9903</u>	<u>0.9884</u>	<u>2.3</u>	<u>3.1</u>
<u>KOR. STAT</u>					<u>PRO. STAT</u>				
NARV 1.000					NARV 1.000				
0.0213	0.9957	0.9939	4.5	3.2	11.7469	0.9976	0.9969	1064.1	57.2
0.2377	0.9941	0.9917	36.5	9.6	0.2773	0.9931	0.9903	28.2	8.9
NARV 2.000					NARV 2.000				
0.0066	0.9986	0.9981	2.5	2.2	6.2855	0.9990	0.9986	852.2	46.0
0.0463	0.9988	0.9983	6.0	4.0	0.0700	0.9982	0.9974	6.1	4.3
NARV 3.000					NARV 3.000				
0.0360	0.9924	0.9894	17.3	5.5	47.9229	0.9857	0.9799	749.6	62.6
0.4531	0.9907	0.9870	41.7	10.6	0.4631	0.9905	0.9867	27.3	9.3
NARV 4.000					NARV 4.000				
0.0297	0.9947	0.9921	13.6	4.8	30.8356	0.9911	0.9867	504.1	53.5
0.3964	0.9885	0.9827	17.8	7.9	0.4052	0.9883	0.9824	9.9	6.6

FIG. 3

ACRES.GEN

```

OPEN 'TOTO.DAT', 'ACRES.EST'; C=2,3; I,G
FOR [NTIMES=49]
  VARI [1]NARV
  READ [C=2]NARV
  PRINT [C=3;SQUASH=Y]NARV
  PRINT [C=1;SQUASH=Y]NARV
  VARI H,I
  READ [C=2;P=*;SETN=Y]H,I
  CALC N=NVAL(H)
  CALC AUX=N-1
  VARI [NV=AUX]ACC,P
  FOR M=1...AUX
    CALC M1=M+1
    CALCULATE ACC#[M]=(H#[M1]-H#[M])/(I#[M1]-I#[M])
    CALC P#[M]=(I#[M1]+I#[M])/2
  ENDFOR
  VARI [NV=N]ACM
  CALCULATE ACM=H/I
  PRINT [C=1;SQUASH=Y]ACC,P
  PRINT [C=1;SQUASH=Y]ACM,I
  GRAPH [C=3;YT='ACRESCIMO EM ALTURA(M)';XT='IDADE(ANOS)';\
    YL=0;YU=1.1;XL=0;XU=80]ACC,ACM;P,I;MET=CURVE,POINT;\
    SYMBOLS=*
  ENDFOR

```

QUADRO III

ARV Nº	FRE	SCH	KOR	GOMP	LOGI	PDI	HOSS	PAR	HIP
1	1		2		3				
2	1			3	2				
3		1	2				3		
4		1	2				3		
5	1	2	3						
6		1	3						
7				2	3		1		
8	1			3			2		
9	2	3		1					
10		2	1				3		
11		2	1				3		
12	2	1					3		
13		2	1				3		
14	1		3				2		
15	3		2					1	
16	3		2				1	3	
17			2				2		
18	3		1				2		
19	3		1				2	1	
20	3						2	3	
21			1				2		
22		1	2				3		
23	2				3		1		
24	1		2				3		
25	2						1	3	
26	1			2	3				
27	3		2				1		
28	2						1		
30	1			3			2		
31	2				1		3		
33			1	3			2		
34	3		1				2		
35	1			3			2		
36	3			2	1				
37		1	2				3		
38	2			3			1		
39	1		2				3		
40	2	1					3		
41	2	1					3		
42	2	3					1		
43	1			3			2		
44	3	1	2						
45	3			1			2		
46	3			1			2		
47	2		3			1			
48		1	2				3		
49	1		3				2		
50	3	1	2						
51	3		1				2		
TOTAL									
19	12	11	9				9		
20	10	4	14				16		
30	13	2	5				13		

QUADRO IV

LOCAL	ARV Nº	FUNÇÃO	PONTO DE INFLEXÃO	
			anos	metros
Barroca da Sobr.	1	FRE $H=0.0924 \cdot I^{-1} \cdot 756 \cdot 0.96605 \cdot I$	12	-
	2	FRE $H=0.08821 \cdot I^{-1} \cdot 705 \cdot 0.9696 \cdot I$	13	-
	3	SCH $H=26.82 \cdot \text{EXP}(-23.47/I)$	12	26.62
	4	SCH $H=20.36 \cdot \text{EXP}(-18.68/I)$	9	20.36
	5	FRE $H=0.0886 \cdot I^{-1} \cdot 746 \cdot 0.96577 \cdot I$	12	-
	6	SCH $H=12.220 \cdot \text{EXP}(-11.073/I)$	6	12.22
Send.1	7	HOSS $H=(I^2)/(53.50-0.975 \cdot I+0.965704 \cdot I^2)$	19	17.53
	8	FRE $H=0.0001861 \cdot I^{-3} \cdot 67456 \cdot 0.94276 \cdot I$	30	-
	9	GMMP $H=0.602+19.72 \cdot \text{EXP}(-\text{EXP}(-0.0549 \cdot (I-29.5)))$	-	-
	10	KOR $H=0.0000476 \cdot I^{-6} \cdot 0.054 \cdot 0.719 \cdot \text{LOG } I$	6	-
	11	KOR $H=0.000131 \cdot I^{-5} \cdot 5.65 \cdot 0.668 \cdot \text{LOG } I$	5	-
Send.2	12	SCH $H=38.96 \cdot \text{EXP}(-46.56/I)$	23	38.96
	13	KOR $H=0.000533 \cdot I^{-4} \cdot 4.596 \cdot 0.4955 \cdot \text{LOG } I$	5	-
	14	FRE $H=0.1331 \cdot I^{-1} \cdot 5046 \cdot 0.98095 \cdot I$	14	-
	15	PAR $H=-0.122+0.1968 \cdot I+0.00482 \cdot I^2$	-	-
	16	HOSS $H=(I^2)/(53.21-1.581 \cdot I+0.06846 \cdot I^2)$	18	14.61
	17	HOSS $H=(I^2)/(7.29+0.946 \cdot I+0.05523 \cdot I^2)$	6	16.11
	18	KOR $H=0.009708 \cdot I^{-3} \cdot 3.1301 \cdot 0.33453 \cdot \text{LOG } I$	4	-
	Silv.	19	KOR $H=0.1063 \cdot I^{-2} \cdot 2.289 \cdot 0.2558 \cdot \text{LOG } I$	2
20		PAR $H=-0.877+0.6702 \cdot I-0.00575 \cdot I^2$	-	-
21		KOR $H=0.2066 \cdot I^{-2} \cdot 81.977 \cdot 0.2247 \cdot \text{LOG } I$	2	-
22		SCH $H=20.761 \cdot \text{EXP}(-16.172/I)$	8	20.76
23		HOSS $H=(I^2)/(79.9-11.15 \cdot I+0.4802 \cdot I^2)$	18	2.08
Min.Ing.	24	FRE $H=0.1092 \cdot I^{-1} \cdot 1.618 \cdot 0.97548 \cdot I$	14	-
	25	HOSS $H=(I^2)/(2.23+1.118 \cdot I+0.03744 \cdot I^2)$	4	26.71
	26	FRE $H=0.0616 \cdot I^{-1} \cdot 1.706 \cdot 0.9775 \cdot I$	18	-
	27	HOSS $H=(I^2)/(13.679+1.4493 \cdot I+0.03053 \cdot I^2)$	10	32.75
	28	HOSS $H=(I^2)/(25.8+4.73 \cdot I-0.0628 \cdot I^2)$	-	-
Feit.1	30	FRE $H=0.01928 \cdot I^{-2} \cdot 1.113 \cdot 0.96816 \cdot I^2$	20	-
	31	LOGI $H=-1.53+19.34/(1+\text{EXP}(-0.0701 \cdot (I-34.52)))$	-	-
	33	KOR $H=0.0000669 \cdot I^{-5} \cdot 5.979 \cdot 0.7219 \cdot \text{LOG } I$	5	-
	34	KOR $H=0.0001794 \cdot I^{-5} \cdot 5.187 \cdot 0.5951 \cdot \text{LOG } I$	5	-
Feit.2	35	FRE $H=0.0002416 \cdot I^{-3} \cdot 3.602 \cdot 0.94067 \cdot I$	28	-
	36	LOGI $H=-3.33+22.57/(1+\text{EXP}(-0.0749 \cdot (I-22.62)))$	-	-
	37	SCH $H=27.303 \cdot \text{EXP}(-29.62/I)$	15	27.30
	38	HOSS $H=(I^2)/(70.6-0.33 \cdot I+0.0413 \cdot I^2)$	24	24.21
	39	FRE $H=0.0601 \cdot I^{-1} \cdot 1.597 \cdot 0.9853 \cdot I$	23	-
	40	SCH $H=37.26 \cdot \text{EXP}(-46.15/I)$	23	37.26
	41	SCH $H=28.65 \cdot \text{EXP}(-29.57/I)$	15	28.65
	42	HOSS $H=(I^2)/(87.2-2.23 \cdot I+0.0844 \cdot I^2)$	20	11.65
Freix.	43	FRE $H=0.02011 \cdot I^{-2} \cdot 3.191 \cdot 0.95582 \cdot I$	15	-
	44	SCH $H=28.78 \cdot \text{EXP}(-27.093/I)$	14	28.78
Ped.Ait.	45	GMMP $H=-0.0170+11.5079 \cdot \text{EXP}(-\text{EXP}(-0.10580 \cdot (I-16447)))$	-	-
	46	GMMP $H=0.0163+15.105 \cdot \text{EXP}(-\text{EXP}(-0.05536 \cdot (I-31.834)))$	-	-
	47	POT $H=0.1237 \cdot I^{-1} \cdot 1.1791$	-	-
	48	SCH $H=24.155 \cdot \text{EXP}(-19.767/I)$	10	24.20
	49	FRE $H=0.0621 \cdot I^{-2} \cdot 1.112 \cdot 0.9490 \cdot I$	13	-
	50	SCH $H=32.069 \cdot \text{EXP}(-37.462/I)$	19	32.07
	51	KOR $H=0.0253 \cdot I^{-2} \cdot 2.384 \cdot 0.1951 \cdot \text{LOG } I$	4	-