



Curvas Cónicas e Superfícies Geradas pelas Curvas Cónicas: Os seus Traçados Geométricos e Aplicações no Design.

Joaquim Manuel de Castro Bonifácio da Costa



DOUTORAMENTO EM DESIGN

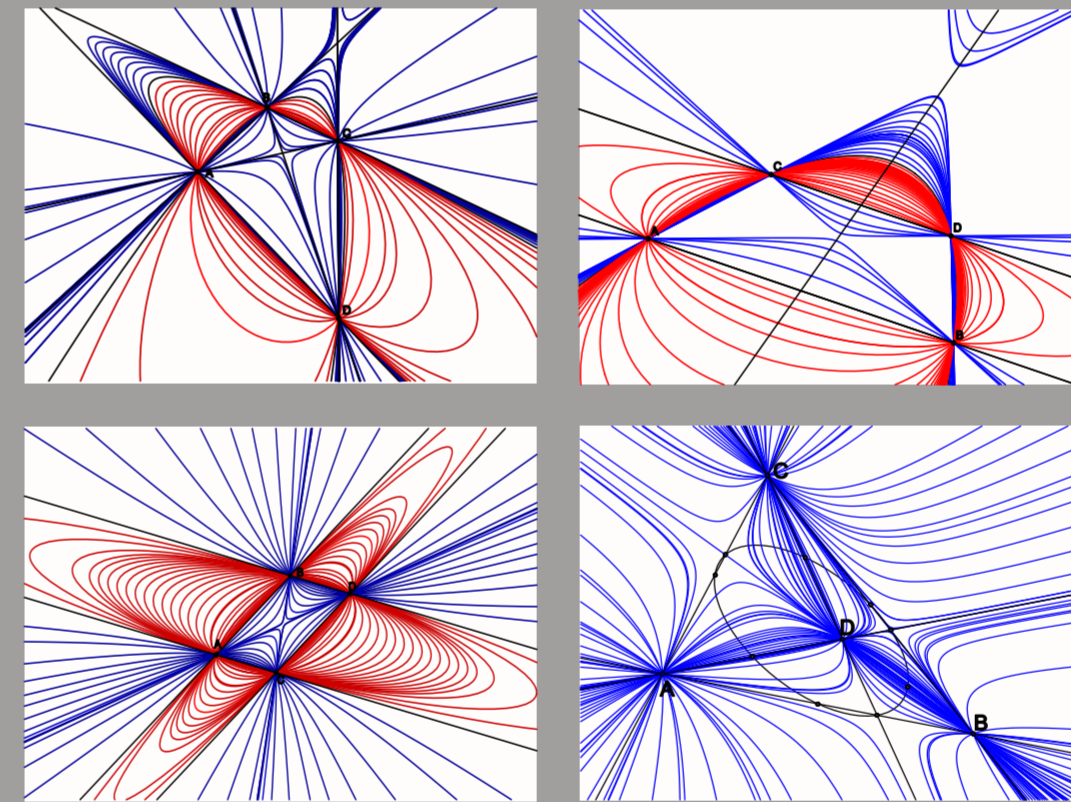
Orientadores

Doutor Fernando José Carneiro Moreira da Silva

Professor Catedrático da Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa

Doutor Vítor Manuel Bairrada Murinho

Professor Associado do Departamento de Arquitetura da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra



Curvas Cónicas e Superfícies Geradas pelas Curvas Cónicas: Os seus Traçados Geométricos e Aplicações no Design.

Joaquim Manuel de Castro Bonifácio da Costa



2016



2016

Constituição do Júri

Presidente: Doutor António José Morais,

Professor Associado com Agregação, Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa.

Vogais: Doutor Fernando José Carneiro Moreira da Silva,

Professor Catedrático, Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa;

Doutor Vítor Manuel Bairrada Murinho,

Professor Associado, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra;

Doutor João Paulo Cabelreira Marques Coelho,

Professor Auxiliar, Universidade do Minho;

Doutor Luís António dos Santos Romão,

Professor Auxiliar, Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa;

Doutor Luís Miguel Cotrim Mateus,

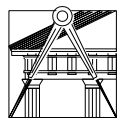
Professor Auxiliar, Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa;

Doutora Fátima Regina Duarte Gouveia Fernandes Jorge,

Professora Adjunta, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Castelo Branco.

Tese especialmente elaborada para a obtenção do grau de doutor
Documento definitivo

MAIO 2016



U

LISBOA

UNIVERSIDADE
DE LISBOA

FACULDADE DE ARQUITETURA
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Curvas Cónicas e Superfícies Geradas pelas Curvas Cónicas: Os seus Traçados Geométricos e Aplicações no Design.

Joaquim Manuel de Castro Bonifácio da Costa

Orientadores

Doutor Fernando José Carneiro Moreira da Silva

Professor Catedrático, Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa

Doutor Vítor Manuel Bairrada Murtinho

Professor Associado, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Constituição do Júri

Presidente:

Doutor António José Morais,

Professor Associado com Agregação, Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa.

Vogais:

Doutor Fernando José Carneiro Moreira da Silva,

Professor Catedrático, Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa;

Doutor Vítor Manuel Bairrada Murtinho,

Professor Associado, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra;

Doutor João Paulo Cabeleira Marques Coelho,

Professor Auxiliar, Universidade do Minho;

Doutor Luís António dos Santos Romão,

Professor Auxiliar, Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa;

Doutor Luís Miguel Cotrim Mateus,

Professor Auxiliar, Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa;

Doutora Fátima Regina Duarte Gouveia Fernandes Jorge,

Professora Adjunta, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Castelo Branco.

**Tese especialmente elaborada para obtenção do grau de doutor em design
Documento definitivo**

Lisboa, Maio de 2016

À Isabel, pela cumplicidade de uma vida, e aos meus filhos Vasco e Pedro

Agradecimentos

Aos meus orientadores Doutor Fernando José Carneiro Moreira da Silva e Doutor Vítor Manuel Bairrada Murinho, com reverência às qualidades científicas e profissionais, quero agradecer o estímulo, a oportunidade das críticas e sugestões e o rigor exigido. Desde a metodologia até inúmeros aspetos relativos à forma e conteúdo, este trabalho procura refletir os contributos que tiveram. O respeito e reconhecimento levam-me a solicitar o favor de continuarem a ser meus amigos.

A frequência da parte curricular do Doutoramento, as palestras do Seminário de investigação e a avaliação realizada nos diversos pontos de situação, pela diversidade dos temas e qualidade das apresentações possibilitaram a extensão da minha mundividência, com contributos que espero estejam refletidos neste texto, pelo que a todos os intervenientes, docentes e oradores, é devido um justo agradecimento.

Aos meus colegas e amigos que tiveram a paciência e amizade para me ouvirem falar de algo por vezes exótico para eles, mas de cujos contributos e experiências pessoais recolhi sugestões, sobretudo na forma de expor o tema, um abraço agradecido.

Agradeço ainda aos meus alunos, principal razão desta tese, pela emoção e prazer que me têm proporcionado ao longo da minha vida docente, pelo crescimento pessoal de cada um, desde o início dos cursos até ao exercício profissional.

A todos os meus familiares agradeço o estímulo e apoio ao longo da vida. Aos meus filhos Vasco e Pedro, que todos os dias me alegram, pelas competências, conhecimentos e sucessos pessoais, mas sobretudo pela satisfação de os ver cidadãos honestos e trabalhadores, conscientes dos seus direitos e deveres, o que, para além das suas atitudes sempre exigentemente críticas no rigor, foi estímulo na realização desta tese.

À Isabel, companheira de uma vida, nos momentos difíceis e alegrias, pelo apoio e estímulo decisivo, tanto intelectual como anímico, agradeço este trabalho que também é teu.



RESUMO

No âmbito do Design, e graficamente, sistematiza-se e aprofunda-se o conhecimento das curvas cónicas e, em especial, sobre as suas construções geométricas, contribuindo para o reconhecimento da importância do estudo destas curvas e das superfícies geradas a partir delas no ensino da geometria no Design. Utiliza-se um método expositivo de análise crítica do conhecimento existente, propondo-se ângulos de abordagem menos usuais. Procura-se, ainda, suprir o insuficiente conhecimento e divulgação científica das cónicas em Portugal, e em particular no Design, de três modos: pela sistematização do conhecimento existente, pela adaptação do conhecimento da geometria projetiva, com expressão na geometria plana e na geometria analítica, para a linguagem dos traçados geométricos em geometria plana e em geometria descritiva e, ainda, pela contribuição para a utilização mais generalizada, designadamente com os meios tecnológicos atuais.

Paralelamente, identificam-se potencialidades das curvas na capacidade de resolução de problemas de representação gráfica rigorosa, por designers e outros profissionais, designadamente os das áreas das artes visuais e da arquitetura, com reflexos no ensino e na prática profissional. Exemplificam-se utilizações dos traçados das curvas cónicas e das superfícies geradas com elas, no Design e em outras áreas, simplificando soluções e reafirmando a importância e atualidade da geometria plana e da geometria descritiva, tanto no processo de construção do conhecimento e no desenvolvimento do projeto, como nas aplicações práticas, enquanto suporte concetual e representação gráfica.

Tendo em vista a simplificação da aplicação das cónicas e das superfícies geradas com elas em projetos de Design, resolveram-se alguns problemas com solução complexa, ou sem solução, na literatura consultada. Para tal, utilizámos métodos menos usuais, designadamente alguns derivados da geometria descritiva e, sobretudo, procurando integrar os conhecimentos mais recentes sobre as cónicas.

Tal abordagem permitiu ainda o aprofundamento de conhecimento com potencial interesse teórico em diversas áreas e o enunciar de algumas propriedades das cónicas que não se encontraram descritas na literatura, numa relação dialética entre teoria e prática, num contexto que contribui para a reafirmação da geometria descritiva, na sua capacidade de desenvolvimento do pensamento criativo.

Palavras-chave: cónicas, curvas cónicas, superfícies, superfícies quádricas, design.

**Curvas Cónicas e Superfícies Geradas pelas Curvas Cónicas:
Os seus Traçados Geométricos e Aplicações no Design.**

Conical curves and surfaces generated by conical curves: Their geometric constructions and applications in Design.

ABSTRACT

In context of Design, and graphically, this research aims to systematize and to deepen the knowledge about the conical curves, and especially on their geometrical constructions, contributing to the recognition of the importance of the study of these curves and of the surfaces generated from them, mainly in the teaching of geometry in Design courses. An expositive methodology of critical analysis of literature is used, proposing less usual approaches. It also aims to compensate insufficient knowledge and scientific dissemination of conical curves in Portugal, particularly in Design, in three ways: systematizing the existent knowledge, adapting knowledge of projective geometry in plane and analytical geometry for the language of geometrical constructions in plane geometry and descriptive geometry and, still, contributing to a more generalized use involving recent technology.

Parallel, the study identifies potentialities of the conical curves in solving problems of rigorous graphic representation for designers and other professionals, namely those from the areas of visual arts and of architecture, with reflexes in the teaching and in the professional practice. It gives examples of practical uses of graphic resolutions of conical curves and of their generated surfaces in Design and other areas, reassuring the importance and relevance of plane geometry and descriptive geometry, both in the construction of knowledge and in the development of the project and in practical applications, as a conceptual framework and graphic representation.



Within the scope of simplifying the use of conics and surfaces generated with them in Design projects, are presented solutions for some problems with complex solutions, or without solution, in reviewed literature.

The study approach contributes not only to deepen the theoretical frame in several areas but also enunciates some proprieties of conics not mentioned yet in literature, in a dialectical relationship between theory and practice, in a context that contributes to the reaffirmation of descriptive geometry and its capacity of development of creative thinking.


Keywords: conics, conical curves, surfaces, quadric surfaces, design.


**Curvas Cónicas e Superfícies Geradas pelas Curvas Cónicas:
Os seus Traçados Geométricos e Aplicações no Design.**

ÍNDICE GERAL

Dedicatória e agradecimentos	
RESUMO	i
ABSTRACT	iii
ÍNDICE GERAL	v
ÍNDICE DE FIGURAS	ix
GLOSSÁRIO	xxi
NOTAÇÕES ADOTADAS E REPRESENTAÇÃO	xxvii
	
1. INTRODUÇÃO	1
1.1. A ELABORAÇÃO DA TESE	12
1.1.1. QUESTÕES DE INVESTIGAÇÃO	12
1.1.2. SÍNTESE DE OBJETIVOS	13
1.2. A TESE	14
1.3. DESENVOLVIMENTO DA INVESTIGAÇÃO	15
1.4. RECURSOS	15
1.4.1. OUTROS RECURSOS - EDITORES E DISTRIBUIDORES	18
1.5. HARDWARE E SOFTWARE INFORMÁTICOS DE APOIO AO DESENVOLVIMENTO DA INVESTIGAÇÃO	19
1.6. VALIDAÇÃO DAS SOLUÇÕES DOS DIVERSOS PROBLEMAS INTERMÉDIOS	20
1.7. CONSIDERAÇÕES COMPLEMENTARES	21
1.8. CONCLUSÃO	22
1.9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DO CAPÍTULO	22
	
2. CONCEITOS E PROPRIEDADES DAS SECÇÕES CÓNICAS	31
2.1. INTRODUÇÃO	31
2.2. PARA UMA DEFINIÇÃO DO CONCEITO DE CURVA	31
2.3. CONCEITO DE TANGENTE E DE ASSÍMPTOTA	36
2.4. PARA A DEFINIÇÃO DO CONCEITO DE CURVA CÓNICA	37
2.5. AS DIFERENTES SECÇÕES CÓNICAS	39
2.6. FOCOS E DIRETRIZES DAS CÓNICAS	46
2.6.1. ELIPSE	48

2.6.2. PARÁBOLA	50
2.6.3. HIPÉRBOLE	51
2.7. CONFORMIDADE DA DETERMINAÇÃO DOS FOCOS E DIRETRIZES ATRAVÉS DO TEOREMA DE DANDELIN E DE MÉTODOS DA GEOMETRIA PLANA	53
2.8. DO CONE AO DUPLO CONE E À SUPERFÍCIE CÔNICA	59
2.8.1. SUPERFÍCIES CÔNICAS OBLÍQUAS	59
2.8.2. OBTENÇÃO DE UMA SECÇÃO CIRCULAR EM QUALQUER SUPERFÍCIE CÔNICA	64
2.9. APOLÓNIO DE PERGA E O ESTUDO DOS CONES RETOS E OBLÍQUOS	69
2.10. IDENTIFICAÇÃO DO TIPO DE CURVA CÔNICA	79
2.11. CIRCUNFERÊNCIA DE MONGE	80
2.12. PROPORCIONALIDADE ENTRE CORDAS PARALELAS	82
2.13. A RELAÇÃO ELIPSE – HIPÉRBOLE	83
2.14. PROPRIEDADES REFLEXIVAS DAS CÔNICAS	85
2.15. CONCLUSÃO	87
2.17. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DO CAPÍTULO	90
	■
3. DA GEOMETRIA DAS CÔNICAS AOS TRAÇADOS GRÁFICOS	93
3.1. OS TRAÇADOS DE CÔNICAS DADOS OS EIXOS E OS FOCOS	93
3.2. ANÁLISE DA UTILIZAÇÃO MAIS GENERALIZADA DAS CURVAS CÔNICAS	95
3.2.1. DETERMINAÇÃO DO CENTRO E DOS EIXOS DAS CÔNICAS	97
3.3. GEOMETRIA PROJETIVA, CONCEITOS DE HOMOLOGIA E AFINIDADE	99
3.3.1. OPERAÇÕES HOMOLÓGICAS APLICADAS À CIRCUNFERÊNCIA	102
3.3.2. O TRAÇADO DE TANGENTES ÀS CÔNICAS DEFINIDAS GRAFICAMENTE UTILIZANDO MÉTODOS PROJETIVOS	103
3.4. AS CURVAS CÔNICAS CENTRAIS E A SUA DETERMINAÇÃO GRÁFICA	110
3.4.1. DETERMINAÇÃO DOS DIÂMETROS CONJUGADOS DAS CÔNICAS CENTRAIS, ELIPSE OU HIPÉRBOLE, DADA A DIREÇÃO d DE UM DELES, CONHECIDA A CURVA GRAFICAMENTE	111
3.4.2. DETERMINAÇÃO DOS EIXOS MAIOR E MENOR DA ELIPSE DADOS DIÂMETROS CONJUGADOS	111
3.4.3. DETERMINAÇÃO DOS EIXOS E FOCOS DA HIPÉRBOLE DADOS OS DIÂMETROS CONJUGADOS	116
3.4.4. DETERMINAR OS DIÂMETROS CONJUGADOS, COM EXTREMO DE UM DELES NUM PONTO P QUALQUER DA ELIPSE CONHECIDOS OS EIXOS AB E CD	117
3.5. TRAÇADOS RELATIVOS A CADA UMA DAS CURVAS CÔNICAS	118
3.5.1. A ELIPSE	118
3.5.2. A PARÁBOLA	126
3.5.3. A HIPÉRBOLE	145

3.6. O TRAÇADO DAS CURVAS CÓNICAS A PARTIR DE CINCO CONDIÇÕES	159
3.6.1. TEOREMA DE PASCAL	161
3.6.2. TEOREMA DE BRIANCHON	165
3.6.3. APLICAÇÃO DOS TEOREMAS DE PASCAL E BRIANCHON AOS TRAÇADOS DAS CÓNICAS	168
3.6.4. O CENTRO E DIÂMETROS DE CÓNICAS DEFINIDAS POR CINCO CONDIÇÕES	177
3.6.5. INTERSECÇÃO DE UMA RETA COM UMA CÔNICA	180
3.6.6. POR CINCO CONDIÇÕES DETERMINAR OUTROS PONTOS OU TANGENTES	187
3.7. O MÉTODO DOS FEIXES PROJETIVOS	191
3.7.1. APLICAÇÕES PRÁTICAS DO MÉTODO DOS FEIXES PROJETIVOS	196
3.8. AS CÓNICAS PELA TEORIA DAS PROPORÇÕES	204
3.9. CONCLUSÕES DO CAPÍTULO	206
3.10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DO CAPÍTULO	212
	
4. DAS CURVAS CÓNICAS ÀS SUPERFÍCIES E APLICAÇÕES NO DESIGN	215
4.1. SUPERFÍCIES QUÁDRICAS	215
4.1.1. SUPERFÍCIE CÔNICA E CILÍNDRICA	217
4.1.2. ESFERA	219
4.1.3. ELIPSOIDE	220
4.1.4. PARABOLÓIDE	221
4.1.5. PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO OU PARABOLÓIDE REGRADO	223
4.1.6. HIPERBOLÓIDE DE UMA FOLHA	225
4.1.7. HIPERBOLÓIDE DE DUAS FOLHAS	229
4.1.8. SUPERFÍCIES QUÁDRICAS E SUAS APLICAÇÕES	230
4.2. OUTRAS SUPERFÍCIES GERADAS POR CURVAS CÓNICAS	230
4.2.1. TORO, ELIPSÓIDE E GLOBÓIDE	230
4.2.2. CAPIALÇADO CILÍNDRICO	231
4.2.3. CILINDRÓIDE	231
4.2.4. CONÓIDES	232
4.2.5. CONVOLUTAS	233
4.2.6. CORNO DE VACA	234
4.2.7. CAPIALÇADOS	234
4.2.8. LUNETOS	235
4.2.9. CÚPULA BIZANTINA	235

4.3. UTILIZAÇÃO DE SUPERFÍCIES QUÁDRICAS NO DESIGN DE ESTRUTURAS ALIGEIRADAS	236
4.4. OUTROS TIPOS DE SUPERFÍCIES	238
4.4.1. SUPERFÍCIE CÍCLICA	238
4.4.2. SUPERFÍCIES DADAS PELA SUA ESTRUTURA E SUPERFÍCIES GRÁFICAS	238
4.4.3. MANIFOLDS	239
4.4.4. SUPERFÍCIES TZITZEICA	240
4.5. SUPERFÍCIES COMPLEXAS NO DESIGN E NA ARQUITETURA	241
4.6. INTERSECÇÃO DE SUPERFÍCIES	243
4.6.1. INTERSECÇÃO DE SUPERFÍCIES UTILIZANDO AS CÓNICAS COMO CURVAS AUXILIARES	245
4.7. PLANIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES	249
4.8. EXEMPLOS DE UTILIZAÇÃO DAS CURVAS CÓNICAS NO DESIGN DO PROJETO À REPRESENTAÇÃO TÉCNICA	250
4.8.1. DO DESENHO À GEOMETRIA E DESTA À GEOMETRIA PROJETIVA	250
4.8.2. REPRESENTAÇÃO DE CURVAS CÓNICAS EM AXONOMETRIA E PERSPETIVA CÓNICA	253
4.9. OUTRAS APLICAÇÕES DAS CURVAS CÓNICAS E SUPERFÍCIES QUÁDRICAS NO DESIGN	255
4.10. CONCLUSÕES DO CAPÍTULO	262
4.11. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DO CAPÍTULO	263
	
5. DA TEORIA ÀS APLICAÇÕES PRÁTICAS, DA PRÁTICA À TEORIA DAS CÓNICAS	267
5.1. PROBLEMAS E TEMAS DE ESTUDO COMPLEMENTAR	267
5.1.1. DEFINIR AS CÓNICAS DADAS QUATRO TANGENTES E UM PONTO QUE NÃO PERTENCE ÀS TANGENTES	267
5.1.2. DETERMINAÇÃO DAS CÓNICAS DEFINIDAS PELAS TANGENTES t_1 , t_2 E t_3 E POR DOIS PONTOS A e B SENDO QUE OS PONTOS NÃO PERTENCEM A QUALQUER DAS RETAS	278
5.1.3. A PARÁBOLA COMO DISCRIMINANTE DE ELIPSES E HIPÉRBOLES	290
5.1.4. PARÁBOLA DEFINIDA POR QUATRO PONTOS A , B , C E D	294
5.2. FEIXE DE CÓNICAS POR QUATRO CONDIÇÕES	303
5.3. FAMÍLIAS DE CÓNICAS	308
5.4. CURVAS PARALELAS ÀS CÓNICAS	311
5.5. CURVAS SIMILARES ÀS CÓNICAS	314
5.5.1. AS OVAIS	314
5.5.2. PARÁBOLA E CATENÁRIA	314
5.5.3. CURVAS PARABÓLICAS	316
5.6. ANAMORFOSES DAS CURVAS CÓNICAS	316
5.7. NURBS, BÉZIER E SPLINES	320

5.8. CONCLUSÕES DO CAPÍTULO	327
5.9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DO CAPÍTULO	330
5.10. FONTE DAS IMAGENS	332
6. CONCLUSÕES	333
6.1. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DO CAPÍTULO	347
6.2. FONTE DAS IMAGENS	348
7. BIBLIOGRAFIA	349

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 1.1. – Desenho da investigação	14
Fig. 2.1 – Ponto de tangência na curva <i>a</i> e Ponto de inflexão na curva <i>b</i>	33
Fig. 2.2 – Ponto múltiplo de primeira espécie	34
Fig. 2.3 – Ponto múltiplo de segunda espécie	34
Fig. 2.4 – Ponto de retrocesso de primeira espécie	35
Fig. 2.5 – Ponto de retrocesso de segunda espécie	35
Fig. 2.6 – Tangente a uma curva – Método das secantes e perpendiculares	36
Fig. 2.7 – Tangente a uma curva – Método dos triângulos equiláteros	36
Fig. 2.8 – Tangente a uma curva – Método dos pontos médios	37
Fig. 2.9 – Secção definida por duas geratrizes	39
Fig. 2.10 – Secção circular	39
Fig. 2.11 – Secção elíptica	40
Fig. 2.12 – Secção parabólica	40
Fig. 2.13 – Secção hiperbólica	40
Fig. 2.14 – Secção elipse	41
Fig. 2.15 – Secção parábola	41
Fig. 2.16 – Secção hipérbole	41
Fig. 2.17 – Circunferências diretora e principal na elipse	45
Fig. 2.18 – Circunferências diretora e principal na hipérbole	45
Fig. 2.19 – Propriedade da tangente a uma cónica	45
Fig. 2.20 – Elipse (Focos e diretrizes)	46

Fig. 2.21 – Parábola (Focos e diretrizes)	46
Fig. 2.22 – Hipérbole (Focos e diretrizes)	46
Fig. 2.23 – Elipse (corda no foco e tangentes)	47
Fig. 2.24 – Parábola (corda no foco e tangentes)	47
Fig. 2.25 – Hipérbole (corda no foco e tangentes)	47
Fig. 2.26 – Outra propriedade da relação foco – diretriz da parábola	48
Fig. 2.27 – Outra propriedade da relação foco – diretriz da hipérbole	48
Fig. 2.28 – Determinação dos focos e diretrizes da elipse conhecidos os eixos desta	49
Fig. 2.29 – Determinação do foco e da diretriz da parábola conhecidos um ponto A qualquer, o vértice V e a tangente t no vértice	51
Fig. 2.30 – Determinação dos focos, diretrizes e assíntotas da hipérbole conhecidos o eixo transversal AB e o seu conjugado, a reta DE .	52
Fig. 2.31 – Hipérbole equilátera	53
Fig. 2.32 – Hipérbolas conjugadas	53
Fig. 2.33 – Conjugação dos dois procedimentos na secção elíptica	54
Fig. 2.34 – Conjugação dos dois procedimentos na secção parabólica	55
Fig. 2.35 – Conjugação dos dois procedimentos na secção hiperbólica	56
Fig. 2.36 – Conjugação dos dois métodos na secção num cilindro reto	57
Fig. 2.37 – Diretriz elipse e Secção elipse	60
Fig. 2.38 – Diretriz elipse e Secção parábola	60
Fig. 2.39 – Diretriz elipse e Secção Hipérbole	60
Fig. 2.40 – Diretriz parábola e secção elipse	61
Fig. 2.41 – Diretriz parábola e secção parábola	61
Fig. 2.42 – Diretriz parábola e secção hipérbole	61
Fig. 2.43 – Diretriz hipérbole e secção elipse	62
Fig. 2.44 – Diretriz hipérbole e secção parábola	63
Fig. 2.45 – Diretriz hipérbole e secção hipérbole	63
Fig. 2.46 – Cone reto de eixo coincidente, em projeção no plano da elipse, com o eixo maior da elipse	65
Fig. 2.47 – Cone oblíquo de eixo coincidente em projeção com o eixo menor da elipse	65
Fig. 2.48 – Cone oblíquo e eixo coincidente em projeção com o eixo maior da elipse	65
Fig. 2.49 – Cone oblíquo e eixo coincidente em projeção com uma corda da elipse	65
Fig. 2.50 – Superfície cónica de diretriz circular e secção circular de direcção antiparalela	66
Fig. 2.51 – Aplicação de secção antiparalela	67
Fig. 2.52 – O método de Apolónio aplicável a cones retos e oblíquos	70
Fig. 2.53 – Dado um diâmetro CD da elipse e uma corda JK , de direcção conjugada, determinar o diâmetro conjugado LN	72

Fig. 2.54 – Triângulo axial com <i>sintoma</i> de elipse	73
Fig. 2.55 – Triângulo axial com <i>sintoma</i> de parábola	73
Fig. 2.56 – Triângulo axial com <i>sintoma</i> de hipérbole	73
Fig. 2.57 – Diâmetros conjugados na elipse	74
Fig. 2.58 – Duas <i>figuras</i>	75
Fig. 2.59 – Áreas iguais das figuras	75
Fig. 2.60 – Focos em Apolónio	76
Fig. 2.61 – Diâmetros conjugados na hipérbole	77
Fig. 2.62 – Corda e diâmetro conjugado na parábola	78
Fig. 2.63 – Tangentes nos extremos de uma corda de qualquer cónica	78
Fig. 2.64 – Discriminante projetivo das cónicas	79
Fig. 2.65 – Parábola	80
Fig. 2.66 – Elipse	80
Fig. 2.67 – Hipérbole	80
Fig. 2.68 – Elipse e circunferência de Monge	80
Fig. 2.69 – Hipérbole e circunferência de Monge	81
Fig. 2.70 – Parábola e curva ortóptica	81
Fig. 2.71 – Propriedade de proporcionalidade	83
Fig. 2.72 – Relação elipse – hipérbole por números imaginários	84
Fig. 2.73 – Elipse e hipérbole por diâmetros conjugados	85
Fig. 2.74 – Elipse	86
Fig. 2.75 – Parábola	86
Fig. 2.76 – Hipérbole	86
Fig. 3.1 – Construção da elipse sendo dados os eixos maior AB e menor CD	93
Fig. 3.2 – Construção da parábola sendo dados o foco F e a diretriz d	94
Fig. 3.3 – Construção da hipérbole sendo dados a distância focal F_1F_2 e o eixo transversal AB	94
Fig. 3.4 – Tangente e normal num ponto da elipse	95
Fig. 3.5 – Tangente num ponto da parábola	95
Fig. 3.6 – Tangente num ponto da hipérbole	95
Fig. 3.7 – Centro da elipse	98
Fig. 3.8 – Centro da hipérbole	98
Fig. 3.9 – Eixo e vértice da parábola	98
Fig. 3.10 – Eixos da elipse	99
Fig. 3.11 – Eixos da hipérbole	99

Fig. 3.12 – Homologia	100
Fig. 3.3 – Afinidade	100
Fig. 3.14 – Homotetia	100
Fig. 3.15 – Simetria polar	100
Fig. 3.16 – Simetria por afinidade ortogonal	100
Fig. 3.17 – Simetria por afinidade oblíqua	100
Fig. 3.18 – Determinação por homotetia da concorrência de retas fora do desenho	101
Fig. 3.19 – Circunferência e quadrado	102
Fig. 3.20 a) – Elipse	103
Fig. 3.20 b) – Parábola	103
Fig. 3.20 c) – Hipérbole	103
Fig. 3.20 d) – Método alternativo	104
Fig.3.21 a) – Elipse	104
Fig.3.21 b) – Parábola	104
Fig.3.21 c) – Hipérbole	105
Fig. 3.21 d) – Método alternativo	105
Fig. 3.22 a) – Tangente num ponto da cônica central	106
Fig. 3.22 b) – Tangente num ponto da parábola	106
Fig. 3.23 a) – Tangentes a cônica central com direção dada	106
Fig. 3.23 b) – Tangente a parábola com direção dada	106
Fig. 3.24 – Tangente a cônica por ponto exterior	107
Fig.3.25 a) – Elipse	108
Fig.3.25 b) – Parábola	108
Fig.3.25 c) – Hipérbole	108
Fig. 3.26 a) – Elipse	109
Fig. 3.26 b) – Hipérbole	109
Fig. 3.27 – Determinação da tangente num ponto P da cônica dadas as tangentes em pontos de um diâmetro	109
Fig. 3.28 – Determinar terceiro ponto de tangência	110
Fig. 3.29 – Determinação de dois diâmetros conjugados	111
Fig.3.30 – Eixos a partir de diâmetros conjugados por homologia	112
Fig. 3.31 – Método de Manheim	113
Fig. 3.32 – Método de Chasles	113
Fig. 3.33 – Determinação dos eixos dados diâmetros conjugados	114
Fig. 3.34 – Eixos determinados por afinidade	115

Fig. 3.35 – Método de Ritz	116
Fig. 3.36 – Determinação de eixos e focos da hipérbole por diâmetros conjugados	117
Fig. 3.37 – Determinar diâmetros conjugados dados os eixos da elipse	118
Fig. 3.38 – Elipse por rotação	119
Fig. 3.39 – Ponto da elipse a uma dada distância do eixo maior	119
Fig. 3.40 – Elipse partindo do eixo menor	120
Fig. 3.41 – Pontos da elipse por diâmetros conjugados	120
Fig. 3.42 – Direção de diâmetro e ponto	121
Fig. 3.43 – Elipse por feixes projetivos	122
Fig. 3.44 – Tangente à elipse no ponto P	122
Fig. 3.45 a) – Tangentes à elipse a partir de um ponto exterior	123
Fig. 3.45 b) – Tangentes à elipse a partir de um ponto exterior	124
Fig. 3.46 – Tangentes paralelas a uma direção	124
Fig. 3.47 – Tangente num ponto	125
Fig. 3.48 – Focos a partir do eixo maior e de um ponto	125
Fig. 3.49 – Parábola ponto a ponto	126
Fig. 3.50 – Parábola por feixes projetivos	127
Fig. 3.51 – Parábola conhecido o parâmetro	128
Fig.3.52 – Parábola (Teorema de Fermat)	128
Fig. 3.53 – Parábola definida por dois pontos e suas tangente	130
Fig. 3.54 – O foco e pontos da parábola	131
Fig. 3.55 – Foco e pontos da parábola	132
Fig. 3.56 – Eixo e foco da parábola dada graficamente	133
Fig. 3.57 – Parábola por rotação	133
Fig.3.58 – Construção da parábola por rotação	134
Fig. 3.59 – Parábola por 3 pontos e direção do eixo	135
Fig. 3.60 – Pontos de parábola conhecida outra de vão igual	136
Fig. 3.61 – Parábola dados o eixo e dois pontos	137
Fig. 3.62 – Parábola por dois pontos e tangente no vértice	137
Fig. 3.63 – Parábola por A e B e tangente t no vértice – 2º método	138
Fig. 3.64 a) – Parábola por A e B e tangente t no vértice – 3º método	140
Fig. 3.64 b) – Parábola por A e B e tangente t no vértice – 3º método	141
Fig. 3.64 c) – Propriedade das parábolas descrita por Todd	142
Fig. 3.64 d) – Conjunto de propriedades testadas	142

Fig. 3.65 – Parábola por A e B e tangentes t_1 e t_2	143
Fig. 3.66 – Foco e vértice de parábola	144
Fig. 3.67 – Assíntotas e focos da hipérbole	146
Fig. 3.68 – Ponto da hipérbole a distância dada do eixo transversal	146
Fig. 3.69 – Ponto da hipérbole definida pelas assíntotas e eixo transversal	147
Fig. 3.70 – Ponto da hipérbole a uma distância qualquer do eixo secundário	148
Fig. 3.71 – Hipérbolas com as mesmas assíntotas	149
Fig. 3.72 – Hipérbole conjugada como secção de hiperboloide	150
Fig. 3.73 – Pontos de hipérbole conjugada	151
Fig. 3.74 – Rotação da hipérbole em torno do seu eixo	152
Fig. 3.75 – Hipérbole por feixes projetivos	153
Fig. 3.76 – Hipérbole dadas as assíntotas e P (1º método)	154
Fig. 3.77 – Hipérbole dadas as assíntotas e P (2º Método)	154
Fig. 3.78 – Assíntotas, eixos e focos de hipérbole gráfica	155
Fig. 3.79 – Hipérbole por ponto e assíntotas	156
Fig. 3.80 – Tangentes à hipérbole por ponto exterior	157
Fig. 3.81 – Hipérbole por 2 pontos e 2 tangentes	157
Fig. 3.82 – Hipérbole por 3 pontos e duas tangentes	158
Fig.3.83 – Quadro das cinco condições para definir uma cónica	160
Fig.3.84 – Teorema de Pascal	161
Fig. 3.85 – Determinação da Pascala em <i>hexavértice</i> não convexo	162
Fig.3.86 – Teorema de Pappus	163
Fig.3.87 – Pentavértice e <i>Pascala</i>	163
Fig.3.88 – Quadrivértice e <i>Pascala</i>	163
Fig.3.89 – Trivértice e <i>Pascala</i>	164
Fig.3.90 – Teorema de Brianchon	165
Fig. 3.91 – Pentalátero e Teorema de Brianchon	166
Fig. 3.92 – Quadrilátero e Teorema de Brianchon	167
Fig. 3.93 – Quadrilátero completo	167
Fig. 3.94 – Trilátero e Teorema de Brianchon	168
Fig. 3.95 – Dados 5 pontos determinar outro ponto	169
Fig. 3.96 – Dados 5 pontos determinar a curva graficamente	169
Fig. 3.97 – Dados quatro pontos e a tangente num deles determinar outro ponto	170
Fig. 3.98 – Dados três pontos e as tangentes em dois deles determinar outro ponto	171

Fig. 3.99 – Dados 5 pontos determinar a tangente num deles	171
Fig. 3.100 – Dados 4 pontos e 1 tangente determinar outra tangente	172
Fig. 3.101 – Dados 3 pontos e 2 tangentes determinar tangente	172
Fig. 3.102 – Dados cinco tangentes determinar um ponto de tangência	173
Fig. 3.103 – Dados quatro tangentes e um ponto de tangência determinar outro ponto	174
Fig. 3.104 – Dadas três tangentes e os pontos de tangência em duas delas determinar outro ponto de tangência	175
Fig. 3.105 – Dadas cinco tangentes determinar outra tangente	175
Fig. 3.106 – Dados quatro tangentes e um ponto determinar a tangente	176
Fig. 3.107 – Dados três tangentes e dois pontos de tangência determinar outra tangente	177
Fig. 3.108 a) – Centro a partir de cinco pontos	177
Fig. 3.108 b) – Centro a partir de cinco pontos	178
Fig. 3.109 a) – Centro de elipse	178
Fig. 3.109 b) – Centro de hipérbole	179
Fig. 3.110 – Diâmetros conjugados por cinco condições	179
Fig. 3.111 a) – Intersecção de reta com cónica definida por eixo e focos (1ª etapa)	181
Fig. 3.111 b) – Intersecção de reta com cónica definida por eixo e focos (2ª etapa)	182
Fig. 3.112 – Intersecção de reta com parábola	183
Fig. 3.113 a) – Intersecção de reta com cónica definida por diâmetros conjugados	183
Fig. 3.113 b) – Intersecção de reta com parábola	184
Fig. 3.114 – Intersecção de reta com cónica definida por diâmetro e Ponto	185
Fig. 3.115 – Intersecção de reta com cónica definida por cinco condições	186
Fig.3.116 a) – 3 Tangentes 2 pontos	187
Fig.3.116 b) – 3 Tangentes 2 pontos	187
Fig. 117 a) – 4 tangentes 1 ponto (passo 1)	188
Fig.3.117 b) – 4 Tangentes 1 ponto (passo 2)	188
Fig. 3.118 – 5 Tangentes determinar pontos	189
Fig. 3.119 – Tangente em P dadas 4 tangentes	190
Fig. 3.120 – Curva de segundo grau, curva cónica, obtida por feixes projetivos	192
Fig. 3.121 – Pontos e tangentes por feixes projetivos (1º processo)	193
Fig. 3.122 – Pontos e tangentes por feixes projetivos (2º processo)	195
Fig.3.123 a) – 3 pontos 2 tangentes	197
Fig. 3.123 b) – 3 pontos 2 tangentes	197
Fig. 3.124 – 3 pontos 2 tangentes que não se intersectam no desenho	198

Fig. 3.125 – 3 pontos 2 tangentes paralelas	199
Fig. 3.126 – 4 pontos e tangente num deles	200
Fig. 3.127 – Determinação da cónica por 5 pontos	201
Fig. 3.128 – 2 pontos 2 tangentes e eixo	202
Fig. 3.129 – Tangente num ponto	203
Fig. 3.130 – Tangentes dados 5 pontos (1º método)	203
Fig. 3.131 – Tangentes dados 5 pontos (2º Método)	204
Fig. 3.132 – Tangente à elipse por proporções	205
Fig. 4.1 – Quadro resumo das superfícies	216
Fig. 4.2 – Museu Guggenheim de Bilbao	218
Fig. 4.3 – Superfície cónica oblíqua	219
Fig. 4.4 – Superfície cilíndrica oblíqua	219
Fig. 4.5 – Esfera	219
Fig. 4.6 – Elipsoide de revolução	220
Fig. 4.7 – Elipsoide elíptico	220
Fig. 4.8 – Pontos na superfície do elipsoide	220
Fig. 4.9 – Determinação de secção num elipsoide	
Fig. 4.10 – Cama Nido desenhada por Gunther Thony	221
Fig. 4.11 – Paraboloide de revolução	222
Fig. 4.12 – Paraboloide elíptico	222
Fig. 4.13 – Secção em paraboloide	222
Fig. 4.14 – Parábola secção de paraboloide	222
Fig. 4.15 – Paraboloide hiperbólico	223
Fig. 4.16 – Estrutura de sombreamento e zona de lazer	224
Fig. 4.17 – Estrutura de sombreamento	224
Fig. 4.18 – Cobertura em paraboloides hiperbólicos	225
Fig. 4.19 – Definição de hiperbolóide de revolução por geratrizes retas	226
Fig. 4.20 – Contorno aparente do hiperbolóide e cone assíntótico	226
Fig. 4.21 – Definição de hiperboloide elíptico por geratrizes retas	226
Fig. 4.22 – Contorno aparente do hiperboloide e cone assíntótico	226
Fig. 4.23 – Projeto Omniflow com estrutura em hiperboloide	227
Fig. 4.24 – Passadiço pedonal em hiperboloide de revolução	228
Fig. 4.25 – Hiperboloide como estrutura adaptável	228
Fig. 4.26 – Hiperboloide de revolução de duas folhas	229

Fig. 4.27 – Hiperboloide elíptico de duas folhas	229
Fig. 4.28 – Toro	231
Fig. 4.29 – Globoide	231
Fig. 4.30 – Capialçado cilíndrico	231
Fig. 4.31 – Cilindroide de plano diretor	232
Fig. 4.32 – Cilindroide de diretrizes cónicas	232
Fig. 4.33 – Conoide reto	232
Fig. 4.34 – Biblioteca da FAUP	232
Fig. 4.35 – Convoluta	233
Fig. 4.36 – Convoluta	233
Fig. 4.37 – Cone empenado	233
Fig. 4.38 – Bocal de secador em convoluta	233
Fig. 4.39 – Corno de vaca	234
Fig. 4.40 – Capialçados	234
Fig. 4.41 – Luneto cilíndrico reto	235
Fig. 4.42 – Luneto cilíndrico oblíquo	235
Fig. 4.43 – Luneto cónico	235
Fig. 4.44 – Luneto esférico	235
Fig. 4.45 – Cúpula bizantina	236
Fig. 4.46 – Superfície com seis paraboloides	236
Fig. 4.47 – Esquema construtivo do toldo para eventos	237
Fig. 4.48 – Estruturas Chelseapost e Pebbleside	237
Fig. 4.49 – Superfície <i>manifold</i>	239
Fig. 4.50 – Superfície Tzitzeica	240
Fig. 4.51 – Ilha de Cristal	240
Fig. 4.52 – Cobertura de passadiços na Fiera Milano	241
Fig. 4.53 – Candeeiro de teto Quin.mgx	241
Fig. 4.54 – Modelação de superfícies	242
Fig. 4.55 – Frankfurt Office	242
Fig. 4.56 – Intersecção de paraboloides e hiperboloide ambos de revolução	246
Fig. 4.57 – Método alternativo a)	247
Fig. 4.59 – Intersecção de cone e paraboloides	248
Fig. 4.60 – Planificação de um cone oblíquo	250
Fig. 4.61 – Centro da elipse como projeção cónica de uma circunferência	251

Fig. 4.62 – Perspetiva cónica de um cilindro	253
Fig. 4.63 – Perspetiva cónica de parábola resultando numa elipse	253
Fig. 4.64 – Axonometria de uma elipse	254
Fig. 4.65 – Exemplo de criação de tipografia	255
Fig. 4.66 a) – Definição do diâmetro	256
Fig. 4.66 b) – Definição de outra tangência	256
Fig. 4.66 c) – Diâmetros conjugados	256
Fig. 4.66 d) – Eixos da elipse	256
Fig. 4.67 – Caixas de plástico em elipse abatida	257
Fig. 4.68 – Assentos e encostos de secção elíptica	257
Fig. 4.69 – Luminária de parede de metacrilato com luz direta e indireta BAMBOO 4820 – Vibia	258
Fig. 4.70 – Candeeiro de chão LED BAMBOO - Vibia	258
Fig. 4.71 – Candeeiro aplique de alumínio ONO	258
Fig. 4.72 – Luminária “Onda” de Isao Hosoe (LUXIT S.p.A.), no Colorado Convention Center	259
Fig. 4.73 – Modelagem de vestuário em software Modaris	259
Fig. 4.74 – Polarização das microondas da radiação cósmica de fundo	260
Fig. 4.75 – Quadro Resumo	261
Fig. 5.1 – Propriedade de Nagore	268
Fig. 5.2 – Generalização ao retângulo	268
Fig. 5.3 – Perspetiva dos quadriláteros	269
Fig. 5.4 – Cónica por quatro tangentes e ponto incidente	270
Fig. 5.5 – Paralelas às diagonais	271
Fig. 5.6 – Zonas no quadrilátero completo	272
Fig. 5.7 – Determinação da quinta tangente	273
Fig. 5.8 – Determinação dos pontos de tangência	274
Fig. 5.9 – 4 tangentes e ponto não incidente – Segunda solução	275
Fig. 5.10 – Ponto na Zona B	275
Fig. 5.11 – Ponto na Zona C	276
Fig. 5.12 – Ponto na Zona D	276
Fig. 5.13 – Ponto na Zona E	277
Fig. 5.14 – Ponto na Zona F	277
Fig. 5.15 – Ponto na Zona G	278
Fig. 5.16 – Cónicas a passar em A	280
Fig. 5.17 – Centros das cónicas a passar em A e B	280

Fig. 5.17 a) – 1ª Solução	281
Fig. 5.17 b) – 2ª Solução	281
Fig. 5.17 c) – 3ª Solução	282
Fig. 5.17 d) – 4ª Solução	282
Fig. 5.18 – Zonas relativamente ao triângulo	283
Fig. 5.18 a) – 2º Caso	283
Fig. 5.18 b) – 3º Caso	283
Fig. 5.18 c) – 4º Caso	284
Fig. 5.18 d) – 5º Caso	284
Fig. 5.18 e) – 6º Caso	284
Fig. 5.18 f) – 7º Caso	284
Fig. 5.18 g) – 8º Caso	284
Fig. 5.18 h) – 9º Caso	284
Fig. 5.19 – Parábola definida por dois pontos e respetivas tangentes e determinação da direção do eixo	285
Fig. 5.20 – Propriedades da parábola descritas por Akopyan	286
Fig. 5.21 – Duas hipérbolas com uma das assíntotas com a mesma direção	287
Fig. 5.22 – Quadro resumo das cónicas definidas por três tangentes e dois pontos não incidentes	288
Fig. 5.23 – Parábola por três pontos e direção do eixo	290
Fig. 5.24 – Parábola por A , B , C e t_1 com B e C a igual distância de t_1	292
Fig. 5.25 – 2 parábolas definidas por 3 pontos e uma tangente	292
Fig. 5.26 – Determinação da primeira parábola	293
Fig. 5.27 – Determinação da segunda parábola	293
Fig. 5.28 – Determinação do eixo da parábola e de outros pontos da curva	294
Fig. 5.29 – Parábola por 4 pontos em trapézio isósceles	295
Fig. 5.30 – Propriedade da parábola	296
Fig. 5.31 – Parábola por quatro pontos em trapézio escaleno	297
Fig. 5.32 – Propriedade da parábola enunciada por Richter-Gebert	298
Fig. 5.33 a) – Parábola por 4 pontos em quadrilátero convexo (1ª fase)	298
Fig. 5.33 b) – Parábola por 4 pontos em quadrilátero convexo (2ª fase)	299
Fig. 5.33 c) – Parábola por 4 pontos em quadrilátero convexo (3ª fase)	299
Fig. 5.33 d) – Parábola por 4 pontos em quadrilátero convexo (4ª fase)	300
Fig. 5.33 e) – Parábola por 4 pontos em quadrilátero convexo (5ª fase)	301
Fig. 5.33 f) – Parábola por 4 pontos em quadrilátero convexo (6ª fase)	301

Fig. 5.34 – A terceira hipérbole	302
Fig. 5.35 – Teorema descrito por Richter-Gebert	304
Fig. 5.36 a) – Feixe por paralelogramo	305
Fig. 5.36 b) – Feixe por trapézio	305
Fig. 5.36 c) – Feixe por quadrilátero côncavo	305
Fig. 5.36 d) – Feixe por quadrilátero convexo	305
Fig. 5.37 – Propriedade da parábola que passa nos quatro vértices de um trapézio	306
Fig. 5.38 – Feixes de cónicas a passar por quatro pontos – Quadro resumo	307
Fig. 5.39 – Hipérbolos homofocais e localização por radar	308
Fig. 5.40 – Propriedade das elipses e hipérbolos confocais	309
Fig. 5.41 – Elipses e hipérbolos homofocais	309
Fig. 5.42 – Parábolas confocais	310
Fig. 5.43 – Família de elipses	311
Fig. 5.44 – Projeto de Catedral	311
Fig. 5.45 – Curvas paralelas às elipses	312
Fig. 5.44 – Toro gerado em CAD 3D	312
Fig. 5.45 – Elipse ACBD e curva de P	312
Fig. 5.46 – Curvas Toroidais paralelas à parábola	313
Fig. 5.47 – Curvas Toroidais paralelas à hipérbole	313
Fig. 5.48 – Oval de quatro centros	314
Fig. 5.49 – Oval de doze centros	314
Fig. 5.50 – Cabo com e sem sobrecarga	315
Fig. 5.51 – Parábola (vermelho) e catenária (azul)	315
Fig. 5.52 – Pavilhão Rheinstahl	315
Fig. 5.53 – Logo da ThyssenKrupp	315
Fig. 5.52 – Curvas parabólicas	316
Fig. 5.53 – Anamorfoses de curvas cónicas	317
Fig. 5.54 – Escultura do construtivista russo Naum Gabo	318
Fig. 5.55 – Lamparina de pavio por impressão 3D em cerâmica	319
Fig. 5.56 – Modelo matemático de estudo para a lamparina	319
Fig. 5.57 – Anamorfose em infografia científica	320
Fig. 5.58 – Determinação da quádrlica parabólica	322
Fig. 5.59 – Determinação de quádrlica hiperbólica	322
Fig. 5.60 – Determinação de quádrlica elíptica	323

Fig. 5.61 – Determinação de cúbica	323
Fig. 5.62 – Relação entre quádrlica parabólica e cúbica	324
Fig. 5.63 – Determinação de Quártica	324
Fig. 5.64 – Quártica dinâmica	325
Fig. 5.65 – Modelo construtivo de quádrlica em geometria dinâmica	325
Fig. 6.1 – Jato BELL X – 1	334
Fig. 6.2 – Projeto aeronáutico	334
Fig. 6.3 – Projeto de farmácia <i>cellula</i>	334

GLOSSÁRIO

Abcissa – em geometria cartesiana é a medida no eixo horizontal x que define a distância à origem da projeção ortogonal de um ponto. Ordenada será a distância do ponto à sua projeção ortogonal no eixo x.

Abcissa da ordenada de um ponto de uma curva cónica – de acordo com a definição utilizada pelos gregos na antiguidade clássica e também utilizada em geometria projetiva, é a parte do diâmetro conjugado relativamente à corda que passa num ponto da cónica, definindo a ordenada, parte essa entre um extremo do diâmetro e a interseção com a corda. De notar que os diâmetros conjugados não são obrigatoriamente perpendiculares entre si.

Ápex – o mesmo que vértice.

Ápex de uma curva cónica – o mesmo que vértice da curva cónica.

Assíntota ou assintota – reta que é tangente a uma curva num ponto desta no infinito, por exemplo, as hipérbolas têm duas assíntotas.

Baricentro de um triângulo – na física é o centro de gravidade, ou centro de massa, ou centróide do triângulo. Geometricamente corresponde ao ponto de interseção das medianas do triângulo, sendo medianas os segmentos que unem o ponto médio de cada lado ao vértice oposto.

Base do cone – é a figura plana, normalmente um círculo, cujos pontos definem, em conjunto com o vértice do cone, os contornos do sólido.

Bomba – é o espaço livre, normalmente cilíndrico, que pode existir no interior de uma superfície helicoidal.

Círculo de gola – nos hiperboloides de revolução de ramo único é o círculo definido pelos vértices da hipérbole geradora ao rodar em torno do eixo de geração da superfície. Por analogia pode também utilizar-se para designar o círculo que se pode estabelecer com centro no centro de uma hipérbole e diâmetro definido pelos vértices da hipérbole.

Círculo focal – nas curvas cónicas centrais é o círculo com centro no centro da curva e que passa nos focos.

Cone – é o espaço compreendido entre uma superfície cónica e o plano da diretriz.

Cone de revolução – é o cone reto de base circular.

Cone escaleno ou oblíquo – é o cone em que o segmento que une o vértice ao centro da base não é perpendicular ao plano da base do cone.

Cone reto - é o cone em que o segmento da altura, unindo o vértice ao centro da base, é perpendicular ao plano da base do cone.

Cónica – consoante o contexto pode ser uma forma simplificada de designar uma curva cónica mas também pode designar que um objeto tem a forma de cone.

Cónica central – curva cónica com centro: a elipse, a circunferência enquanto caso particular da elipse, e a hipérbole.

Cónicas degeneradas – são todos os tipos de secções em superfícies cónicas que não são graficamente curvas: um ponto (plano de secção a passar no vértice), uma reta (plano de secção tangente à superfície), duas retas concorrentes (plano de secção a passar no vértice e a cortar a diretriz) ou duas retas paralelas (plano de secção paralelo a todas as geratrizes e vértice impróprio, ou seja, no infinito, tornando-se a superfície cilíndrica).

Contornos aparentes de visibilidade – são o conjunto de linhas que delimitam exteriormente uma representação plana de qualquer objeto tridimensional.

Corda de uma cónica – é o segmento de reta que une dois pontos da curva cónica.

Corda de uma curva – é o segmento de reta que une dois pontos da curva.

Cúbica – é uma curva ou superfície de 3º grau (ver ordem ou grau).

Curva cónica – é qualquer secção plana que se pode produzir numa superfície cónica. É uma elipse se o plano interseccionar todas as geratrizes, é uma parábola se o plano for paralelo a uma geratriz não passando no vértice e interseccionando a diretriz, e é uma hipérbole se o plano de secção for paralelo a duas geratrizes não passando no vértice e interseccionando a diretriz. Se o plano de secção for paralelo a diretriz circular é uma circunferência. Se o plano de secção passar no vértice dá origem a secções designadas por cónicas degeneradas, isto é, se não interseccionar as geratrizes a secção é um ponto, o próprio vértice, se contiver uma geratriz, e só essa, a secção é uma reta, a própria geratriz, se o plano de secção passar no vértice e interseccionar a diretriz a secção são duas retas geratrizes concorrentes, que se podem tornar duas retas paralelas se o vértice da superfície se situar no infinito definindo-se uma superfície cilíndrica.

Curva discriminante das cónicas – é a parábola, por delimitar a transição entre elipses e hipérbolas. Se consideremos uma parábola, dois pontos dela e respetivas tangentes e a reta com a direção do eixo, que passa no ponto médio da corda entre os dois pontos da parábola, o feixe de cónicas centrais que passa nos mesmos dois pontos e tem as mesmas tangentes é constituído por hipérbolas, que interseccionam a reta direção em pontos situados entre o da interseção com a parábola e o ponto de interseção das tangentes, e por elipses, que interseccionam a mesma reta para o lado contrário relativamente à parábola.

Curvatura de uma curva num ponto desta – é a curvatura da circunferência osculante nesse ponto.

Curvatura da curva, do ponto *A* ao ponto *B* – será a curvatura média medida em todos os pontos da curva entre os dois, incluindo os próprios pontos limite da curva.

Curvatura de uma circunferência ou arco de circunferência – é o inverso do raio, ou seja é $C=1/r$. Interessa igualmente, para esta definição, lembrar que uma circunferência é o lugar geométrico dos pontos equidistantes r de um outro designado por centro, sendo r o raio.

Curvatura de uma superfície – é a definida pelas curvaturas normais num ponto da superfície. As curvaturas normais num ponto são as curvaturas das linhas de intersecção da superfície com planos perpendiculares à superfície passando nesse ponto, e que contêm a normal à superfície nesse ponto. Sendo que a curvatura é zero nas retas e, nas curvas, analiticamente, pode ser orientada como positiva num sentido e negativa no contrário, estamos perante diversos métodos de abordagem sendo o mais usual o dos máximos e dos mínimos, ou seja, definir a curvatura da superfície naquele ponto como o produto das curvaturas máxima e mínima encontradas. As curvaturas máximas e mínimas são designadas por curvaturas principais. Se à mínima corresponder uma reta o valor é zero que multiplicado pelo valor da curvatura máxima dá sempre zero, o que corresponde a uma superfície planificável. Quando o referido produto é diferente de 0 a superfície é de dupla curvatura, e logo não planificável, podendo ser positiva quando a máxima e mínima são do mesmo sinal, ou seja no mesmo sentido, ou negativa quando de sinais diferentes, ou quando as direções de curvatura forem opostas.

Degenerada – é a curva cónica que, em circunstâncias particulares assume as propriedades geométricas do ponto ou retas ou segmentos de reta.

Diâmetro conjugado (de outro diâmetro da cónica) – é o diâmetro paralelo às tangentes nos extremos do outro diâmetro e que bissecta todas as cordas paralelas a este. Dizem-se conjugados dois diâmetros da elipse quando as tangentes à curva nas extremidades de um deles são paralelas ao outro. Um exemplo seriam os eixos da elipse resultante da representação de uma circunferência em axonometria. Mantêm a propriedade de passar no centro da elipse, e, portanto, determinarem-se mutuamente o meio das respectivas longitudes. Na hipérbole um dos diâmetros conjugados fica apenas definido pela direção paralela às tangentes nos extremos do outro diâmetro. Na parábola um diâmetro é conjugado da direção de cordas paralelas, passando nos seus pontos médios e sendo paralelo ao eixo da parábola.

Diâmetro de uma cónica – qualquer corda que bissecta uma sequência de cordas paralelas e que passa no centro da cónica.

Diâmetro transverso – (o mesmo que eixo transverso) usualmente é definido como segmento de reta que define a distância entre os vértices da hipérbole, embora possa igualmente designar o eixo maior da elipse. Encontra-se por vezes também utilizado como a reta que contem o eixo transverso da hipérbole ou o eixo maior da elipse.

Diretriz – é a linha sobre a qual se apoia a geratriz para a definição da superfície. Numa superfície cónica é usualmente utilizada uma circunferência.

Diretriz de uma cónica – é a reta que é perpendicular ao eixo a uma distância dos focos determinada, designada por parâmetro, e que permite, em conjugação com os focos, definir a cónica.

Distância focal – na elipse e na hipérbole é a distância entre os dois focos, na parábola é a distância do foco à diretriz.

Dualidade – é um princípio enunciado por Poncelet que significa que, em geometria plana, dois teoremas são duais quando se mantêm válidos quando permutamos as palavras pontos por retas e retas por pontos. Baseado nos conceitos de pólo e polar, associados ao estudo das cónicas, foi posteriormente generalizado a diferentes teoremas da geometria. No espaço, aplica-se a todas as propriedades de posição a que correspondem outras

segundas propriedades que se obtém substituindo no enunciado da primeira as palavras pontos por planos e planos por pontos.

Eixo – reta que em geometria plana corta uma figura em duas metades simétricas relativamente a esse eixo. As figuras planas podem ter um ou dois eixos. Na parábola, por exemplo, só existe um eixo. Também em relação às outras curvas cónicas, a elipse e a hipérbole, pode-se utilizar a designação de eixo, em vez de eixo maior ou eixo transversal. Em geometria tridimensional o eixo é uma reta em torno da qual se pode girar 360° uma qualquer linha geratriz de uma superfície, do mesmo plano ou não. Se a geratriz for do mesmo plano dá origem a uma superfície de revolução.

Eixo maior e menor de uma elipse – são diâmetros conjugados perpendiculares entre si no ponto médio de cada um deles, e que definem a maior e menor cordas da curva. Também são por vezes utilizadas estas designações numa hipérbole por associação desta com a elipse de igual “figura”, cujo eixo maior coincide com o eixo transversal de hipérbole e é a largura de um retângulo, e cujo eixo menor da elipse define a altura do retângulo, sendo que as retas que contêm as diagonais do retângulo são as assíntotas da hipérbole.

Eixo transversal – (o mesmo que diâmetro transversal) usualmente é definido como segmento de reta que define a distância entre os vértices da hipérbole, embora possa igualmente designar o eixo maior da elipse. Encontra-se por vezes também utilizado como a reta que contém o eixo transversal da hipérbole ou o eixo maior da elipse.

Eixos conjugados da elipse – considerando a elipse uma transformação homológica de uma circunferência, em que se representem dois diâmetros perpendiculares entre si, e, por exemplo, se a transformação resultar numa representação em perspetiva cónica com dois pontos de fuga correspondentes às direções dos dois eixos, os eixos representados na elipse serão conjugados não passando no centro da elipse.

Elipse – é a secção cónica produzida por um plano oblíquo a todas as geratrizes e que não passa no vértice.

Figura – para os géometras gregos designava o retângulo circunscrito a qualquer figura plana e que permitia, pelos processos de quadratura, calcular as áreas das próprias figuras planas. Relativamente às curvas cónicas trata-se do retângulo de lados paralelos aos eixos da elipse e tangentes a esta, e do retângulo de lados paralelos aos eixos da hipérbole e cujos vértices resultam da interseção das tangentes nos extremos do eixo transversal com as assíntotas, ou do retângulo em que o lado maior é uma corda da parábola paralela à tangente no vértice da parábola e cujos lados menores são definidos pelas perpendiculares nos extremos da corda.

Figura (de uma cónica central) – designação que os gregos atribuíam ao retângulo que tem por base o diâmetro transversal e como outro lado o parâmetro ou *latus rectum*.

Figura plana – é qualquer linha curva ou quebrada, ou curva e quebrada, cujos pontos se situam num único plano, embora esta expressão seja mais usualmente utilizada para designar unicamente figuras fechadas.

Figuras semelhantes – são duas ou mais figuras com propriedades geométricas iguais mas que variam de tamanho e orientação espacial. Se tiverem a mesma orientação espacial diz-se que são figuras semelhantes e de lados paralelos.

Focos de uma cónica – são pontos do eixo da cónica que são utilizados desde os gregos da antiguidade clássica como uma das formas para definir as curvas cónicas. Na elipse a soma das distâncias de qualquer dos seus pontos aos focos é igual ao eixo maior. Na hipérbole a diferença das distâncias de qualquer dos seus pontos aos focos é igual ao eixo transversal e na parábola a distância de qualquer ponto ao foco é igual à distância do ponto à diretriz. Com nome originado pelas propriedades óticas designadamente nos espelhos curvos, é um ponto do eixo que dispõe da propriedade de, nos espelhos parabólicos, ser o ponto de interseção

Curvas Cónicas e Superfícies Geradas pelas Curvas Cónicas: Os seus Traçados Geométricos e Aplicações no Design.

dos raios refletidos pelo espelho resultantes de raios incidentes paralelos ao eixo. Nos espelhos elípticos os raios de luz emitidos a partir de um dos focos, depois de refletidos no espelho, intersejam-se no outro foco. Nos espelhos hiperbólicos os raios luminosos emitidos cuja reta que contem o sentido do raio passe num foco são refletidos no espelho com uma direção que contem o outro foco no prolongamento de sentido contrário ao do raio refletido. Estas propriedades da Ótica são igualmente verificadas em outras áreas da Física, designadamente na Mecânica, e comprováveis por exemplo através de mesas de bilhar com a forma de curvas cónicas. Em Astronomia o foco é a posição de um corpo celeste relativamente à órbita elíptica descrita por um seu satélite.

Geratriz – é a linha que ao deslocar-se sobre pontos da diretriz gera a superfície. Se a geratriz for reta a superfície diz-se regrada.

Grau – o mesmo que ordem

Hipérbole – é a secção cónica produzida por um plano paralelo a duas geratrizes, não as contendo e intersecando a diretriz da superfície.

Hipérbolos conjugadas – são as que têm as mesmas assíntotas e a mesma distância focal, situando-se os seus ramos em quadrantes simétricos relativamente às assíntotas.

Latus rectum (ou parâmetro das ordenadas) – é o segmento de reta que tem um extremo no ponto de interseção de um diâmetro com a curva cónica, perpendicular ao diâmetro e pertencente ao plano da secção, com dimensão constante. Sendo p o latus rectum ou parâmetro, o a ordenada e a a abcissa, d o diâmetro e k um acréscimo ou subtração ao parâmetro, na parábola obtemos $p = o^2 / a$, na hipérbole obtemos $p + k = o^2 / (d + a)$ para $d / p = (d + a) / (p + k)$, e na elipse obtemos $p - k = o^2 / a$ para $d / p = (d - a) / (p - k)$. De notar que a definição referida é a correspondente a considerar a cónica apresentada pelos eixos, se esta se apresentar por dois diâmetros conjugados o parâmetro é um segmento de grandeza constante para cada cónica, a passar num extremo de um diâmetro e paralelo à direção do diâmetro conjugado.

Locus ou **Lugar Geométrico** – é o conjunto de pontos que satisfazem uma condição determinada.

Normal ou **perpendicular num ponto (de uma reta, curva, plano ou superfície curva)** – é a reta perpendicular a uma reta, à tangente a uma curva, nesse ponto, a perpendicular a um plano nesse ponto, ou seja, a perpendicular a duas retas não paralelas do plano e a perpendicular a uma superfície curva nesse ponto, ou seja, a perpendicular ao plano tangente à superfície nesse ponto.

Ordem ou grau de uma superfície – é o número máximo de pontos em que ela pode ser cortada por uma reta. A ordem de uma superfície é igual à ordem mais elevada das suas secções planas. **Quádrlica** é uma superfície do segundo grau. **Cúbica** é uma superfície do terceiro grau. **Quártica** é uma superfície do quarto grau.

Ordenada de um ponto da cónica – é a metade da corda que passa num ponto da cónica entre este e o diâmetro conjugado da direção da corda.

Parábola – é a secção cónica produzida por um plano paralelo a uma única geratriz, não a contendo e intersecando a diretriz da superfície.

Parâmetro das ordenadas – é mesmo que latus rectum.

Parâmetro de uma cónica – designado pelas letras p ou k , é a distância de um foco à diretriz situada do mesmo lado do eixo nas cónicas centrais. Na parábola é a distância do foco à diretriz, ou seja, o dobro da distância do foco ao vértice.

Plano diretor – plano relativamente ao qual a geratriz, curva plana ou reta, no movimento de geração da superfície, se mantém paralela.

Pólo e polar relativamente a uma cónica – O ponto P, interior ou exterior à cónica, é o Pólo sendo p a polar de P em relação à cónica. A polar é a definida pelos pontos conjugados harmónicos com P, nas retas que a partir de P interseitam a cónica, relativamente aos pontos de interseção com a cónica.

Ponto de contacto – é o ponto em que uma tangente toca uma curva.

Quádrlica – é o grau de uma curva ou superfície de 2º grau (ver ordem ou grau).

Quadrilátero completo – figura geométrica definida por qualquer conjunto de quatro retas complanares, em que não existe interseção simultânea de quaisquer três das retas. A figura demarca no plano um quadrilátero e dois triângulos adjacentes e tem três diagonais, duas do quadrilátero e uma terceira definida pelos vértices dos dois triângulos opostos à adjacência.

Quártica – é o grau de uma curva ou superfície de 4º grau (ver ordem ou grau).

Quíntica – é o grau de uma curva ou superfície de 5º grau (ver ordem ou grau).

Secção cónica – intersecção de um plano com um cone ou superfície cónica. Se for paralela à base ou diretriz circular é uma circunferência.

Secções subcontrárias – são secções num cone produzidas por planos perpendiculares a um plano perpendicular à base e contendo o eixo do cone, que produz no cone um triângulo semelhante aos triângulos definidos pela intersecção dos dois planos de secção com o mesmo triângulo. Nas condições descritas há duas séries de secções no cone, cada uma produzida por planos paralelos aos das duas secções subcontrárias uma da outra. Como caso particular, se um plano de secção é paralelo à base circular de um cone a secção e a sua subcontrária são circunferências assim como todas as secções paralelas a estas.

Superfície cónica – é a superfície gerada por uma reta designada geratriz, considerando que a reta se desloca fixa num ponto próprio ou impróprio, ou seja situado no infinito, tendo como diretriz qualquer das curvas cónicas não degeneradas, embora usualmente seja apresentada com diretriz circular. Aprofundando a definição, é a superfície definida por retas, designadas por geratrizes, passando por um ponto não pertencente ao plano da diretriz, próprio ou impróprio, ou seja, situado no infinito, designado vértice ou **ápex**, e que passam igualmente por pontos da diretriz, que é, em regra, uma circunferência, embora possa ser qualquer curva cónica. A superfície define um duplo cone, ou seja, dois cones semelhantes com direções opostas relativamente ao vértice. Se o vértice estiver no infinito a superfície torna-se cilíndrica, com geratrizes paralelas. Tendo em conta que a elipse, e o seu caso particular o círculo, podem ser considerados polígonos com um número infinito de lados, nessa perspetiva também são superfícies cónicas as superfícies prismáticas e piramidais. Por outro lado, se a curva diretriz degenerar numa reta a superfície é um plano.

Superfície curva – é a superfície em que existem curvas planas. As superfícies curvas podem ser de curvatura simples relativamente a um dos seus pontos, se existir um plano de secção a passar no ponto que nesta dê origem a uma reta, ou de curvatura dupla, se quaisquer dois planos de secção a passar no pontos derem origem a curvas.

Superfície de revolução – é a que resulta da rotação de uma geratriz reta ou curva em torno de um eixo. Podem ser geradas por retas ou curvas complanares com o eixo de revolução, situação mais vulgar, ou as geratrizes podem ser retas ou curvas não complanares com o eixo.

Superfície empenada – é a superfície regradada que não pode se planificar.

Superfície planificável – é a superfície regradada que pode desenvolver-se num plano.

Superfície regradada – é a que é gerada por uma reta.

Tangente a uma curva num ponto T – é a posição limite de uma secante que gira em roda do ponto até que o seu segundo ponto de intersecção com a curva se confunda com T. Se T é impróprio, ou seja, está no infinito a tangente chama-se assímtota.

Tangente a uma cónica – é a tangente à curva num ponto dado, pertencendo ao plano da curva, é perpendicular à normal, que é a bissetriz do ângulo formado pelos segmentos de reta que, nas cónicas centrais, unem o ponto dado aos dois focos, sendo na parábola o ângulo definido pelo segmento de reta que une o ponto ao foco e pela reta que passa no ponto paralela ao eixo da parábola.

Tangente a uma curva – é a reta que toca a curva num único ponto.

Triângulo axial de um cone – é a secção produzida num cone por um plano que contenha o eixo.

Tronco de superfície ou sólido – é uma das partes resultantes da intersecção da superfície ou sólido com outra superfície.

Vértice – nas figuras planas é um ponto em cada extremo dos segmentos de reta que definem a figura. Nos sólidos são pontos de intersecção de arestas ou de confluência de geratrizes. Quando os vértices são intersecções de arestas da base são vértices da base.

Vértice da base de um sólido – é cada ponto no extremo dos segmentos de reta que definem a base do sólido.

Vértice de um cone ou superfície cónica – é um ponto por onde passam todas as geratrizes que definem a superfície cónica

Vértice de uma curva – é o ponto sobre o eixo de uma curva, ou parte de curva, na inflexão desta no ponto de maior curvatura, e que permite dividir essa curva ou parte de curva em dois ramos.

Vértice de uma curva cónica – são os pontos da curva no eixo desta e que têm como tangentes paralelas à diretriz. Na elipse são os pontos extremos do eixo maior e na hipérbole os pontos extremos do eixo transversal. Na parábola é o ponto da curva no eixo. Nos cones retos alguns autores consideram apenas um vértice, o ponto da curva de secção a maior distância à base do cone.

NOTAÇÕES ADOTADAS E REPRESENTAÇÃO

Ao longo do texto são utilizadas nas figuras traçados de geometria plana e a representação de formas tridimensionais.

Assim, quanto aos traçados de geometria plana, designam-se os pontos por letras maiúsculas do alfabeto latino e as linhas por letras minúsculas do mesmo alfabeto, tal como tem sido habitual no ensino português de matemática e geometria descritiva.

Quanto às formas tridimensionais utiliza-se a representação em dupla projecção ortogonal, no método europeu, ou seja, projecção horizontal positiva abaixo do eixo x e frontal positiva acima do eixo x. O sistema de

notações utilizado é o adotado desde 1999-2000 no ensino secundário português de Geometria Descritiva, partindo do princípio que a maioria dos utilizadores deste texto já será detentora de conhecimentos anteriores na área da Geometria Descritiva e conhecerá tal sistema de notações. Deve, no entanto, salientar-se que na história do ensino da Geometria Descritiva no ensino secundário português encontramos sistemas de notações com algumas diferenças de época para época, e que, sobretudo, no ensino superior e na bibliografia de outros países, há diferentes sistemas de notações.

Sistema de referência

- plano horizontal de projeção ν_0 .
- plano frontal de projeção φ_0 .
- plano de perfil de referência π_0 .
- reta de intersecção de φ_0 e ν_0 , eixo X .
- reta de intersecção de ν_0 e π_0 , eixo Y .
- reta de intersecção de φ_0 e π_0 , eixo Z .

Coordenadas

- **abcissa** – distância ao plano π_0 . É positiva para a esquerda.
- **afastamento** – distância ao plano φ_0 . É positivo para a frente.
- **cota** – distância ao plano ν_0 . É positiva para cima.

Notações

Pontos – (alfabeto latino maiúsculo em estilo itálico) – $A, B, \dots P, Q, \dots$

A_0 – projeção de A no eixo x .

A_1 – projeção horizontal do ponto A .

A_2 – projeção frontal do ponto A .

A_3 – projeção de A no plano de perfil π_0 .

A_r – rebatimento do ponto A .

Retas e linhas em geral – (alfabeto latino min. em estilo itálico) – $a, b, \dots r, \dots$

r_1 – projeção horizontal da reta ou linha r .

r_2 – projeção frontal da reta ou linha r .

r_3 – projeção de r no plano de perfil π_0 .

**Curvas Cónicas e Superfícies Geradas pelas Curvas Cónicas:
Os seus Traçados Geométricos e Aplicações no Design.**

r_r – rebatimento da reta ou linha r .

H_r – traço horizontal da reta r . Intersecção de r com V_0 .

F_r – traço frontal da reta r . Intersecção de r com φ_0 .

(r_2) – reta projetante frontal.

(r_1) – reta projetante horizontal.

$[d_1]$ – linha d curva, ou poliédrica, fechada, em projeção horizontal.

$[d_2]$ – linha d curva, ou poliédrica, fechada, em projeção frontal.

$[d_3]$ – linha d curva, ou poliédrica, fechada, em projeção lateral

Planos – (alfabeto grego minúsculo em estilo itálico)

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \omicron, \pi, \rho, \varsigma, \sigma, \tau, \upsilon, \varphi, \chi, \psi, \varepsilon, \omega$.

θ_0 – traço do plano θ no eixo x . Intersecção do plano θ com o eixo x .

h_θ – traço horizontal do plano θ . Intersecção do plano θ com o

f_θ – traço frontal do plano θ . Intersecção do plano θ com o

p_θ – traço de perfil do plano θ . Intersecção do plano θ com o

(f_δ) – plano projetante frontal.

(h_δ) – plano projetante horizontal.

Sólidos ou Superfícies – (alfabeto grego maiúsculo em estilo itálico) –

$A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta, I, K, \Lambda, M, N, \Xi, O, \Pi, P, \Sigma, T, Y, \Phi, X, \Psi, \Omega$.

Linha fechada curva ou poligonal – (linha entre parêntesis retos) – $[s]$ ou $[ABCDE]$.

Intersecção de dois planos – reta $i = \alpha \cap \beta$.

Intersecção de uma reta com um plano – ponto $P = r \cap \delta$.

Coincidências de pontos, retas, linhas, superfícies ou suas projeções

$$A \equiv A_2 \equiv (r_2) \equiv F_2 r$$

$$r_2 \equiv (f_\theta)$$

$$[d_2] \equiv (\phi)$$

Tipos de linhas

Dada a natureza dos temas abordados procurar-se-á cumprir com as normas de desenho técnico, não obstante, por razões comunicativas, sejam necessárias algumas adaptações adequadas. Assim, se em desenho técnico, linhas de igual relevância têm espessuras iguais, na resolução de problemas geométricos parece

aceitável que a solução seja apresentada com uma espessura maior, que em desenho técnico corresponde à delimitação dos cortes operados num material. Da mesma forma, se no desenho técnico as linhas traço ponto traço são auxiliares que designam posições de eixos ou cortes, serão aqui utilizadas também como indicação de planos auxiliares. As designações fino, médio e espesso têm correspondência no desenho técnico em normas próprias relacionadas com a dimensão dos desenhos e que, grosso modo, significam aproximadamente a duplicação da espessura fina para a espessura média e, novamente a sua duplicação para a espessura maior, tendo em conta a dimensão total do desenho.

Linhas auxiliares – traço contínuo fino.

Contornos visíveis ou dados – traço contínuo de espessura média.

Contornos invisíveis – traço interrompido de espessura média.

Linhas de apresentação de soluções – traço de espessura maior, contínuo ou interrompido.

Planos auxiliares e linhas de eixo – traço ponto traço de espessura fina.



1. INTRODUÇÃO

Este documento corresponde à Tese de Doutoramento em Design que desenvolvemos na Faculdade de Arquitetura da Universidade Técnica de Lisboa com o título **Curvas Cónicas e Superfícies Geradas pelas Curvas Cónicas: Os seus Traçados Geométricos e Aplicações no Design**, sob a orientação do Professor Doutor Fernando José Carneiro Moreira da Silva da Faculdade de Arquitetura da Universidade Técnica de Lisboa e do Professor Doutor Vítor Manuel Bairrada Murtinho da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

Pela natureza do tema, e de acordo com o desenho de investigação, propusemo-nos utilizar uma metodologia não intervencionista de base qualitativa, com recurso determinante à Crítica Literária nas suas componentes de recolha, seleção, análise e síntese e aprofundamento da investigação sobre a expressão gráfica dos conhecimentos sobre as cónicas através de modelos, algoritmos gráficos, de geometria plana fixa e dinâmica.

O tema inscreve-se no campo da Geometria aplicada ao Design, ou seja, no campo da relação das diversas áreas do Design com a Geometria, em particular com a sua expressão gráfica, sobretudo com a aplicação no desenho técnico e, logo, com reflexo na atividade projetual dos profissionais do Design.

Por outro lado encontrando-se a disciplina Geometria Aplicada em alguns planos de estudo de cursos de ensino de Matemática, normalmente é considerada como parte própria desta área do conhecimento, e não como campo de desenvolvimento de aplicações para outras áreas da ação humana. De facto não existem conhecimentos de Geometria que sejam específicos para utilização exclusiva noutra área, logo, também não existe uma Geometria Aplicada ao Design, com corpo conceptual e conteúdos próprios. Não obstante, tal não impede o reconhecimento de que diversos temas de Geometria têm tido importância significativa para o Design, desde a sua autonomização como área disciplinar, apesar de serem diferentes os conhecimentos mais utilizados em cada área de especialidade do Design e igualmente diferentes os que aplicamos em cada problema concreto. Neste sentido são inúmeras as relações que se podem estabelecer entre Geometria e Design, por exemplo, as aplicações de regras geométricas na criação de padrões no design gráfico, ou a



utilização dos sistemas de representação rigorosa como o método europeu ou as axonometrias no design de equipamento, entre muitas outras que se poderiam estabelecer.

Entendendo que “...a geometria não pode dizer-se grega, egípcia, babilónica, chinesa ou hindu... não porque ela tenha nascido aqui ou acolá, neste ou naquele mês, mas porque a sua língua e os pensamentos que ela suscita não se referem, nem pelo sentido nem pelo tempo, a nenhuma terra conhecida...” (SERRES, 1997, 10) estaremos a reconhecer a universalidade e intemporalidade da geometria e da própria definição de *medida da terra* como medida das coisas, ou seja, unificando em terra a natureza e o próprio homem. Por outro lado, se “...a área de intervenção do design industrial continua a ser a que se relaciona com o processo formativo dos objetos como elementos estruturais do ambiente humano...” (MALDONADO, 1999, 81) igualmente no design encontramos universalidade e identificação das coisas com o homem que as concebe e as usa, ou seja, também podemos concluir da inexistência de limites nas possibilidades de contacto entre Geometria e Design, ou seja, da universalidade desta relação.

Aliás, as curvas cónicas desempenharam sempre um importantíssimo papel na Geometria desde a descoberta de muitas das suas propriedades pelos gregos da Antiguidade Clássica, sobretudo com Menaechmus e depois com Apolónio de Perga, ou também por exemplo com o reconhecimento da sua importância para a Astronomia, designadamente com Kepler e Newton, ou o seu papel na origem das geometrias não euclidianas, com Bolyai, Lobatschewsky e Riemman, e, logo, o contributo para as teorias de Einstein, ou a sua utilização para a conceção dos radares durante a Segunda Guerra Mundial, ou ainda a recentíssima utilização de propriedades projetivas dos feixes de cónicas na programação de máquinas vídeo/computador para identificação de rostos em tempo real. No entanto, em grande medida o estudo e divulgação das cónicas no meio académico tem decorrido através da sua expressão analítica, ou seja através de equações matemáticas, com fraca ou nula utilização dos seus traçados geométricos. Assim sendo, é manifesta a importância e atualidade de um trabalho de adaptação de conhecimentos, designadamente os analíticos, para os traçados geométricos e a sistematização destes conhecimentos na sua expressão gráfica. Tendo em conta as considerações anteriores está também mais que justificada a utilidade dos traçados geométricos das cónicas também para o design. Não obstante, praticamente não existem referências na literatura às cónicas no Design. Esta é uma das lacunas que esta investigação se propõe começar a preencher.

Tendo em conta a evolução por que passou a geometria e o seu ensino no âmbito da matemática a partir do final do século XIX, com um quase integral abandono da geometria euclidiana, e tornando-se a geometria de expressão quase integralmente analítica, constatamos que são muito raras as publicações periódicas internacionais com artigos de



geometria euclidiana, mais raras ainda as publicações sobre a geometria do ponto de vista gráfico e, neste contexto, são quase inexistentes os artigos que abordem relações entre geometria e design. Assim a literatura disponível é quase integralmente constituída por livros de geometria e de design e alguns, poucos, sobre a relação entre geometria e arquitetura e artes visuais. Neste contexto, identificamos em primeiro lugar a existência de campos da geometria aplicada a diversas áreas. É assim que ressalta da literatura a existência de aplicações da Geometria às áreas da imagem. Por exemplo ALSINA (1995), de forma quase exhaustiva, apresenta como campos de interação a Teoria de grafos e da fórmula de Euler no estudo dos mosaicos e outros, desenvolve estruturas em árvore e a análise de malhas para chegar ao P.E.R.T.. Ao mesmo tempo aborda a geometria linear, a geometria homológica e a de afinidade, refere-se a matrizes e determinantes, à geometria euclidiana e à Teoria da Simetria. É um dos poucos a abordar neste contexto as cónicas, as quádricas e a geometria projetiva, para além de incluir “a régua e o compasso” e o tema da Teoria da proporção, designadamente o número de ouro, proporções divinas, números de Fibonacci e o Modulor de Corbusier. Também KAPPRAFF (1990) tem objetivos e uma estrutura de texto similar, estabelecendo uma diversificada relação entre geometria, enquanto ciência, e a arte. O tema da Teoria das proporções é um que surge quase sempre nos textos que relacionam a geometria e as artes visuais, e por vezes de uma forma quase exclusiva, como é o caso de ELAM (2001) relativo às proporções no design gráfico e industrial. Por outro lado, se IVINS Jr. (1964) escreve sobre a geometria e a história de arte, numa perspetiva histórica, já PEDOE (1983) aborda as relações da geometria e artes visuais através da história de arte com forte pendor geométrico, incluindo referências diversas às curvas cónicas. Também encontramos textos que manifestam uma atitude intermédia, como o de GHYKA (1946) ou o de NAVARRO de ZUVILLAGA (2008) que embora desenvolvendo questões de âmbito diverso no campo da geometria e suas relações com as artes e a técnica não revelam tão evidente intenção de serem exhaustivos no tema, antes se preocupando com a qualidade e rigor da informação produzida. BLACKWELL (1984), BARRAT (1989), EVANS (2000) e CALTER (2008) utilizam outra estratégia, limitando os temas abordados nas relações da geometria e arquitetura e artes visuais, mas com rigor e verdadeiras sugestões de abordagem com forte pendor geométrico. Também BAGLIVO; GRAVER (1983) se inscreve na mesma linha desenvolvendo os temas da incidência e simetria no design e na arquitetura, como exemplos de aplicação de uma abordagem topológica.

Uma outra perspetiva é a dos matemáticos como HILBERT; COHN-VOSSSEN (1999), FIELD; KOMKOV (1992), ou SAURÍ (2009) que escrevem enquanto matemáticos sobre assuntos de geometria com aplicação em diferentes áreas, mas sem se debruçarem sobre aplicações concretas em áreas específicas.



Foi necessário analisar, para um enquadramento histórico do tema, as Histórias da Matemática de BOYER (2005) ou de ESTRADA [et al] (2000) e ainda de ZEUTEN (1901) entre outras. Coolidge assume também importância pelo conjunto dos seus escritos, de que se referem quatro indispensáveis à história das cónicas e das superfícies quádricas e ao estudo das suas propriedades, designadamente um que se refere a desenvolvimentos teóricos específicos propiciados por grandes matemáticos (COOLIDGE, 1990), outro que diz respeito a curvas planas do ponto de vista algébrico (COOLIDGE, 2004), outro ainda que se debruça sobre a história dos métodos geométricos (COOLIDGE, 2003) e também, e porventura o mais interessante para a investigação um compêndio (COOLIDGE, 1945) sobre as curvas cónicas e as superfícies quádricas. Da mesma forma, para o adequado enquadramento do estudo das cónicas desempenham um importante papel as Histórias das Matemáticas de MONTUCLA (1799 a 1802) e BALL (1906). Se a geometria das cónicas esteve desde a antiguidade clássica no centro das investigações em geometria a publicação do Tratado das Propriedades Projetivas das Figuras (PONCELET, 1822) e da sua fundamentação por geometria analítica (PONCELET, 1862) criou a geometria projetiva. É comum encontrar-se na literatura como antecedentes os trabalhos de Philippe de La Hire (1640-1718) em 1685 (LA HIRE, 1995), pela sistematização dos conhecimentos sobre as cónicas, e de Desargues (1591-1661), divulgado inicialmente no âmbito de aplicações práticas por BOSSE (1643), e reconhecido posteriormente sobretudo pelo seu teorema que define a essência da geometria projetiva, e da perspectiva linear rigorosa, inicialmente que teve divulgação por Poncelet e sobretudo através da sua publicação por POUDRA (1864). É ainda de ter em conta o contexto histórico designadamente o facto de Poncelet ser o professor que sucedeu a Gaspard Monge, criador da Geometria Descritiva, na Escola Politécnica de Paris. Não esqueçamos o contexto de guerra na Europa com forte antagonismo entre a França e a Inglaterra e o confronto entre as ideias republicanas e monárquicas, antagonismo com repercussões no meio académico. Para confirmar a importância e atualidade do trabalho de Poncelet, e da geometria projetiva, deve consultar-se por exemplo FLATTO (2009) e DRAGOVIC; RADNONIC (2011).

Durante todo o século XIX igualmente são produzidos avanços na expressão analítica na geometria, com crescente tendência para se passar a matemática como a ciência e a geometria como apenas uma das suas áreas. Paralelamente, em todo o final do século XIX e início do século XX foram produzidos uma miríade de manuais e artigos científicos sobre as cónicas, como por exemplo HATTON (1913) ou ENRIQUES (1920) e (1930), tanto na sua expressão clássica com demonstrações fundamentadas na geometria lógico-dedutiva como em demonstrações fundadas na geometria analítica. Se esta profusão de publicações demonstra o interesse e importância do tema das cónicas conduziu, sobretudo nos textos com fundamentação mais clássica, a alguma repetição de conteúdos e



até à apresentação como novas propriedades de algumas que eram já repetição, ou, por vezes, apenas novas formas de apresentar a mesma propriedade por outro ângulo de abordagem. Tal pode ter contribuído para se ter criado a ideia do esgotamento da geometria como disciplina autónoma e, em particular, do tema das cónicas. Para a demonstração de que não era assim estiveram os sucessivos avanços na geometria projetiva e, sobretudo, os trabalhos de divulgação de David Hilbert (HILBERT, 1902) e (HILBERT; COHN-VOSSSEN, 1999) e a recuperação do tema por Coxeter com ampla divulgação nos países anglo-saxónicos (COXETER, 1961) e (COXETER, 1974).

Analisando a produção das últimas décadas em geometria conclui-se que a maioria dos estudos são meramente algébricos, mesmo os exemplos de geometria aplicada com desenvolvimento na segunda metade do século vinte, designadamente as aplicações informáticas no campo da imagem. No Ocidente, e não obstante os trabalhos de Coxeter na divulgação da geometria, pouco ou nada de relevante foi produzido. Praticamente só em Espanha, e na sequência da publicação, na primeira metade do século vinte, de obras determinantes como a de HAUSSNER (1928), uma reedição em castelhano de um manual de introdução à geometria projetiva, de origem alemã e para utilização de formação profissional especializada, e que pode ser um bom instrumento para quem se queira iniciar nesta área de conhecimento, encontramos ainda hoje uma linha de produção com base na geometria projetiva tratada graficamente, designadamente com as obras de Izquierdo Asensi, em especial duas delas que desenvolvem o tema da geometria descritiva com profundidade inusual e fazendo a ponte em momentos diversos para a geometria projetiva, (IZQUIERDO ASENSI, 1985) e (IZQUIERDO ASENSI, 1988), tornando a obra deste autor uma referência incontornável, ou a obra de NAGORE (1986-1988) que é um exemplo de sistematização metodológica, profundidade e rigor na geometria para o ensino em arquitetura e com toda a pertinência para o objeto desta investigação, ou ainda Pozo que para além de reeditar a obra do seu mentor Nagore publica igualmente um trabalho de referência (POZO, 2006), ou Rodriguez Abajo que nos seus diversos trabalhos (RODRIGUEZ ABAJO, 1982-92) aprofunda e complementa os textos de Izquierdo Asensi, embora sem o referir. Aliás é comum encontrar nas universidades espanholas edições de manuais de geometria descritiva como é o caso de GOMES MARTÍ (1996), da Universidade Politécnica de Valencia, dedicado às curvas e superfícies em engenharia do ponto de vista da geometria descritiva. Já por exemplo ALSINA CATALÁ; JACAS MORAL; TOMÁS BELENGUER (2007), da Universidade Politécnica da Catalunha, na Geometria para a Arquitetura, sem prejuízo da expressão gráfica, dão especial ênfase à expressão analítica. Em França, LADEGAILLERIE (2003) é um compêndio de geometria para professores de matemática, mas que nem por isso ignora a importância dos traçados geométricos gráficos. São estes entre poucos outros, os que publicam em Espanha e França no final do século XX



e início do século XXI, registando-se referências a publicações esporádicas na Europa de Leste em particular na Polónia e na Rússia. Nos E.U.A. pouco de relevante existe no final do século XX, não obstante surgir, com importância crescente, a publicação americana de artigos do leste europeu e, também sobretudo, da China, apesar de muitos publicados em revistas americanas, embora com forte pendor algébrico, como por exemplo ZHU; PENG (1999, 645–658). Destes últimos destaca-se Akopyan; Zaslavsky até por os próprios autores se enquadrarem no que designam por “...métodos puramente geométricos” (AKOPYAN; ZASLAVSKY, 2007, contracapa), contendo importantes e atuais contributos sobre as cónicas, constituindo por isso uma das principais referências nesta investigação.

Em Portugal, é marcante a rara publicação de artigos científicos sobre geometria das cónicas em revistas da especialidade e a quase inexistente publicação de livros com referência ao tema. Tomando como referência Francisco Gomes Teixeira que, no início do séc. XX, publica uma das obras mais completas de sempre sobre as curvas em geral, embora com especial incidência para aspetos analíticos (TEIXEIRA, 1908), os manuais de ALBUQUERQUE (1946, 1968 e 1969), professor da Universidade de Coimbra, os trabalhos de Dias Agudo, professor do Instituto Superior Técnico em Lisboa, AGUDO (1952, 1953, 1954, 1961, 1962 e 1978) e de Rios de Souza, nos anos 50 do século XX, ou ainda os textos de Peres Rodrigues nos anos 70 e 80, quase todos eles do ponto de vista da geometria analítica, uma dissertação de mestrado com referência às curvas cónicas e a algumas aplicações destas (CORDEIRO, 2005) e a abordagem de alguns aspetos das cónicas do ponto de vista gráfico em CUNHA (1982) e em RICCA (2000), pudemos constatar o diminuto número de trabalhos sobre este tema em Portugal.

Como exemplo do que é prática corrente em Espanha, tanto RODRIGUEZ DE ABAJO (1982), (1990), (1991), (1992) e (1992a) como IZQUIERDO ASENSI (1985), entre diversos outros autores, iniciam os seus manuais de Geometria Descritiva com considerações gerais sobre geometria projetiva, em capítulo próprio, com noções teórico-práticas, o que se compreende tendo em conta que as noções elementares de Geometria Projetiva continuam a fazer parte da formação pré-universitária em Espanha. Em Portugal, depois de uma notável geração de matemáticos no final do século XIX e início do século XX ter escrito contributos para o desenvolvimento da geometria projetiva, como por exemplo Motta Pegado, PEGADO (1867), (1869), (1869a), (1875), (1878), (1880), (1889) e (1902), ou Francisco Gomes Teixeira, TEIXEIRA (1908), e que mostra que existiu uma geração de matemáticos a trabalhar na área da geometria ao nível do melhor que ia sendo produzido, a partir de meados do século XX só alguns manuais importados eram utilizados na formação de arquitetos, como por exemplo ROUBAUDI (1961), e os textos do Professor Dias Agudo, AGUDO (1952), (1953), (1954), (1960), (1961) e (1962), na formação de matemáticos e engenheiros, ou Luís de Albuquerque na formação geométrica em cursos de matemática,



ALBUQUERQUE (1968) e (1969), ou CUNHA (1982), que teve uma grande difusão em todas as áreas do desenho técnico e refere aplicações práticas da geometria projetiva, são exceções, sendo portanto escassas as publicações e, embora utilizando diferentes níveis na sua fundamentação, sem grande inovação teórica e, normalmente, restringindo-se a considerações próprias da geometria aplicada. Em regra, na segunda metade do século XX em Portugal, a geometria projetiva passou a ser tema reservado à formação em cursos de matemática e, mesmo aí, tem sido abandonado. As únicas exceções recentes nas publicações são RIBEIRO (1991), com algumas utilizações práticas, RICCA (2000), que utiliza conceitos homológicos nos seus traçados em Geometria Descritiva, e apresenta a fundamentação em geometria projetiva em capítulo anexo no final, e COSTA (2005), onde alguns dos traçados que vamos apresentar já constavam, apesar de se tratar de um texto de circulação limitada, por não ter sido editado. Tal permite pensar que possam existir outros textos de circulação limitada, como, por exemplo, sebatas de estudo, mas das quais não encontrámos referências.

Entende-se ser agora de referir o enquadramento teórico e algumas considerações práticas. AGUDO (1952, 3-5), no seu “Complementos ao Curso de Geometria Descritiva”, lembra que o trabalho de Gaspard Monge, o criador da Geometria Descritiva, cujo primeiro tratado é de 1799, apesar de escrito vários anos antes, foi prosseguido por um outro docente da Escola Politécnica de Paris Jean Victor Poncelet, que introduziu o conceito de homologia e é considerado o precursor da geometria projetiva. Gauss foi, posteriormente, o primeiro a reconhecer a possibilidade de uma nova geometria não euclidiana, baseando-se nos postulados de Poncelet, mas foram o russo Lobatchevsky e o húngaro Bolyai a fazer as primeiras publicações sobre o tema. Essa nova geometria ficou conhecida por hiperbólica. Em 1851 Riemann apresenta uma nova geometria não euclidiana, contrária à de Gauss, Lobatchevsky e Bolyai, conhecida hoje por geometria elíptica. Como exemplo distintivo destas geometrias, diz AGUDO (1952, 4) que, na geometria hiperbólica, a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180° , na geometria elíptica a mesma soma é superior a 180° e na euclidiana, ou parabólica, a soma dos ângulos internos do triângulo é 180° . A geometria euclidiana parte da necessidade de medir distâncias e ângulos. Poncelet iniciou a geometria projetiva publicando o “Traité des Propriétés Projectives des Figures” em 1822, não pondo em causa a geometria euclidiana, mas dando origem a que Staudt em 1847 viesse a demonstrar que os seus teoremas eram independentes do conceito de distância, o qual podia ser expresso por elementos projetivos mais simples. Assim, os teoremas da geometria euclidiana passaram a ser considerados casos particulares da geometria projetiva. Por outro lado, com Fermat e Descartes (séc. XVII) já anteriormente tinha aparecido um outro método de estudo da geometria. Representando um ponto por um conjunto de números, e aplicando métodos algébricos a problemas geométricos, Descartes



originou a geometria analítica, o que permitiu enunciar teoremas gerais, que deixariam de ser válidos se apenas tivéssemos em conta os pontos reais. Tal deu origem a uma importância cada vez maior da geometria analítica e marcou o desenvolvimento posterior da geometria projetiva, que cada vez mais passou a utilizar como suporte a demonstração analítica.

De notar igualmente que a pesquisa efetuada nas publicações da Academia das Ciências de Lisboa e aos patrimónios da Universidade do Porto e da Universidade de Coimbra, permitiu concluir que até aos anos trinta do século XX a produção científica na área da geometria euclidiana, e da geometria das cónicas em particular, estava a par do melhor que se publicava internacionalmente, com a produção de dezenas de textos que, apesar da evidente diferença de relevância entre eles, confirmam o interesse pelo tema e a sua atualidade à época. Tal teve uma interrupção súbita nas décadas seguintes, salvaguardando-se as exceções anteriormente referidas, porventura por força das transformações do ensino da matemática no ensino superior português. Aliás esta nova atitude sobre as cónicas foi similar nos outros países tendo o tema ficado restringido, de forma praticamente exclusiva, sobretudo a partir do início da segunda guerra mundial, às investigações mais avançadas tanto na emergência da computação como no desenvolvimento do design industrial, sobretudo o ligado ao desenvolvimento da indústria aeronáutica, e situando-se muitas vezes estas investigações cobertas por segredo militar. Hoje, a partir por exemplo de LIMING (1979) pode concluir-se da presença permanente do tema das cónicas nas áreas referidas e com FIELD; KOMKOV (1992) confirmar o alargamento igualmente à área da robótica. RUZINOV (1968) é neste aspeto particular elucidativo de como a utilização das transformações geométricas na mecânica permitem o estabelecimento das bases da robótica e de como se pode passar da conceção de máquinas elementares para desenhar curvas para a construção de equipamentos robóticos sofisticados. O tema das transformações geométricas é igualmente desenvolvido profusamente em YAGLOM (1962, T. I, II e III), sendo que, significativamente atendendo à época histórica, tanto o trabalho de Ruzinov como o Yaglom, apesar de publicados inicialmente em russo na União Soviética, tiveram edições com pouca diferença temporal em inglês, nos EUA, o que permite concluir da sua relevância à época. Por outro lado, ADAMS; BILLOW (1988) e STANDIFORD; STANDIFORD (2000) são referências para a compreensão da passagem da geometria descritiva à modelação digital de objetos tridimensionais.

Em sequência do desenvolvimento da produção de imagens por tubos de raios catódicos, igualmente durante a segunda guerra mundial, a computação é igualmente alargada ao ambiente gráfico, primeiro em aplicações de alto domínio tecnológico, tendo o aprofundamento dos conhecimentos no âmbito das cónicas levado ao desenvolvimento de



toda uma nova área de trabalho com as curvas, dando origem às *splines*, curvas que hoje integram quase todos os programas informáticos de desenho e cujo desenvolvimento se pode constatar por exemplo em MEYER (1999), FARIN (1991), FARIN (1995) e FARIN (2002), ou ainda SHIKIN; PLIS (1995) que é um desenvolvimento às *splines* de um outro trabalho mais geral sobre todas as curvas (SHIKIN, 1995). A utilização tridimensional de *splines* permite igualmente a geração gráfica de superfícies curvas e a modelação tridimensional de tais superfícies por métodos expeditos tal como se pode comprovar igualmente, por exemplo, em YAMAGUCHI (1998) ou BIX (2006), tendo como suporte a geometria projetiva de acordo com PENNA; PATTERSON (1986) ou HERMAN (1992). Com esta base a modelação tridimensional de imagens com suporte digital alargou-se a áreas muito diversas no campo da visão tridimensional ou do reconhecimento de imagem. Nestas áreas deve conferir-se por exemplo FAUGERAS (1999), SARFRAZ (2003), KLETTE; ROSENFELD (2004) ou ainda FAUGERAS; LUONG; PAPADOPOULO (2001). Se o reconhecimento de imagem teve um profundo desenvolvimento nas últimas décadas tal teve um enorme impulso após o ataque às Torres Gémeas em Nova York, com o desenvolvimento de máquinas de reconhecimento de rostos em tempo real, com uma profusa publicação de artigos científicos em diversas revistas na área da informática, onde foram notórias as referências às curvas cónicas e à geometria projetiva em geral, sobretudo no período de 2004 a 2009.

Em todas as áreas da geometria e também nas curvas cónicas, e não obstante o papel que desempenharam para o surgimento das novas geometrias, designadamente na representação gráfica, a tendência dominante no ensino e na produção científica da matemática transformou-as em meras equações, esquecendo o papel da imagem na comunicação e, sobretudo, esquecendo que a geometria aplicada é utilizada por muitos não matemáticos, designadamente na criação artística na Arquitetura, na Pintura e Escultura e nas mais recentes formas de expressão artística das artes visuais e no Design.

Não cabe no âmbito deste trabalho desenvolver o tema da imagem e da sua utilização comunicativa. No entanto, é óbvio que a presente investigação pretende refletir a experiência anterior em áreas de ação paralela, como a História da Arte, a Psicologia da Perceção Visual, o Desenho, a imagem e os novos sistemas de informação, a Tecnologia Educativa, a Arquitetura e as Engenharias, e, obviamente, a Matemática, áreas que têm interação direta na formação em Geometria para cursos de Design. Por outro lado, as formas geométricas correspondem a processos produtivos, pois existem para responder a necessidades concretas que cada época determina. Assim sendo, e como muitos outros problemas da geometria, as curvas cónicas tratadas graficamente têm uma utilização muito próxima da Geometria Aplicada e do Desenho Técnico, o que contribui para a relevância do



tema para o Design, entendido este como ponto de cruzamento das áreas científica, técnica e artística.

Decorrendo das considerações anteriores, pode apontar-se um outro aspeto deste estudo, ou seja, o da necessidade de adequação à mudança dos instrumentos de desenho. Hoje é possível, com recursos de uso generalizado, designadamente o Desenho Assistido por Computador (DAC) e os programas de desenho vetorial, resolver problemas com rigor e facilidade. A investigação decorre na perspetiva de ser possível utilizar as curvas cônicas como traçados auxiliares, mesmo que implicando a determinação ponto a ponto, permitindo formas expeditas para construir as curvas, o que alarga as possibilidades de resposta a problemas complexos. Tal implica reflexão sobre as curvas cônicas e, em especial, sobre como obter novos traçados independentes da determinação dos elementos usualmente conhecidos, como por exemplo os pontos notáveis como os extremos de eixos ou os focos, e, sobretudo, centrados na forma gráfica da curva. Nesse contexto tem particular relevância o trabalho de NAGORE (1986, 1987 e 1988), compêndio de geometria para arquitetos com expressão essencialmente gráfica, sobretudo o seu terceiro volume onde são abordados os fundamentos da geometria projetiva e apresentadas soluções gráficas para diversos problemas relativos às cônicas, mas também o livro de LIMING (1981), compêndio dedicado ao projeto de engenharia aeronáutica, com uma componente analítica mas igualmente com forte componente gráfica e que corresponde igualmente a uma utilização simultânea dos traçados de papel e lápis mas igualmente das bases analíticas para o CAD (Computer Aided Design), com uma forte componente sobre o traçado de curvas e, em particular das curvas cônicas e suas derivadas.

Refira-se que, quando obtemos a forma gráfica de uma curva cônica, por exemplo quando representamos a elipse como vista perspética de uma circunferência, normalmente não ficamos a conhecer o centro, eixos, focos. Ou seja, com os procedimentos correntes, a forma gráfica, só por si, não nos diz praticamente nada daquilo que usualmente é utilizado na construção gráfica das curvas. A não ser que a abordemos de uma perspetiva diferente, por exemplo com centro na geometria projetiva, ou socorrendo-nos de processos da geometria plana. Tal assunto, de aparente detalhe relativamente ao tema central, acaba por exigir uma nova abordagem, para permitir novas conclusões e aplicações, implicando discussão, tanto de aspetos metodológicos como também de enquadramento teórico. Não menos importante neste contexto é o estudo sistematizado das superfícies e do conhecimento das suas regras de construção, assim como a referência a conceitos fundamentais da geometria projetiva necessários para a utilização prática.

Esta investigação propõe-se introduzir a reflexão simultaneamente teórica e prática, sempre que possível expressa graficamente, o que obriga ao traçado geométrico das curvas





cónicas de diferentes formas e em diferentes circunstâncias. Um dos resultados práticos deste trabalho será um contributo para que possamos criar rotinas que nos desenhem as curvas cónicas como linhas auxiliares, nas condições em que delas necessitemos, com rigor, utilizando por exemplo o CAD, não ficando apenas dependentes das possibilidades oferecidas por cada programa informática em concreto. Então, estará conseqüentemente implícito o repensar das ligações entre teoria e prática, aprofundando o conhecimento teórico, mas também o dos procedimentos práticos adequados à construção das cónicas em cada situação, tendo consciência que é uma abordagem diferente das documentadas na bibliografia e sem resposta completa de momento. Também a articulação entre os traçados das curvas cónicas e a exemplificação prática da sua utilização tem desenvolvimento, por exemplo na construção das próprias superfícies e nos problemas de secções planas, intersecção de superfícies entre si ou outros. Igualmente são abordadas a geração de superfícies complexas com utilização de curvas Bézier, por manipulação dos seus pontos de controlo, embora tal matéria só lateralmente seja relacionada. Este estudo justifica-se, mesmo nos problemas de cónicas e superfícies geradas por estas, pois estas curvas podem ser a projeção do contorno aparente de visibilidade das intersecções das superfícies a descrever. De igual forma vem associado o estudo da planificação das superfícies, porque os problemas práticos de superfícies são essencialmente os das superfícies planificáveis, tradicionalmente problemas da engenharia mecânica, de chapa metálica para as mais diversas construções, designadamente construções navais, barragens e outras. Hoje, como se pretende demonstrar, a planificação de superfícies pode ser aplicada com novos materiais a novos contextos.

Aborda-se a construção geométrica de estruturas aligeiradas para utilização no design, com recurso às curvas cónicas, contribuindo para a redução do evidente menor domínio teórico dos traçados geométricos nesta área e conseqüente menor diversidade de soluções e da qualidade estética das mesmas. Reconhecendo-se que, se já há um razoável domínio qualitativo dos processos construtivos e algumas empresas a trabalhar neste ramo das estruturas, há que reconhecer igualmente que é diminuta a diversidade formal das soluções propostas. Aliás, se na Arquitetura as obras de Félix Candela, Oscar Niemeyer, Eero Saarinen e mais recentemente Santiago Calatrava, Frank Gehri ou Zaha Hadid, de entre outros, primeiro libertaram os planos permitindo-os curvos, torcendo-os, até quase deixar irreconhecível a sua identidade geométrica, levando o betão armado a limites inimagináveis, e por último, atualmente, aparentando apenas a natureza orgânica, por vezes fractal, outras vezes de difícil definição geométrica, com o recurso a novos materiais como as ligas metálicas e os plásticos, já no design de estruturas ligeiras não têm sido tão bem utilizadas as potencialidades dos materiais e a maioria das soluções são monótonas e repetitivas. Propomo-nos assim contribuir para a diversidade geométrica de opções formais



e análise dos processos construtivos tanto de estruturas muito ligeiras com recurso a telas finas e materiais estruturais flexíveis, como de estruturas ligeiras com elementos estruturais rígidos e materiais de maior duração.

Por último há ainda uma outra frente para a investigação. E que é o desafio permanente de redescobrir, reutilizar e aprofundar todo o suporte teórico e conceptual da própria geometria plana e da geometria descritiva, demonstrando, com exemplos concretos, que é um erro pensar-se que nesta área já pouco ou nada resta descobrir.

Nos últimos anos foram realizadas algumas teses de doutoramento no âmbito das relações entre a geometria e as artes visuais, e em especial a arquitetura, ou ao ensino da geometria, designadamente COSTA (1992), MURTINHO (2001), XAVIER (2004), GOUVEIA (2006), LIMA (2007), TRINDADE (2008) e que contribuiram para o enquadramento geral da presente investigação. É neste contexto que nos propomos aprofundar o trabalho já iniciado em COSTA (2005) e onde foram abordados alguns aspetos das cónicas e das superfícies quádricas e que constituiu a motivação próxima e o conhecimento básico que, aliado à experiência letiva anterior, são a justificação da escolha do tema da investigação.

1.1. A ELABORAÇÃO DA TESE

1.1.1. QUESTÕES DE INVESTIGAÇÃO

A primeira questão de investigação enunciada resulta da constatação de que há conhecimentos sobre as curvas cónicas dispersos em diversas áreas como a geometria analítica, a geometria projetiva, a física do universo, a astronomia, ou a ótica, e dispersos igualmente por literatura de diferente natureza e época que podem, se traduzidos graficamente em construções geométricas, ser utilizados na resolução de problemas no Design, na Arquitetura e em outras áreas das Artes Visuais, tanto na conceção, no projeto, como na comunicação, ou seja na representação técnica. Pelo exposto enunciou-se a seguinte questão:

Será possível constituir um conjunto alargado e sistematizado de construções geométricas sobre as curvas cónicas, que permita a sua utilização de uma forma expedita, quer sistematizando traçados existentes, quer propondo novas soluções?

No decurso da investigação constatou-se a necessidade de precisar o âmbito da investigação através de outras questões de investigação, a saber:

Será que estas construções de curvas cónicas têm aplicações práticas nas diferentes áreas do design? E nessas áreas há diferentes possibilidades de utilização





direta ou indireta das construções de curvas cónicas? Os problemas que envolvem curvas cónicas e que têm sido resolvidos por análise matemática também têm solução gráfica? Quais as vantagens e inconvenientes de utilizar processos analíticos ou processos gráficos em cada circunstância?

1.1.2. SÍNTESE DE OBJETIVOS

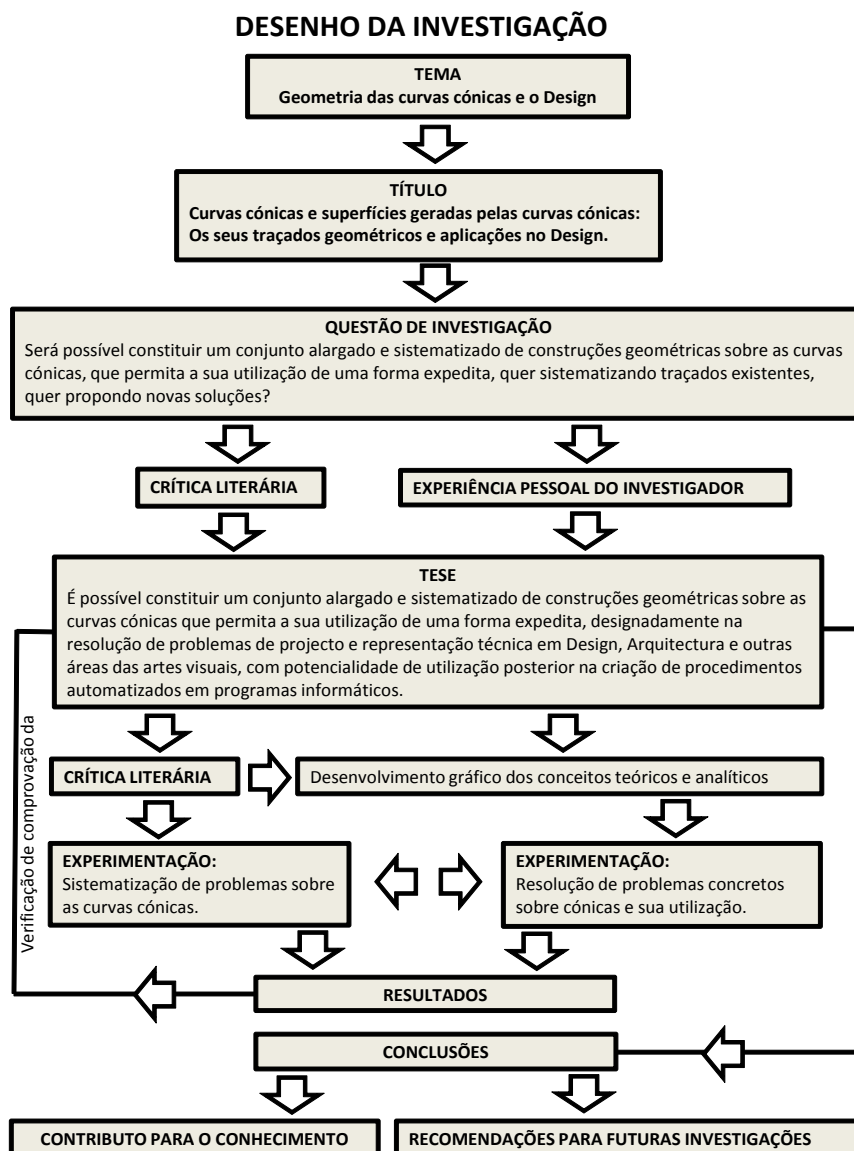
Pretendeu-se com esta investigação para Doutoramento em Design contribuir para o reconhecimento da importância do estudo das curvas cónicas e das superfícies geradas a partir destas, tanto do ponto de vista teórico como do ponto de vista das aplicações práticas genericamente, e em particular no âmbito do ensino da Geometria em cursos de Design. Propusemo-nos igualmente aprofundar o conhecimento das curvas cónicas, em particular dos seus traçados geométricos, contribuindo para a interrupção de um hiato de meio século sem publicações inovadoras sobre o tema no panorama científico português. Outro objetivo foi o de criar as bases para a sistematização do conhecimento existente, designadamente fazendo a adequação dos conhecimentos teóricos da Matemática para os traçados geométricos em Geometria Aplicada e sua utilização no Design, contribuindo assim para a sua ligação ao ensino do Design e à prática profissional em Design. Pretendeu-se ainda que a referida sistematização atue de três formas: na própria sistematização do conhecimento existente em geometria plana, adaptando conhecimento desta e de outras áreas, como por exemplo da geometria analítica ou da geometria projetiva, para a linguagem dos traçados geométricos em geometria plana e, ainda, contribuindo com a sugestão de novos traçados. Foi igualmente objetivo contribuir para a definição das relações entre geometria e design, salientando o papel dos traçados geométricos no design, e preenchendo a lacuna existente na literatura sobre aplicações gráficas das cónicas no design. Paralelamente pretendeu-se identificar potencialidades que o estudo das curvas cónicas pode induzir no aumento da capacidade de resolução de problemas de representação gráfica rigorosa por designers e outros profissionais, designadamente os das áreas das artes visuais e da arquitetura. Propusemo-nos ainda concretizar a exemplificação de utilizações práticas dos traçados das curvas cónicas, e das superfícies de que estas curvas são elementos constituintes, no Design em geral, e em particular, no Design de estruturas aligeiradas. Por último propusemo-nos, no contexto do tema apresentado, redescobrir, reutilizar e aprofundar todo o suporte teórico e conceptual da própria geometria plana e da geometria descritiva reafirmando a sua importância e atualidade. De todos os objetivos referidos resulta como traço comum fundamental a possibilidade de contribuir para a abertura de um ramo na área da investigação em Design que, para além dos contributos que pode produzir para o Design,



e para a Geometria no Design, pode permitir igualmente um mais profundo conhecimento genérico sobre as curvas cónicas.

1.2. A TESE

Da questão de investigação inicial decorreu a formulação da **Tese** de que “é possível constituir um conjunto alargado e sistematizado de construções geométricas sobre as curvas cónicas que permita a sua utilização de uma forma expedita, designadamente na resolução de problemas de projeto e representação técnica em Design, Arquitetura e outras áreas das artes visuais, e com potencialidade de utilização posterior na criação de procedimentos automatizados em programas informáticos.” Esta proposta de Tese implicou a elaboração do seguinte **Desenho da Investigação**:





1.3. DESENVOLVIMENTO DA INVESTIGAÇÃO

A bibliografia consultada permitiu complementar a revisão de literatura, aprofundando a que já tinha sido apresentada na proposta de tese, e orientando a focalização da pesquisa mas, sobretudo, teve profunda influência no desenvolvimento da experimentação, nas fases de resolução e sistematização de problemas.

Para tal foram utilizadas de forma exaustiva centenas de bases de dados, sites, consultas presenciais e/ou à distância em bibliotecas nacionais e estrangeiras, e aquisição de títulos, com recurso à definição de uma lista de dezenas de editoras e pesquisa sistemática das suas bases de dados.

Como resultado do exposto procurou-se alargar a introdução de exemplos práticos de aplicação dos traçados das cónicas na resolução de problemas concretos no design, na arquitetura e em outras áreas, sem prejuízo da investigação sobre a geometria das cónicas propriamente dita.

1.4. RECURSOS

A pesquisa bibliográfica incidiu sobre a geometria no contexto do design, mas também no contexto da arquitetura e nas artes visuais, e, nos âmbitos enunciados, o papel atribuído às curvas cónicas, a história das cónicas, utilizações das curvas cónicas na geração de superfícies e obtenção de formas complexas constituídas por diversas superfícies. Por outro lado dirigiu-se a pesquisa geral aos descritores/ palavras-chave constantes da tese: cónicas, curvas cónicas, superfícies, superfícies quádricas, estruturas.

No âmbito definido para o trabalho de investigação, a geometria das cónicas e suas aplicações no design, procurou-se conhecer os trabalhos académicos existentes, designadamente teses e dissertações com temas na mesma área de conhecimento, em especial em Portugal, efetuando-se pesquisa dirigida aos trabalhos já concluídos, designadamente através da Biblioteca Nacional e do *RCAAP - Repositório Científico de Acesso Aberto de Portugal* em www.rcaap.pt/, e procurados trabalhos em curso, para o que foi consultado o Registo Nacional de Temas de Teses de Doutoramento em Curso em <http://www.gpeari.mctes.pt/?idc=33&idi=161854>.

Neste contexto foram exaustivamente pesquisados presencialmente e/ou por outro meio de acesso físico aos documentos existentes:

- Biblioteca Nacional de Portugal – <http://www.bnportugal.pt/>;
- Biblioteca da Fundação Calouste Gulbenkian – <http://www.biblarte.gulbenkian.pt/>;



- Laboratório Nacional de Engenharia Civil – Editorial e Biblioteca – <http://www.lnec.pt/>;
- Associação de Professores de Geometria e Desenho (APROGED) – Boletim – <http://www.aproged.pt/>;
- Biblioteca da Faculdade de Arquitetura da Universidade Técnica de Lisboa – <http://www.fa.utl.pt/>;
- Academia das Ciências de Lisboa – Jornal de Ciências Mathematicas, Physicas e Naturaes – <http://www.acad-ciencias.pt/>;
- Academia das Ciências de Lisboa – Memórias da Academia Real das Ciências de Lisboa – <http://www.acad-ciencias.pt/>;
- Biblioteca do Instituto Superior Técnico – <http://bist.ist.utl.pt/>.

No decurso da investigação foram ainda pesquisados pela Internet, e depois consultados fisicamente os títulos mais relevantes, de:

- Universidade de Coimbra (Bibliotecas) – <http://www.uc.pt/sibuc/PesquisaGeral/>

Universidade do Porto –

http://sigarra.up.pt/up/WEB_BASE.GERA_PAGINA?P_pagina=122586;

- Universidade do Porto – Fundo Antigo – Monografias e Publicações periódicas – <http://www.fc.up.pt/fa/index.php?p=nav&f=html.fbib-Periodico-oa>

designadamente:

- Anais da Faculdade de Ciências do Porto (antigos Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto);
- Anuario da Academia Polytechnica do Porto;
- Anuário da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto : (antiga Academia Politécnica).
- archINFORM International Architecture Database – <http://eng.archinform.net/index.htm>;
- Biblioteca Nacional de España (Catalogo) – <http://catalogo.bne.es/uhtbin/webcat>;
- Bibliothèque Nationale de France – <http://www.bnf.fr/fr/acc/x.accueil.html>;
- Cambridge Mathematics Journals – <http://journals.cambridge.org>;



- Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales e Puertos – España - Biblioteca e Librería – <http://www.ciccp.es/>;
- Journal of Mathematics and the Arts – www.tandf.co.uk/journals/artaccess;
- Nexus Network Journal: Architecture and Mathematics Online – <http://www.nexusjournal.com/>;
- Saltire Software – <http://saltire.com> (softwares Saltire's Geometry Applet Generator e Geometry Expressions);
- Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) – <http://www.spm.pt/>;
- The Journal of Symbolic Geometry – <http://journal.geometryexpressions.com/>;
- The Library of Congress (USA) – <http://www.loc.gov/index.html>;
- The Mathematica Journal: a free journal of mathematica techniques and applications – <http://www.mathematica-journal.com/>.

Através da Biblioteca do Conhecimento Online “b-on” acedida tanto via FAUTL, como através do IPCB, foram identificadas como disponíveis para consulta diversas revistas de especialidade na área do design, tendo-se concluído pela inexistência nestas de referências a temas relacionados com a geometria. Não obstante, foram identificados inúmeros exemplos de aplicações práticas de conhecimentos da geometria na resolução de problemas em diversas áreas de especialidade do design, entendido este numa conceção lata.

Também quanto à pesquisa na b-on de publicações periódicas na área da geometria, e mais genericamente na área da matemática, verificou-se a quase total inexistência de artigos sobre geometria euclidiana, sendo identificadas apenas duas publicações que dizem aceitar artigos desta área da geometria, uma delas o Balkan Journal of Geometry and its Applications University Politehnica of Bucharest, Faculty of Applied Sciences, Dept. of Mathematics - ISSN 1224-2780 - Printed version e ISSN 1843-2875 - Electronic version mas, de facto, sem qualquer artigo relevante nesta área, e a outra Forum Geometricorum, “ A Journal on Classical Euclidian Geometry and Related Areas ”, do Department of Mathematical Sciences – Florida Atlantic University, <http://forumgeom.fau.edu>, FORUM GEOMETRICORUM ISSN 1534-1178.

Igualmente parece de referir o Journal of Mathematics and the Arts, disponível em <http://www.tandfonline.com/loi/tmaa20#.VduojpdRrJ8>, da Taylor & Francis, com ISSN 1751-3472 (Print), 1751-3480 (Online), assim como o Nexus Network Journal: Architecture



and Mathematics Online – <http://www.nexusjournal.com/>; não obstante não se terem encontrado artigos sobre as cónicas.

Foram ainda identificados alguns sites com referências a inter-relações da geometria e o design e/ou sobre as curvas cónicas, mas em regra apenas de divulgação básica, dos quais somente se citam alguns dos mais relevantes e que estão disponíveis nesta data:

- <http://www.dartmouth.edu/~matc/math5.geometry/unit1/INTRO.html>;
- <http://mathforum.org/~sarah/shapiro/>;
- <http://mathworld.wolfram.com/ConicSection.html>;
- <http://math2.org/math/algebra/conics.html>;
- http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/ConicSections_dir/conicSections.html;
- <http://mathworld.wolfram.com/ConicSectionDirectrix.html>,
- <http://smartgeometry.org/>.

1.4.1. OUTROS RECURSOS - EDITORES E DISTRIBUIDORES

Foram objeto de pesquisa sistemática relativamente aos descritores – palavras-chave os seguintes editores e distribuidores por se terem revelado os que mais vezes publicam sobre os assuntos em apreço.

Alibris.co.uk – <http://www.alibris.co.uk/>;

Alibris.com (U.S.A.) – <http://www.alibris.com/books>;

Amazon.co.uk – <http://www.amazon.co.uk/>;

Amazon.com (U.S.A.) – <http://www.amazon.com/>;

Amazon.fr – <http://www.amazon.fr/>;

Bibliolife – http://www.eruditor.com/books/publisher/bibliolife_llc.1034524.html.en;

Bulhosa Livreiros – <https://www.bulhosa.pt/>;

Cambridge University Press – <http://www.cambridge.org>;

Casa del libro (Espanha) – <http://www.casadellibro.com>;



Ediciones Cátedra - Madrid – <http://www.catedra.com/>;

Edicions de la UPC - Universitat Politècnica de Catalunya, SL –<http://www.edicionsupc.es>;

Editora Reverté - Barcelona – <http://www.reverte.com/>;

Editorial UPV (Universidade Politècnica de València) <http://www.upv.es/entidades/AEUPV/>;

Ellipses – <http://www.editions-ellipses.fr/>;

Jacques Gabay – <http://www.gabay.com/>;

Librairie Decitre – <http://www.decitre.fr/>;

Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard – <http://www.blanchard75.fr/>;

Livraria da Física – <http://www.livrariadafisica.com.br/>;

Springer Science+Business Media – <http://www.springer.com>;

T6 Ediciones, S. L. – <http://www.unav.es/memoria/98-99/ingenieria/99proyectos.html>.

1.5. HARDWARE E SOFTWARE INFORMÁTICOS DE APOIO AO DESENVOLVIMENTO DA INVESTIGAÇÃO

Tendo em conta os objetivos da investigação que apontam para o desenvolvimento de soluções que permitam utilização expedita e sem limitações técnicas, tanto para aplicações futuras em traçados a régua e compasso como no desenho técnico com suporte informático, foram utilizados computadores PC de gama baixa-média, designadamente com processador Intel(R) Core(TM)2 Duo CPU T5670 @ 1.80 GHz com 3 GB de RAM, placa gráfica ATI Mobility Radeon HD 3400 Series e sistema operativo Windows 7 Ultimate de 32 bits, e um outro Intel(R) Core(TM) i5-2410M CPU @ 2.30 GHz, com 6 GB de RAM, placa gráfica NVIDIA GeForce GT 525M e sistema operativo Windows 7 Home Premium de 64 bits.

Quanto ao software foi utilizada para a escrita o Word do Microsoft Office, com corretor ortográfico para o Acordo Ortográfico, e o Adobe PageMaker 7.0 para a edição eletrónica, ou seja, paginação. Os traçados gráficos foram executados e/ou preparados para apresentação em AutoCad 2012 da Autodesk e em CorelDraw X5 da Corel Corporation, e as soluções geométricas que necessitam de ferramentas matemáticas não disponíveis nos outros programas foram testadas em *software open source*, designadamente o Geogebra 4.0 da Geogebra.org (www.geogebra.org) por ter apoio em português e em Portugal, através



do Instituto Geogebra – Portugal, e pela facilidade de utilização, validados sempre que necessário através do Cinderella 2, disponível em (<http://www.cinderella.de/tiki-index.php>) de Jürgen Richter-Gebert e Ulrich Kortenkamp 1996-2012, para testar as soluções, pois o Cinderella foi objeto de validação científica na sua conceção. Refira-se a propósito que no decurso da investigação surgiram inúmeras vezes dúvidas sobre a certeza do resultado, ou dúvidas sobre possíveis coincidências, ou sobre a exatidão e a aproximação, ou ainda sobre se o processo seguido influencia o resultado, o que implicou a necessidade de criar procedimentos específicos, embora de forma pontual, que garantam a validação dos resultados.

1.6. VALIDAÇÃO DAS SOLUÇÕES DOS DIVERSOS PROBLEMAS INTERMÉDIOS

Pretende-se seguidamente enunciar de forma mais detalhada esta preocupação metodológica cuja necessidade foi evidenciada pelo desenvolvimento da investigação.

Torna-se necessário garantir que as soluções apresentadas são válidas nas condições propostas, em qualquer circunstância dentro das condições definidas. O tema da prova e a exemplificação de erros é tratado por FETISOV; DUBNOV (2006), tradução para inglês da edição russa original de 1954.

Assim, a esmagadora maioria das soluções que estão desenvolvidas são baseadas em princípios geométricos e/ou propriedades das cónicas, identificadas através da revisão da literatura, e enunciadas pela sua sequência construtiva e, também, por dedução lógica de consequências, com demonstração da fundamentação teórica do ponto de vista geométrico e não apenas pela comprovação prática.

Noutros casos, já existe consolidado conhecimento e demonstração do ponto de vista da geometria analítica, e o trabalho de investigação decorreu na adaptação ao desenvolvimento gráfico de soluções, o que pode significar a simples tradução da linguagem algébrica para a linguagem gráfica, mas também implica, na maioria dos casos, a criação de instrumentos novos para o desenvolvimento das soluções, pois a lógica algébrica não tem por vezes equivalentes gráficos apropriados já desenvolvidos.

Não obstante, em alguns dos problemas a abordar tornou-se evidente que, pela sua complexidade, implicam na demonstração, ou a utilização de procedimentos algébricos de elevada dificuldade, e mais ainda para não matemáticos, e até soluções que, porventura, ainda não existiam, ou ainda procedimentos geométricos gráficos que não estavam desenvolvidos, mas em que a presente investigação pode ser um contributo. Assim sendo, e só nesses casos, em vez de se procurar a demonstração matemática, estão a ser testadas



as soluções concretas, procurando-se a validação através de linhas de dedução e indução lógicas, verificadas através de mais que uma diferentes abordagens, e consolidada experimentalmente pela verificação prática através do Geogebra e da certificação pelo Cinderella, o que justifica a relevância das considerações precedentes sobre hardware e software.

1.7. CONSIDERAÇÕES COMPLEMENTARES

A nossa experiência da geometria e da consulta da literatura científica e de escrita sobre geometria foi confirmada ao longo do trabalho quanto à dificuldade de introdução de citações diretas no texto. De facto, há uma evidente dificuldade de utilização na linguagem matemática, que é a resultante da precisão na aplicação num contexto definido e de difícil transposição para outro contexto, exceto quando nos referimos a regras e princípios de aplicação geral. Por outro lado, se procurámos ao longo do texto clarificar a origem de cada passo, e o seu contributo para o conhecimento atual, de facto, é muito complexa a determinação exata dos diversos contributos no desenvolvimento do pensamento criativo, ou seja, na construção do próprio conhecimento. De qualquer forma, há que considerar que a simples citação de uma propriedade obriga, na maioria dos casos, a contextualizar em linguagem verbal, designando cada elemento exatamente como no contexto de origem mas indicando o próprio contexto, as imagens associadas e o contexto antecedente no texto citado. Assim, a citação direta revela-se uma tarefa morosa e inglória pois, normalmente, não conduz à exatidão própria de uma citação e necessita de contextualização no texto que estamos a escrever. Então, sempre que necessário, e tal como é corrente em trabalhos da mesma natureza, optou-se pela citação por paráfrase adaptando o texto, o contexto e a própria apresentação gráfica e identificando a origem, e, nos casos em que intervêm contributos com origem múltipla, indicar as diferentes referências bibliográficas, discriminando de que forma contribuem.

Também é de referir a ocorrência na investigação, embora esporadicamente, e sobretudo no capítulo 3. de palavras que não constam do léxico científico em português. Nesses casos, quando a designação se refere a conceitos complexos e com nome internacionalmente consagrado, optou-se por manter a designação, normalmente em inglês, quando se encontraram equivalentes em línguas latinas, designadamente francês, espanhol e italiano, optou-se pela sua adaptação para o português.



1.8. CONCLUSÃO

A geometria das cónicas, tendo acompanhado a história do Homem e das suas criações, é paradoxalmente uma das áreas da geometria mais presentes em todas as áreas criativas humanas não obstante o seu estudo e divulgação serem relativamente restritos. Nesse sentido, o aprofundamento da sua utilização no projeto, e logo no design, é incontornável.

Na atualidade, e sobretudo com o projeto e a produção assistidos por computador, cada vez mais se exige aos designers o aprofundamento de conhecimentos de diversas áreas, como forma de encontrar linguagens comuns em equipas multidisciplinares, desenvolver as suas capacidades criativas libertando-se de constrangimentos tecnológicos do equipamento utilizado e possibilitando que o designer seja não apenas um utilizador de programas informáticos, mas possa intervir na conceção e na adaptação destes, adequando-os a cada projeto concreto. Tal pode constituir um salto qualitativo permitindo chegar a áreas de produção emergentes como resultante da inovação tecnológica.

Estamos, assim, na área da geometria aplicada ao Design, mas também extensível à Arquitetura e às Artes Visuais, numa linha de investigação e desenvolvimento à semelhança de outras já seguidas anteriormente na geometria, designadamente em áreas da física teórica, ou na dinâmica de fluídos ou na resistência de materiais e outras, com utilizações diferentes em inúmeras áreas das engenharias, e, de facto, em todas as áreas de criação de formas e coisas, na criação dos objetos do nosso quotidiano, em que, quando não estão disponíveis demonstrações geométricas gráficas ou matemáticas, com demonstração analítica, interessa a comprovação e repetibilidade do resultado prático.

1.9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DO CAPÍTULO

ADAMS, J. Alan; BILLOW, Leon M. – **Descriptive geometry and geometric modelling: A basis for design**. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1988. ISBN 0-03-009514-X.

AGUDO, F. R. Dias – **Complementos ao curso de geometria descritiva : homologia e sua aplicação ao estudo de secções planas**. Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 1952.

AGUDO, F. R. Dias. – From geometry of quadrics and linear algebra to self-adjoint and non self-adjoint differential operators: a personal testimony. II Centenário da Academia das Ciências de Lisboa -1977, Sep. de Estudos de Álgebra, Geometria e Análise. Lisboa. (1978) 221-240.



AGUDO, F. R. Dias. – On metric properties of quadrics. Sep. da Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa. Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. 2ª Série -A- v.9, fasc. 1º, (1962) 87-110.

AGUDO, F. R. Dias. – Quádricas em coordenadas cartesianas não ortogonais. Técnica. Lisboa. nº 313 (1961) 515-518.

AGUDO, F. R. Dias. – Sobre a determinação analítica das direcções principais das secções planas de uma quádrlica. Gazeta da Matemática. Lisboa, nº 81 (1960) 1-8.

AGUDO, F. R. Dias. – Sobre alguns teoremas da geometria das quádrlicas. Ciência. Lisboa. 1948. A. 4, nº 9/10 (Set. 1954) 59-67.

AGUDO, F. R. Dias. – Sobre uma propriedade do hiperbolóide de uma folha. Ciência. Lisboa. 1948-... A. 4, nº 7/8 (Jan. 1953) 5-7.

AGUDO, F. R. Dias. – Um novo método para o estudo de secções planas de superfícies de 2ª ordem. Revista da Faculdade de Ciências A : ciências matemáticas. Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Vol. 2 (1952) 289-296.

AKOPYAN, A. V.; ZASLAVSKY, A.A. – **Geometry of conics**. Rhode Island: American Mathematical Society, 2007. [Trad. da edição russa de 2000 do Moscow Center for Continuous Mathematical Education.] ISBN 978-08218-4323-9.

ALBUQUERQUE, Luís – **Elementos de geometria projectiva e geometria descritiva**. Coimbra: Livraria Almedina, 1969.

ALBUQUERQUE, Luís de - **Geometria descritiva**. Coimbra : AAC-Secção de textos, 1946.

ALBUQUERQUE, Luís de – **Geometria descritiva**. Reedição. Coimbra : AAC-Secção de textos, 1968.

ALSINA, C.; TRILLAS, E. – **Lecciones de algebra y geometria: curso para estudiantes de arquitectura**. 7d ed. Barcelona: Ed. Gustavo Gili, 1995. ISBN 84-252-1187-5.

ALSINA CATALÁ, Claudi; JACAS MORAL, Joan; TOMÀS BELENGUER, M. Santos – **Geometria a l'arquitectura**. Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya, Ediciones UPC, 2007. ISBN 978-84-8301-923-8.

BAGLIVO, Jenny A.; GRAVER, Jack E. – **Incidence and symmetry in design and architecture**. Cambridge: Cambridge University Press, 1983. ISBN 0 521 23043 8.

BALL, W. W. Rouse – **Histoire des mathématiques**. Tome I e II. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann, 1906.

BARRAT, Krome – **Logic and design: in art, science & mathematics**. New York: Design Books, 1989. ISBN 1-55821-268-X.



- BIX, Robert – **Conics and cubics: a concrete introduction to algebraic curves**. New York [etc.]: Springer Science+Business Media, 2006. ISBN 0-387-31802-x.
- BLACKWELL, William – **Geometry in architecture**. New York [etc.]: Wiley-Interscience Publication, 1984. ISBN 0-471-09683-0.
- BOSSE, A. – **La manière universelle de M. Desargues, Lyonnnois, pour poser l'esseiev & placer les heures &autres choses aux cadrans au soleil**. Paris: Pierre Des-Hayes, 1643.
- BOYER, Carl B. – **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 2005. [Trad. de A History of Mathematics. John Wiley & Sons, Inc, 1991]. ISBN 85-212-0023-4.
- CALTER, Paul A. – **Squaring the circle: Geometry in art and architecture**. Hoboken, New Jersey; John Wiley and Sons, Inc., 2008. ISBN 978-0-470-41212-1.
- COOLIDGE, Julien Lowell – **A history of geometrical methods**. New York: Dover Publications, Inc., 2003. Ed. original Oxford University Press, 1940. ISBN 0-486-49524-8.
- COOLIDGE, Julien Lowell – **A history of the conic sections and quadric surfaces**. Oxford: The Clarendon Press, 1945.
- COOLIDGE, Julien Lowell – **A treatise on algebraic plane curves**. New York: Dover Publications, Inc., 2004. [Re-ed. da ed. Oxford University Press, 1931.] ISBN 0-486-49576-0.
- COOLIDGE, Julien Lowell – **The mathematics of great amateurs**. 2nd ed.. Oxford: Oxford University Press, 1990. Ed. original 1949. ISBN 0-19-853939-8.
- CORDEIRO, Manuel do Nascimento do Rosário. – Um estudo sobre as cónicas de Apolónio de Perga da sua invenção até às primeiras aplicações práticas. Porto: Universidade Portucalense Infante D. Henrique, 2005. [Tese de Mestrado em Matemática / Educação sob orientação da Professora Doutora Maria Fernanda Estrada.]
- COSTA, Joaquim M. C. Bonifácio – Intersecção de superfícies não planas em dupla projecção ortogonal. Castelo Branco: Instituto Politécnico de Castelo Branco, Escola Superior de Artes Aplicadas, 2005. [Estudo para Concurso de Provas Públicas para Professor-Adjunto].
- COSTA, Manuel J. R. Couceiro da – Perspectiva e arquitectura : uma expressão da inteligência no trabalho de concepção. Lisboa: Universidade Técnica de Lisboa – Faculdade de Arquitectura, 1992. [Tese de Doutoramento em Arquitectura].
- COXETER, H. S. M. – **Projective geometry**. Toronto: University of Toronto Press, 1974.
- COXETER, H. S. M. – **The real projective plane**. Cambridge: Cambridge University Press, 1961.
- CUNHA, Luís Veiga da – **Desenho técnico**. 5ª ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1982.



DRAGOVIĆ, Vladimir; RADNOVIĆ – **Poncelet porisms and beyond: Integrable billiards, hyperelliptic Jacobians and pencils of quadrics**. Basel: Birkhauser, 2011. ISBN 978-3-0348-0014-3.

ELAM, Kimberly – **Geometry of design: studies in proportion and composition**. New York: Princeton Architectural Press, 2001. ISBN 1-56898-249-6.

ENRIQUES, Federigo – **Leçons de géométrie projective**. Paris : Gauthier-Villars et C^{ie}, Éditeurs, 1930.

Enriques, Federigo – **Lezioni di geometria descrittiva**. Bolonha: Nicola Zanichelli, 1901. [ristampa della seconda edizioni - 1920.]

ESTRADA, Maria Fernanda [et. al.] – **História da Matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 2000. ISBN 972-674-315-X.

EVANS, Robin – **The projective cast: architecture and its three geometries**. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 2000. ISBN 0-262-55038-5.

FARIN, Gerald – **Curves and surfaces for CAGD: A practical guide**. Fifth ed. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2002.

FARIN, Gerald – **NURBS for curve and surface design**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1991. ISBN 0-89871-286-6.

FARIN, Gerald – **NURBS from projective geometry to practical use**. Natick, Massachusetts: A K Peters, 1995.

FAUGERAS, Olivier – **Three-dimensional computer vision: A geometric viewpoint**. 3^a ed. Cambridge, Massachusetts: The Massachusetts Institute of Technology Press, 1999.

FAUGERAS, Olivier; LUONG, Quang-Tuan; PAPADOPOULOU, Théo – **The geometry of multiple images: The laws that govern the formation of multiple images of a scene and some of their applications**. Cambridge, Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, 2001. ISBN 0-262-06220-8.

FETISOV, A. I.; DUBNOV, Ya. S. – **Proof in geometry: With “mistakes in geometric proofs”**. New York: Dover Publications, Inc., 2006. ISBN-13: 978-0-486-45354-5.

FIELD, David A. (ed.); KOMKOV, Vadim (ed.) – **Geometric aspects of industrial design**. Philadelphia: Society for industrial and applied mathematics, 1992. ISBN 0-89871-290-4.

FIELD, David A. (ed.); KOMKOV, Vadim (ed.) – **Geometric aspects of industrial design**. Philadelphia: Society for industrial and applied mathematics, 1992. ISBN 0-89871-290-4.

FLATTO, Leopold – **Poncelet’s Theorem**. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2009. ISBN 978-0-8218-4375-8.



GHYKA, Matila – **The geometry of art and life**. New York: Sheed and Ward, 1946. [re-edição fac-símile USA: Kessinger Publishing, 2010. ISBN 1-4179-7832-5].

GOMIS MARTÍ, José María – **Curvas y superficies en diseño de ingeniería**. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia, Serv. de Publicaciones, 1996. ISBN 84-7721-368-2.

GOUVEIA, Gonçalo Nuno Ramos Ferreira – A existência do geómetra: epistemologia, fundamentação e pedagogia de uma geometria descritiva para o ensino artístico universitário. Funchal: Universidade da Madeira, 2006. [Tese de Doutoramento].

HAUSSNER, Robert – **Geometría descriptiva**. Barcelona: Editorial Labor, S. A., 1928. [Trad. de alemão para castelhano por Carlos Mendizábal Brunet].

HERMAN, Ivan – **The use of projective geometry in computer graphics**. Berlin [etc.]: Springer-Verlag, 1992. ISBN 3-5405-5075-5.

HILBERT, David – **The foundations of geometry**. Chicago: The Open Court Publishing Company, 1902.

HILBERT, David; COHN-VOSSEN, S. – **Geometry and the imagination**. U.S.A.: American Mathematical Society, 1999. [Reedição da tradução para inglês do alemão Anschauliche Geometrie, 1932 ?]. ISBN 0-8218-1998-4.

IVINS Jr., William M. – **Art & geometry: A study in space intuitions**. New York: Dover Publications, Inc., 1964. [Harvard University Press, 1946.] ISBN 0-486-20941-5.

IZQUIERDO ASENSI, Fernando – **Geometría descriptiva superior y aplicada**. 3d ed. Madrid: Ed. Dossat, 1985. ISBN 84-237-0441-6.

IZQUIERDO ASENSI, Fernando – **Geometría descriptiva**. 18d ed. Madrid: Ed. Dossat, 1988. ISBN 84-237-0151-4.

KAPPRAFF, Jay – **Connections: the geometric bridge between art and science**. U.S.A.: McGraw-Hill, Inc., 1990. ISBN 0-07-034250-4.

KLETE, Reinhard; ROSENFELD, Azriel – **Digital Geometry: Geometric methods for digital picture analysis**. San Francisco: Elsevier, Inc., 2004. ISBN 1-55860-861-3.

LA HIRE, Philippe de – **Sections coniques: distribuées en neuf livres, dans lesquelles a été rapport jusqu'ici tout ce qui est digne d'observation d'une part par les anciens d'autre part par de plus récents Géomètres, et est expliqué par de nouvelles demonstrations resserrées; est encore illustré par de nombreuses et exquises Propositions récemment inventées**. Paris: Librairie A. Blanchard, 1995. [Tradução da edição em latim de Paris: Etienne Michallet, 1685 para francês de Jean Peyroux.].

LADEGAILLERIE, Yves – **Géométrie: affine, projective, euclidienne et anallagmatique**. [License, Capès, Agrégation.] Paris: Ellipses Édition Marketing, S.A., 2003. ISBN 2-7298-1416-7.



LIMA, António Pedro de Assunção Nobre. – Referenciais geométricos na arquitectura e no design: Para além da geometria euclidiana. Lisboa: Universidade Técnica de Lisboa – Faculdade de Arquitectura, 2007. [Tese para Doutoramento em Arquitectura – Especialidade de Comunicação Visual sob a orientação do Professor Doutor Manuel Jorge Rodrigues Couceiro da Costa].

LIMING, Roy A. – **Mathematics for computer graphics**. Fallbrook [California]: Aero Publishers, Inc., 1981. ISBN 0-8168-6751-8.

LIMING, Roy A. – **Mathematics for computer graphics**. Fallbrook [California]: Aero Publishers, Inc., 1981. ISBN 0-8168-6751-8.

MALDONADO, Tomás – **Design industrial**. Lisboa: Edições 70, 1999. Coleção Arte e Comunicação. ISBN 972-44-1006-4.

MEYER, Walter – **Geometry and its applications**. San Diego: Harcourt Academic Press, 1999. ISBN 0-12- 493270-3.

MONTUCLA, Jean-Étienne – **Histoire dès mathématiques**. Tome I, II, III e IV. Paris: Henri Agasse, An VII a X (1799 a 1802).

MURTINHO, Vítor Manuel Bairrada – “La Piú Grassa Minerva”: a representação do lugar. Coimbra: Universidade de Coimbra – Faculdade de Ciências e Tecnologia, 2001. [Tese de doutoramento sob a orientação do Professor Doutor Domingos Tavares.]

NAGORE, Fernando – **Geometría Métrica y Descriptiva para Arquitectos**. Tomos I, II y III. Pamplona: EUNSA, Ediciones Universidad de Navarra, S.A., 1986, 1987 e 1988. ISBN 84-313-0961-X (obra completa).

NAGORE, Fernando – **Geometría Métrica y Descriptiva para Arquitectos**. Tomos I, II y III. Pamplona: EUNSA, Ediciones Universidad de Navarra, S.A., 1986, 1987 e 1988. ISBN 84-313-0961-X (obra completa).

NAVARRO de ZUVILLAGA, Javier – **Forma y representación: un análisis geométrico**. Madrid: Ediciones Akal, S. A., 2008. ISBN 978-84-460-2018-9.

PEDOE, Dan – **Geometry and the visual arts**. New York: Dover Publications, Inc., 1983. ISBN 0-486-24458-X.

PEGADO, Luiz Porfirio da Motta – O lugar geometrico dos pontos que distam igualmente de duas rectas dadas é um "paraboloide hyperbolico isosceles". Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes. 1867, I (3): 188-197. Lisboa: Academia Real das Sciencias de Lisboa.

PEGADO, Luiz Porfirio da Motta – Deducção da fórmula que dá o volume limitado pelo "intradorso" d'uma abobada de "aresta", por o plano das impostas e por os planos verticaes que conteem os quatro arcos de testa da mesma abobada. Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes. 1869, II (6): 89-94. Lisboa: Academia Real das Sciencias de Lisboa.



PEGADO, Luiz Porfirio da Motta – Dedução da fórmula que dá o volume limitado pelo "intradorso" d'uma "abobada de barrete", por o plano das impostas e por os quatro planos verticaes correspondentes aos pés direitos da "abobada". Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes. 1869, II (6): 95-97. Lisboa: Academia Real das Sciencias de Lisboa.

PEGADO, Luiz Porfirio da Motta – Secções conicas do conoide circumscripto a uma conica. Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes. 1875, V (18): 65-72. Lisboa: Academia Real das Sciencias de Lisboa.

PEGADO, Luiz Porfirio da Motta – Determinação dos eixos da sombra ou projecção obliqua de um circulo. Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes. 1878, VI (24): 217-228. Lisboa: Academia Real das Sciencias de Lisboa.

PEGADO, L.P. da Motta – Theoria geral das combinações com repetição. Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes. 1880, VIII (29): 1-20. Lisboa: Academia Real das Sciencias de Lisboa,.

PEGADO, L.P. da Motta – A proposito de uma nota (pag. 268) do Curso de geometria descriptiva da Escola Polytechnica. Jornal de Ciências Mathematicas. Physicas e Naturaes. 1902, Segunda Série, VI (24): 193-197. Lisboa: Academia Real das Sciencias de Lisboa.

PEGADO, L.P. da Motta – **Curso de geometria descriptiva da Escola Polytechnica**. Lisboa: Academia Real das Ciências, 1899. [2 volumes].

PENNA, Michael N.; PATTERSON, Richard R. – **Projective Geometry and its applications to computer graphics**. London [etc.]: Prentice-Hall International, Inc., 1986. ISBN 0-13-730649-0 025.

PONCELET, J. V. – **Applications d'analyse et de géométrie: qui ont servi, en 1822, de principal fondement au Traité des propriétés projectives des figures**. Tome I e II. Paris: Mallet-Bachelier, 1862.

PONCELET, J. V. – **Traité des propriétés projectives des figures**. Paris: Bachelier, 1822.

POUDRA, Noël-Germinal – **Oeuvres de Desargues**. Tome I e II. Paris: Leiber, Éditeur, 1864.

POZO, José Manuel – **Geometría para la arquitectura: Concepto y práctica**. Pamplona: T6 Ediciones S. L., 2006. ISBN 978-84-89713-22-7.

RIBEIRO, Carlos Tavares – **Geometria projectiva: Conceitos, metodologias, aplicações**. Lisboa: Europress, 1991.

RICCA, Guilherme – **Geometria Descritiva: método de Monge**. 2d ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2000.

RODRIGUEZ DE ABAJO, F. Javier – **Geometria Descritiva: Tomo 1 - Sistema Diédrico**. 24d ed.. San Sebastian: Ed. Donostiarra, 1992.



RODRIGUEZ DE ABAJO, F. Javier – **Geometria Descritiva: Tomo 2 - Sistema de Planos Acotados**. 11d ed.. San Sebastian: Ed. Donostiarra, 1992a.

RODRIGUEZ DE ABAJO, F. Javier; ALVAREZ BENGOA, Victor – **Curso de dibujo geométrico y de croquizacion**. 15 ed.. San Sebastian: Ed. Donostiarra, S.A., 2005. ISBN 84-7063-173-X.

RODRIGUEZ DE ABAJO, F. Javier; ALVAREZ BENGOA, Victor – **Geometria Descriptiva: Tomo 3 - Sistema Axonométrico**. 7d ed.. San Sebastian: Ed. Donostiarra, 1991.

RODRIGUEZ DE ABAJO, F. Javier; REVILLA BLANCO, Alberto – **Geometria Descriptiva: Tomo 4 - Sistema de Perspectiva Caballera**. 5d ed.San Sebastian: Ed. Donostiarra, 1982.

RODRIGUEZ DE ABAJO, F. Javier; REVILLA BLANCO, Alberto – **Geometria Descriptiva: Tomo 5 - Sistema de Perspectiva Cónica**. 6d ed. San Sebastian: Ed. Donostiarra, 1990.

ROUBAUDI, C. – **Traité de géométrie descriptive**. 10d ed. Paris: Masson et C.^a, Éditeurs, 1961.

RUZINOV, L. D. – **Design of mechanisms by geometric transformations**. London: Iliffe Books, 1968. Tradução para inglês do original russo.

SARFRAZ, Muhammad – **Advances in geometric modeling**. Southern Gate, Chichester, West Sussex: John Wiley & Sons, 2003. ISBN 0-470-859377.

SAURÍ, Miguel Angel Gil – **Geometría aplicada a la técnica**. Madrid: Editorial CIENCIA 3, 2009. ISBN 978-84-95391-15-5.

SERRES, Michel – **As origens da geometria**. Lisboa: TERRAMAR – Editores, Distribuidores e Livreiros, Lda, 1997. Coleção Ciência e ISBN 972-710-160-7.

SHIKIN, Eugene V. – **Handbook and atlas of curves**. New York: CRC Press, 1995. . ISBN 0-8493-8963-1.

SHIKIN, Eugene V.; PLIS, Alexander I. – **Handbook on SPLines for the user**. New York: CRC Press, 1995. ISBN 0-8493-9404-X.

STANDIFORD, Kevin; STANDIFORD, Debbie – **Descriptive geometry: an integrated approach using AutoCAD**. Clifton Park, NY : Thomson Delmar Learning, 2000. ISBN 9781418021153.

TEIXEIRA, Francisco Gomes – **Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches**. I, II e III Tomos. Coimbra: Imprimerie de l'Université, 1908. [Re-edição fac-símile Paris: Éditions Jacques Gabay, 1995. ISBN 2-87647-162-0].

TRINDADE, António de Oriol Pena Vazão – Um olhar sobre a perspectiva linear em Portugal nas pinturas de cavalete, tectos e abóbadas: 1470-1816. Lisboa: Universidade de Lisboa – Faculdade de Belas Artes, 2008. [Tese de Doutoramento].



XAVIER, João Pedro Sampaio – Sobre as origens da perspectiva em Portugal: O Livro de Prespectiua do Códice 3675 da Biblioteca Nacional, um tratado de arquitectura do século XVI. Porto: Universidade do Porto – Faculdade de Arquitectura, 2004. [Tese de Doutoramento em Arquitectura].

YAGLOM, I. M. – **Geometric Transformations**. Tomos I, II e III. Washington: The Mathematical Association of America, 1962. Tradução da edição russa de 1955 e 1956.

YAMAGUCHI, Fujio – **Curves and surfaces in computer aided geometric design**. Berlin: Springer-Verlag, 1988. ISBN 3-540-17449-4.

ZEUTEN, H. G. – **Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen age**. Paris: Gauthier-Villars, 1902.

ZHU, Q.; PENG, L. – A new approach to conic section approximation of object boundaries. Elsevier. Image and Vision Computing. 17 (1999) 645–658.



2. CONCEITOS E PROPRIEDADES DAS SECÇÕES CÓNICAS

2.1. INTRODUÇÃO

Não obstante o tema das secções cónicas poder fazer parte da formação escolar básica em geometria plana, tem relevância recordá-lo e aprofundá-lo, neste momento, pois as construções geométricas tradicionalmente utilizadas na obtenção gráfica das curvas cónicas, e de tangentes em pontos dessas curvas, implicam o conhecimento da distância focal e, conseqüentemente, obter a partir desta o traçado das curvas cónicas ponto a ponto. Se definirmos como um possível objetivo a aplicação sistemática de curvas cónicas e, sobretudo, se estivermos a utilizar programas informáticos de tipo gráfico e de uso corrente, tem-se que ter em conta que, em regra, não são conhecidos os focos, e, em inúmeras situações, não são conhecidos até os eixos, ou seja, é apenas conhecida a forma gráfica da curva ou pontos desta, e, por vezes, com uma apresentação gráfica diferente da que tradicionalmente é objeto de estudo, o que por si só, e sobretudo em utilizações na área da imagem, implica a necessidade de uma análise mais aprofundada das referidas curvas e, inclusivamente, da forma de apresentar os problemas do ponto de vista da comunicação gráfica.

2.2. PARA UMA DEFINIÇÃO DO CONCEITO DE CURVA

Para encontrarmos uma definição de curva cónica, também por vezes designada unicamente por cónica, iremos primeiro procurar definir curva.

Uma curva é uma linha. “La línea puede definirse como la trayectoria de un punto que se mueve o como el lugar geométrico de las posiciones sucesivas de un punto móvil.” (IZQUIERDO ASENSI, 1985, 149).

Segundo cada autor há uma diversidade de abordagens diferentes para definir os diferentes tipos de linhas. Trata-se de um exercício aparentemente simples, mas que gera

inúmeros problemas teóricos e práticos, pelo que vamos apenas citar duas das abordagens, as que melhor se adequam ao estudo em presença.

Numa das perspetivas do assunto, que resulta da dificuldade teórica de definir o que é uma reta, admite-se por definição que todas as linhas são curvas, ou seja linhas retas e curvas são conceitos similares, e se a linha pertence a um plano diz-se ser uma curva plana, e, nesse caso, se a sua curvatura for nula, essa curva designa-se por reta.

Para concretização da definição anterior, devemos referir que a curvatura de uma curva, num ponto qualquer desta, é a curvatura da circunferência osculante nesse ponto. A curvatura da curva, do ponto *A* ao ponto *B*, será a curvatura média medida em todos os pontos da curva entre *A* e *B*, incluindo os próprios pontos *A* e *B*. E a curvatura de uma circunferência ou arco de circunferência é o inverso do raio, ou seja é $C=1/r$. Interessa igualmente, para esta definição, lembrar que uma circunferência é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de um outro designado por centro.

De notar que as curvas, em geometria euclidiana, têm dimensões, e, logo, uma escala de representação e proporções entre os seus elementos e se, em geometria não euclidiana, desprezarmos a caracterização dimensional e logo a escala, ou em geometria euclidiana ampliarmos a curva, o raio de curvatura médio vai aumentando até que, no limite, com a curva no infinito o raio de curvatura é infinito e, logo, a curva torna-se reta. Assim, podemos dizer que as retas são o limite de uma curva.

Numa outra perspetiva de abordagem diz-se que, se um ponto se move sempre na mesma direção gera uma linha reta, e, se pelo menos três pontos consecutivos não são colineares, ou seja, não pertencem à mesma reta, então a linha é poligonal. Se a poligonal for infinitesimal, ou seja, se todos os pontos intermédios tiverem a mesma propriedade de não pertencer a uma reta, a linha é curva.

Está evidenciada a complexidade derivada das diversas definições que podem ocorrer dos diferentes possíveis cruzamentos das abordagens citadas, às quais se terá que associar igualmente a dificuldade de definir o que é um plano, uma linha ou um ponto. Sobre este último aspeto, é suficiente lembrar que se deveria então colocar a questão de saber qual a dimensão de um ponto e, conseqüentemente, qual a distância mínima para se poder dizer que um ponto se deslocou de posição e portanto descreveu uma linha, tarefa que é impossível. Por outro lado, poderíamos dizer que um ponto é a intersecção de duas linhas e não tem dimensão. Mas, para definir linhas precisamos do conceito de ponto, logo estaremos com uma definição tautológica, com petição de princípio.



Em matemática, e na geometria em particular, desde os gregos, têm sido resolvidos os problemas indemonstráveis partindo de axiomas, ou seja, princípios ou regras que se aceitam como verdade, porque o espírito humano é incapaz de conceber a proposição contrária. Assim “a fundamentação funda-se na impossibilidade de o nosso espírito conceber a contradição (Pierre Janet, Manual de Filosofia)” apud Grande Enciclopédia Portuguesa e Brasileira ([s.d.], Vol. III, 878).

SAURÍ (2009, 13-68) enuncia a definição de curva de forma distinta, começando pela definição euclidiana de ponto como elemento fundamental e sem dimensão e reta como conjuntos dos pontos que se situam entre dois pontos ou no mesmo alinhamento. Os pontos e retas constituem os elementos fundamentais em geometria plana. Os pontos, retas e planos constituem a geometria do espaço. Daqui, Saurí parte para a definição dos postulados de Euclides e para a análise dos teoremas fundamentais da geometria plana e do espaço. Com recurso aos conceitos de reta, semirreta e segmento de reta e às posições de paralelismo, perpendicularidade e angulares define polígono. Com os conceitos de ponto e reta define a circunferência como o lugar geométrico dos pontos que distam igualmente de um mesmo ponto, o centro. Depois considera uma linha uma trajetória seguida por um ponto deslocando-se num plano, o que dá origem a uma linha plana ou deslocando-se no espaço o que dá origem a uma linha espacial. Chega assim à definição de curva como um polígono aberto ou fechado, plano ou espacial, com um número infinito de lados. Esta abordagem tem a suficiente relevância para aqui a reproduzimos pois, de facto, em grande medida, do ponto de vista da definição algébrica e dos traçados gráficos das curvas resultam dos conceitos retilíneos que lhe estão associados, como corda, tangente, secante, normal ou perpendicular.

Por outro lado, numa curva podem encontrar-se **pontos singulares**, ou seja, pontos com características especiais.

Assim, é **ponto de inflexão** de uma curva o ponto de contacto com uma tangente e que origina uma mudança da curva de côncava a convexa ou vice-versa. Considera-se ponto de inflexão o da curva *b* e não o da curva *a*, pois este segue na mesma continuidade do movimento do ponto gerador.

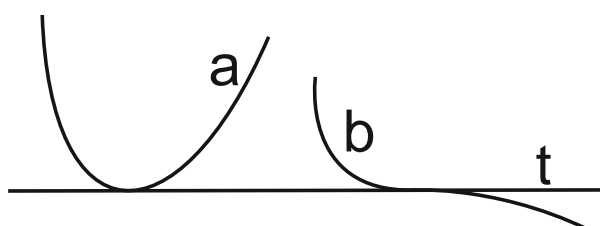


Fig. 2.1 – Ponto de tangência na curva *a* e Ponto de inflexão na curva *b*

Encontram-se pontos de tangência e não de inflexão, por exemplo, no caso das curvas resultantes da secção plana em superfícies cónicas, cilíndricas, esféricas ou elipsoidais em pontos de tangência no contorno aparente. No caso de intersecções de duas superfícies dos tipos referidos, por exemplo, podemos encontrar pontos de inflexão em pontos intermédios, não de tangência em contornos aparentes.

Por outro lado, é um **ponto múltiplo de primeira espécie** o resultante da passagem do ponto gerador da curva mais que uma vez pelo mesmo ponto não tendo a curva a mesma tangente nos pontos sobrepostos da curva.

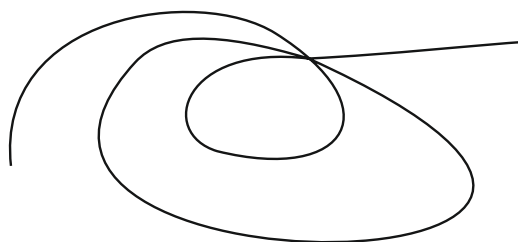


Fig. 2.2 – Ponto múltiplo de primeira espécie

É um ponto múltiplo de segunda espécie um ponto da curva resultante do movimento do ponto gerador quando este passa mais que uma vez pelo mesmo ponto, tendo nessas passagens do ponto gerador a mesma tangente.

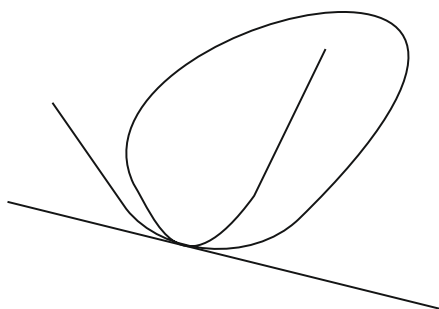


Fig. 2.3 – Ponto múltiplo de segunda espécie

De notar que, neste caso, verificando-se mais que uma vez a posição do ponto gerador pelo mesmo ponto a sequência da curva pode-se ser por qualquer dos tramos consecutivos da curva. Então, quando existe apenas uma dupla passagem para a continuidade do tramo inicial tem que considerar-se o tramo que retorna ao ponto de tangência, porque, no outro caso, teríamos de considerar existirem duas curvas independentes, embora com um mesmo ponto de tangência.



Por outro lado, pode admitir-se que, em algumas curvas, possam existir pontos múltiplos pertencentes a um eixo de simetria da curva. Tais pontos não são **vértices** da curva, ao não corresponderem a um círculo osculador da curva de raio mínimo ou máximo.

Pode igualmente existir numa curva um **ponto de retrocesso** sempre que o ponto gerador da curva tomar a posição de ponto de tangência numa reta e aí mudar de direção na continuidade do movimento. O **ponto de retrocesso** diz-se **de primeira espécie** se a continuidade da curva se verifica para o lado oposto da tangente. O **ponto de retrocesso** é **de segunda espécie** se a continuidade da curva se verifica para o mesmo lado da tangente.

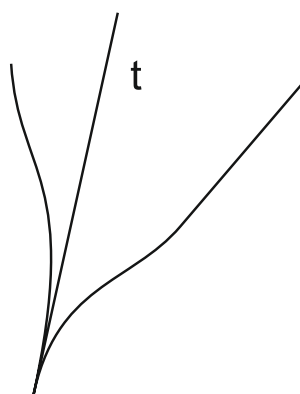


Fig. 2.4 – Ponto de retrocesso de primeira espécie

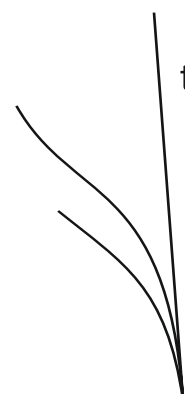


Fig. 2.5 – Ponto de retrocesso de segunda espécie

De notar que, em qualquer dos casos, os dois tramos da curva mantêm a tangente comum, porque se não fosse assim teríamos que considerar que não se trataria da mesma curva mas de duas curvas com uma quebra. Os pontos de retrocesso podem encontrar-se, por exemplo, nas cicloides.

Assim, na questão das retas e curvas, estamos perante um dos aspetos que demarcam a geometria euclidiana, que as considera como entidades diferentes e a geometria não euclidiana, desenvolvida a partir dos finais do século XIX, que considera as curvas enquanto linhas, e as retas enquanto casos particulares dessas linhas. Tal é referido neste momento, não obstante o trabalho que estamos a apresentar dizer respeito essencialmente ao espaço euclidiano, porque vão ser utilizados procedimentos da geometria projetiva, que esteve na base e é um dos fundamentos principais da geometria não euclidiana, sendo por vezes difícil, se não impossível, dissociar uma da outra na geometria das cónicas. Por outro lado, as cónicas em geral e alguns dos assuntos que vamos tratar ao longo deste texto, designadamente algumas construções e os feixes e

famílias de cónicas têm igual aplicação na geometria não euclidiana, com as necessárias adaptações.

2.3. CONCEITO DE TANGENTE E DE ASSÍMPTOTA

Não obstante não serem um tema exclusivo das curvas cónicas os conceitos de **tangente** e **assíntota** são aplicados aos traçados das curvas cónicas pelo que se torna importante referi-los.

*“Tangente a una curva en un punto T es la posición límite de una secante que gira alrededor de él hasta que su segundo punto de intersección con la curva se confunda con T. Si T es impropio, la tangente se llama *asíntota*.”* (IZQUIERDO ASENSI, 1985, 151)

Indicam-se seguidamente os métodos mais usuais para a determinação de tangentes a uma curva qualquer.

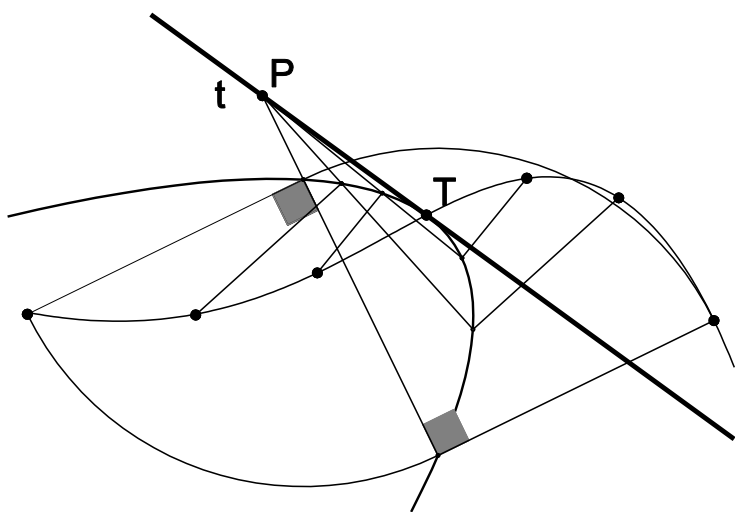


Fig. 2.6 – Tangente a uma curva – Método das secantes e perpendiculares

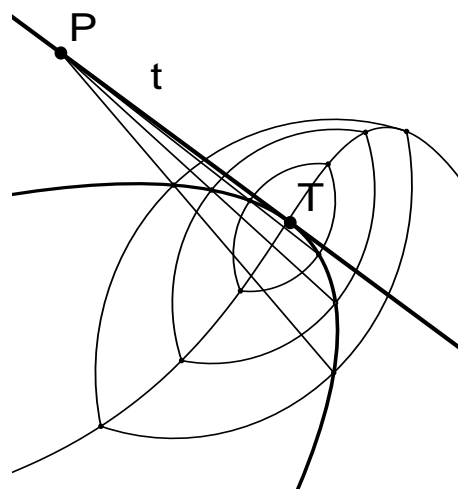


Fig. 2.7 – Tangente a uma curva – Método dos triângulos equiláteros

Traça-se a partir de um ponto exterior à curva retas que a intersectem definindo cordas da curva. No primeiro método num dos extremos da corda traça-se um segmento perpendicular com o mesmo tamanho da corda e no outro extremo procede-se da mesma forma mas em sentido contrário relativamente à corda. O **locus** dos pontos é uma curva auxiliar que intersesta a curva dada no ponto T de tangência. Refira-se a propósito que



Locus ou **Lugar Geométrico** é o conjunto de pontos que satisfazem uma condição determinada. **Corda** é o segmento de reta que une dois pontos de uma curva.

No segundo método procede-se de maneira similar mas traçando arcos com centro num dos extremos da corda e a passar no outro extremo até se intersectarem, definindo triângulos equiláteros. O terceiro vértice destes triângulos define a curva auxiliar.

No terceiro método procede-se de forma idêntica mas utilizando os pontos médios das cordas resultantes da intersecção do feixe de retas com a curva.

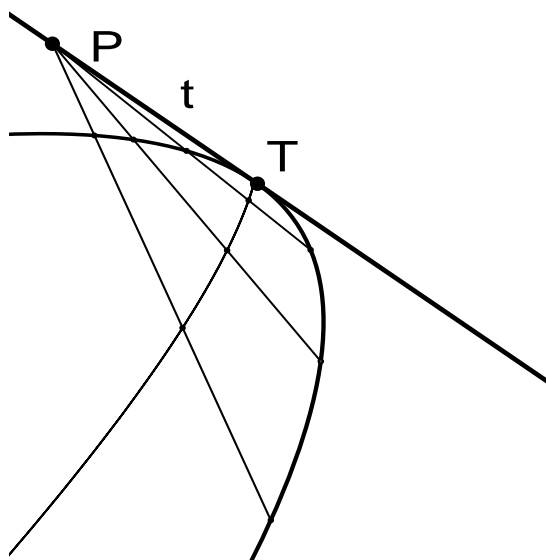


Fig. 2.8 – Tangente a uma curva – Método dos pontos médios

Se como se referiu, o ponto de tangência é impróprio, ou seja, se se situa no infinito, então a tangente designa-se por **assímtota**. É o caso da hipérbole que tem duas assímtotas que passam no centro da curva.

2.4. PARA A DEFINIÇÃO DO CONCEITO DE CURVA CÓNICA

As curvas cónicas, tal como os gregos inicialmente as designaram, são secções em cones retos de base circular traçadas perpendicularmente às geratrizes do contorno aparente do cone. Consoante o ângulo formado pelas geratrizes do contorno com o eixo fosse inferior, igual ou superior a 45° a secção seria uma elipse ou *oxitomo*, parábola ou *orthotomo*, designação que BOYER (2005, 88) atribui a Arquimedes, ou hipérbole ou *amblitomo* (ESTRADA et al., 2000, 316). Tal implica que cada tipo de secção estivesse ligado a cones de revolução diferentes. Se o ângulo das geratrizes com o eixo fosse de 45° a secção seria parábola, se o ângulo fosse inferior a secção seria uma elipse, e se o ângulo

fosse superior a 45° a secção seria uma hipérbole, sendo que Arquimedes apenas identificou um ramo da curva por não conhecer o cone duplo.

Numa fase posterior, com *As Cónicas* de Apolónio de Pérgamo, foi abandonada esta definição e alargado o âmbito pois, de facto, qualquer dos tipos de secção pode ser obtido em qualquer cone, reto ou oblíquo, embora, por razões de natureza diversa, o trabalho de Apolónio foi pouco seguido e estudado, até que Isaac Newton (1643-1727) renova a atenção para o estudo das cónicas com a descoberta de novas propriedades e aplicações práticas e Edmond Halley (1656-1742) que procede à reconstrução, a partir do latim e do árabe, do oitavo livro de Apolónio, Hieronimus Georg Zeuten (1839-1920), discípulo de Michel Chasles (1793-1880) na Escola Politécnica de Paris, que analisa a reconstrução e a traduz do latim para o alemão, e depois, Thomas Little Heath (1861-1940), que o traduz para inglês acrescentando diversas anotações e sugerindo uma leitura mais consentânea com a modernidade, designadamente, descobrindo nele indícios de um conhecimento mais profundo do que o resultante de uma leitura literal, reconhecendo a importância devida ao trabalho de Apolónio e tentando a reconstrução das suas partes desaparecidas, designadamente o seu último capítulo.

Podemos comprovar ainda o interesse e a atualidade da obra de Apolónio através de FRIED (2011) que se dedica à tradução crítica da reconstrução de Halley salientando, não só a sua importância para o ensino da geometria mas também a necessidade de uma reflexão crítica atualizada.

Não obstante, muito do conhecimento sobre as cónicas seguiu outro caminho. Assim, as curvas cónicas foram utilizadas durante séculos como secções apenas em cones de revolução, sendo que o que definia o tipo de secção era a posição perpendicular do plano de secção relativamente às geratrizes. Tal marcou de forma indelével todos os desenvolvimentos posteriores da geometria, tendo ainda hoje uma forte marca na forma como as cónicas são, em regra, tratadas.

Como veremos adiante, esta definição sofreu diversas evoluções e, em certa medida, é ainda um problema em aberto.

Durante todo o século XX e até à atualidade as cónicas têm permanecido no centro das investigações, nas mais diversas áreas do saber, com aplicações na geometria, na computação gráfica, na medicina, na astronomia, na física teórica e aplicada, nas engenharias, na arquitetura, no design de ambientes, no design gráfico, no design de vestuário e acessórios de moda, no design industrial, na ótica, em suma, numa diversidade enorme de áreas, sendo objeto de aplicação muitas vezes não explicitada mas presente nas



metodologias, nos processos técnicos de produção, na própria tecnologia das máquinas e equipamentos e numa diversidade de aplicações práticas.

2.5. AS SECÇÕES CÓNICAS

A definição usual em geometria descritiva de secções planas em cones, ou seja, cónicas, utiliza superfícies cónicas retas de diretriz circular ou a parte destas delimitadas entre o vértice e a diretriz num plano perpendicular ao eixo, ou seja, cones retos, sendo o tipo de secção determinado pela posição do plano de secção:

– se o plano de secção passar no vértice a secção ou é apenas o próprio ponto do vértice se o plano não mais intersestar o cone, ou são duas retas concorrentes no vértice e que intersestam a base deste. Tanto o ponto como as duas retas concorrentes são designados como cónicas degeneradas (Fig. 2.9); se considerarmos o caso particular de o vértice se situar no infinito a superfície torna-se cilíndrica e as secções cónicas degeneradas serão constituídas por duas retas paralelas;

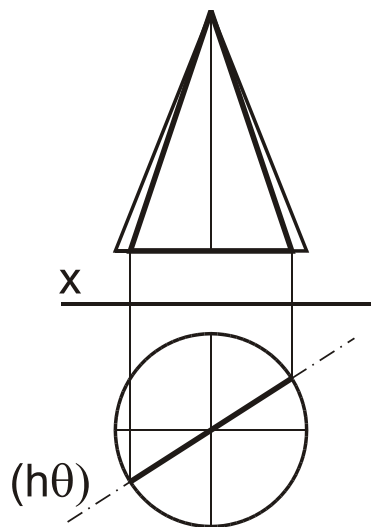


Fig. 2.9 – Secção definida por duas geratrizes

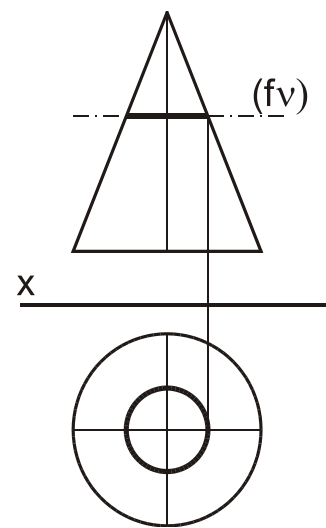


Fig. 2.10 – Secção circular

– se o plano de secção intersesta todas as geratrizes em pontos diferentes do vértice mas é paralelo à diretriz a secção é uma circunferência, que, por isso, se entende como caso particular da elipse (Fig. 2.10);

- se o plano de secção interseca todas as geratrizes, não passa no vértice nem é paralelo à diretriz, a secção é uma elipse (Fig. 2.11);
- se o plano de secção for paralelo só a uma geratriz a secção é uma parábola (Fig. 2.12);
- se o plano de secção for paralelo a duas geratrizes a secção é uma hipérbole (Fig. 2.13).

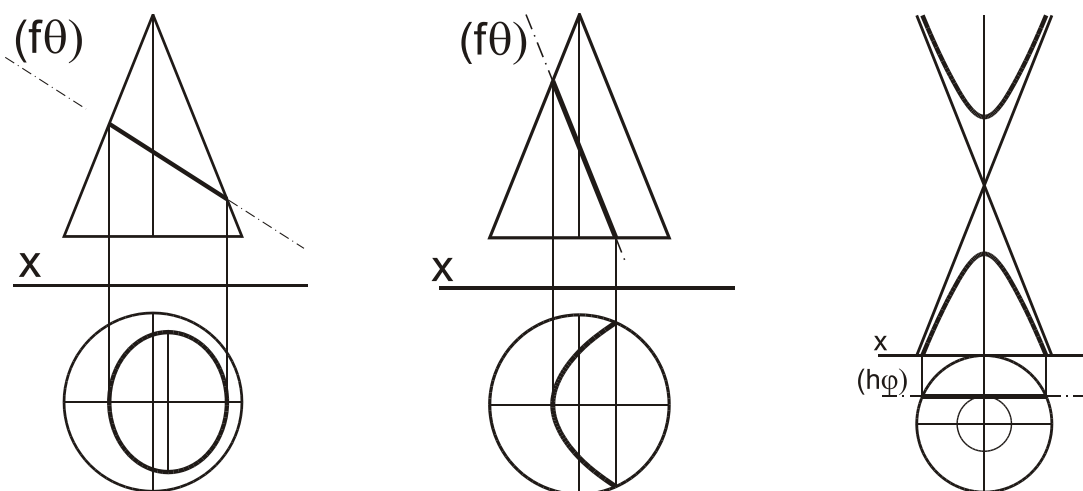


Fig. 2.11 – Secção elíptica Fig. 2.12 – Secção parabólica Fig. 2.13 – Secção hiperbólica

A circunferência pode ser entendida como uma elipse com eixos iguais. Como casos particulares, podemos considerar igualmente que o plano da secção passa no vértice da superfície cónica e não mais a interseca, sendo a secção um ponto, ou que o plano da secção é tangente à superfície cónica sendo a secção a geratriz de tangência. Estas secções não curvas, um ponto, uma reta, duas retas concorrentes, ou duas retas paralelas se seccionarmos um cilindro por um plano paralelo às geratrizes, designam-se por **cónicas degeneradas** (RICCA, 2000, 297).

Designam-se por **cónicas centrais** as curvas cónicas que têm centro, ou seja, a elipse e a hipérbole.

Por outro lado “Las cónicas son las curvas que se obtienen al seccionar por un plano a una superficie radial, como o cilindro, de directriz circular” (SANCHEZ GALLEGO, 1997, 64). Admite-se nesta definição que o vértice do cone pode estar no infinito, tornando as



geratrizes paralelas entre si e considerando as superfícies cilíndricas daí resultantes como um caso particular das superfícies cónicas. Na superfície cilíndrica reta as secções possíveis passam a ser a elipse quando o plano de secção é oblíquo às geratrizes e o caso particular da elipse, a circunferência, quando o plano de secção é paralelo à diretriz, duas retas paralelas, quando o plano de secção é paralelo às geratrizes e intersecta a superfície, ou uma reta, a geratriz, quando o plano de secção é tangente à superfície.

Como se podem obter secções da superfície cónica que são pontos ou retas, de acordo com as condições descritas, um ponto, uma reta, duas retas convergentes ou duas retas paralelas. Esta é outra razão para que se possa considerar o ponto como uma curva, uma elipse que vemos infinitamente longe de nós ou no vértice da superfície cónica, e as retas como casos particulares das curvas.

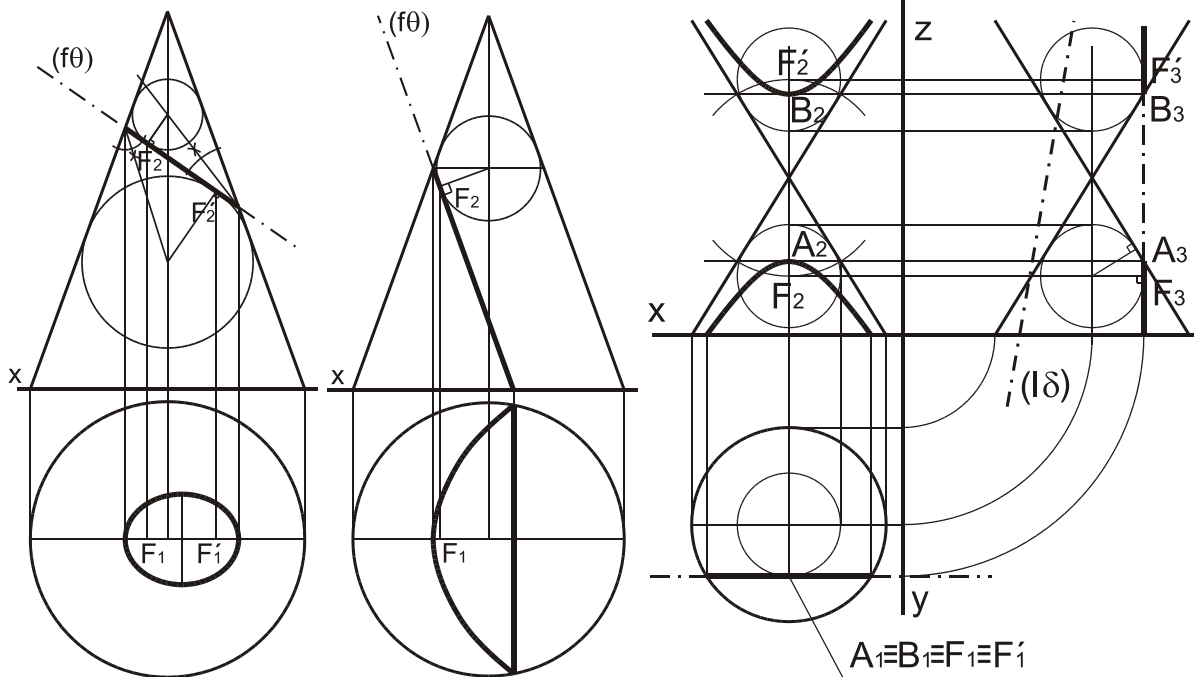


Fig. 2.14 – Secção elipse Fig. 2.15 – Secção parábola Fig. 2.16 – Secção hipérbole

Em HILBERT, D.; COHN-VOSSEN, S. (1999, 1-31) são descritas propriedades fundamentais das cónicas, designadamente as que permitem determinar os focos e as diretrizes utilizando o método de Dandelin. O método de Germinal Pierre Dandelin (1794-1847) consiste em introduzir esferas no cone tangentes a este e ao plano α de secção. A propósito do teorema de Dandelin definamos então o que são os focos das curvas cónicas.

De acordo com IZQUIERDO ASENSI (1985, 169-170), utilizando o processo de Dandelin, **focos** são os pontos de tangência no plano da secção, de esferas tangentes ao cone e ao próprio plano de secção. Por outro lado, as **diretrizes** das curvas são a intersecção do plano de secção com os planos que contêm a(s) circunferência(s) de tangência das esferas com o cone. Mais à frente nas páginas 328, 334 e 335 é enunciado o **Teorema de Dandelin**, referente a esta matéria, e que permite relacionar as dimensões dos eixos com a posição dos focos e das diretrizes precisamente a partir das esferas tangentes. O mesmo tema é tratado igualmente em ROUBAUDI (1961, 200, 207 e 209). Também GORDON (1980, 251) lhe faz referência. Como será comprovado no capítulo respeitante ao estudo das superfícies geradas com curvas cónicas, o teorema de Dandelin também se aplica ao hiperbolóide de revolução de uma folha.

Por maior facilidade de interpretação da representação, utilizou-se o cone com eixo vertical e o plano de secção projetante frontal.

Se a secção é uma elipse, para determinar as duas esferas e, em decorrência, os focos, o traço projetante do plano de secção α e as geratrizes do contorno aparente do cone definem um triângulo e o contorno aparente da cada esfera é uma circunferência inscrita no triângulo, com centro no eixo do cone, sendo o centro da esfera definido pelas bissetrizes dos ângulos do triângulo. O ponto de tangência no plano de secção, o foco, obtém-se traçando pelo centro um raio perpendicular ao plano de secção. Conhecido o centro e o raio está definido o contorno aparente da esfera.

Se a secção é uma parábola existe apenas uma esfera real no espaço euclidiano, logo só um foco, tendo a outra esfera um raio infinito, logo situando-se o outro foco no infinito.

No caso de a secção ser uma hipérbole utilizou-se também, por maior simplicidade dos traçados, a representação de um caso particular na secção hiperbólica, em que o plano de secção utilizado é paralelo ao eixo, o que permite que o contorno da superfície cónica defina as assíntotas da hipérbole, e que as esferas auxiliares sejam iguais permitindo a simetria da projeção frontal da hipérbole.

O caso geral de secção hiperbólica seria o resultante de um plano de secção não paralelo ao eixo, desde que intersectando os ramos superior e inferior da superfície cónica, um plano projetante como por exemplo o plano δ , que aparece representado pelo seu traço lateral l_δ . Procuramos assim corresponder à prevenção feita em SILVA [et al.] (2002, 1) que adverte para os erros comunicativos decorrentes da utilização de planos paralelos ao eixo do cone, que podem levar a pensar que são os únicos a dar origem a uma secção hiperbólica. Para além desta referência será apresentado graficamente o caso geral, na



parte do texto relativa à comprovação da coerência do teorema de Dandelin com os métodos da geometria plana.

Assim, a hipérbole é a única das secções cónicas que resulta da intersecção com o duplo cone, ou seja o prolongamento do cone para o lado oposto. A descoberta do cone duplo e do segundo ramo da hipérbole parece ser atribuível a Apolónio de Pérgamo (250-175 a. C.), dado o ênfase que ele próprio dá no seu texto ao estudo da hipérbole, e da particularidade do segundo ramo em especial, e não se conhecendo textos anteriores que a tal se refiram de acordo com APOLLONIUS OF PERGA; HEATH, M. A. (1896) e ESTRADA [et al.] (2000, 321). Aliás o trabalho de Arquimedes em meados do séc. III a. C. utiliza, como foi referido anteriormente, para determinar cada tipo de secção, os cones retos com geratrizes com diferentes ângulos relativamente ao eixo e planos de secção perpendiculares às geratrizes.

As **assíptotas** são as tangentes às curvas em pontos impróprios, ou seja, no infinito, de um dos ramos dessa curva (IZQUIERDO ASENSI, 1985, 159). No caso da hipérbole há duas assíptotas que correspondem, no cone reto, às projeções das geratrizes do contorno aparente da superfície cónica quando o plano de secção é paralelo ao plano das duas geratrizes do contorno aparente.

Por outro lado, e sobretudo na sequência de inúmeros avanços no conhecimento das cónicas, designadamente através dos trabalhos de Isaac Newton (1643-1727) e Edmond Halley (1696-1742) e, sobretudo com um forte incremento no século XIX, foram-se desenvolvendo novas formas de definir as curvas cónicas.

RANGEL (1974) apud SILVA [et al.] (2002, 3), diz que: “Cônica é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja relação entre as distâncias a um ponto fixo, chamado foco, e a uma reta fixa, chamada diretriz, é constante. Essa constante é, geralmente, designada pela letra e , e coincide com a chamada excentricidade da cônica...”.

A **excentricidade** surge igualmente definida na maioria dos autores como o parâmetro que mede a relação de uma curva cónica com uma circunferência. A excentricidade de uma circunferência é 0. A excentricidade de uma elipse varia entre 0 e 1. A excentricidade de uma parábola é 1. A excentricidade de uma hipérbole é superior a 1. Sendo d a distância do foco ao centro da cónica e a a distância do centro a um ponto da cónica na mesma reta e para o mesmo lado relativamente ao centro, a excentricidade e é definida por $e=d/a$. A reta que contem o centro, o foco e o ponto da cónica é o eixo da parábola, o eixo maior da elipse e a reta que contem o eixo transversal da hipérbole. Deve notar-se que, nesta definição, que também encontramos formulada de forma similar em LADEGAILLERIE (2003, 443), exclui a circunferência, quando, em regra, esta é considerada

um caso particular da elipse. Então a excentricidade da elipse deve ser definida como maior ou igual a 0 e inferior a 1.

A elipse e a hipérbole têm dois **eixos de simetria** a parábola apenas um. Segundo SAURÍ (2009, 69-72) **eixo** ou **eixo principal** é o eixo de simetria que contém os focos. Na elipse e na hipérbole, o outro eixo que passa no centro da figura e é perpendicular ao anterior é o **eixo secundário** ou **transversal**. As intersecções *A* e *B* da curva com o eixo principal designam-se por **vértices** ou **vértices principais**. As intersecções *C* e *D* da curva com o eixo transversal são designadas **vértices secundários**.

Com definição que SAURÍ (2009, 73) atribui a Dandelin, **elipse** é o lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias aos focos é igual ao eixo maior. Por igual forma, **hipérbole** é o lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias aos focos é igual ao eixo transverso. **Parábola** é o lugar geométrico dos pontos que têm igual distância ao foco e a uma reta, a diretriz.

Em SAURÍ (2009, 73-75), e relativamente às cónicas centrais, a elipse e a hipérbole, encontramos igualmente as definições de Círculo principal [*C_p*], que designaremos como **Circunferência principal**, e que é a circunferência que passa nos dois vértices principais da curva, e de Círculo focal ou Círculo diretor [*C_d*], que designaremos como **Circunferência focal** ou **Circunferência diretora**, e que é a circunferência com centro num dos focos e raio igual à distância entre os vértices principais. Esta circunferência é designada por diretora pois todos os da curva equidistam da circunferência e do outro foco. Na parábola a circunferência diretora é substituída pela diretriz. Nas cónicas centrais, elipse e hipérbole existem, portanto, duas circunferências diretoras, mas, do ponto de vista prático, é suficiente considerar uma.

De notar, pela confusão que pode originar com eixo transversal, que, em Portugal, diversos autores, designadamente de manuais escolares, sempre designaram por **eixo transverso** o segmento entre os vértices principais, sendo que utilizaremos no texto seguinte, sempre que aplicável, esta designação.

A circunferência principal *C_p* tem como propriedade, entre outras, que qualquer tangente à curva cónica intersecta a circunferência em pontos que, se unidos aos focos do lado respetivo, dão origem a segmentos perpendiculares à tangente.

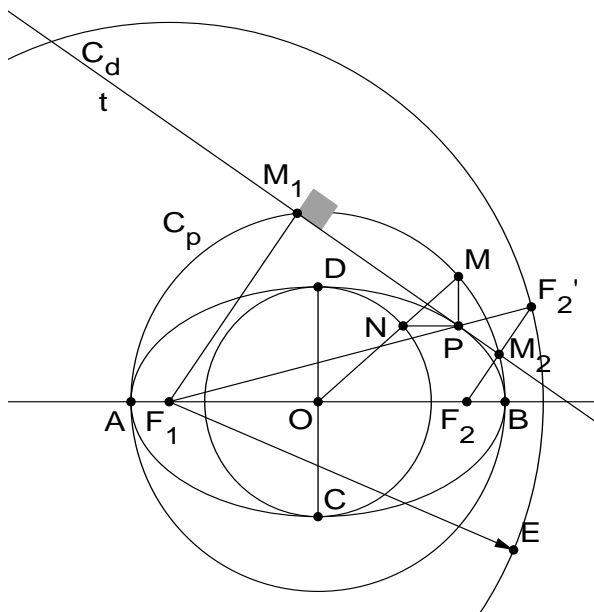


Fig. 2.17 – Circunferências diretora e principal na elipse

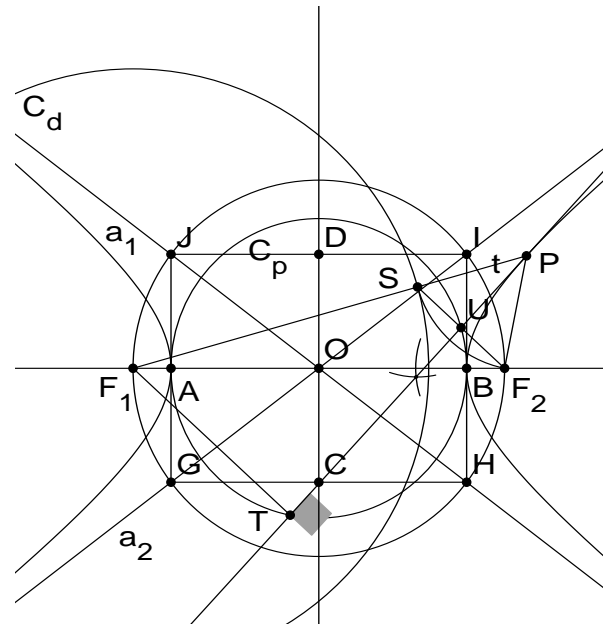


Fig. 2.18 – Circunferências diretora e principal na hipérbole

A circunferência diretora tem como propriedade principal a de que, se unirmos, por um segmento, o foco oposto a um dos pontos da circunferência, a reta bissetriz desse segmento é uma tangente da curva cónica. Por outro lado, se traçarmos a reta que passa no ponto escolhido da circunferência diretora e no foco respetivo a intersecção desta com a tangente é o ponto de tangência na cónica.

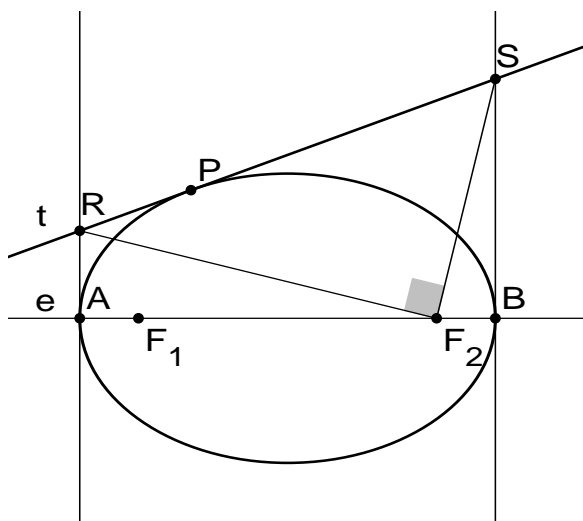


Fig. 2.19 – Propriedade da tangente a uma cónica

Por outro lado, ENRIQUES (1930, 303 e 317) enuncia-se a seguinte propriedade relativa a todas as cónicas, embora fazendo a ressalva de, no caso da parábola, se ter que considerar que o segundo foco é impróprio, ou seja, situa-se no infinito:

- se intersetarmos uma tangente da cónica com as tangentes nos vértices desta, os segmentos que unem os pontos de intersecção a um dos focos definem um ângulo reto.

A propriedade referida por Enriques permite estabelecer procedimentos para a determinação de pontos da curva cónica conhecendo o eixo principal e uma tangente.

2.6. FOCOS E DIRETRIZES DAS CÓNICAS

A propriedade que relaciona os focos com a diretriz é designada algumas vezes como **binómio foco diretriz** ou outras vezes por **dualidade foco diretriz** por as duas entidades, focos e diretrizes, estarem relacionadas por tal forma que conhecendo-se uma delas, e a curva cónica, pode-se determinar a outra. As propriedades e teoremas duais, em geometria projetiva, implicam que por intermutação das palavras ponto e reta a propriedade ou teorema seja igualmente verdadeiro. No caso dos focos e diretrizes, em geometria projetiva, um foco é o Pólo e a diretriz correspondente é a reta Polar relativamente à cónica, sendo que se o foco mudar para a posição da intersecção da diretriz com o eixo a reta polar respetiva passa para a posição original do foco.

Apresenta-se de seguida algumas propriedades que, segundo LADEGAILLERIE (2003, 443-445), relacionam os focos com as diretrizes e, por isso, permitem que a partir dos focos se possa determinar as diretrizes das cónicas e inversamente, conhecendo as diretrizes determinar os focos.

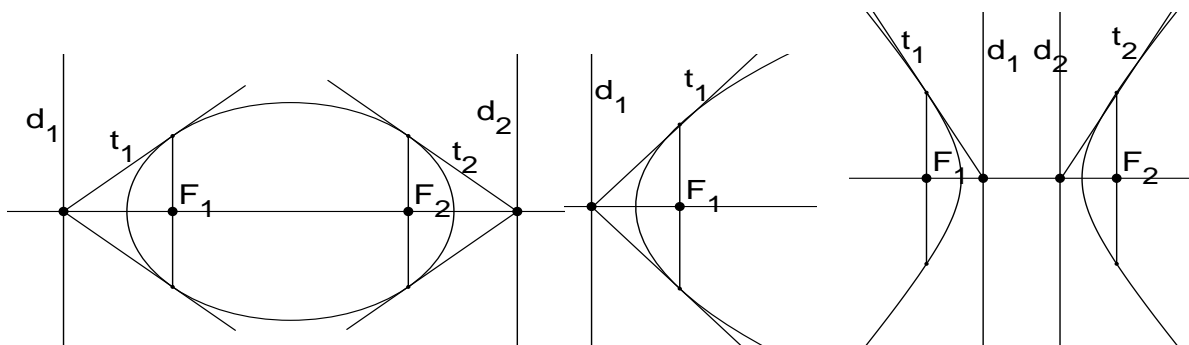


Fig. 2.20 – Elipse (Focos e diretrizes)

Fig. 2.21 – Parábola
(Focos e diretrizes)

Fig. 2.22 – Hipérbole
(Focos e diretrizes)



Como se mostra nas figuras antecedentes, se traçarmos tangentes nos pontos das curvas cónicas que se situam sobre as perpendiculares aos eixos que passam nos focos, as tangentes interseitam o eixo num ponto da diretriz, sendo esta perpendicular ao eixo.

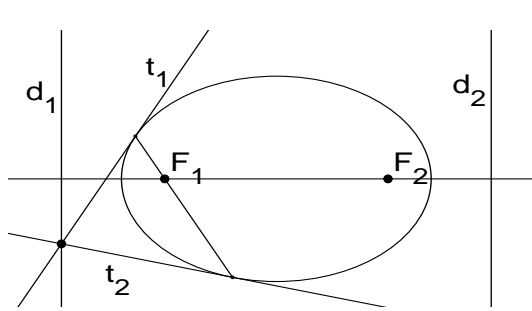


Fig. 2.23 – Elipse (corda no foco e tangentes)

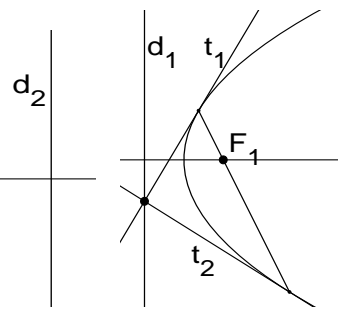


Fig. 2.24 – Parábola (corda no foco e tangentes)

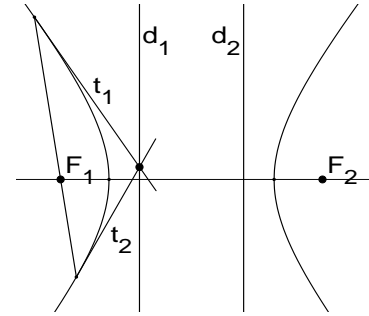


Fig. 2.25 – Hipérbole (corda no foco e tangentes)

Generalizando, a partir da propriedade anterior pode demonstrar-se, e de acordo com as figuras antecedentes, que:

– se traçarmos uma corda que passe num foco de uma cónica as tangentes nos extremos dessa corda interseitam-se num ponto da diretriz.

Este conjunto de propriedades justifica a dualidade foco diretriz e que pode ser expressa, se pretendermos definir a posição do foco a partir da diretriz, pela formulação inversa das propriedades referidas:

– se pelo ponto de intersecção de uma diretriz com o eixo fizermos passar tangentes à curva cónica a corda definida pelos pontos de tangência é perpendicular ao eixo e passa no foco correspondente;

– se por um ponto de uma diretriz fizermos passar retas tangentes à curva cónica a corda definida pelos pontos de tangência passa no foco do mesmo lado.

Assim, como foi referido, a dualidade expressa-se pela substituição da palavra ponto pela palavra reta com a adaptação correspondente. Tal é uma característica de todos os teoremas duais.

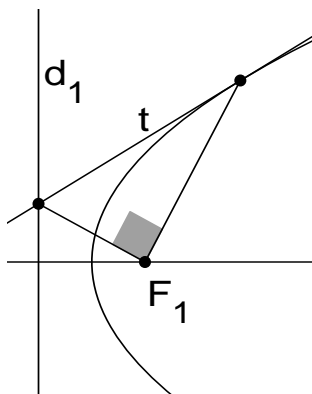


Fig. 2.26 – Outra propriedade da relação foco – diretriz da parábola

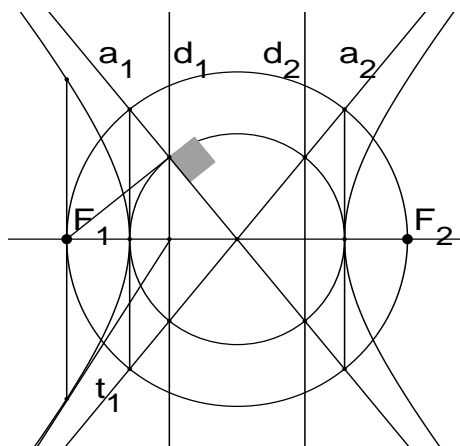


Fig. 2.27 – Outra propriedade da relação foco – diretriz da hipérbole

Outras propriedades da relação foco – diretriz são igualmente enunciadas em LADEGAILLERIE (2003, 443-444) e podem descrever-se da seguinte forma:

- se numa parábola traçarmos a tangente num dos seus pontos, os dois segmentos que unem o foco ao ponto de tangência e ao ponto de intersecção da tangente com a diretriz formam um ângulo reto;

- na hipérbole os segmentos que passam nos focos, e que são tangentes à circunferência que passa nos vértices da curva com centro no centro da hipérbole, são perpendiculares às assíntotas e interseam-nas no ponto de tangência que é igualmente um ponto da diretriz.

2.6.1. ELIPSE

Em IZQUIERDO ASENSI (1985, 172-178) encontramos outros procedimentos para determinar os focos e as diretrizes a partir dos eixos da elipse ou do eixo e assíntotas da hipérbole. Para determinar os focos F_1 e F_2 conhecidos os eixos da elipse traça-se um arco com centro em C, um extremo do eixo menor, e raio igual ao semieixo maior. As intersecções do arco com o eixo maior são os focos. O método descrito por IZQUIERDO ASENSI (1985, 173) para determinar as diretrizes da elipse consiste em traçar o segmento que une o foco F_1 com a projeção ortogonal do centro O sobre a circunferência cujo diâmetro é o eixo maior e, nesse ponto C' , traçar uma perpendicular ao segmento F_1C' até



interceptar a reta do eixo maior, determinando G_2 . Nesse ponto passa a diretriz, a qual é perpendicular ao eixo maior. A outra diretriz e o outro foco são simétricos relativamente ao centro.

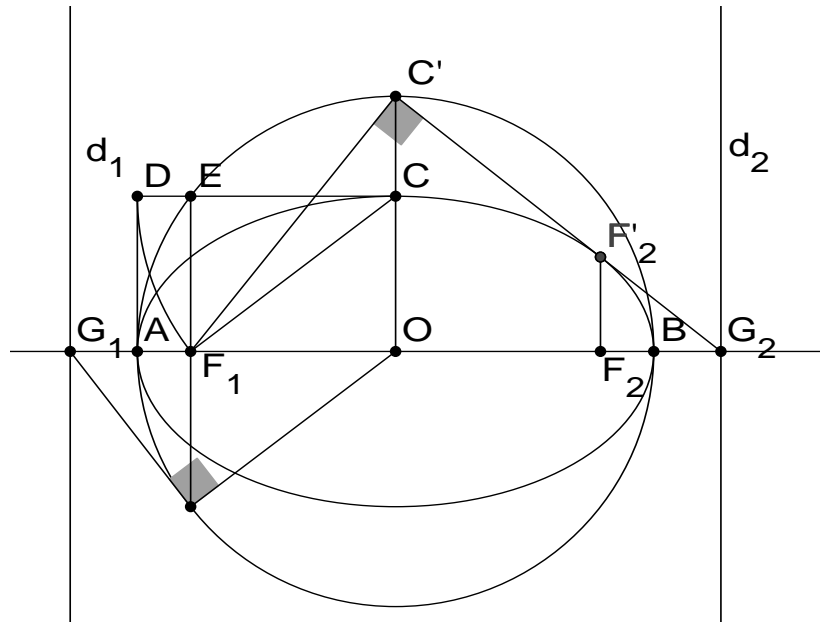


Fig. 2.28 – Determinação dos focos e diretrizes da elipse conhecidos os eixos desta

Pode igualmente deduzir-se deste método que $C'G_2$ é tangente em F'_2 , a projeção ortogonal ao eixo maior do outro foco F_2 sobre a elipse. Os dois focos são simétricos relativamente ao centro O da elipse. Também se pode concluir que, se projetarmos o foco F_1 perpendicularmente ao eixo maior da elipse sobre a circunferência de centro O e diâmetro igual ao eixo maior, e traçarmos o segmento que une esse ponto ao centro, e pelo mesmo ponto da circunferência traçarmos um segmento perpendicular ao anterior até intersecar a reta do eixo maior obtemos G_1 ponto da diretriz d_1 . G_1 e G_2 são também simétricos relativamente ao centro O , pelo que d_1 e d_2 o são igualmente. A **figura da elipse** é o retângulo circunscrito a esta com lados paralelos aos eixos.

Assim, a definição da elipse pode ser dada pelos seus eixos maior e menor, ou por um deles e a distância focal, ou por um dos eixos e pela *excentricidade* ou, ainda, por um dos eixos e um ponto da curva.

2.6.2. PARÁBOLA

Na parábola a diretriz é igualmente perpendicular ao eixo e passa num ponto deste a igual distância do vértice da curva à do foco ao vértice.

A **figura da parábola** é definida por um retângulo delimitado por uma corda paralela à tangente no vértice, a própria tangente, e as duas paralelas ao eixo que passam nos extremos da corda.

A parábola é um caso particular de entre as curvas cónicas pois só modifica a sua forma gráfica com a distância do foco ao **vértice da curva**, ponto de intersecção desta com o eixo, que é mesmo que dizer a distância do foco à diretriz que é dupla da distância anterior. Assim podemos considerar que, do ponto de vista prático e, sobretudo, quando utilizarmos programas informáticos de desenho, **todas as parábolas são semelhantes**, só aumentam ou diminuem de tamanho, pelo que podemos utilizar graficamente sempre a mesma parábola, sendo apenas necessário definir a posição do eixo e a distância focal.

Segundo SANCHEZ-GALLEGO (1997, 66-67, Fig. 2-4) **cónicas semelhantes** são as elipses que têm a mesma relação de proporção entre os semieixos, as hipérbolas cujas assíntotas formam ângulos iguais e todas as parábolas de segundo grau. Assim, estamos perante uma generalização da designação a todas as cónicas graficamente iguais e que apenas variam no tamanho da representação gráfica.

Como as parábolas são um caso particular, por serem todas semelhantes, apresenta-se em seguida um processo que desenvolvemos e que permite determinar, de forma expedita, a representação gráfica da uma parábola, e depois utilizá-la nas mais diversas circunstâncias, sendo suficiente para tal aumentar ou reduzir a distância do foco ao vértice, ou seja, encontrar parábola graficamente igual mas de tamanho diferente e ajustar a posição do eixo.

O procedimento que é apresentado consta de um nosso trabalho anterior (COSTA, 2005, 64) e parte da definição da tangente AM à parábola num ponto desta, que surge apresentada em ASENSI (1985, 189, fig. 10-25) e igualmente em RICCA (2000, 335, fig. A-29), podendo igualmente deduzir-se a partir de AKOPYAN; ZASLAVSKY (2007, 19, Fig. 1.24 e 1.25). Este método foi desenvolvido e detalhado na resolução de diversos problemas construtivos da parábola definida por dados diferentes em [COSTA], J. BONIFÁCIO (2009). É um desenvolvimento de diferentes propriedades da parábola cujo fundamento está num teorema de Fermat que provou, por dedução matemática, que traçando a tangente num ponto da parábola, e uma perpendicular ao eixo nesse ponto, a distância desde a



perpendicular ao eixo até ao vértice da curva é igual à distância desde o vértice até à intersecção da tangente com o eixo (BOYER, 2005, 240).

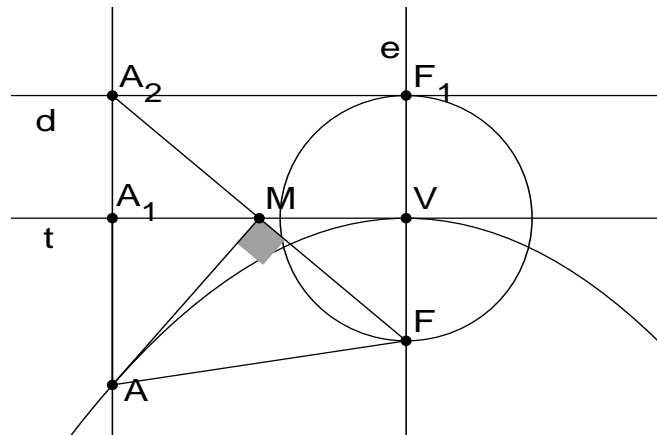


Fig. 2.29 – Determinação do foco e da diretriz da parábola conhecidos um ponto A qualquer, o vértice V e a tangente t no vértice

Partimos da conjugação das propriedades da parábola que definem que a tangente AM num ponto A da parábola é a bissetriz do ângulo entre o segmento que une o ponto A ao foco com o segmento AA_2 perpendicular à diretriz a partir do mesmo ponto. Por outro lado sendo AM a bissetriz A_2M e MF são iguais pela propriedade que define que a tangente é perpendicular à reta que passa no foco, situando-se a intersecção das duas retas sobre a tangente no vértice. Como M é um ponto da tangente t no vértice resulta que M é igualmente o ponto médio de A_1V . Tendo em conta o exposto anteriormente, se projetarmos um ponto A qualquer da parábola sobre a tangente t no vértice obtendo A_1 e determinarmos o ponto M , ponto médio de A_1V , e por este ponto traçarmos uma perpendicular à tangente em A , AM , a intersecção da perpendicular com o eixo e da parábola é o foco F . A diretriz fica igualmente determinada pois é paralela a t e equidistante de F relativamente ao vértice.

2.6.3. HIPÉRBOLE

Conceitos associados à hipérbole são o **círculo principal** ou **círculo de gola**, com centro no centro O da hipérbole e que tem como diâmetro o **eixo transversal** AB , e o **círculo focal**, com centro O e que passa nos focos F_1 e F_2 . Tal como a elipse, a hipérbole tem dois eixos de simetria, um, o **eixo principal** que contém o eixo transversal e os focos, e

outro perpendicular, o **eixo transversal**, a passar no centro da curva. ENRIQUES (1930, 262) define que, em geometria projetiva, enquanto a elipse tem dois eixos reais, a hipérbole tem um eixo real e outro idealizado, designando-se o primeiro por eixo transversal ou principal.

Inúmeras propriedades fundamentais da hipérbole podem ser deduzidas a partir do conhecimento da sua **figura**, o retângulo $[FGHI]$. Inversamente, também se pode partir do conhecimento do eixo transversal AB e da distância focal F_1F_2 para conhecer a figura. Para determinar os focos e as diretrizes da hipérbole, sendo conhecida a figura que define a hipérbole traça-se o círculo focal com diâmetro igual às diagonais do retângulo. As **assíntotas** são as retas diagonais do retângulo.

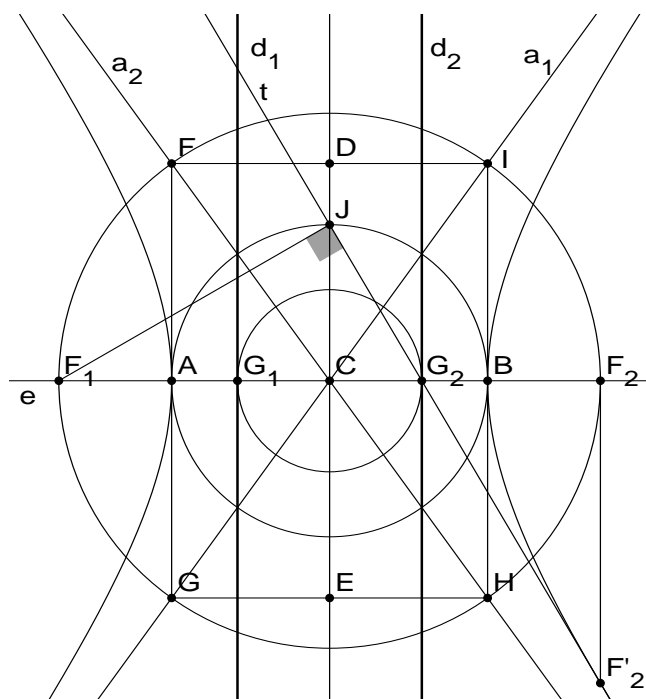


Fig. 2.30 – Determinação dos focos, diretrizes e assíntotas da hipérbole conhecidos o eixo transversal AB e o seu conjugado, a reta DE .

Os focos F_1 e F_2 são a intersecção do círculo com a reta do eixo transversal. Traça-se seguidamente o segmento que une o foco F_1 ao ponto J , intersecção da projeção ortogonal do centro, relativamente ao eixo transversal, com a circunferência de gola AB , e, por esse ponto, traça-se uma perpendicular que interseta o eixo transversal num ponto G_2 da diretriz, a qual é perpendicular ao eixo. O outro foco e respetiva diretriz são igualmente simétricos



relativamente ao centro. Por outro lado, JG_2 é a tangente à hipérbole no ponto F'_2 , projeção de F_2 perpendicularmente ao eixo sobre a hipérbole. Inversamente, para determinar as assíntotas, se fossem dados o eixo transversal AB e a distância focal F_1F_2 , traça-se as tangentes ao círculo de gola nos pontos A e B até interseccionar o círculo focal em F, G, H e I . Os vértices do retângulo *figura*, unidos ao centro O , definem as assíntotas a_1 e a_2 .

Uma **hipérbole equilátera** ou **hipérbole retangular** é uma hipérbole em que as assíntotas são perpendiculares entre si e formam, portanto, ângulos com os eixos de 45° , logo, a *figura* é um quadrado.

Hipérboles conjugadas são que partilham as mesmas assíntotas mas existem em quadrantes diferentes relativamente às assíntotas. Por consequência das propriedades anteriormente referidas, uma hipérbole conjugada de outra tem focos sobre o mesmo círculo focal, e *figura* igual, pelo que os vértices da hipérbole conjugada da anterior são os pontos médios dos lados do retângulo opostos aos que contêm os vértices da outra hipérbole.

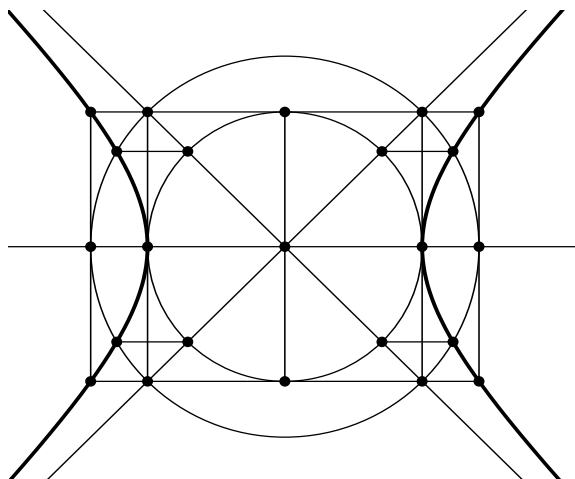


Fig. 2.31 – Hipérbole equilátera

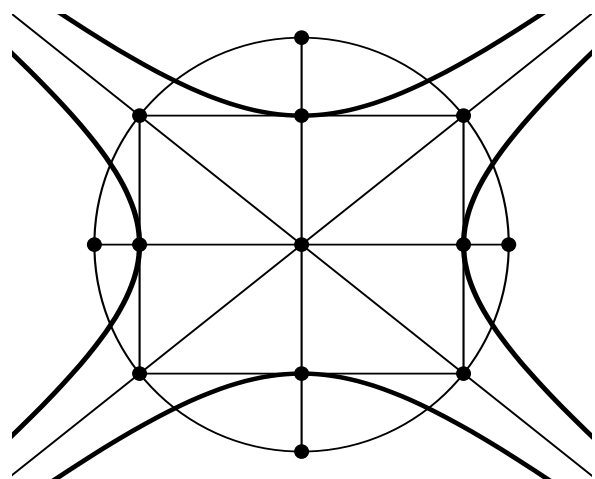


Fig. 2.32 – Hipérboles conjugadas

2.7. CONFORMIDADE DA DETERMINAÇÃO DOS FOCOS E DIRETRIZES ATRAVÉS DO TEOREMA DE DANDELIN E DE MÉTODOS DA GEOMETRIA PLANA

Nas figuras seguintes pretende-se demonstrar a conformidade dos resultados obtidos para a determinação de focos e diretrizes das cónicas através do Teorema de Dandelin com os procedimentos resultantes da geometria plana.

Em HILBERT, D.; COHN-VOSSSEN, S. (1999, 28) define-se as **diretrizes** como as retas de intersecção do plano da secção cónica com o plano ou planos das circunferências osculantes das esferas de Dandelin com o cone.

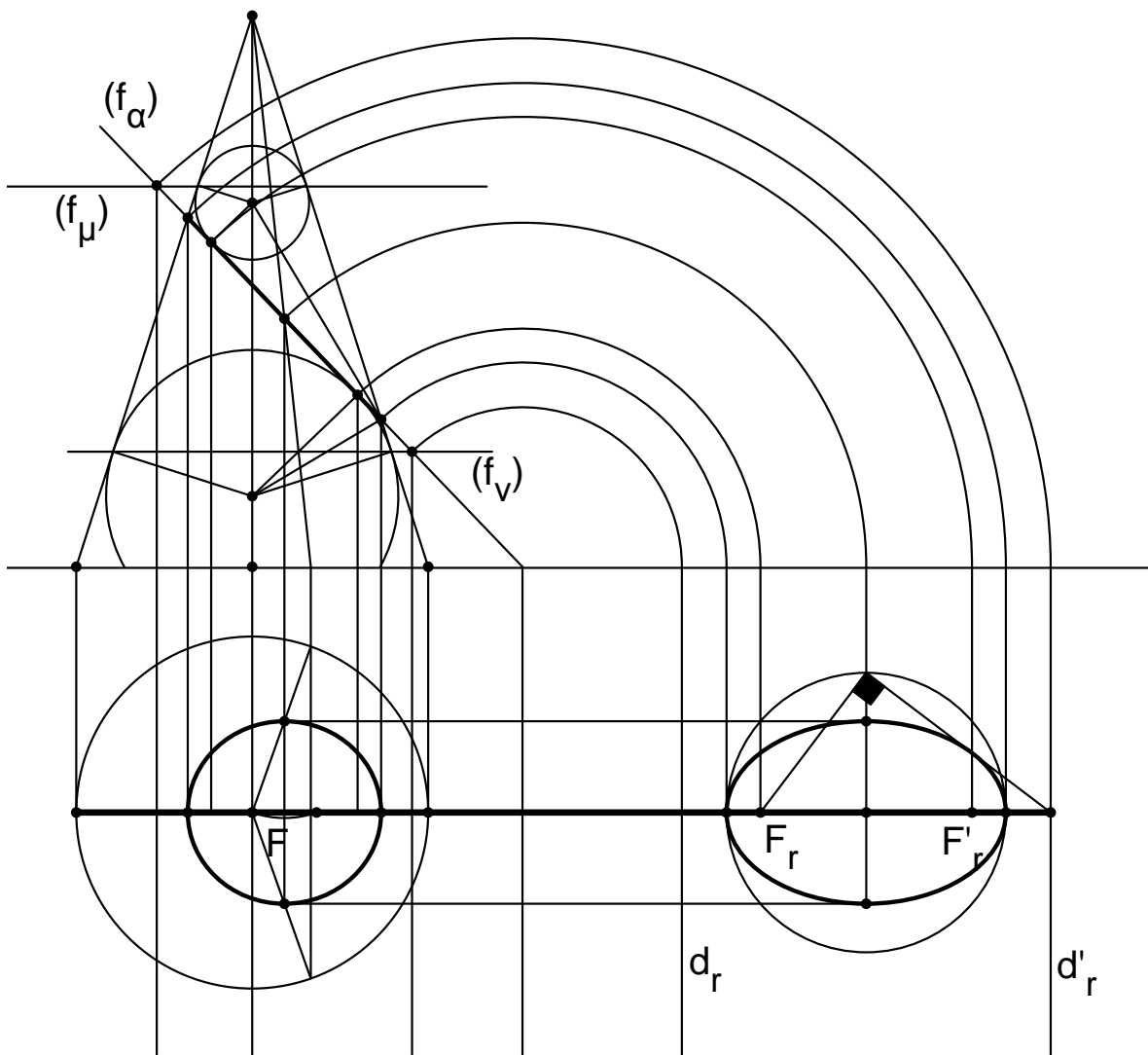


Fig. 2.33 – Conjugação dos dois procedimentos na secção elíptica

É possível verificar a confirmação da determinação dos focos e diretrizes da elipse pelo teorema de Dandelin com os procedimentos da geometria plana através do rebatimento do plano da secção e dos focos e diretrizes obtidos por este método e depois confirmá-los em



geometria plana, variando a posição dos dados, ou seja, altura do cone, raio da base e ângulo do plano de secção com o plano de secção.

Tal confirmação é importante, apesar de cada um dos processos estar amplamente fundamentado teoricamente na literatura, para permitir a melhor visualização da passagem da geometria plana à geometria no espaço, mas também porque acessoriamente foi detetada uma propriedade que não encontramos descrita na literatura, a de que **um dos focos da elipse projeção na base do cone coincide com a projeção do eixo do cone.**

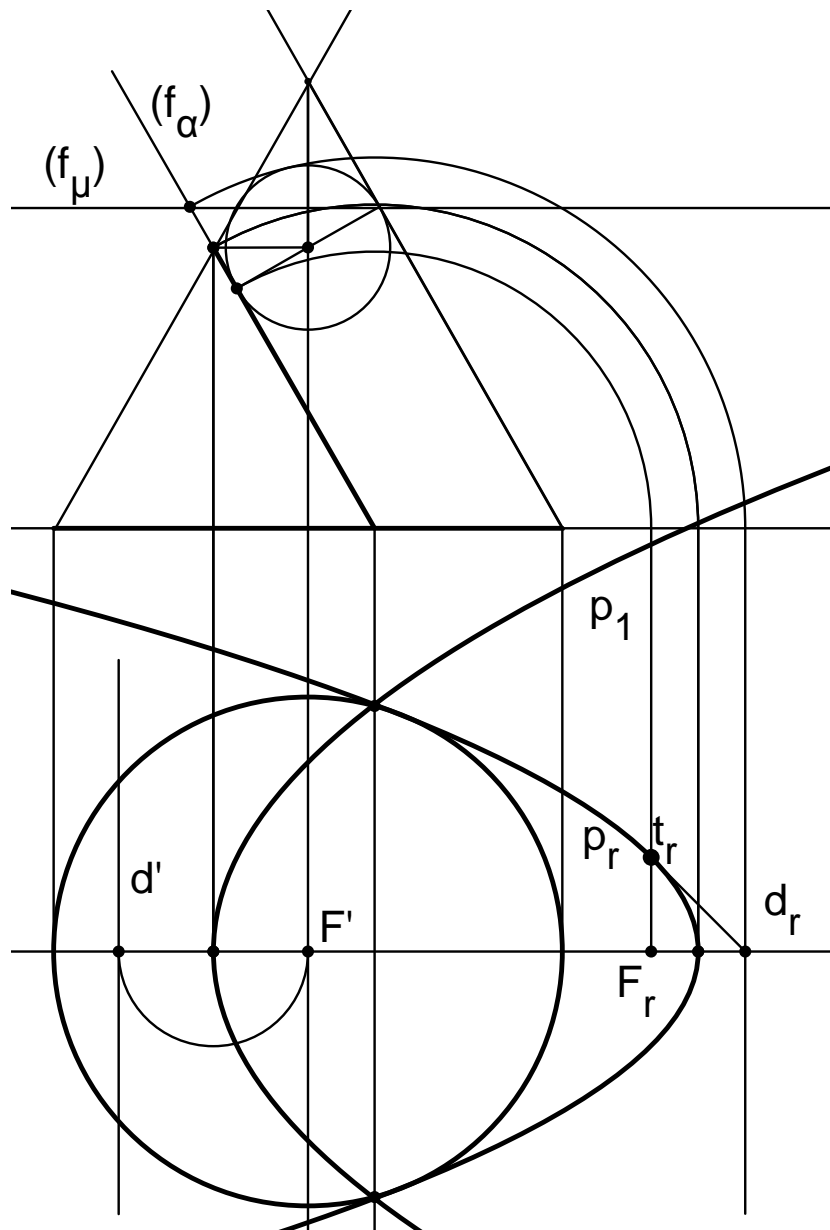


Fig. 2.34 – Conjugação dos dois procedimentos na secção parabólica

No caso da parábola, para além da confirmação da coerência dos dois procedimentos na determinação do foco e diretriz, ou seja, a partir do rebatimento da parábola secção podemos comprovar que o foco F é o ponto de tangência da esfera de Dandelin, torna a verificar-se que a projeção parabólica da secção no plano da base do cone tem foco coincidente com a projeção do eixo do cone. De facto, o foco F_1 da parábola secção em projeção horizontal p_1 coincide com o eixo do cone.

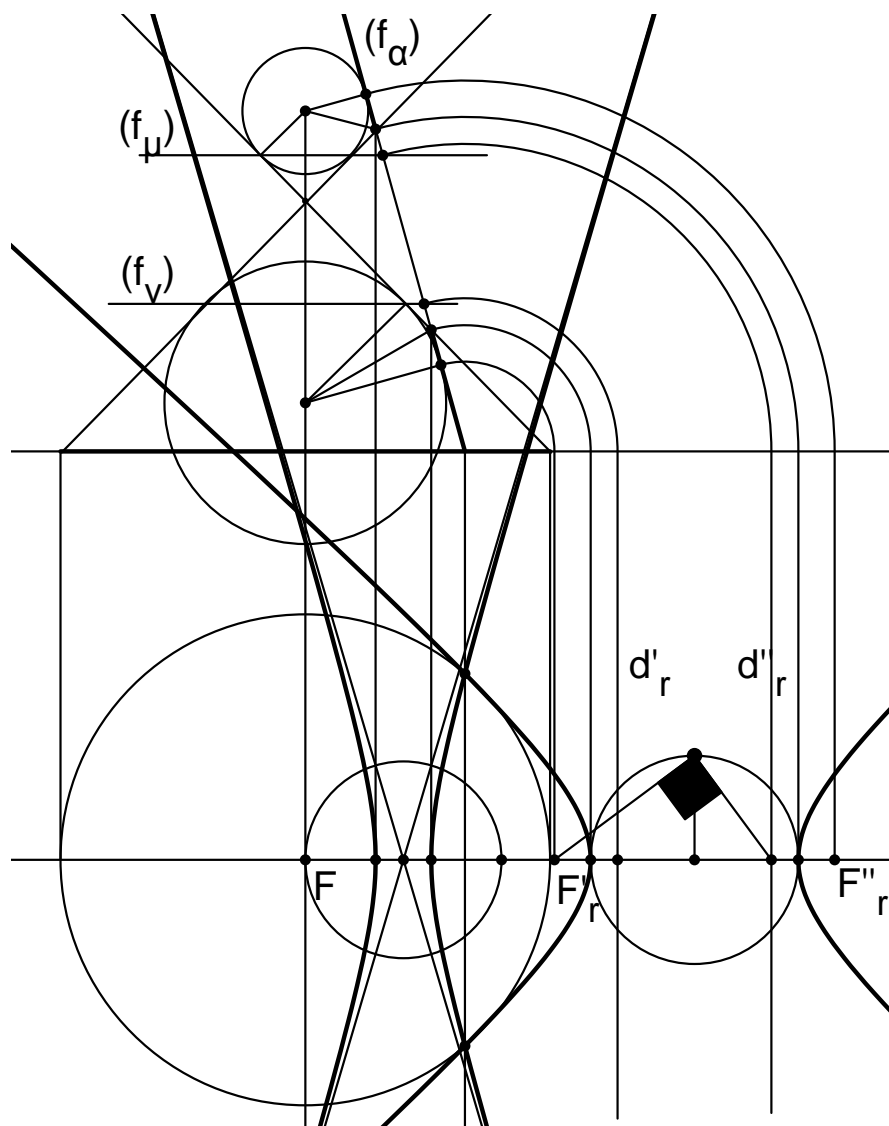


Fig. 2.35 – Conjugação dos dois procedimentos na secção hiperbólica

Quanto à hipérbole, tornou a verificar-se que os resultados obtidos pelo método de Dandelin e pelos métodos da geometria plana, quanto aos focos e às diretrizes, são



resultados coincidentes independentemente do raio da base, da altura e do ângulo formado pelo plano de secção com o plano horizontal, desde que a secção fosse uma hipérbole.

Comprovou-se igualmente que um dos focos da hipérbole, projeção da secção no plano da base do cone, coincide com a projeção do eixo do cone.

O **cilindro reto** é um cone reto de vértice impróprio, ou seja, no infinito, pelo que procuramos verificar as propriedades antecedentes. Estamos, portanto, perante um alargamento do conceito de cone e secção cónica às superfícies cónicas retas de vértice impróprio.

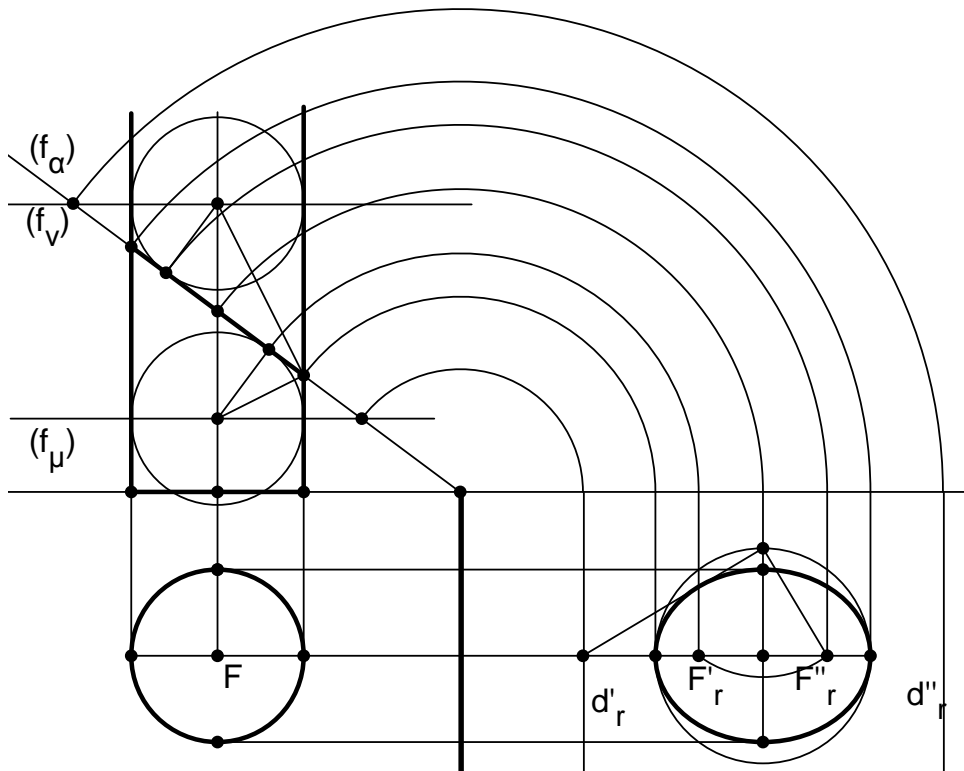


Fig. 2.36 – Conjugação dos dois métodos na secção num cilindro reto

Comprova-se que as propriedades descritas nos exemplos anteriores se verificam também no cilindro reto, não obstante a única curva cónica obtível como secção ser a elipse, e o seu caso particular, a circunferência, para além das degeneradas, duas retas paralelas, se o plano de secção for paralelo ao eixo, e uma reta, se o plano for tangente à superfície.



Mostrou-se, do ponto de vista prático, a generalização do método de Dandelin, em cones retos, a todas as secções cónicas não degeneradas e a sua relação com outros procedimentos próprios da geometria plana. Por outro lado, da comprovação efetuada, podemos concluir com a generalização da propriedade, que não encontramos documentada na literatura, e que em seguida se enuncia:

– a secção cónica num cone de revolução tem um dos focos da sua projeção no plano da base do cone coincidente com a projeção do próprio eixo do cone.

Tal pode ter relevância a dois níveis:

– porque levanta a possibilidade de ajudar a compreender, do ponto de vista da História da Matemática, como os gregos da Antiguidade Clássica identificaram os focos, tarefa esta incompleta e em que esta propriedade pode ser um contributo em estudos posteriores. De facto é difícil de comprovar que, conforme indicações indiretas, Arquimedes já conhecia os focos, dado que o seu estudo sobre as cónicas desapareceu. Por outro lado, Apolónio refere propriedades que indiciam o conhecimento dos focos mas não lhes dá especial relevância. Tal pode indicar que, ou já era matéria conhecida, ou a considerou pouco útil no seu trabalho envolvendo os cones oblíquos, ou as duas circunstâncias;

– a referida propriedade pode ser útil no ensino da geometria descritiva, pois permite complementar os métodos atualmente utilizados para determinar secções em cones retos, permitindo construir as cónicas em projeção da secção no plano da base, conhecidos um foco e os vértices das curvas.

Para a validação das conclusões não se partiu do raciocínio lógico-dedutivo a partir de propriedades conhecidas, nem se utilizou o cálculo através da geometria analítica, ou qualquer outra forma de demonstração matemática, antes, em coerência com todos os procedimentos nesta tese, se procurou obter os resultados de forma gráfica.

Foram utilizados programas informáticos de geometria dinâmica plana, pois estes permitem variar a posição dos dados para confirmar se as propriedades se mantêm. Primeiro foi utilizado o Geogebra 4.4 ©, por ser programa informático livre e ter suporte e apoio técnico de uma equipa portuguesa com disponibilidade para a resolução de problemas e apoio ao ensino, pelo que tem sido adotado como um dos programas para a construção das figuras deste trabalho, tendo depois os procedimentos sido replicados no Cinderella 2 ©, programa de geometria plana validado cientificamente, tendo os resultados obtidos sido idênticos.

A referida propriedade foi testada relativamente às secções elíptica, parabólica e hiperbólica, variando de forma independente o raio da base do cone, a sua altura e o ângulo



do plano de secção por forma a comprovar a posição do foco da secção em projeção horizontal.

2.8. DO CONE AO DUPLO CONE E À SUPERFÍCIE CÓNICA

A descoberta do segundo ramo da hipérbole por Apolónio de Pérgamo e, conseqüentemente do duplo cone, ou seja a existência da necessidade de, não apenas traçar as geratrizes como segmentos de reta unindo os pontos da base ao vértice, mas antes considerar antes as retas que contêm os segmentos prolongando-as do vértices para o lado oposto à base do cone, contribui para a vantagem de não se utilizar apenas a superfície curva do cone mas, antes tratar de toda a **superfície cónica**, ou seja, tendo uma circunferência que designamos por **diretriz** e um ponto que designamos por **vértice**, não pertencente ao plano da diretriz, se, por retas, designadas **geratrizes**, unirmos o vértice a todos os pontos da diretriz, a superfície definida por estas geratrizes é uma superfície cónica. Deve ter-se em conta que os gregos designavam por retas o conjunto de pontos no mesmo alinhamento entre dois pontos, ou seja, o segmento, podendo, sempre que necessário para determinar a intersecção com outra linha, prolongar esse segmento para cada lado deste ou até para os dois lados.

2.8.1. SUPERFÍCIES CÓNICAS OBLÍQUAS

O início do estudo dos cones oblíquos também é de Apolónio de Pérgamo que desenvolveu um sistema coerente e extremamente detalhado de regras e processos aplicáveis tanto a cones retos como a cones oblíquos.

Esta questão, a das secções cónicas em superfícies cónicas oblíquas, não obstante poder ser hoje um dado adquirido, não se encontra na literatura científica desde o final do século XIX pois só são referidas as secções em cones retos, tal como se ignorássemos os cones oblíquos e suas aplicações, tendo, porventura, a ver com um tratamento analítico das cónicas baseado nos focos e diretrizes, ou seja, propriedades de pontos e retas relacionados com os eixos, e excluíssemos a definição das cónicas por diâmetros conjugados, porventura mais difíceis de utilizar analiticamente.

Procede-se de seguida ao alargamento do estudo às superfícies cónicas oblíquas com vista a comprovar a validade das propriedades anteriormente descritas. Procurou-se, para este fim, utilizar superfícies cónicas e planos de secção que representassem o caso geral para cada uma das situações. Tal foi tido em conta na definição da superfície cónica e na posição relativamente ao plano de secção.

2.8.1.1. SUPERFÍCIES CÓNICAS OBLÍQUAS DE DIRETRIZ ELÍPTICA

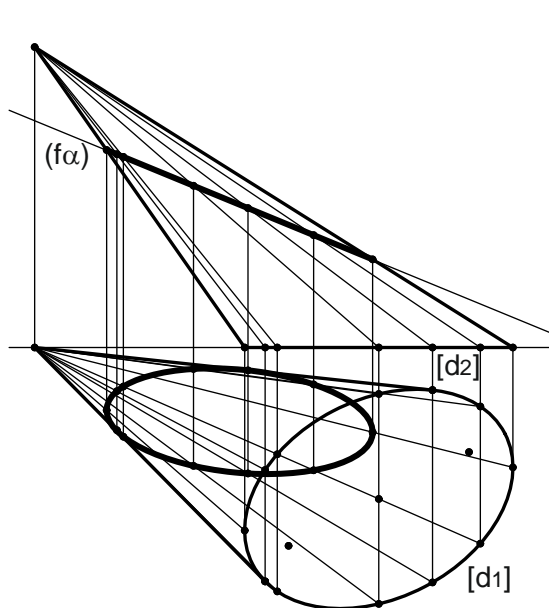


Fig. 2.37 – Diretriz elipse e Secção elipse

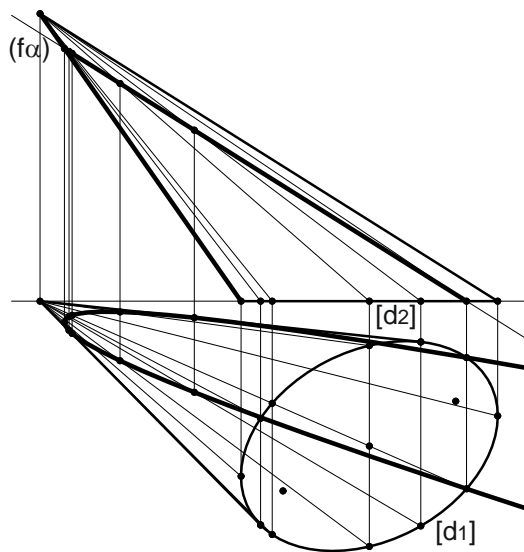


Fig. 2.38 – Diretriz elipse e Secção parábola

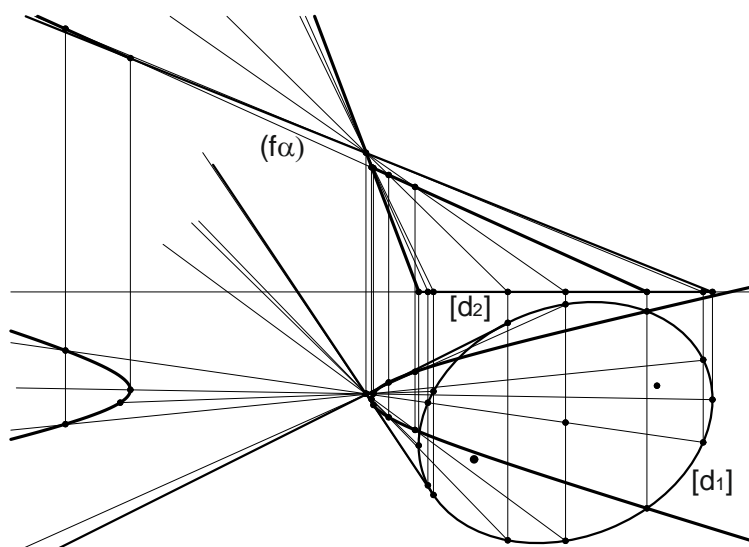


Fig. 2.39 – Diretriz elipse e Secção Hipérbole

Sendo utilizadas superfícies cónicas de diretriz elíptica verifica-se, como é sabido, que se podem obter como secções a elipse, a parábola ou a hipérbole consoante o plano de secção é oblíquo a todas as geratrizes, paralelo a uma geratriz ou paralelo a duas geratrizes.



2.8.1.2. SUPERFÍCIES CÓNICAS OBLÍQUAS DE DIRETRIZ PARABÓLICA

Com superfícies cónicas de diretriz parabólica utilizou-se novamente, para cada caso, um plano de secção oblíquo a todas as geratrizes, um plano paralelo a uma geratriz e um plano paralelo a duas geratrizes.

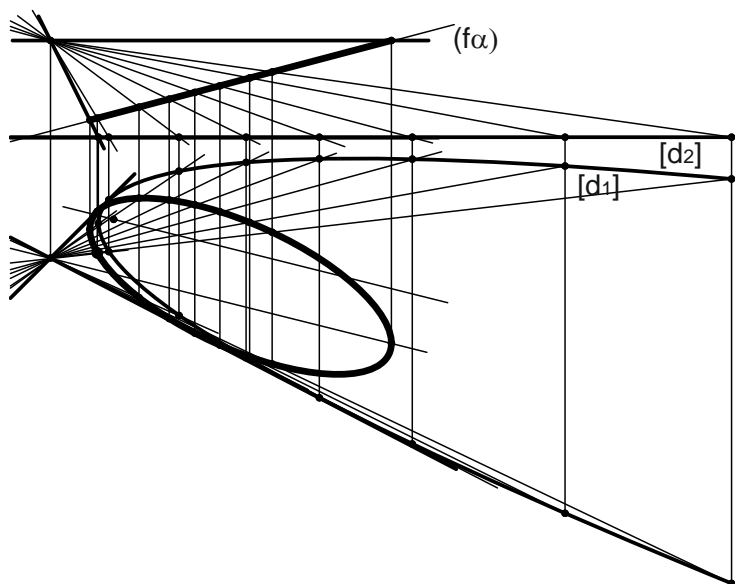


Fig. 2.40 – Diretriz parábola e secção elipse

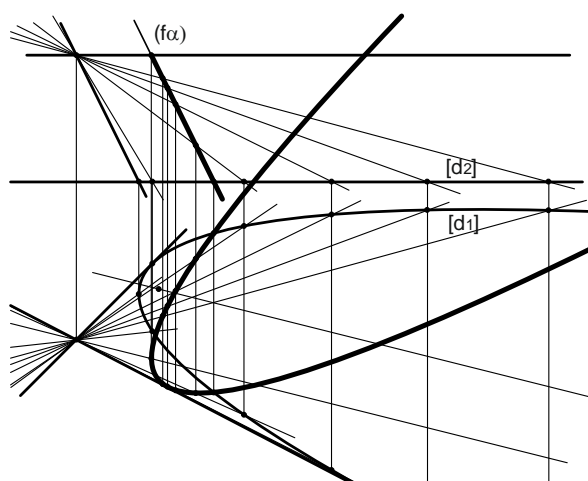


Fig. 2.41 – Diretriz parábola e secção parábola

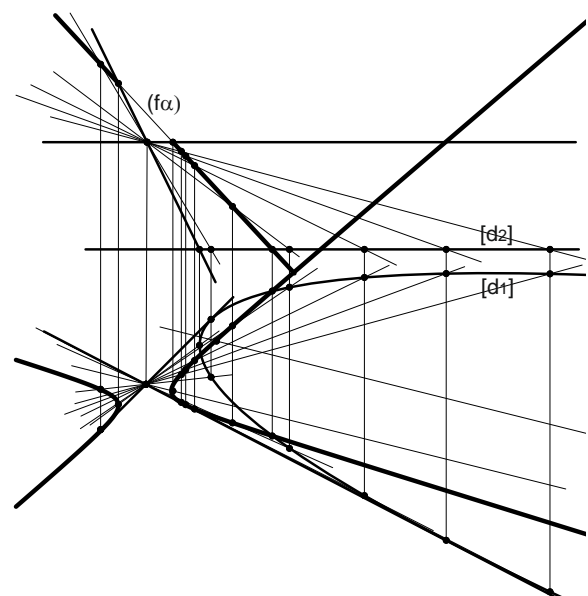


Fig. 2.42 – Diretriz parábola e secção hipérbole

No caso da diretriz parabólica e secção elíptica, e logo, o plano da secção sendo oblíquo a todas as geratrizes, dá um resultado aparentemente paradoxal pois sendo a parábola normalmente identificada como uma curva aberta, em que os seus pontos se vão afastando do eixo à medida que nos afastamos do vértice da curva, e a superfície cónica resultante seria igualmente aberta, obtém-se no entanto uma elipse, uma curva fechada. Tal aparente paradoxo resulta de que a parábola efetivamente é uma curva fechada no infinito e a superfície é igualmente fechada por uma geratriz que se dirige para o ponto de fecho da parábola, no infinito, ou seja, é a reta que passa no vértice e é paralela ao eixo da parábola.

2.8.1.3. SUPERFÍCIES CÓNICAS DE DIRETRIZ HIPERBÓLICA

No caso das superfícies cónicas de diretriz hiperbólica, repetindo o procedimento anteriormente descrito, utilizou-se para cada caso um plano de secção oblíquo a todas as geratrizes, um plano paralelo a uma geratriz e um plano paralelo a duas geratrizes. No primeiro caso verificou-se o mesmo aparente paradoxo, já referido no caso da diretriz parabólica, de uma superfície aparentemente aberta para o infinito admitir secções planas em curva fechada, a elipse.

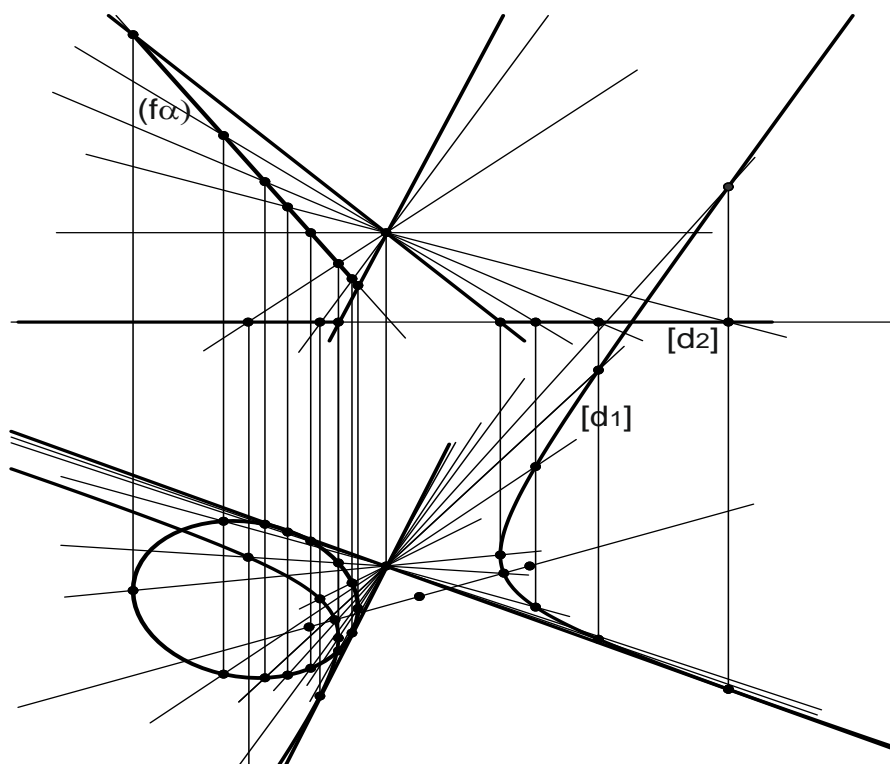


Fig. 2.43 – Diretriz hipérbole e secção elipse

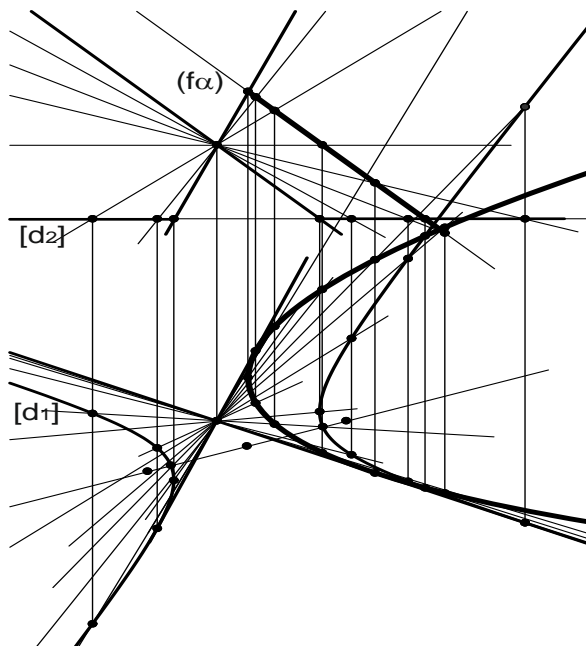


Fig. 2.44 – Diretriz hipérbole e secção parábola

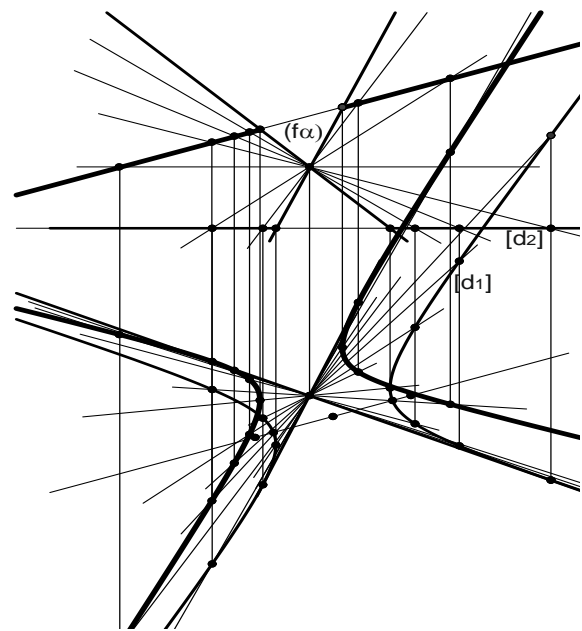


Fig. 2.45 – Diretriz hipérbole e secção hipérbole

Em todos os casos e independentemente de qualquer que seja a curva cónica que utilizamos como diretriz é possível obter como secções qualquer das curvas cónicas, sendo constante o princípio de que, se o plano de secção não é paralelo a nenhuma geratriz, a secção é elíptica, se o plano é paralelo a uma geratriz, a secção é parabólica, e se o plano é paralelo a duas geratrizes, a secção é hiperbólica. Tal é aparentemente paradoxal, pois estamos habituados a ver a parábola e a hipérbole como curvas abertas, cujos ramos se vão afastando indefinidamente, e, logo, as superfícies cónicas com estas curvas como diretrizes como igualmente abertas, pelo que seria aparentemente impossível uma secção em tais superfícies poder ser elíptica. Tal ilusório paradoxo é facilmente ultrapassável, se considerarmos uma superfície cónica de diretriz circular ou elíptica e cujas secções parabólicas ou hiperbólicas passam a ser consideradas a diretriz da superfície. Então, por reversão lógica, todas estas superfícies são fechadas e a parábola e a hipérbole também são curvas fechadas. Nesse sentido todas as cónicas, incluindo as degeneradas, são uma e a mesma coisa, ou, dito de outro modo, são casos particulares de uma mesma entidade.

Note-se que, como ficou demonstrado, têm que ser tidas em conta geratrizes paralelas ao plano da diretriz logo sem qualquer ponto comum com esta, em geometria euclidiana, o que contraria a definição de geratriz. Mas estas geratrizes existem e têm que

ser tidas em conta, logo o ponto de intersecção com o plano da diretriz é no infinito. Por certo, que está subentendido, que estamos a quebrar o quinto postulado de Euclides, o axioma das paralelas, que enuncia que duas paralelas não têm qualquer ponto comum, e, portanto, estamos na fronteira da geometria não-euclidiana. Mas, para efeitos práticos em geometria euclidiana, tal também pode ser útil, pois permite fazer validar qualquer demonstração para uma superfície cónica oblíqua ou reta com diretriz em qualquer curva cónica, numa superfície de diretriz elíptica.

Dito de outra forma, todas as superfícies definidas anteriormente são superfícies cónicas de diretriz cónica que podemos, por simplicidade de compreensão, considerar de diretriz elíptica.

2.8.2. OBTENÇÃO DE UMA SECÇÃO CIRCULAR EM QUALQUER SUPERFÍCIE CÓNICA

Tendo confirmado que todas as superfícies cónicas que têm como diretriz uma curva cónica qualquer podem ser estudadas como superfícies de diretriz elíptica, procederemos em seguida à comprovação de que todas as superfícies cónicas de diretriz elíptica admitem secções circulares. Vamos utilizar para o fim descrito acima superfícies cónicas de diretriz circular existente num plano não paralelo ao plano horizontal de projeção e depois intersecar a superfície gerada com o plano horizontal de projeção, obtendo elipses em diferentes condições.

Na Fig. 2.45 o cone é reto, com eixo perpendicular ao plano da circunferência, verificando-se que o eixo coincide, em projeção horizontal, com o eixo maior da elipse. Cumulativamente, e sendo frontal o eixo maior da elipse, o eixo do cone é, nas duas projeções, a bissetriz das geratrizes do contorno aparente. As Fig. 2.46, 2.47 e 2.48 demonstram que, sendo o cone oblíquo, com eixo oblíquo ao plano da circunferência portanto, o eixo pode coincidir, em projeção no plano da elipse, com o eixo maior, com o eixo menor, ou não coincidir com qualquer diâmetro, antes coincidir com uma corda da elipse. Recorde-se que uma **corda** de uma cónica é o segmento de reta que une dois quaisquer pontos da curva. Um **diâmetro** de uma cónica é qualquer corda que passe no centro.

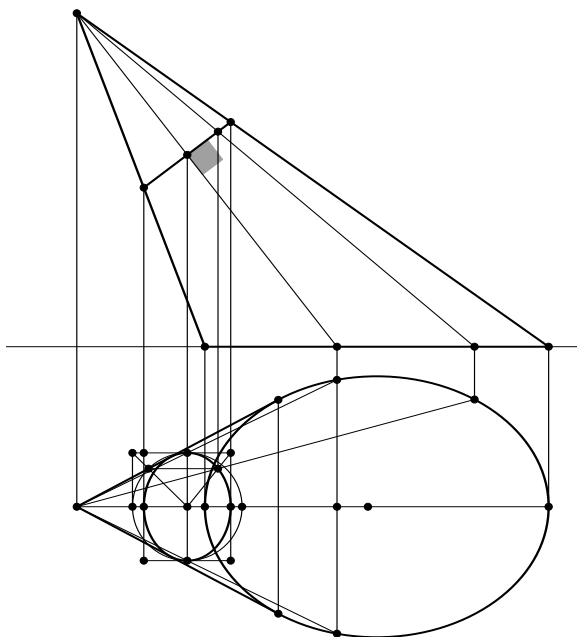


Fig. 2.46 – Cone reto de eixo coincidente, em projeção no plano da elipse, com o eixo maior da elipse

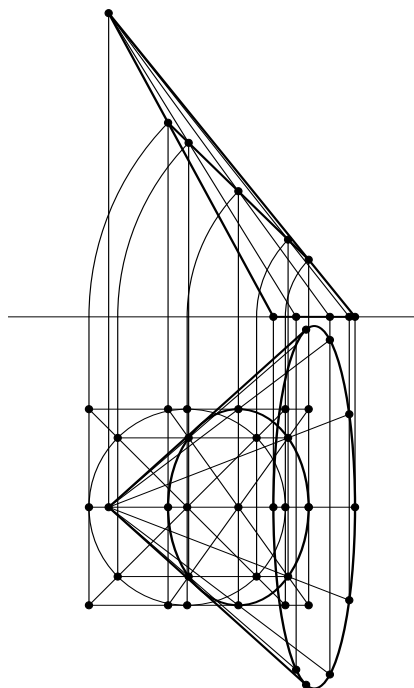


Fig. 2.47 – Cone oblo de eixo coincidente em projeo com o eixo menor da elipse

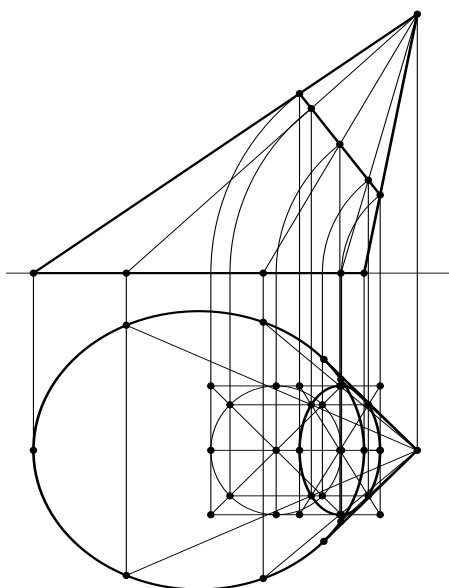


Fig. 2.48 – Cone oblo e eixo coincidente em projeo com o eixo maior da elipse

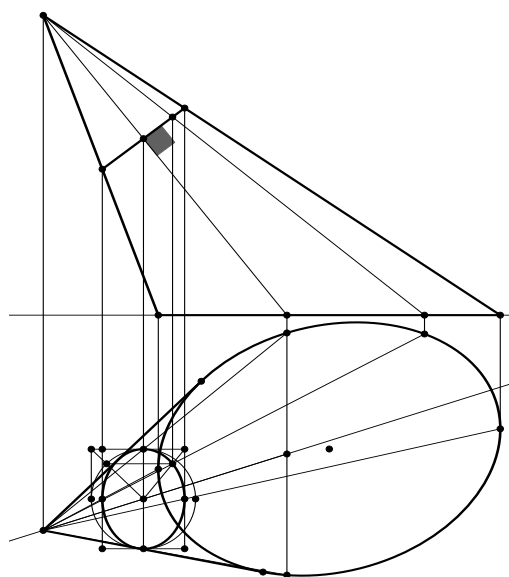


Fig. 2.49 – Cone oblo e eixo coincidente em projeo com uma corda da elipse

Se invertermos as condições dadas, ou seja, se em qualquer dos casos considerarmos a elipse do plano horizontal como diretriz então podemos concluir que, em qualquer um dos casos, existe sempre a possibilidade de encontrar secções circulares nestas superfícies cónicas.

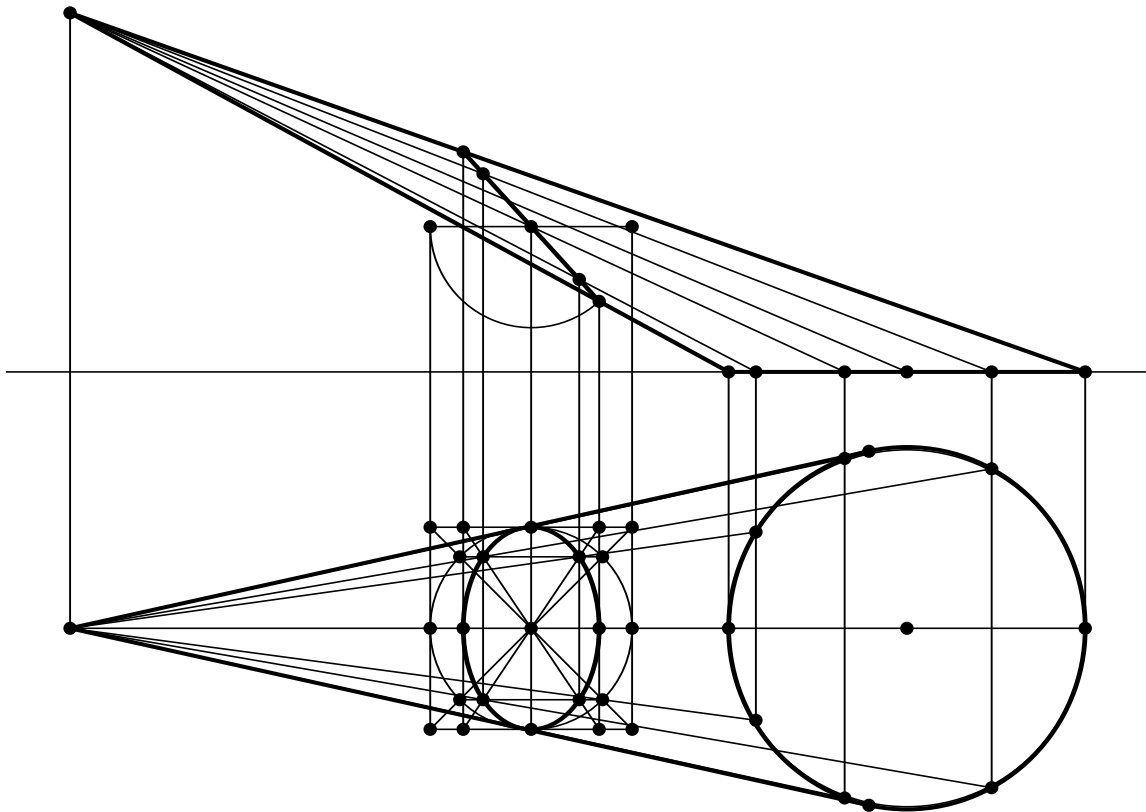


Fig. 2.50 – Superfície cónica de diretriz circular e secção circular de direção antiparalela

Pela Fig. 2.50 comprova-se que a secção pode igualmente ser uma circunferência. Para além disso, a diretriz é uma circunferência em plano não paralelo ao da secção mas, mesmo assim, as duas são circunferências. O mesmo é válido para as restantes curvas cónicas, ou seja, existem na mesma superfície curvas semelhantes com duas direções diferentes. É sabido que todas as secções numa superfície paralelas à diretriz são figuras semelhantes à diretriz. Designam-se portanto por **secções semelhantes ou cíclicas**. Pode assim considerar-se que é possível traçar uma secção paralela ao plano da diretriz que produza na superfície uma secção circular de raio igual à da circunferência em plano de topo. Estas duas **secções** iguais e com direção diferente designam-se como **anti cíclicas**



ou **antiparalelas**, de acordo com IZQUIERDO ASENSI (1985, 331-333). As secções antiparalelas são utilizadas muitas vezes, por poderem ser a resultante da intersecção de duas superfícies em penetração mútua ou máxima.

Em LOBJOIS (2002, 134) encontramos, do ponto de vista da aplicação prática no traçado de concordâncias de tubagens de secção circular, o processo para determinar secções antiparalelas circulares em cones.

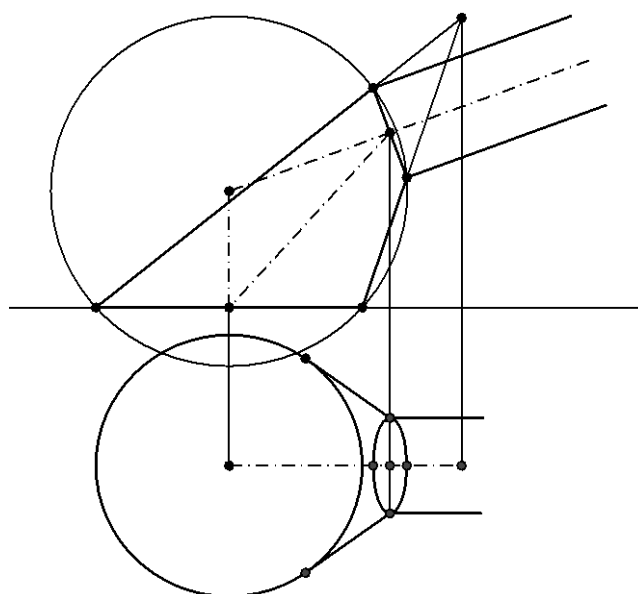


Fig. 2.51 – Aplicação de secção antiparalela

Como se pode comprovar pelo grafismo a secção antiparalela ocorre quando, no plano perpendicular aos planos da base do cone e da secção, traçarmos perpendiculares aos planos nos centros respetivos, e com centro na intersecção das perpendiculares, se pode traçar uma circunferência que passa nos pontos de intersecção do plano auxiliar com a base e nos pontos de intersecção do plano auxiliar com a secção. De notar, ainda, que uma regra teórica se encontre num manual prático, o que implica a vantagem de se partir da teoria para a prática mas, também da prática tirar consequências teóricas.

Em conclusão, se agora considerarmos como diretrizes as elipses dos exemplos anteriores pode deduzir-se, portanto, que todas as superfícies cónicas de diretriz elíptica admitem secções circulares, ou seja, que **todas as superfícies cónicas, retas ou**

oblíquas, de diretriz elíptica, parabólica ou hiperbólica, podem ser consideradas superfícies de diretriz circular, e que os cones contidos nessas superfícies sejam retos ou oblíquos admitem bases circulares.

Se a diretriz for um polígono, sendo este regular, inscrito portanto numa circunferência, a superfície gerada, piramidal ou prismática, pode ser entendida como caso particular da superfície cónica, ou, caso não existir vértice no espaço euclidiano, da superfície cilíndrica, e os mesmos procedimentos das cónicas serão válidos com as necessárias adaptações às condições concretas. Se a diretriz for um triângulo irregular há uma circunferência que passa nos três vértices pelo que podemos utilizar como auxiliar a superfície que tem esta circunferência como diretriz. Tendo como diretriz um quadrilátero irregular podemos utilizar como auxiliar uma cónica que passe pelos quatro pontos e por um quinto ponto qualquer. Se a diretriz for pentagonal irregular há só uma cónica que passa pelos cinco pontos e podemos utilizar os traçados genéricos dessa superfície cónica. Tendo como diretriz um hexágono irregular, se considerarmos que cinco dos vértices definem uma cónica, o sexto pode ou não pertencer à mesma cónica. Se o sexto ponto não pertencer à cónica, e se excluirmos qualquer um dos outros pontos, podemos definir uma nova cónica, ficando com duas, e pela exclusão de cada um dos outros pontos, podemos obter diferentes cónicas, sendo suficiente, do ponto de vista prático, utilizar duas. E assim sucessivamente para polígonos com maior número de lados. Daqui conclui-se ser esta uma das abordagens possíveis no estudo dos problemas relativos aos feixes de cónicas.

Podemos concluir que uma secção plana cónica, uma **curva cónica**, ou, uma **cónica**, como usualmente é designada, é qualquer secção que se estabeleça numa superfície cónica de diretriz circular, com um vértice próprio ou impróprio, ou seja, no infinito, sendo, neste caso, uma superfície cilíndrica. Tal permite, em geometria euclidiana, que se considere que a diretriz da superfície seja a própria secção, pelo que esta pode ser igualmente uma elipse, parábola ou hipérbole, ou seja, qualquer das cónicas não degeneradas.

Se tivermos em atenção a referência feita aos polígonos, uma superfície piramidal também pode ser considerada uma superfície cónica. Por outro lado, se o vértice se situa no infinito as geratrizes tornam-se paralelas e as superfícies cilíndricas e prismáticas serão igualmente superfícies cónicas. Ainda, entendendo-se que através de transformações geométricas qualquer linha plana, poligonal ou curva, aberta ou fechada, pode ser convertida numa curva cónica então genericamente podemos considerar que uma superfície cónica é a gerada por retas que a partir de um ponto fixo passam nos pontos de uma diretriz plana qualquer não complanar com o vértice.



2.9. APOLÓNIO DE PERGA E O ESTUDO DOS CONES RETOS E OBLÍQUOS

A atualidade do trabalho de Apolónio verifica-se em inúmeros aspetos, desde logo, ao definir um sistema de análise coerente e válido tanto para os cones retos e oblíquos de diretriz circular e que pudemos confirmar como um método exaustivo para todas as cónicas.

Por outro lado também ao ter descoberto o cone duplo e o segundo ramo da hipérbole, o que permitiu o desenvolvimento do conceito da superfície curva do cone, sendo ele um sólido, e o aparecimento do conceito de superfície cónica como algo ilimitado, e, sobretudo, pelos seus contributos para os fundamentos posteriores da Geometria Projetiva.

Para um melhor entendimento do método de Apolónio apresentamo-lo segundo o método da dupla projeção ortogonal, para podermos utilizar processos meramente gráficos. A fundamentação e as demonstrações de Apolónio foram executadas com o conhecimento e procedimentos geométricos da época, e com origem, sobretudo, nos processos de quadratura, desenvolvidos com conhecimentos relativos às proporções e que hoje fundamentam a geometria projetiva.

Tal como já referimos anteriormente, as designações **elipse**, **parábola** e **hipérbole** aos diferentes tipos de curvas cónicas também foram atribuídas por Apolónio. O método de Apolónio tem a vantagem de ser generalizável a cones retos e oblíquos, permitindo igualmente a determinação de qualquer secção cónica, seja elipse, parábola ou hipérbole, e não caso a caso, como no método de Arquimedes.

Este método encontra-se descrito na literatura em interpretações a partir do original, adaptando a linguagem da época para a linguagem da geometria plana no momento da tradução e, mais recentemente, para a geometria analítica, ou genericamente como em ESTRADA (2000, 322-328), não se tendo encontrado a explanação em linguagem atual da geometria descritiva.

Assim sendo, vamos proceder à descrição do método de Apolónio utilizando a Geometria Descritiva.

Considerando um cone oblíquo, caso geral, começa-se pela definição da intersecção do plano de secção com o plano da base. Depois define-se, no plano da base do cone, uma reta perpendicular a essa intersecção e que passa no centro da base do cone. Esta reta pertence a um plano que passa no vértice do cone e é perpendicular ao plano de secção e que é designado por plano axial. Este determina no cone uma secção triangular designada por triângulo axial. Por outro lado a reta de intersecção do plano de secção com o plano axial intersesta o triângulo definindo, como veremos, o tipo de secção. O segmento da reta interior ao triângulo é um diâmetro da secção cónica.

Por outro lado, se por um ponto deste diâmetro fizermos passar um plano auxiliar paralelo à base do cone, este plano determina no cone uma secção circular, com centro na intersecção do plano auxiliar com o eixo do cone e tangente ao seu contorno aparente. Se pelo mesmo ponto do diâmetro fizermos passar uma reta, do plano de secção, paralela à intersecção deste com o plano da base, esta interseca a circunferência definindo os extremos de uma corda da secção cónica, com direção conjugada do diâmetro anteriormente obtido. O diâmetro e a corda definem a secção, o que permite determinar, outros pontos da secção e o diâmetro conjugado do anterior e paralelo à corda.

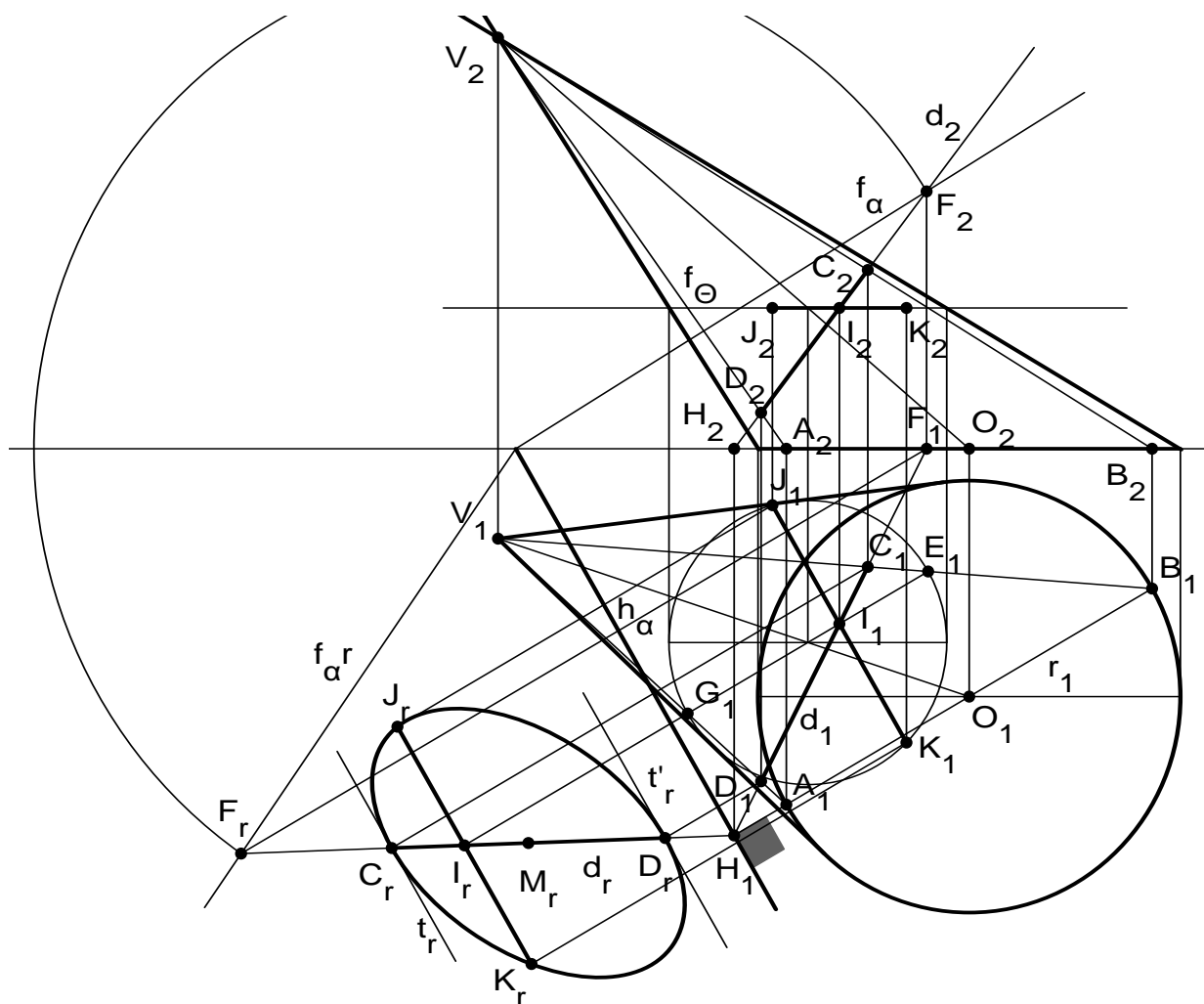


Fig. 2.52 – O método de Apolónio aplicável a cones retos e oblíquos



Na prática, faz-se um plano de secção qualquer α que não passe no vértice. Se o plano α for paralelo ao plano da base a secção é uma circunferência cujo centro é determinável diretamente através da intersecção do plano de secção com o eixo do cone.

Caso o plano de secção não seja paralelo à base começa-se por representar a base circular do cone com centro O e o vértice V . Traça-se depois uma reta que representa a intersecção do plano de secção com o plano da base e que, em dupla projeção ortogonal designamos por $h\alpha$. Pelo centro da circunferência da base traça-se a reta r perpendicular a $h\alpha$. Esta reta intersesta a base segundo o diâmetro AB . O triângulo $[VAB]$ designa-se por **triângulo axial**.

O plano que contém $[VAB]$ é o **plano axial** e que, em verdadeira grandeza, nos vai fornecer dimensões fundamentais para a construção da secção cónica. H é a intersecção de $h\alpha$ com r . Escolhemos em VA ou VB um ponto C pertencente à secção. CH definem a reta d de intersecção do plano de secção α com o plano axial. A reta d intersesta a outra geratriz do plano axial em D . CD , ao pertencer simultaneamente ao plano de secção e ao plano axial, é um diâmetro da secção.

Faz-se passar seguidamente um plano auxiliar Θ qualquer paralelo ao plano da base intersetando o cone segundo uma circunferência de centro na intersecção do plano com VO . O diâmetro EG é definido na intersecção da circunferência com o triângulo axial pelo que EG é paralelo a AB . Por I fazemos passar a corda JK perpendicular a EG . Esta corda, por passar em I e ser paralela a $h\alpha$, é uma corda da secção cónica, com direção conjugada com o diâmetro CD . Rebatendo AB e EG sobre o plano da base obtemos os dois segmentos em verdadeira grandeza e que são suficientes para definir a secção.

É evidente que o método permite, por si só, a determinação de outras cordas e até de outro diâmetro da secção. Para tal utilizar-se-ia como auxiliares outros planos paralelos à base e a diferentes distâncias desta. Para obter o diâmetro conjugado de CD podia determinar-se o ponto médio de CD e o plano auxiliar passaria por esse ponto.

Do procedimento exposto podemos concluir que **as cordas paralelas a um diâmetro são bisetadas pelo diâmetro conjugado**.

Por outro lado, **as cordas numa cónica são paralelas a um diâmetro e às tangentes à cónica nos extremos do diâmetro conjugado daquele a que são paralelas**.

Vamos seguidamente, por procedimento gráfico em geometria plana, demonstrar como se determina o diâmetro conjugado de outro dado, conhecida uma corda que sabemos ser paralela ao diâmetro conjugado.

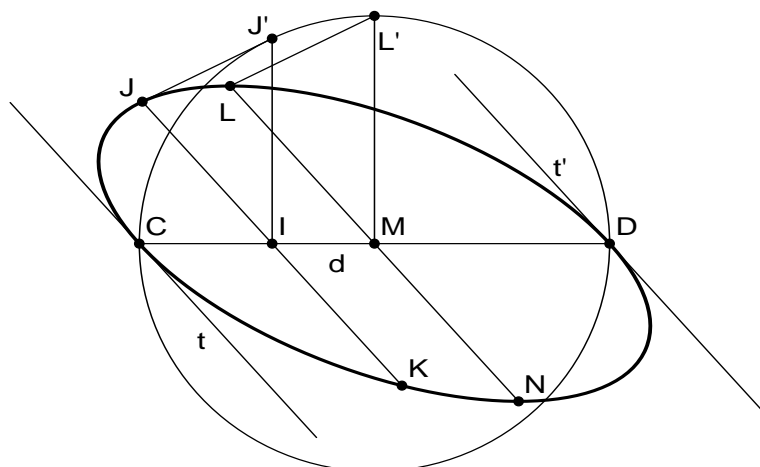


Fig. 2.53 – Dado um diâmetro CD da elipse e uma corda JK , de direção conjugada, determinar o diâmetro conjugado LN

Determinamos o ponto médio M do diâmetro CD e, com centro nele, traçamos a circunferência de igual diâmetro. Pelo ponto I , de intersecção da corda dada com o diâmetro, traçamos uma perpendicular ao diâmetro até o intersecar no ponto J' . Unindo JJ' construímos o triângulo que define a relação entre um ponto da elipse e um ponto da circunferência. Para todos os outros pontos os triângulos respetivos serão semelhantes e de lados paralelos. Para obter o diâmetro conjugado por M traçamos uma paralela à corda JK e a perpendicular ML' ao diâmetro e por L' uma paralela a JJ' . A paralela à corda e a paralela a JJ' intersecam-se em L . O outro extremo do diâmetro é N que é simétrico de L relativamente a M . Assim, se quisermos obter mais pontos da curva podemos marcar novas cordas e proceder da mesma forma. De notar que **figuras semelhantes** são duas ou mais figuras com propriedades geométricas iguais mas que variam de tamanho e orientação espacial. Se tiverem a mesma orientação espacial diz-se que são figuras semelhantes e de lados paralelos.

Por outro lado deduz-se igualmente do método de Apolónio que **as tangentes à secção nos extremos de um diâmetro**, neste caso CD , **são paralelas à direção das cordas conjugadas**. De facto, ao serem retas do plano α nos pontos de menor e maior cota são retas horizontais e, logo, paralelas a $h\alpha$. Se não quisermos utilizar conhecimentos da geometria descritiva para realizar a demonstração, é suficiente traçar em A e B tangentes à



base do cone que serão paralelas a $h\alpha$. Estas tangentes e VA e VB definirão dois planos de tangência ao cone. As intersecções destes planos com o plano de secção α são as tangentes nos pontos C e D . Como as retas de intersecção de α e dos dois planos de tangência com o plano da base do cone são paralelas, as intersecções dos três planos entre si são paralelas e paralelas a $h\alpha$. Este processo pode, igualmente, ser entendido como a aplicação aos cones oblíquos de um dos métodos mais utilizados para a determinação de secções em cones de revolução, o dos planos auxiliares paralelos à base.

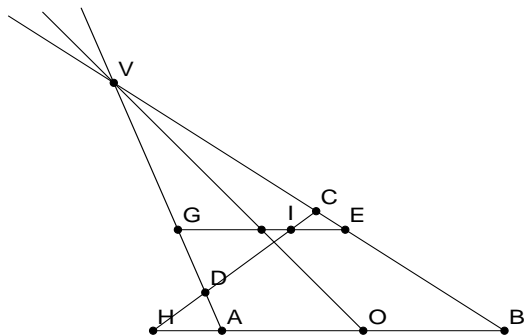


Fig. 2.54 – Triângulo axial com *sintoma* de elipse

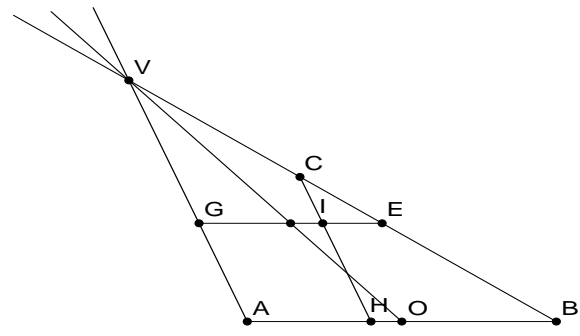


Fig. 2.55 – Triângulo axial com *sintoma* de parábola

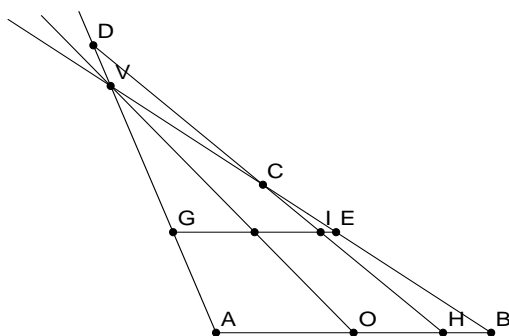


Fig. 2.56 – Triângulo axial com *sintoma* de hipérbole

É de salientar que o triângulo axial permite, através do Teorema de Tales de Mileto, estabelecer uma série de relações proporcionais entre diversos elementos. Dado que GE é paralelo a AB podemos estabelecer uma razão de semelhança entre os triângulos $[VGE]$ e $[VAB]$. Assim, GE está para GV como AB está para AV , GE está para EV como AB está para BV , GV está para EV assim como AV está para VB , GE está para AB como VG está para AV . E assim sucessivamente. Tal permite que a partir do conhecimentos das medidas

de três termos da proporção seja determinado o quarto termo. Por outro lado, a reta HC dá-nos indicação, em grego **sintoma**, do tipo de curva cónica em presença. Considerando que se definiu que C era um ponto da secção em VA ou VB , se HC intersestar a outra geratriz do cone em D na mesma folha deste a secção é uma elipse, se HC for paralelo a uma das geratrizes VA ou VB a secção é uma parábola, se HC intersestar a outra geratriz na outra folha do cone a secção é uma hipérbole.

Pelas propriedades antecedentes pode-se concluir que **diâmetros conjugados de cónicas centrais**, ou seja, elipses e hipérbolés, são aqueles em que as tangentes à cónica nos extremos de um deles são paralelas ao outro diâmetro.

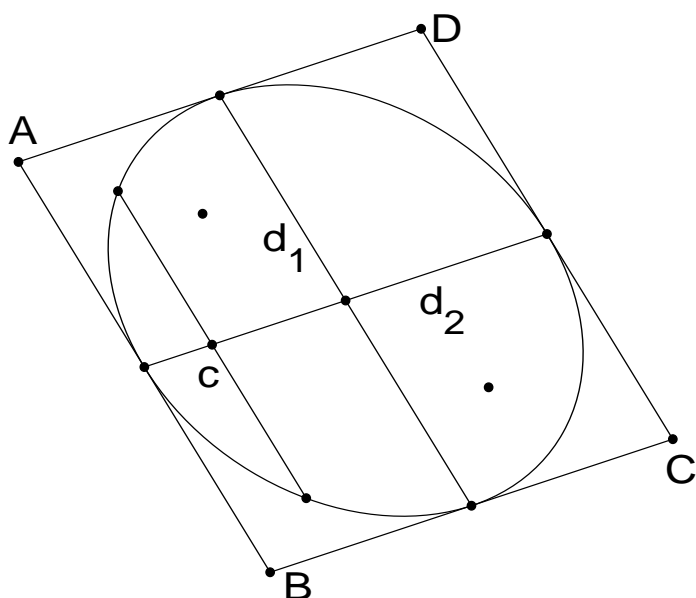


Fig. 2.57 – Diâmetros conjugados na elipse

Então, numa cónica central qualquer conjunto de dois diâmetros conjugados define uma **figura da cónica**, ou seja, o polígono que circunscribe a curva cónica, definido pelas intersecções das tangentes nos extremos dos diâmetros conjugados. No exemplo seguinte, podemos considerar como figura os polígonos $[ABCD]$ e $[OPQR]$. Estes, têm igualmente a propriedade de as suas **áreas serem iguais**, independentemente dos diâmetros conjugados que estão em causa.

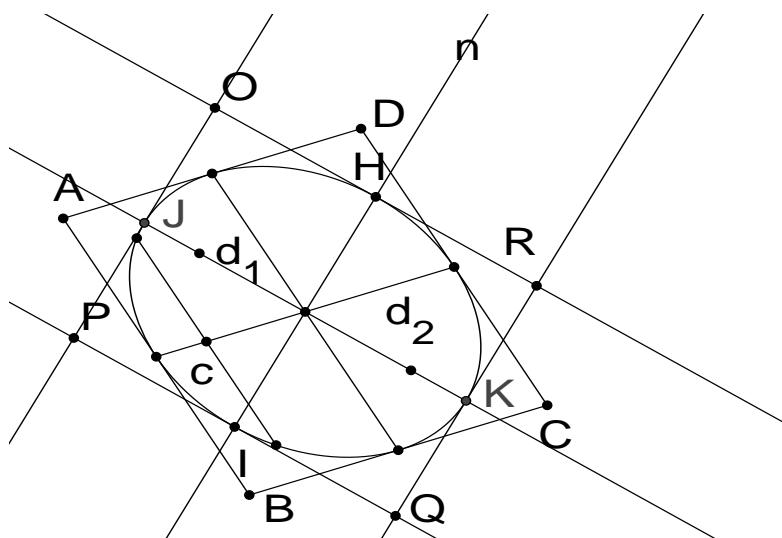


Fig. 2.58 – Duas figuras

Considerando que os eixos maior e menor da elipse são diâmetros conjugados, e designando por a o semieixo maior e b o semieixo menor, então a área da *figura* da elipse é $4ab$. A área da elipse é πab .

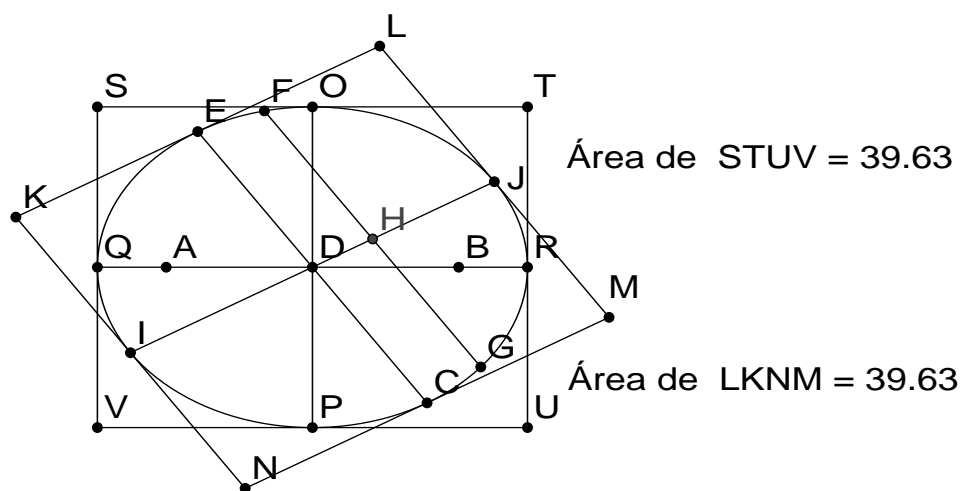


Fig. 2.59 – Áreas iguais das figuras

Por outro lado, segundo Heath em APOLLONIUS (1896, 114-116), encontra-se igualmente não só a identificação da determinação dos focos, como também de uma

propriedade relativas aos focos, embora sem lhes dar particular importância, o que é compreensível tendo em conta que o método de Apolónio se baseia no estudo de cones oblíquos, e nestas condições, os focos não desempenham qualquer função singular, tratando-se quase de uma constatação de algo que alguém já teria antes demonstrado. A referida propriedade é a que apresentamos em seguida.

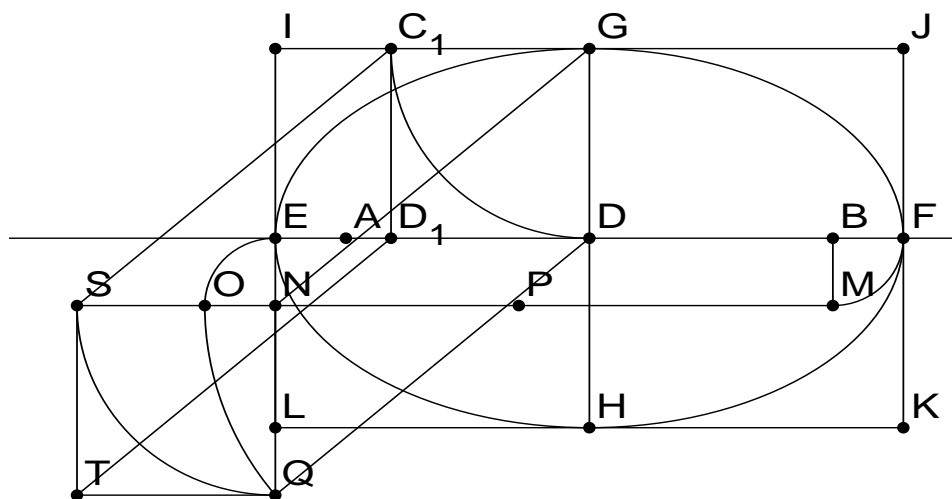


Fig. 2.60 – Focos em Apolónio

Adaptando para linguagem atual, os **focos** aparecem indicados em Apolónio, como **pontos do eixo maior da elipse cujo produto das distâncias de um deles aos extremos do eixo maior é igual ao quadrado do semieixo menor.**

Traduzimos assim graficamente o produto referido, rebatendo o segmento BF para BM , constituindo o retângulo $[ENMB]$ cuja área depois, convertendo pelo processo de quadratura utilizado na geometria grega da antiguidade, ou seja, rebatendo EN para NO , determinando P , ponto médio de OM , e, com centro em P , traçando o arco OQ até interseção o prolongamento de EN . NQ é o lado do quadrado $[NQST]$ cuja área é igual à do retângulo. Depois por translação deslocámos o quadrado para $[GDD_1C_1]$ demonstrando a definição de Apolónio.

Parece também estar relativamente evidente a confirmação de que não só na expressão verbal, tal como se pode comprovar pela utilização profusa de expressões do tipo *o produto do segmento a pelo segmento b é igual ao produto do segmento c pelo segmento*



d , como no próprio processo gráfico, como viemos a demonstrar, os processos demonstrativos de Apolónio utilizam implicitamente, ou muitas vezes mesmo explicitamente, o processo de quadratura, embora tal não apareça explícito no texto.

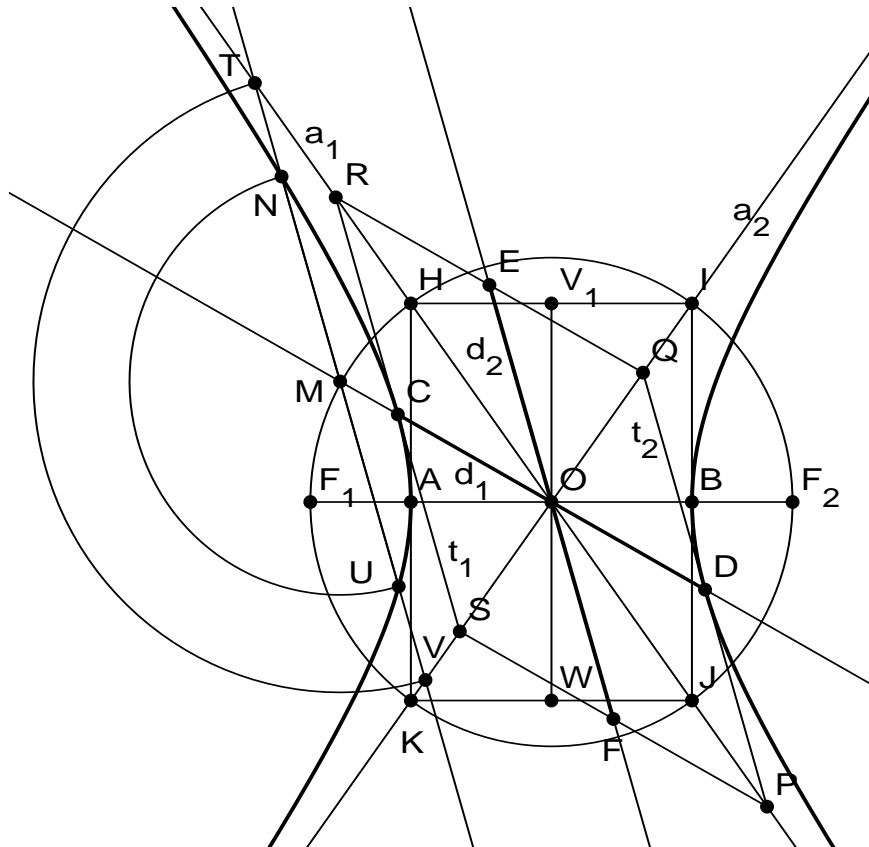


Fig. 2.61 – Diâmetros conjugados na hipérbole

Da análise da determinação de diâmetros conjugados, e da sua utilização relativamente à elipse, podemos igualmente concluir algumas consequências relativas à hipérbole, com ENRIQUES (1930, 262), salientando que, na hipérbole, em cada par de diâmetros conjugados há um diâmetro real e um idealizado, situado nos quadrantes definidos pelas assíntotas onde não existem pontos da hipérbole.

As tangentes nos extremos de diâmetros conjugados da elipse definem a *figura* que, nesse caso, é um paralelogramo. Na hipérbole da Fig. 2.61, a um diâmetro d_1 qualquer, por exemplo a passar por CD , corresponde um diâmetro conjugado que é uma reta d_2 . Todas as cordas paralelas a d_2 , como por exemplo NU , são divididas ao meio pelo diâmetro d_1 . Também a intersecção da reta NU com as assíntotas verifica a mesma propriedade, ou

seja NT é igual a UV . Então, **o segmento de reta que resulta da intersecção de uma reta com as assíntotas da hipérbole e a corda da hipérbole contida pelo segmento são bisetados por um diâmetro conjugado da corda, pelo que os segmentos da reta entre os pontos da hipérbole e as assíntota são iguais.** Por outro lado, tendo em conta que as tangentes t_1 e t_2 , em C e D , intersectam as assíntotas em $[RSPQ]$, pelo que definem um paralelogramo que se pode entender como a *figura* da hipérbole. Ora este paralelogramo é igualmente *figura* de uma elipse de diâmetros conjugados d_1 e d_2 . Por outro lado, **a área do paralelogramo é igual à do retângulo $[HIJK]$.**

Como se mostra na Fig. 2.62, também na parábola uma corda é bisetada pelo diâmetro conjugado. **Na parábola todos os diâmetros têm a mesma direção**, a qual é paralela ao eixo. **A tangente no ponto D de intersecção do diâmetro com a parábola é paralela à corda.**

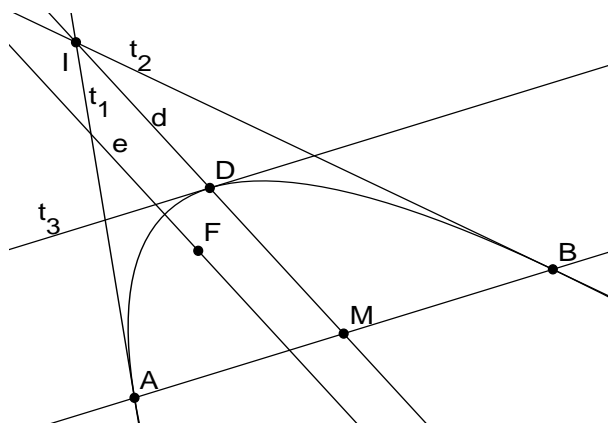


Fig. 2.62 – Corda e diâmetro conjugado na parábola

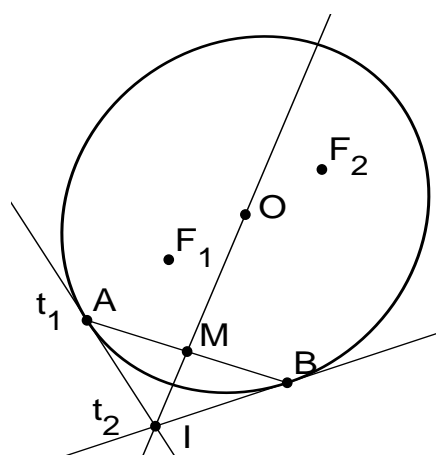


Fig. 2.63 – Tangentes nos extremos de uma corda de qualquer cónica

Por outro lado, como se pode concluir através das Fig. 2.62 e Fig. 2.63, em todas as cónicas **as tangentes t_1 e t_2 no extremo de uma corda intersectam-se num ponto I da reta que contém o diâmetro conjugado.** No caso da **parábola** o ponto D é o ponto médio de IM e a tangente t_3 em D é paralela à corda AB .

Como a parábola passa em P_2 , o ponto médio do segmento MI , é designada como **discriminante projetivo** de todas as cónicas que têm AB como corda. Se a curva passa entre M e P_2 ou para além de M na mesma reta é uma elipse e se passa entre P_2 e I é uma hipérbole.

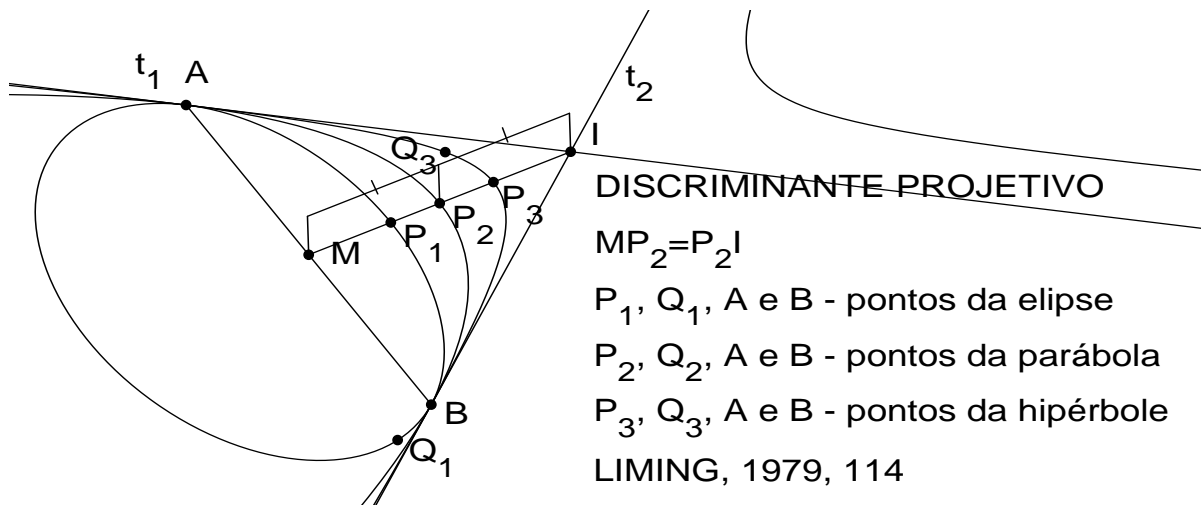


Fig. 2.64 – Discriminante projetivo das cónicas

2.10. IDENTIFICAÇÃO DO TIPO DE CURVA CÓNICA

Embora não conste na revisão de literatura efetuada, tendo em conta as propriedades anteriormente descritas, concluímos que é possível proceder à identificação do tipo de curva cónica, conhecida graficamente uma parte da curva e sabendo que se trata de uma curva cónica.

Tal conclusão tem diversas aplicações quando se trabalha com imagens, designadamente nos traçados em que se conhece uma parte da curva ou em restituição perspética. O método tem ainda a vantagem de ser generalizável a qualquer dos diferentes tipos de cónicas não degeneradas. Traça-se dois pares de cordas paralelos. Une-se por uma reta os pontos M e N , pontos médios de um dos pares de cordas, e por outra reta M_1 e N_1 , pontos médios do outro par de cordas. Se as retas forem paralelas, a curva é uma parábola, e as retas definem a direção do eixo. Se as retas se intersectarem interiormente à curvatura da curva esta é uma elipse. Se as retas se intersectarem exteriormente à curvatura da curva é um ramo de hipérbole.

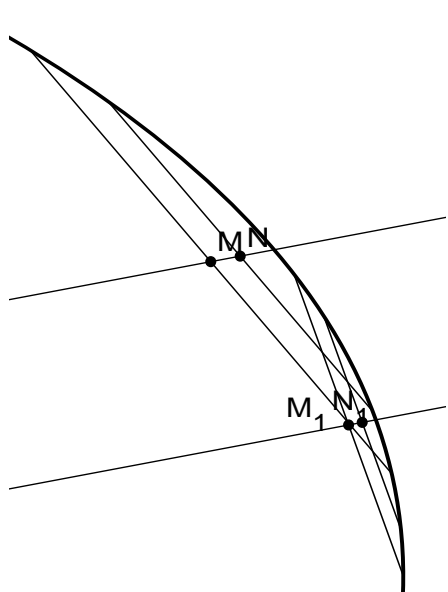


Fig. 2.65 – Parábola

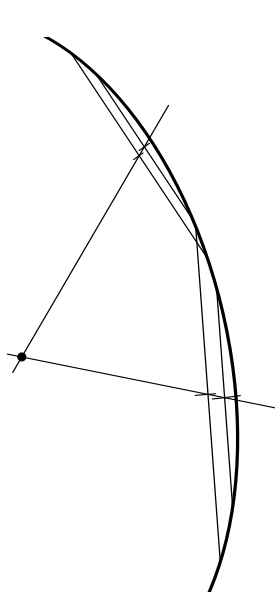


Fig. 2.66 – Elipse

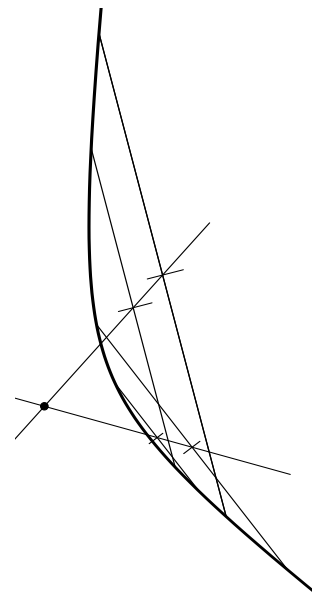


Fig. 2.67 – Hipérbole

O ponto de intersecção das duas retas, quando existe, é o **centro da curva**, e esta é uma das cónicas centrais.

2.11. CIRCUNFERÊNCIA DE MONGE

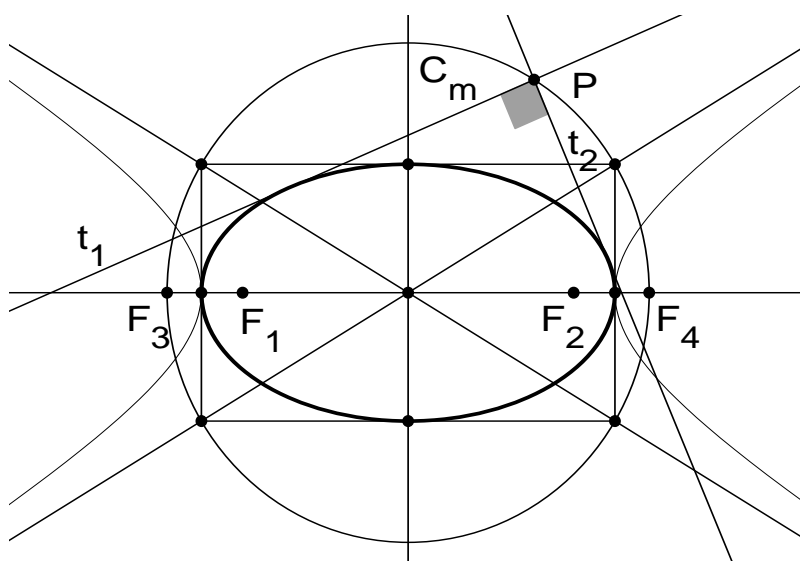


Fig. 2.68 – Elipse e circunferência de Monge



Em LADEGAILLERIE (2003, 452), encontra-se a definição de **circunferência de Monge**, C_m , ou **curva ortóptica**. A designação ortóptica resulta da definição dos pontos a partir dos quais se vê as tangentes a uma curva formarem ângulos retos. Assim a circunferência de Monge é a que, relativamente às cónicas centrais, é o lugar geométrico dos pontos a partir dos quais se pode traçar tangentes à curva cónica, t_1 e t_2 , que são perpendiculares entre si.

No caso da parábola a circunferência é substituída por uma reta, a diretriz.

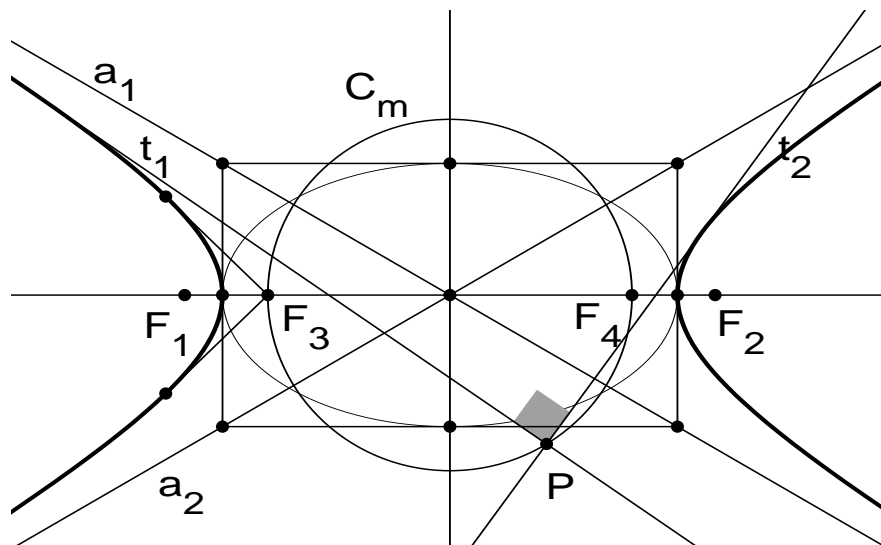


Fig. 2.69 – Hipérbole e circunferência de Monge

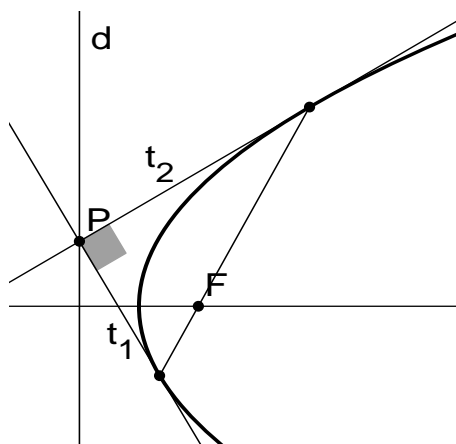


Fig. 2.70 – Parábola e curva ortóptica

A partir das propriedades descritas na literatura fomos analisar as relações de cada uma das curvas cónicas centrais, elipse ou hipérbole, com a outra que tem a mesma figura, ou seja, os mesmos eixos, concluindo que a circunferência de Monge da elipse passa nos focos da hipérbole e que a circunferência de Monge da hipérbole passa nos focos da elipse. Tal permite construir qualquer das curvas referidas a partir da outra que lhe está associada, designadamente através das tangentes envolventes. Se modificarmos sucessivamente a posição do ponto P da circunferência de Monge podemos obter todas as tangentes à curva.

No caso da parábola esta relação dual estabelece-se através do foco com a diretriz pois a corda definida pelos pontos de tangência das tangentes a partir de um ponto da diretriz passa no foco. Por outro lado, como se enunciou anteriormente, se projetarmos um ponto da parábola sobre a diretriz e traçarmos o segmento de união desse ponto ao foco, a sua bissetriz, ou seja, a sua perpendicular ao meio, é a tangente que passa no ponto da parábola.

2.12. PROPORCIONALIDADE ENTRE CORDAS PARALELAS

Encontra-se igualmente na literatura consultada referências diversas a uma propriedade enunciada por Newton aplicável a todas as curvas algébricas, e portanto também às cónicas.

A propriedade enuncia que se, como na figura, traçarmos uma corda da cónica DE e intersecarmos com outras duas cordas paralelas FG e IJ , com intersecção respetivamente em K e H , verifica-se que $DK \cdot KE / FK \cdot KG = DH \cdot HK / IH \cdot HJ$, ou seja, **o produto das distâncias dos extremos da corda de referência à intersecção com a primeira corda a dividir pelo produto das distâncias dos extremos dessa corda até à intersecção é igual ao produto dos segmentos dos extremos da corda de referência até à intersecção com a segunda corda paralela a dividir pelo produto dos segmentos medidos desde os extremos da segunda corda até à intersecção, sendo este valor constante para todas as cordas paralelas.**

Referimos aqui esta propriedade não a pensar na sua aplicação algébrica, o que estaria em contradição com a metodologia aplicada neste texto, mas antes antevendo potencialidades de investigação utilizando os procedimentos gráficos das quadraturas. Lembremos a propósito que o produto de dois segmentos pode ser expresso pela área de um retângulo, o que permite a determinação gráfica das dimensões e trabalhar com elas.

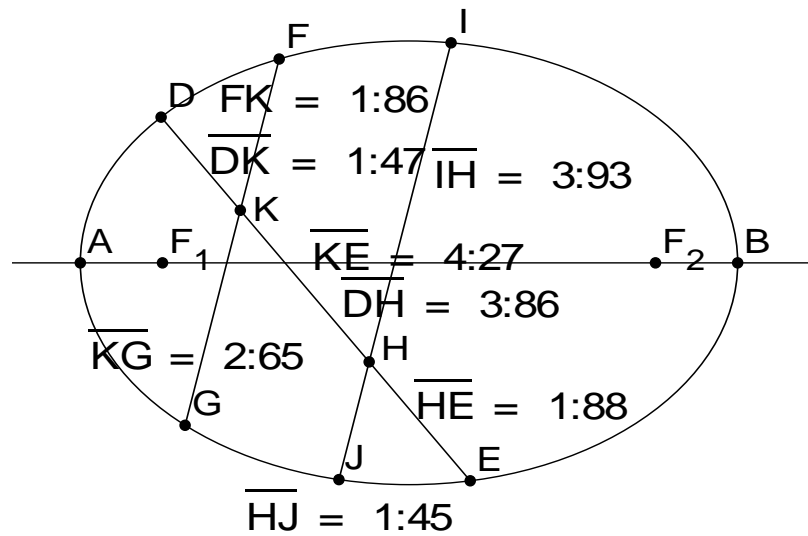


Fig. 2.71 – Propriedade de proporcionalidade

2.13. A RELAÇÃO ELIPSE – HIPÉRBOLE

Segundo HATTON (1920, 165-175) a relação entre a elipse e a hipérbole é estabelecida algebricamente através de números imaginários, ou seja, a cada ponto da elipse corresponde um ponto da hipérbole expresso em números imaginários e vice-versa. Tal permite que através dos pontos de uma das duas curvas se possa obter a outra.

Tal relação corresponde graficamente ao traçado de uma hipérbole que tem como definidora o retângulo envolvente de uma elipse cujas diagonais definem as assíntotas da hipérbole, ou de uma elipse cujas diagonais do retângulo envolvente são as assíntotas de uma hipérbole sendo comuns os eixos e os vértices das duas curvas.

A partir desta propriedade, pudemos deduzir que é possível encontrar uma forma operativa para a partir de uma curva determinar a outra. Um procedimento possível parte da *circunferência de Monge* C_m , que aqui apresentamos relativa à elipse. Como podemos comprovar, apesar de não referido na literatura consultada, **a circunferência de Monge da elipse passa nos focos da hipérbole e nos vértices do retângulo que define a figura comum à elipse e à hipérbole**. Por outro lado, tal como constatamos no ponto anterior relativo à circunferência de Monge, na sua aplicação à hipérbole, este passa nos focos da elipse.

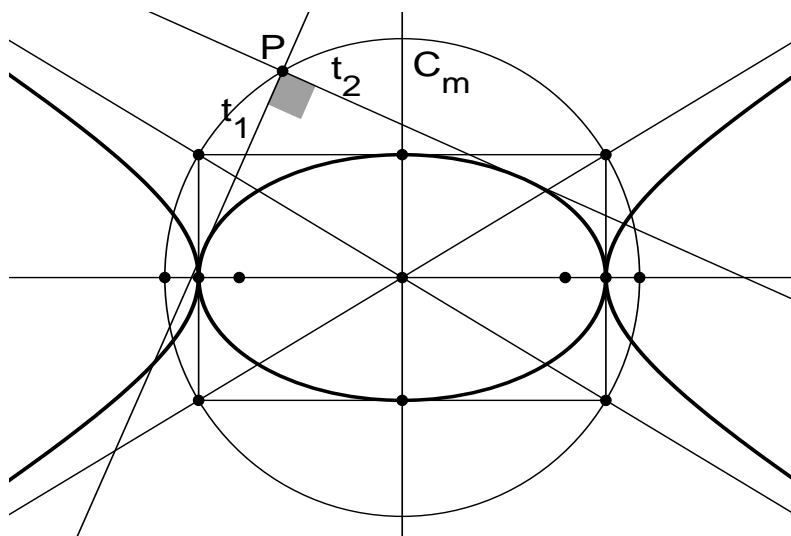


Fig. 2.72 – Relação elipse – hipérbole por números imaginários

Tal permite-nos enunciar outra propriedade que não encontrámos reproduzida na literatura:

- a **circunferência de Monge, ou seja, a circunferência ortóptica de uma cónica central passa nos focos da outra cónica central que tem a mesma *figura* e o mesmo eixo principal.**

Também foi estudada a relação entre elipse e hipérbole sendo as curvas definidas por dois diâmetros conjugados comuns, ou seja, através do paralelogramo que define a *figura* comum às duas curvas cónicas, tendo-se concluído que tal é impossível porque os dois segmentos não são diâmetros conjugados comuns às duas curvas.

Na fig. 2.73 a partir dos diâmetros conjugados da elipse assim como da sua *figura* o paralelogramo $[ABCD]$, estabeleceu-se relação com pontos da hipérbole e com o diâmetro comum à elipse e à hipérbole. Foi analisada a hipótese de as retas r_1 e r_2 serem as assíntotas tendo-se comprovado que a hipótese era falsa. Lembre-se que na Fig. 2.61 o ponto N não pertence à reta RQ , pelo que na Fig. 2.73 a *figura* da elipse não é *figura* da hipérbole.

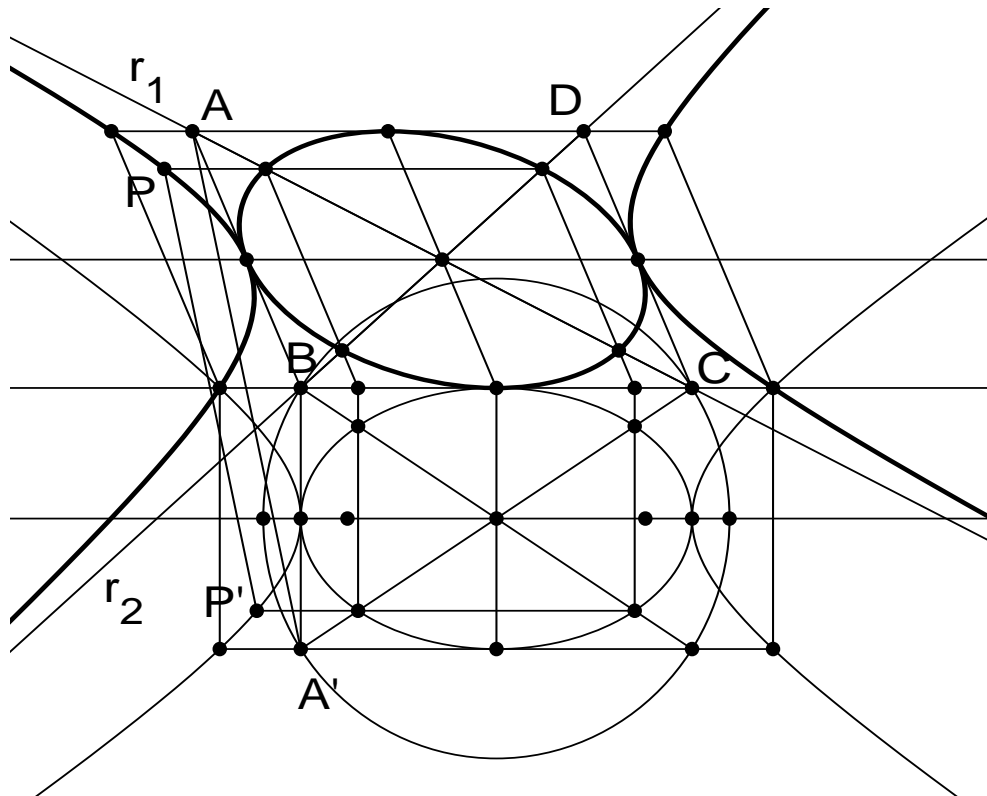


Fig. 2.73 – Elipse e hipérbole por diâmetros conjugados

2.14. PROPRIEDADES REFLEXIVAS DAS CÔNICAS

Há na literatura referências diversas a métodos construtivos das curvas cónicas utilizando materiais físicos como fios, réguas ou estacas, assim como se encontram diversas referências ao recurso a máquinas expressamente construídas para desenhar curvas cónicas e ainda a métodos construtivos com origem nas propriedades físicas destas curvas, designadamente as reflexões ou as dobragens, normalmente associadas às propriedades físicas focais das curvas, designadamente a reflexão da luz e outras radiações. Não desenvolveremos tal tema por, na maioria das situações, envolver o estudo de propriedades físicas que implicariam o enquadramento teórico adequado, o que ultrapassa o âmbito deste trabalho. No entanto, não deixaremos de enunciar em termos gerais tais princípios e aplicações práticas sempre que se entenda adequado. Nesse sentido, abordaremos seguidamente, de forma sucinta, as **propriedades reflexivas** das curvas cónicas.

Se sobre um ponto de uma cónica central, elipse ou hipérbole, incide um raio vetor com direção que passe num dos focos, ele reflete-se na direção que une o ponto ao outro foco. No caso da parábola, existindo apenas um foco, os raios incidentes paralelos ao eixo

refletem-se na direção do foco e, inversamente, os raios com direção a passar no foco refletem-se na curva paralelamente ao eixo.

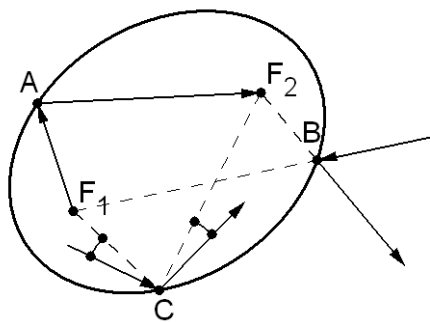


Fig. 2.74 – Elipse

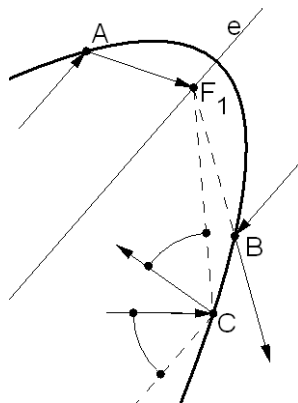


Fig. 2.75 – Parábola

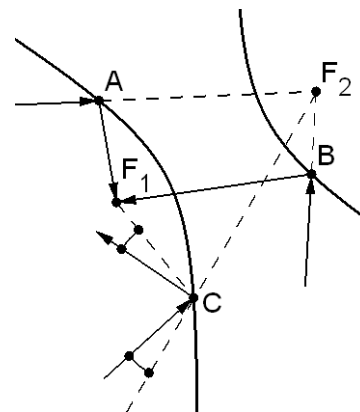


Fig. 2.76 – Hipérbole

Se o raio incidente tiver uma direção qualquer, incidindo neste caso num ponto designado por C , o ângulo que forma com o segmento que une o ponto de incidência ao foco é igual ao ângulo que o raio refletido forma com o segmento, ou o seu prolongamento, que une o ponto ao outro foco, no caso das cónicas centrais, e na parábola os ângulos que os raios incidente e refletido formam com a paralela ao eixo a passar em C , e a reta FC , são iguais.

Tais propriedades são válidas tanto para incidências interiores como para incidências exteriores à curva e são confirmáveis através da determinação da tangente e da **normal**, a perpendicular à tangente, num ponto da curva. Os ângulos do raio incidente com a normal ou com a tangente são iguais aos do raio refletido com a reta em causa. As propriedades reflexivas têm aplicação prática designadamente na reflexão de luz, tanto natural como artificial, de radiação, como por exemplo as ondas rádio, e no impacto de objetos em movimento com superfícies.



2.15. CONCLUSÃO

Como se pode comprovar, da diversidade de propriedades das cónicas enunciamos apenas algumas, as de que já identificámos aplicações nos traçados práticos ou que antevemos possibilidades de exploração futura.

Neste capítulo foram abordados os conceitos e propriedades que fundamentarão os traçados gráficos no capítulo seguinte. Para tal procurou-se abordar de forma coerente e sequencial conhecimentos oriundos de fontes e perspetivas diversas, cruzando métodos e processos para analisar coerências, potencialidades de investigação e aplicações práticas. Para tal enunciam-se as metodologias práticas utilizadas por forma a tornar perceptível a abordagem de alguns temas que usualmente não são referidos na literatura, porventura por serem dados como adquiridos, mas que induzem a hiatos no conhecimento ou, pelo menos, na sua exposição.

Ficou evidente ao longo do estudo efetuado que as cónicas, se exigem um forte suporte teórico escrito, não dispensam a sua componente gráfica, pois a explanação escrita não é suficiente para a exposição de todos os aspetos da questão e, muito menos, para evidenciar novas propriedades, tal como se comprova com a propriedade que enunciámos sobre o foco em projeção no plano da base, que é de origem visual e gráfica e, portanto, de difícil intuição teórica verbal ou analítica. Constatou-se igualmente a existência de novas potencialidades no estudo das cónicas, relacionadas com a utilização de meios informáticos, permitindo processos gráficos mais expeditos, e em especial o recurso a programas de geometria dinâmica, por permitirem analisar, através da alteração dos dados, a aplicabilidade de processos ou até a comprovação de enunciados teóricos.

De forma implícita, procurou-se encontrar uma explicação para o quase exclusivo estudo das secções cónicas a partir de cones retos. Parece ser evidente que, a preponderância do tratamento algébrico pela maioria dos matemáticos leva à maior facilidade de trabalhar com as propriedades relativas aos focos das curvas cónicas e, logo, com os eixos das curvas cónicas. Concluiu-se que, quando se analisa as secções em cones oblíquos, estas, na maioria dos casos da sua determinação prática, apresentam-se por diâmetros conjugados, não representando os eixos e os focos qualquer papel particular na determinação geométrica da cónica. Pode concluir-se, portanto, que um exclusivo tratamento algébrico pode ser fortemente limitador nas aprendizagens iniciais e no desenvolvimento da investigação aplicada.

As propriedades destas curvas descritas neste capítulo são apenas algumas das mais conhecidas e utilizadas, escolhidas de entre um conjunto imenso, para fundamentarem a execução dos traçados que no capítulo seguinte se apresentam. Da pesquisa, efetuada a

livros e artigos de revistas científicas, conclui-se existir uma infinidade de propriedades já estudadas, mas por vezes pouco divulgadas, ou até esquecidas, estando o tema das cónicas longe de esgotado, apesar de tal ideia se poder por vezes subentender. Neste processo de investigação igualmente se criou a convicção que há muitas propriedades das cónicas por descobrir, e possivelmente ângulos novos de abordagem, e que o desenvolvimento científico e tecnológico trará no futuro. Assim, além de estar longe de ser um tema fechado, é um tema central e aplicável numa diversidade de áreas.

Neste capítulo questiona-se, igualmente de forma implícita, o limite da geometria euclidiana e da sua axiomática, quando a propósito das secções em superfícies cónicas de diretriz em curva cónica fomos conduzidos a ter em conta pontos de intersecção de retas, geratrizes, paralelas ao plano da diretriz, com a própria diretriz, caminho esse já anteriormente percorrido por diversos matemáticos, mas do qual não conhecemos outra expressão gráfica, em geometria descritiva. Talvez esteja aqui igualmente a resposta à questão de saber qual a razão de não se encontrar na literatura referências às secções em superfícies cónicas com diretriz em curva cónica qualquer, quando a sua necessidade é óbvia pois, se numa superfície cónica de diretriz circular podemos obter qualquer curva cónica como secção, então essa secção pode passar a ser considerada como diretriz da superfície.

Concluiu-se ainda as curvas cónicas resultam da secção plana em superfícies cónicas, de vértice próprio ou impróprio, retas ou oblíquas, de diretriz circular, podendo igualmente ser obtidas em superfícies cónicas tendo como diretriz qualquer curva cónica não complanar com o vértice. Paralelamente, e através de um problema concreto, o das secções antiparalelas, concluiu-se da utilidade de, no estudo das secções cónicas, consultar tanto os textos teóricos como os de aplicação prática, pois estes, por vezes, levam a contributos para a teoria, conclusão que se considera poder ser generalizável quando abordamos a geometria com métodos essencialmente geométricos.

O estudo das cónicas por Apolónio, ao introduzir os cones oblíquos e o duplo cone, modificou de forma indelével a forma como as cónicas eram entendidas e abriu um campo de desenvolvimento no conhecimento destas curvas com repercussão durante todo o período histórico decorrido até hoje, de tal forma que é incontornável no estudo das cónicas, sobretudo por alargar o âmbito de estudo aos cones oblíquos enunciando igualmente a existência do cone duplo.

O teorema de Dandelin representou, à época, um enorme avanço no conhecimento e ainda hoje é de grande utilidade prática. Tem no entanto a limitação de só se aplicar às



superfícies cónicas de diretriz circular em que o vértice se situe sobre a perpendicular ao plano da diretriz e que passa no centro desta e não às restantes superfícies cónicas.

Neste capítulo enuncia-se igualmente uma propriedade que não encontrámos descrita na literatura, relativa à projeção do eixo do cone reto e da secção no plano da base, com potencialidades de aplicação prática, e que pode ter implicações no aprofundamento do conhecimento de como e quando os focos foram descobertos.

É igualmente apresentada uma propriedade da parábola que tem raras referências na literatura, e por vezes incompletas, mas de grande utilidade porque permite simplificar os traçados gráficos em inúmeros problemas concretos.

Foram analisadas as duas cónicas centrais, elipse e hipérbole, que apesar de se situarem em posições opostas relativamente ao discriminante projetivo, têm muitas propriedades comuns, o que permite a sua inter-relação e a determinação de uma delas a partir da outra. De uma propriedade de Hatton muito pouco divulgada, por se referir a outro contexto, o do tratamento algébrico das cónicas, concluiu-se da sua aplicabilidade para a partir do traçado da elipse se obter o traçado da hipérbole com igual figura. Desta relação resultou o enunciado de uma propriedade que não encontrámos descrita na literatura e que é: a circunferência de Monge de uma das cónicas centrais passa nos focos da outra cónica central que tem a mesma figura.

Este ponto de conclusões não fica completo sem se indicar que, no contexto da investigação sobre as propriedades das curvas cónicas que acabamos de descrever, como em inúmeras outras situações relativamente ao estudo das cónicas, há potencialidades a explorar na investigação, através do cruzamento de conhecimentos de épocas diferentes e, igualmente de contextos teóricos e de aplicação prática diferentes, estando o tema longe de esgotado, antes, pelo contrário, surgindo constantemente novo conhecimento teórico e aplicações práticas.

2.17. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DO CAPÍTULO

AKOPYAN, A. V.; ZASLAVSKY, A. A. – **Geometry of conics**. Rhode Island: American Mathematical Society, 2007. [Trad. da edição russa de 2000 do Moscow Center for Continuous Mathematical Education.] ISBN 978-08218-4323-9.

APOLLONIUS OF PERGA; HEATH, T. L. – **Treatise on conic sections: edited in modern notation with introductions including an essay on the earlier history of the subject by T. L. HEATH, M. A.** Cambridge: The University Press, 1896.

BOYER, Carl B. – **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 2005. [Trad. de A History of Mathematics. John Wiley & Sons, Inc, 1991]. ISBN 85-212-0023-4.

COSTA, Joaquim Bonifácio – Intersecção de superfícies não planas em dupla projecção ortogonal. Castelo Branco: Instituto Politécnico de Castelo Branco, Escola Superior de Artes Aplicadas, 2005. [Estudo para Concurso de Provas Públicas para Professor-Adjunto].

[COSTA], Joaquim BONIFÁCIO – Determinação gráfica da parábola conhecidos dois pontos da curva e a tangente no vértice (exemplo prático de geometria aplicada ao design). Convergências. Castelo Branco: ESART – IPCB, nº2, Jan. (2009) art. 32. ISSN 1646-9054. [<http://convergencias.esart.ipcb.pt/artigo/32> acedido em 20/12/2009].

ENRIQUES, Federigo – **Leçons de géométrie projective**. Paris: Gauthier-Villars et C^{ie}, Éditeurs, 1930.

ESTRADA, Maria Fernanda [et al.] – **História da Matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 2000. ISBN 972-674-315-X.

FRIED, Michael N. – **Edmond Halley's reconstruction of the lost book of Apollonius's Conics: Translation and commentary**. New York [etc.]: Springer, 2011. ISBN 978-1-4614-0145-2.

GORDON, V. O.; SEMENTSOV-OGUIYEVSKY – **Curso de geometria descritiva**. 2nd ed.. Moscovo: Ed. MIR, 1980. [Editado em castelhano].

HATTON, John Leigh Smeathman – **The theory of the imaginary in geometry: together with the trigonometry of the imaginary**. Cambridge: University Press, 1920.

HILBERT, David; COHN-VOSSSEN, S. – **Geometry and the imagination**. U.S.A.: American Mathematical Society, 1999. [Reedição da tradução para inglês da edição alemã Anschauliche Geometrie 19-?]. ISBN 0-8218-1998-4.

IZQUIERDO ASENSI, Fernando – **Geometría descriptiva superior y aplicada**. 3d ed. Madrid: Ed. Dossat, 1985. ISBN 84-237-0441-6.



LADEGAILLERIE, Yves – **Géométrie: affine, projective, euclidienne et anallagmatique.** [License, Capès, Agrégation.] Paris: Ellipses Édition Marketing, S.A., 2003. ISBN 2-7298-1416-7.

LIMING, Roy A. – **Mathematics for computer graphics.** Fallbrook [California]: Aero Publishers, Inc., 1981. ISBN 0-8168-6751-8.

LOBJOIS, Charles – **Desenvolvimento de chapas.** Curitiba: Hemus SA, 2002.

RANGEL, Alcyr Pinheiro – **Curvas.** Rio de Janeiro: UFRJ, 1974.

RICCA, Guilherme – **Geometria Descritiva: método de Monge.** 2d ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2000.

ROUBAUDI, C. – **Traité de géométrie descriptive.** 10d ed. Paris: Masson et C.^ª, Éditeurs, 1961.

SÁNCHEZ GALLEGO, Juan Antonio – **Geometría descriptiva: Sistemas de proyección cilíndrica.** Barcelona: Edicions UPC [Universitat Politècnica de Catalunya, SL], 1997. ISBN 978-84-9880-381-5.

SAURÍ, Miguel Angel Gil – **Geometría aplicada a la técnica.** Madrid: Editorial CIENCIA 3, 2009. ISBN 978-84-95391-15-5.

SILVA, Ana Cristina [et al.] – Hipérbole: Preenchendo uma lacuna. Santander, España: XIV Congresso Internacional de Ingeniería Gráfica (INGEGRAF), 5 - 7 Junho 2002.

SÍTIOS NA INTERNET

Geogebra © <http://www.geogebra.org/cms/pt_PT/>

Cinderella © <<http://cinderella.de/tiki-index.php?page=Download+Cinderella.2&bl>>



**Curvas Cónicas e Superfícies Geradas pelas Curvas Cónicas:
Os seus Traçados Geométricos e Aplicações no Design.**





3. DA GEOMETRIA DAS CÓNICAS AOS TRAÇADOS GRÁFICOS

Decorrendo das definições e propriedades das cónicas, algumas das quais enunciámos no capítulo anterior, podem deduzir-se diferentes construções, muitas vezes encarados como mera aplicação prática. Não obstante, verificou-se que estes traçados, pela sua íntima ligação com o suporte teórico, constituem também construções mentais, propiciadoras da elaboração de raciocínios logico-dedutivos, com desenvolvimento do processo cognitivo e na construção da imaginação criadora, sempre que sejam objeto de uma correta aprendizagem que não se resume aos próprios traçados como instrumento para resolução de problemas caso a caso. Por outro lado, a resolução de diversos problemas levou a reconsiderações do suporte teórico e da sua explanação e até, em alguns casos, à enunciação de novas propriedades. Assim, procuraremos fazer acompanhar as diversas construções da fundamentação teórica subjacente.

3.1. OS TRAÇADOS DE CÓNICAS DADOS OS EIXOS E OS FOCOS

Os traçados mais utilizados, a régua e compasso, e decorrentes da geometria plana, utilizam os eixos e os focos para a construção gráfica, sendo as curvas obtidas ponto a ponto.

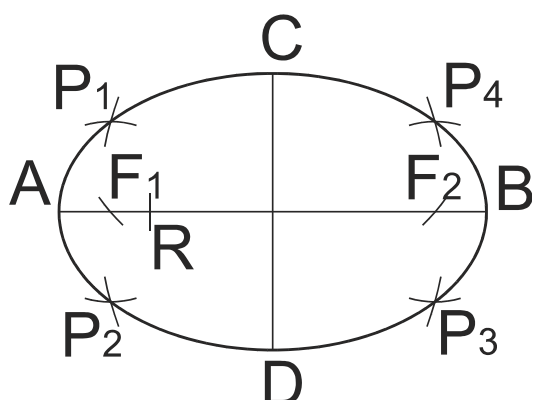


Fig. 3.1 – Construção da elipse sendo dados os eixos maior AB e menor CD

A **elipse** é definida pelos seus eixos, que são perpendiculares entre si, e centrados um relativamente ao outro, situando-se os focos no eixo maior, e a distância de um foco ao extremo do eixo menor é igual a metade do eixo maior. Tal decorre de que a soma das distâncias de qualquer ponto da elipse aos dois focos seja igual ao eixo maior. Sendo F_1 e F_2 os focos, CF_1 e CF_2 são iguais a metade do eixo maior. Para obter novos pontos da elipse marca-se um ponto R qualquer no semieixo maior, e com a medida de RA traça-se arcos com centro em F_1 e F_2 acima e abaixo do eixo maior. Com a medida RB traça-se arcos com centro em F_1 e F_2 a interseção dos arcos anteriores sendo P_1, P_2, P_3 e P_4 pontos da elipse. Para determinar mais pontos da elipse define-se outro ponto R qualquer no eixo maior e repete-se o processo.

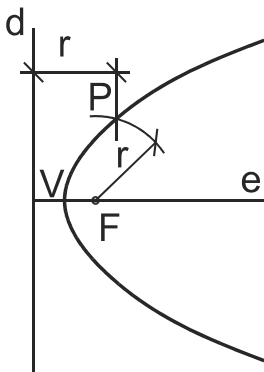


Fig. 3.2 – Construção da parábola sendo dados o foco F e a diretriz d

Os pontos da **parábola** satisfazem a condição de que a sua distância ao foco é igual à distância do mesmo ponto à diretriz. Assim traça-se um arco, com centro no foco F , acima e abaixo do eixo e um raio r qualquer, e uma paralela à diretriz à distância r desta. As intersecções do arco com a paralela são pontos da parábola. Repete-se o processo com outra medida r para obter novos pontos.

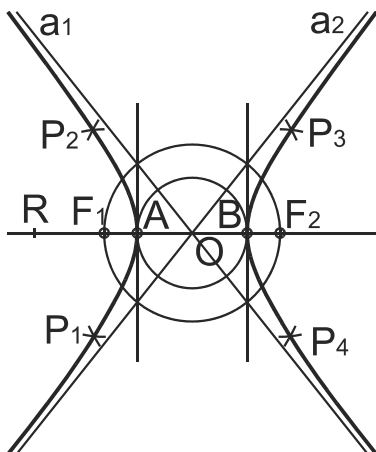


Fig. 3.3 – Construção da hipérbole sendo dados a distância focal F_1F_2 e o eixo transversal AB



A **hipérbole** é definida pela condição de que a diferença das distâncias de qualquer dos seus pontos aos dois focos ser igual ao eixo transverso, ou seja, a distância entre os dois vértices A e B dos dois tramos da hipérbole. Assim, marca-se R , sobre o eixo e fora do eixo transverso, e com raio igual à distância RA e com centro em F_1 e F_2 traça-se arcos acima e abaixo do eixo. Depois, com raio igual a RB , traça-se novos arcos com centro em F_1 e F_2 a intersecar os anteriores definindo P_1, P_2, P_3 e P_4 pontos da hipérbole. Para obter mais pontos da curva procede-se da mesma forma com R a outra distância.

Se traçarmos o círculo que passa nos focos e as tangentes nos vértices A e B e intersecarmos as tangentes com o círculo obtemos pontos das assíntotas a_1 e a_2 , retas que passam no centro e nos pontos de intersecção. Estas, como será apresentado posteriormente, podem ter especial interesse na construção das hipérbolas em determinadas condições.

Da mesma forma o traçado de tangentes a estas curvas é usualmente descrito com recurso aos focos das curvas e, em regra, apenas para o traçado de **tangentes em pontos da curva**, pois não permite o traçado de tangentes a partir de um ponto exterior ou as tangentes paralelas a uma direção dada, sem recorrermos a outras propriedades das cónicas.

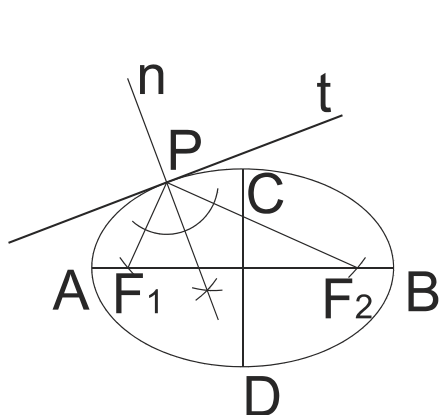


Fig. 3.4 – Tangente e normal num ponto da elipse

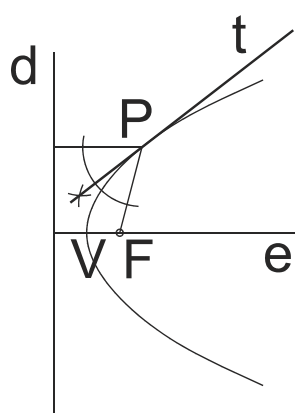


Fig. 3.5 – Tangente num ponto da parábola

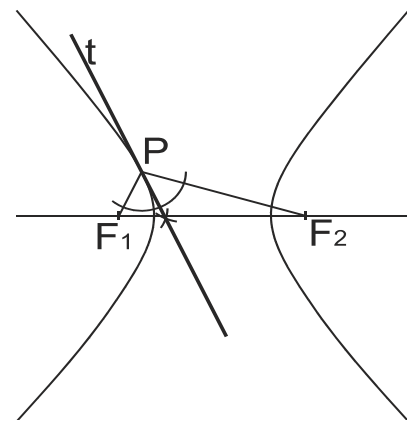


Fig. 3.6 – Tangente num ponto da hipérbole

Na elipse a normal é a bissetriz do ângulo F_1PF_2 e a tangente é perpendicular à normal. A tangente num ponto da parábola é a bissetriz do ângulo de PF com a perpendicular à diretriz que passa em P , na hipérbole a tangente é a bissetriz do ângulo F_1PF_2 .



3.2. ANÁLISE DA UTILIZAÇÃO MAIS GENERALIZADA DAS CURVAS CÓNICAS

Importa agora referir as possibilidades de utilização das curvas cónicas na prática e de forma mais generalizada. Embora os traçados até aqui referidos sejam os de utilização mais frequente, por serem os mais conhecidos, são por vezes inadequados, atendendo aos dados ou condições concretas de resolução dos problemas. Há diversos outros traçados dos quais referiremos de seguida alguns, aqueles que o desenvolvimento do trabalho demonstrou serem de mais utilidade ou com implicações em outros níveis de teóricos.

A abordagem do tema curvas cónicas implica, segundo IZQUIERDO ASENSI (1985, 199 a 201), utilizar o **método das construções homológicas**. Este método implica um estudo mais aprofundado da geometria projetiva em geral. Dado que a exposição do tema ultrapassa o âmbito deste trabalho, limitar-nos-emos à enunciação e representação de algumas propriedades com aplicação prática mais evidente, tendo, no entanto, em conta a necessidade de fundamentar os traçados propostos. Não obstante, indica-se na bibliografia geral diversos textos que permitem o aprofundamento do tema e saber do estado atual do conhecimento nesta área.

É perfeitamente claro dos textos dos diversos autores, como por exemplo IZQUIERDO ASENSI (1985) ou RICCA (2000), que as curvas cónicas estão no centro das regras das construções projetivas. Por outro lado, a geometria projetiva permite o desenvolvimento conceptual e a resolução teórica de problemas independentemente dos traçados, embora utilize procedimentos que foram desenvolvidos inicialmente, no concreto, para a utilização em construções a régua e compasso ou na sua tradução algébrica. A prová-lo, por exemplo, está o facto de se evitar na prática a utilização das próprias curvas cónicas como auxiliares na resolução de problemas. Até ao advento da computação gráfica, a construção gráfica das curvas em geral e, portanto, também das cónicas, era ponto a ponto, com régua e compasso e, assim sendo, a forma gráfica das curvas, salvo a circunferência, tinha limitações de rigor por obrigar à representação aproximada dos pontos intermédios entre dois pontos determinados ou à sua determinação por interpolação ou outro processo. Hoje, com os meios informáticos disponíveis, e com o aprofundamento teórico entretanto operado, a relevância prática das construções projetivas, nas mais diversas áreas, é inquestionável, não obstante ser, na maioria dos casos, desenvolvida apenas na sua forma algébrica, em geometria analítica. Tal facto, para todos os que trabalham com imagens, é uma forte limitação, pelo que aqui pretendemos contribuir para a divulgação e aprofundamento dos conhecimentos nesta área.

Para definir procedimentos expeditos para a construção de curvas cónicas, para além das questões relativas ao encontrar de respostas práticas a partir da fundamentação teórica, a razão mais importante que dificulta a utilização de tal metodologia com recurso a



programas informáticos de uso corrente, é que estas construções homológicas em inúmeras situações vão dar origem a uma qualquer das curvas cónicas, sem permitir determinar previamente o seu tipo. Ora, os programas informáticos de uso mais diversificado no desenho técnico por utilização direta dos ícones dos menus só permitem, em regra, a construção da elipse, conhecidos os eixos, sendo a parábola e a hipérbole construídas ponto a ponto e definidas por um conjunto de pontos e, por vezes, respetivas tangentes, ou seja, são de construção aproximada. Tal dificuldade pode ser ultrapassada construindo previamente uma parábola qualquer definindo o seu eixo e distância focal e depois por rotação do eixo e fazendo zoom, ou seja, aplicando a relação de semelhança à sua distância focal obtemos a parábola pretendida. Para a hipérbole podemos proceder da mesma forma que para a parábola, rodando o eixo e adaptando à escala pretendida, por exemplo, ou o eixo transversal ou a distância focal de uma hipérbole previamente desenhada e, depois, por procedimentos que descreveremos mais à frente, determinar a hipérbole pretendida, de acordo com a outra das dimensões referidas. De notar, igualmente, que tanto a parábola como a hipérbole têm ramos que se prolongam até ao infinito e estamos a referir traçados ponto a ponto apenas de partes das referidas curvas. Assim, haverá que ter sempre em conta a necessidade de garantir que, na parte da curva representada, os pontos mais próximos dos extremos têm uma determinação o mais rigorosa possível e as tangentes nesses pontos têm a direção adequada.

As considerações feitas anteriormente são apenas a constatação de algumas dificuldades práticas, pelo que diversas construções são apresentadas neste texto, atendendo ao interesse teórico e tendo em conta que permitem procedimentos práticos da geometria plana, tanto nos traçados de lápis e papel, como na utilização com programas informáticos, ou seja, construir graficamente no computador com as ferramentas mais difundidas e admitindo que, num futuro próximo, programas informáticos de uso vulgarizado passem a incluir opções de construção das curvas cónicas em geral, designadamente com recurso às cinco condições, tema que será desenvolvido mais à frente.

3.2.1. DETERMINAÇÃO DO CENTRO E DOS EIXOS DAS CÓNICAS

Vamos agora proceder à determinação dos elementos definidores de uma cónica conhecida esta graficamente. Relembre-se que, no capítulo anterior, no ponto 2.10., abordou-se o caso de existir apenas o conhecimento gráfico de um troço da curva, sabendo que é uma cónica, e a partir daí proceder à determinação do tipo de curva em presença, tendo-se concluído que o fundamento teórico depende da própria determinação do centro, da sua existência ou não em geometria euclidiana, e da posição deste relativamente à curva. Desenvolvendo o processo referido, e concretizando-o para o caso de serem

conhecidas zonas da curva que incluem os vértices, procede-se em seguida à determinação do centro, caso exista, e dos eixos da cónica, tendo em conta que tal determinação tem interesse no desenvolvimento da exposição da passagem da teoria à prática, mas igualmente tem aplicação direta, por exemplo, nos problemas de restituição perspéctica.

3.2.1.1. DETERMINAÇÃO DO CENTRO DE UMA CÓNICA QUE É DADA GRAFICAMENTE

Para a determinação do centro, conhecida graficamente a cónica, traçam-se duas cordas paralelas AB e CD e os seus pontos médios M e N . A reta MN é diametral. Se a curva for uma cónica central, elipse ou hipérbole, a reta intersesta a curva em dois pontos E e F que definem o diâmetro e o centro O é o ponto médio de EF . Se a curva é uma parábola a reta MN só intersesta a curva num ponto e, não existindo centro, traçamos uma perpendicular à reta, a qual intersesta a parábola segundo a corda EF . No ponto P , ponto médio da corda traçamos uma paralela a MN , que é o eixo e da parábola, o qual intersesta a curva no seu vértice V .

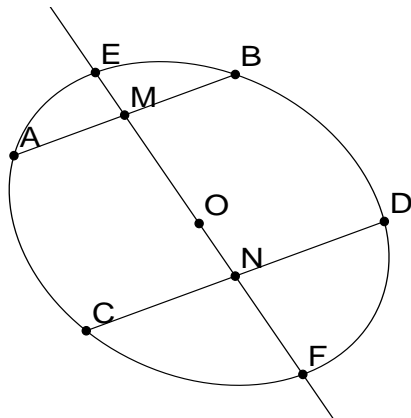


Fig. 3.7 – Centro da elipse

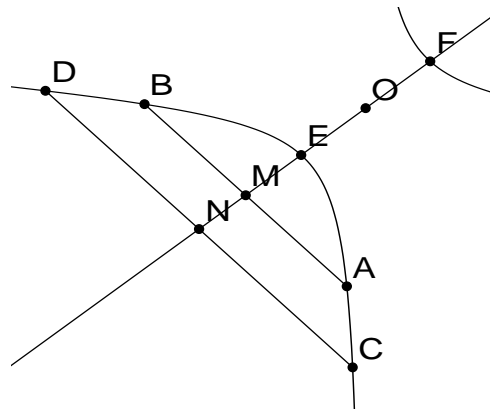


Fig. 3.8 – Centro da hipérbole

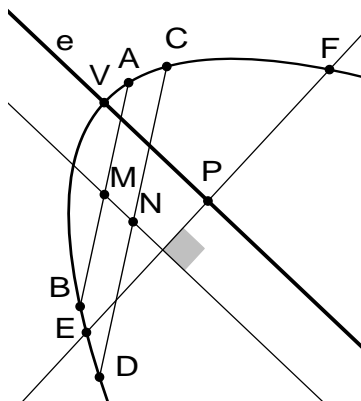


Fig. 3.9 – Eixo e vértice da parábola



3.2.1.2. DETERMINAÇÃO DOS EIXOS DAS CÔNICAS CENTRAIS DADAS GRAFICAMENTE

Conhecida a curva graficamente e o seu centro O procede-se à determinação dos eixos de acordo com CUNHA (1982, 158, Fig. 6.42a), onde se encontra o procedimento seguinte aplicado à elipse, mas generalizável à hipérbole. Traça-se uma circunferência com um diâmetro qualquer e que intersecte a cónica. Os pontos de intersecção definem um retângulo $[ABCD]$ cujos lados são paralelos aos eixos.

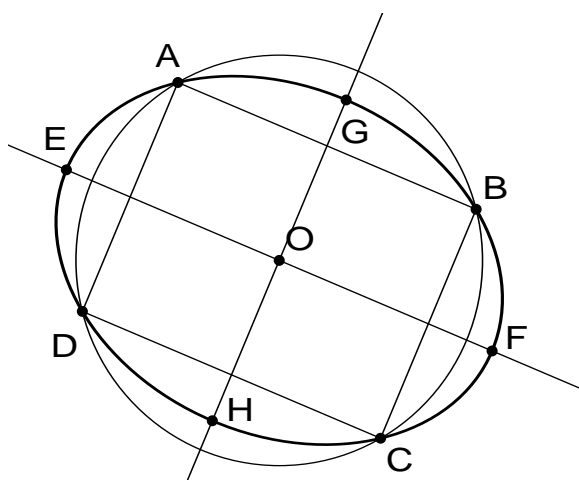


Fig. 3.10 – Eixos da elipse

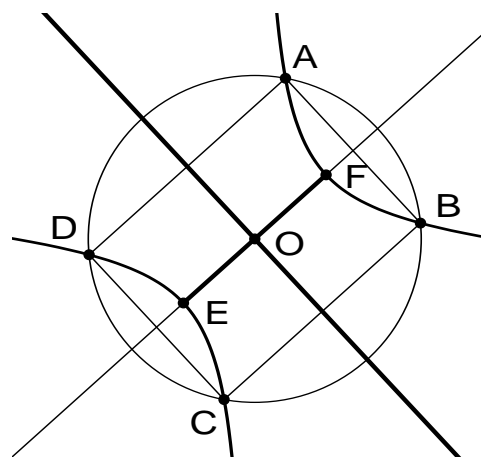


Fig. 3.11 – Eixos da hipérbole

3.3. GEOMETRIA PROJETIVA, CONCEITOS DE HOMOLOGIA E AFINIDADE

Tendo em conta o contexto descrito na revisão de literatura, e a praticamente inexistente formação em geometria projetiva atualmente em Portugal, propomo-nos enunciar parte dos fundamentos da Geometria Projetiva e passar de seguida às aplicações práticas. Seguiremos a metodologia de apresentação que já utilizámos em COSTA (2005), adaptando-a e atualizando-a de acordo com os objetivos deste texto.

Assim, e de acordo com IZQUIERDO ASENSI (1985, 66, fig. 4.5.) define-se a existência de **homologia** entre os triângulos da Fig. 3.7, com centro de homologia em O e eixo de homologia r , dado A , se A' for o correspondente e, logo, B corresponder a B' e C a C' . Segundo IZQUIERDO ASENSI (1985, 67, fig. 4.6.) a homologia é afim, ou simplesmente **afinidade**, quando, em vez de um centro, tivermos uma direção d de afinidade. Nas aplicações práticas em geometria euclidiana tal corresponde, respetivamente, à projeção central ou cónica e à projeção paralela ou cilíndrica, ou seja, nas aplicações práticas mais usuais, as projeções ortogonais e axonometrias.

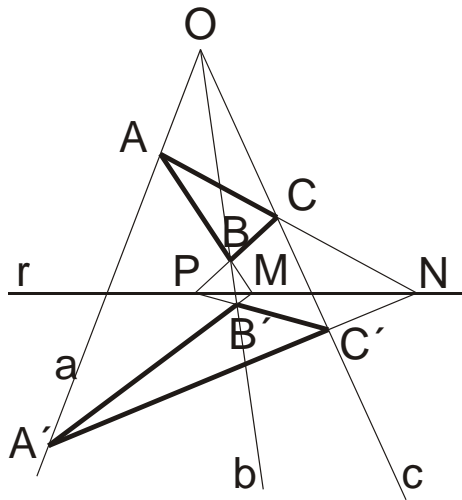


Fig. 3.12 – Homologia

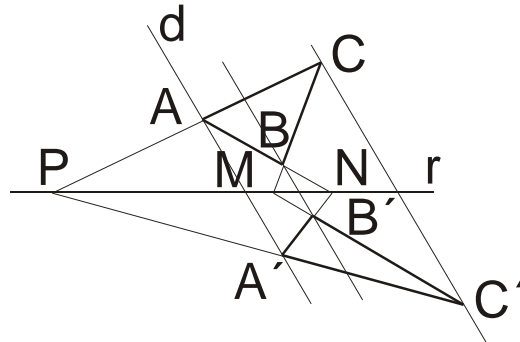


Fig. 3.3 – Afinidade

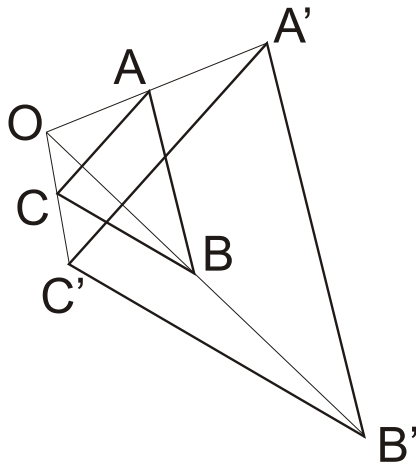


Fig. 3.14 – Homotetia

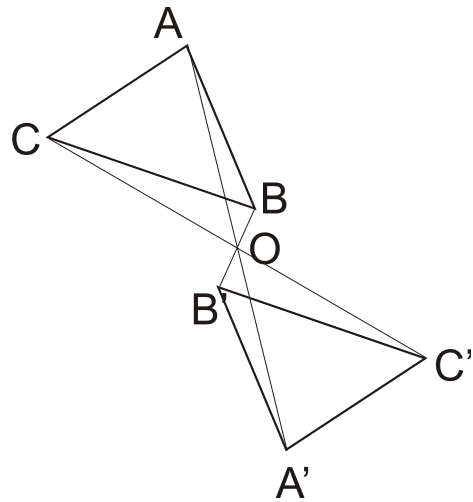


Fig. 3.15 – Simetria polar

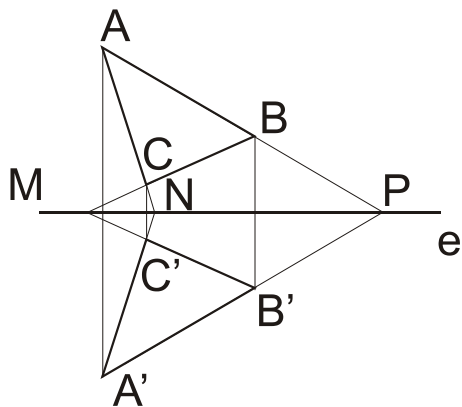


Fig. 3.16 – Simetria por afinidade ortogonal

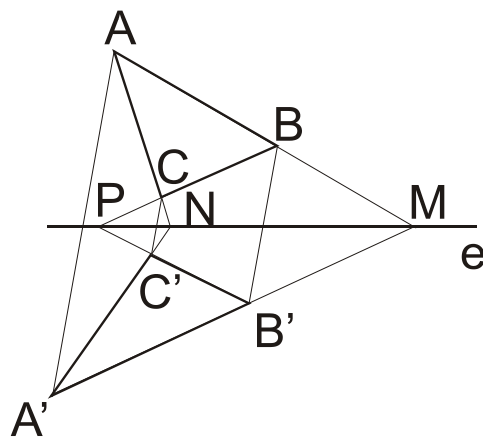


Fig. 3.17 – Simetria por afinidade oblíqua



A **homotetia** é um caso particular da homologia, implica a semelhança de figuras e em que os lados retos das figuras se mantêm paralelos aos correspondentes da homotética. Ainda, como casos particulares, temos a **simetria polar**, derivada da homologia, e as **simetrias afins, de direção oblíqua ou ortogonal**. A homotetia permite aplicações como o escalar dimensional das figuras geométricas, e correspondendo a um desenvolvimento do teorema de Tales, tem aplicação, por exemplo, na determinação da direção de uma reta conhecido um ponto dela e sabendo que a reta é concorrente com outras duas num ponto situado fora dos limites do desenho, as simetrias oblíquas aplicam-se, por exemplo, na representação de figuras geométricas em axonometria. Na homologia designa-se por **Pólo** o centro O da relação homológica e **polar** a reta r que intermedeia a relação homológica.

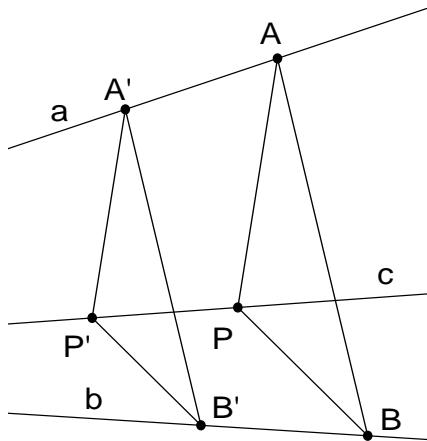


Fig. 3.18 – Determinação por homotetia da concorrência de retas fora do desenho

Um problema muito frequente em geometria projetiva, em função dos dados, é a necessidade de determinar pontos de concorrência de feixes de retas e, por vezes, no desenho a papel e lápis, o ponto de concorrência situa-se fora do desenho, ou, no desenho com programas informáticos, o ponto está fora do ecrã, tornando pouco prática a sua determinação. Este problema pode ser resolvido determinando a direção de cada reta, pelo que o problema se passa a enunciar com sendo dadas duas retas a e b e um ponto P e pretendendo-se a determinação da reta c que passa em P e é concorrente com a e b no ponto de concorrência destas. Traça-se duas paralelas, com qualquer direção, que intersectem a e b respetivamente nos pontos A, A' e B e B' . Constrói-se o triângulo $[PAB]$ e o seu semelhante e de lados paralelos $[P'A'B']$. PP' define a reta c pretendida. A fundamentação deste método pode ser demonstrada por desenvolvimento do teorema de Tales e pela homotetia estabelecida entre os dois triângulos.

As transformações geométricas descritas, acompanhadas da rotação e translação, constituem o fundamental das operações que podemos realizar com as figuras geométricas.

3.3.1. OPERAÇÕES HOMOLÓGICAS APLICADAS À CIRCUNFERÊNCIA

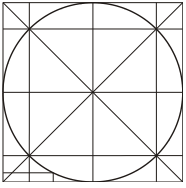


Fig. 3.19 – Circunferência e quadrado

As operações seguintes são apresentadas para possibilitar uma melhor compreensão da ligação das regras e processos da geometria projetiva com a obtenção gráfica de figuras geométricas. Estes exemplos foram obtidos a partir de uma circunferência e de um quadrado que a circunscreve, e respetivas medianas e diagonais, com programa informático que cria um bloco único de todos os elementos e aplicando a operação em simultâneo a todos os elementos do bloco. Se todos os pontos da figura forem sujeitos às mesmas transformações geométricas, à mesma homologia, a deformação da circunferência é, nos casos exemplificados, uma elipse, podendo-se obter igualmente parábolas ou hipérbolas ou até curvas degeneradas. É acrescentado na Fig. 3.19 e), como exemplo, um cilindro reto de base elíptica que é seccionado obliquamente. A secção continua a ser uma elipse. Para completar a exemplificação na Fig. 3.19 f) o quadrado envolvente foi deformado apenas por deslocação de um dos seus vértices não aplicando a transformação a toda a figura. É óbvio que a curva resultante não é uma curva cónica.

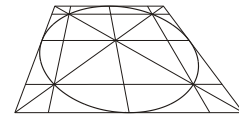


Fig. 3.19 a)

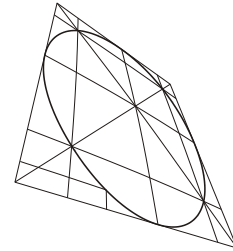


Fig. 3.19 b)

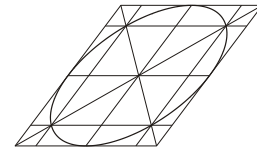


Fig. 3.19 c)

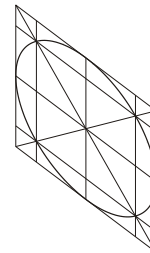


Fig. 3.19 d)

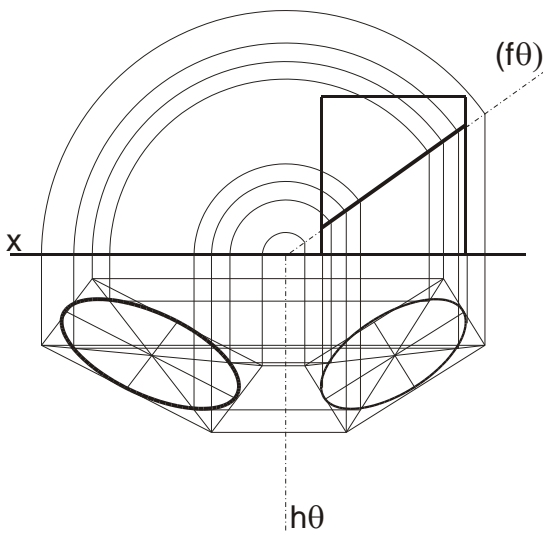


Fig. 3.19 e)

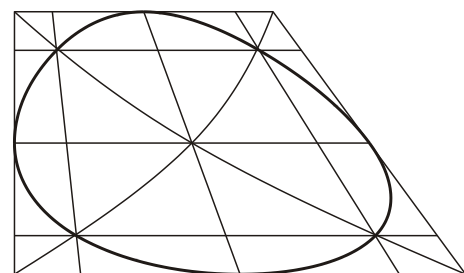


Fig. 3.19 f)



3.3.2. O TRAÇADO DE TANGENTES ÀS CÔNICAS DEFINIDAS GRAFICAMENTE UTILIZANDO MÉTODOS PROJETIVOS

Como veremos, alguns dos problemas centrais do trabalho com as cónicas têm a ver com a sua própria definição por pontos e tangentes. Assim, em seguida, propomo-nos abordar o traçado de tangentes às cónicas por um método projetivo, pelas diversas consequências práticas que permite, designadamente na definição da própria cónica e pelo papel que desempenham nos traçados.

O traçado de tangentes a cónicas é igualmente um problema relevante porque, por exemplo, a tangente a uma elipse a partir de um ponto exterior pode corresponder à representação dos contornos aparentes de um cone em axonometria ou em perspetiva cónica. Refira-se que, no procedimento usual em geometria descritiva, a determinação dos contornos de um cone, com base circular não paralela aos planos de projeção, ou seja, em projeção, uma elipse, implica fazer passar pelo vértice uma reta projetante relativamente ao plano de projeção, determinar o ponto de intersecção da reta com o plano, rebater esse ponto e a base, determinar as tangentes à circunferência a partir do ponto rebatido, e os respetivos pontos de tangência. Inverte-se o rebatimento dos pontos e unem-se ao vértice obtendo os contornos de visibilidade. Como se comprova é um procedimento moroso e com diversos passos. Da mesma forma, os traçados de tangentes a elipses paralelas a uma direção dada podem corresponder à representação dos contornos aparentes de um cilindro nas condições de representação descritas. Ou seja, são problemas com interesse prático, de resolução complexa pelos métodos mais usuais, e para os quais aqui se procura, adaptando processos documentados na bibliografia, criar soluções gráficas de aplicação geral simples, pela generalização de regras teóricas de procedimento geométrico.

3.3.2.1. TRAÇADO DAS TANGENTES A UMA CURVA CÔNICA CONHECIDA GRAFICAMENTE, A PARTIR DE UM PONTO P EXTERIOR

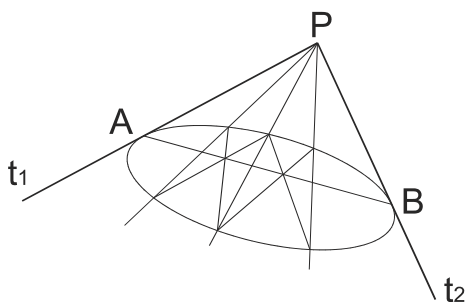


Fig. 3.20 a) – Elipse

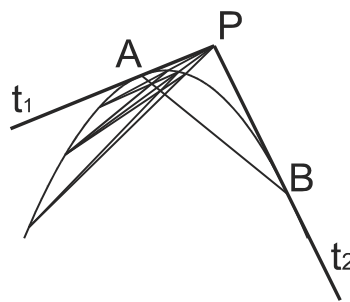


Fig. 3.20 b) – Parábola

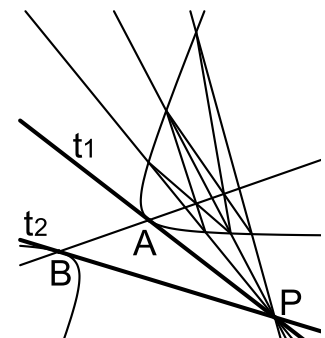


Fig. 3.20 c) – Hipérbole

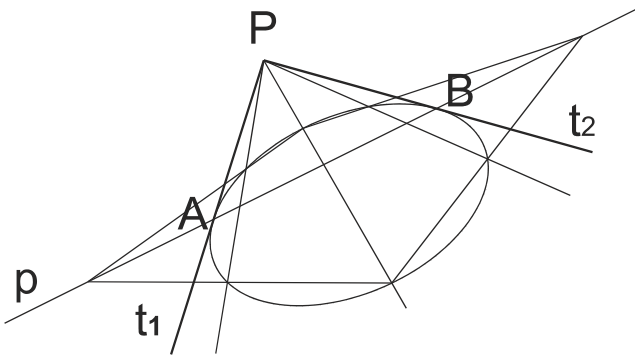


Fig. 3.20 d) – Método alternativo

Adaptadas a partir de IZQUIERDO ASENSI (1985, 103), estas construções baseiam-se nos conceitos de geometria projetiva de **Pólo** e **polar**. O ponto P , interior ou exterior à cónica, é o **Pólo** sendo p a polar de P em relação à cónica. A **polar** é a definida pelos pontos conjugados harmónicos com P , nas retas que a partir de P intersectam a cónica, relativamente aos pontos de intersecção com a cónica. Nas Fig. 3.20 a) b) e c) faz-se passar pelo ponto P três retas que intersectem a curva cónica em dois pontos cada, dentro dos limites do desenho. Traçam-se as diagonais dos quadriláteros assim obtidos, e unindo os pontos de intersecção dessas diagonais e prolongando até à cónica obtemos os pontos A e B de tangência das tangentes t_1 e t_2 . Como método alternativo traçam-se as mesmas três secantes e unem-se por retas os pontos de intersecção de cada um dos lados da curva. Os pontos de intersecção destas retas definem a reta p , reta polar relativamente ao Pólo P . A reta p intersecta a cónica nos pontos A e B de tangência.

3.3.2.2. TRAÇADO DAS TANGENTES A UMA CURVA CÓNICA CONHECIDA GRAFICAMENTE E PARALELAS A UMA DIREÇÃO d DADA

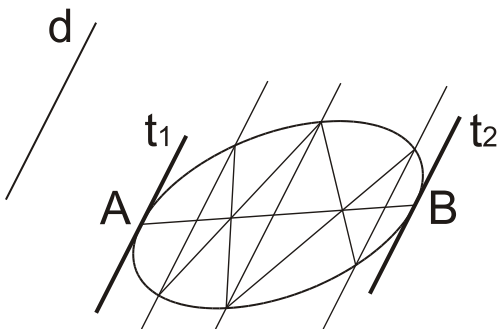


Fig.3.21 a) – Elipse

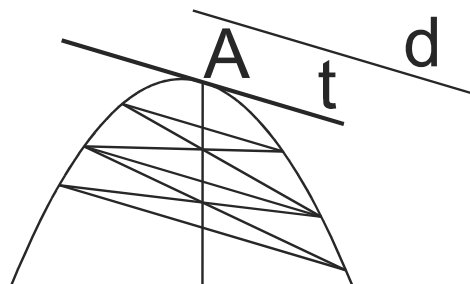


Fig.3.21 b) – Parábola

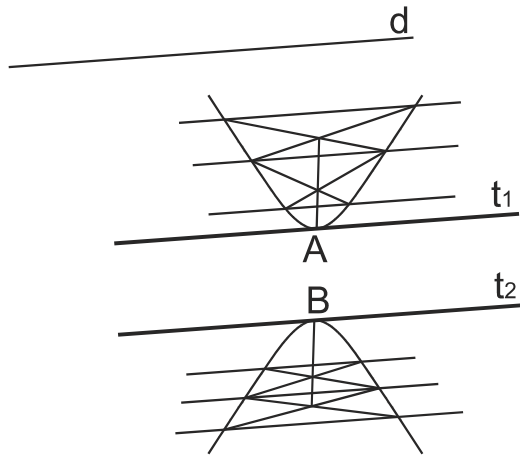


Fig.3.21 c) – Hipérbole

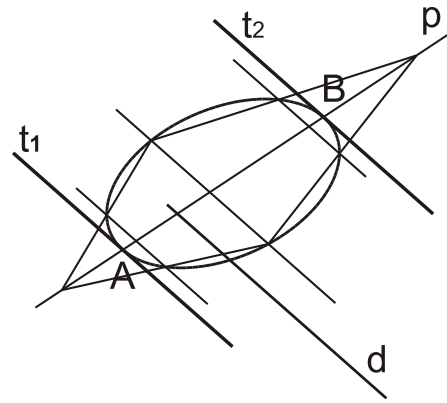


Fig. 3.21 d) – Método alternativo

Igualmente adaptado de IZQUIERDO ASENSI (1985, 103), sendo o fundamento teórico idêntico ao caso anterior. Neste caso o Pólo P está no infinito, pelo que as retas secantes são paralelas. Com três paralelas à direção dada intersectamos a cónica. Com os pontos de intersecção determinamos as diagonais dos quadriláteros. Unindo as intersecções das diagonais por uma reta e intersectando-a com a cónica obtemos A e B que, neste caso, é um diâmetro. O ponto médio de AB é o centro e por ele passa o diâmetro conjugado que é paralelo a d . Nos pontos A e B traçam-se as tangentes paralelas a d . No caso da parábola só existe um ponto de tangência A , sendo que, a reta que une as intersecções das diagonais é o diâmetro conjugado da direção d . Como na parábola os diâmetros são todos paralelos ao eixo, se traçarmos uma corda perpendicular ao diâmetro, e determinarmos o ponto médio da corda, este é um ponto do eixo, o qual é paralelo ao diâmetro.

3.3.2.3. TRAÇADO DA TANGENTE NUM PONTO P DA CURVA CÓNICA CONHECIDA PARTE DESTA GRAFICAMENTE E O CENTRO O

Se a curva for uma cónica central, elipse ou hipérbole portanto, necessitamos conhecer o centro O . Traçando a reta PO esta intersecta a cónica em R que é o outro extremo do diâmetro PR . Traça-se uma corda ST paralela a PR e determina-se o seu ponto médio M . MO é o diâmetro conjugado de PR ao qual a tangente t em P é paralela.

Se a curva for uma parábola, traça-se uma corda PR qualquer a partir de P e uma outra corda paralela ST . M e N são os pontos médios das duas cordas e definem d , diâmetro conjugado das cordas, o qual é paralelo ao eixo e . Traça-se a corda PD perpendicular a d e, no seu ponto médio E , faz-se passar e paralelo a d . A intersecção de e

com a parábola define V que é o vértice da parábola. Obtemos o ponto E' , que é um ponto da tangente, fazendo VE' , simétrico de VE relativamente a V .

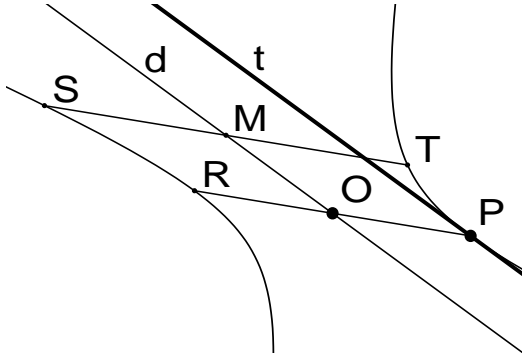


Fig. 3.22 a) – Tangente num ponto da cónica central

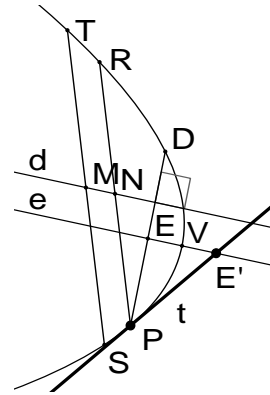


Fig. 3.22 b) – Tangente num ponto da parábola

3.3.2.4. TRAÇADO DAS TANGENTES A UMA CURVA CÓNICA PARALELAS A UMA DIREÇÃO d DADA, CONHECIDA PARTE DA CURVA GRAFICAMENTE E O SEU CENTRO

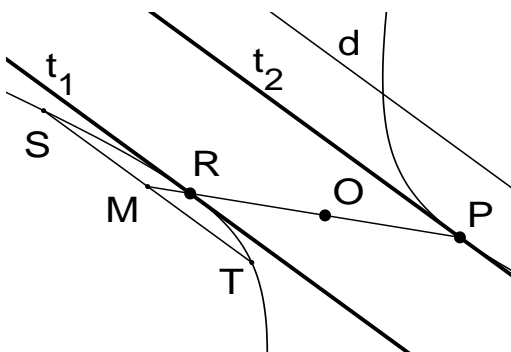


Fig. 3.23 a) – Tangentes a cónica central com direção dada

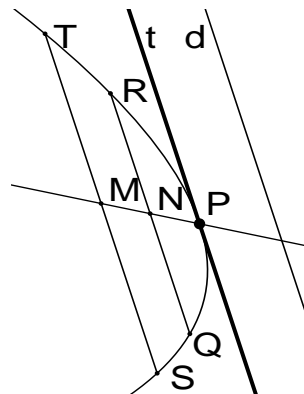


Fig. 3.23 b) – Tangente a parábola com direção dada

Se a cónica for central é necessário conhecer o centro O para resolver o problema por este processo. Traça-se uma corda ST paralela à direção d dada e determina-se o seu



ponto médio M . MO é um diâmetro conjugado da direção d pelo que se determinam os seus extremos P e R por onde passam as tangentes t_1 e t_2 . Se não for conhecido o centro procede-se como para a parábola e determinam-se os dois pontos de tangência.

Se a curva for uma parábola, traça-se duas cordas paralelas à direção d dada e os seus pontos médios M e N definem um diâmetro conjugado da direção, o que permite determinar P , ponto de tangência, na intersecção com a parábola.

3.3.2.5. TRAÇADO DA TANGENTE t DESDE UM PONTO EXTERIOR P A UMA CÓNICA CONHECIDA GRAFICAMENTE UMA PARTE DESTA

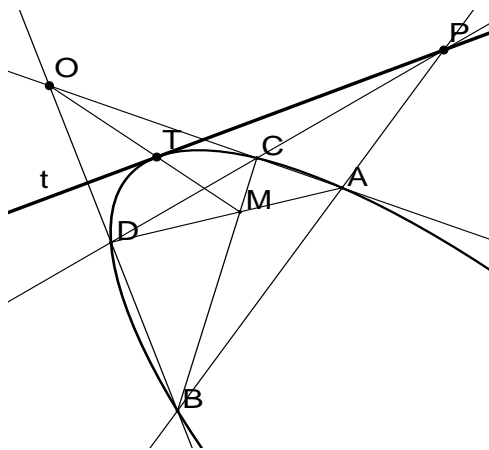


Fig. 3.24 – Tangente a cónica por ponto exterior

Utilizam-se duas propriedades descritas anteriormente. Por P traçam-se duas secantes à curva cónica intersectando-a, cada uma, em dois pontos da curva. Determina-se em seguida o ponto M e o ponto O que são as intersecções de cada par de retas que passam por pontos distintos de cada secante. A reta OM intersecta a curva determinando o ponto T de tangência da reta t .

3.3.2.6. TRAÇADO DA TANGENTE NUM PONTO P DA CURVA CÓNICA DE QUE SE CONHECEM, PELO MENOS, CINCO PONTOS

Neste ponto, e nos imediatamente a seguir, teremos como fundamento as considerações expressas nos pontos anteriores, mas também a definição de cónicas por cinco condições que desenvolveremos mais à frente.

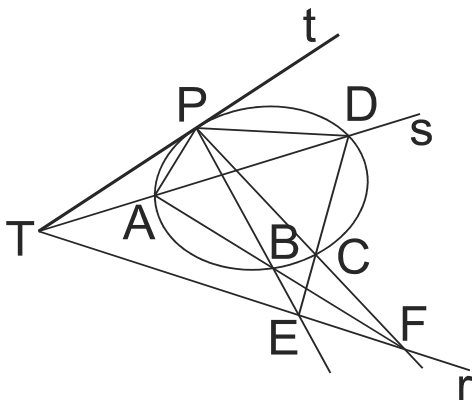


Fig.3.25 a) – Elipse

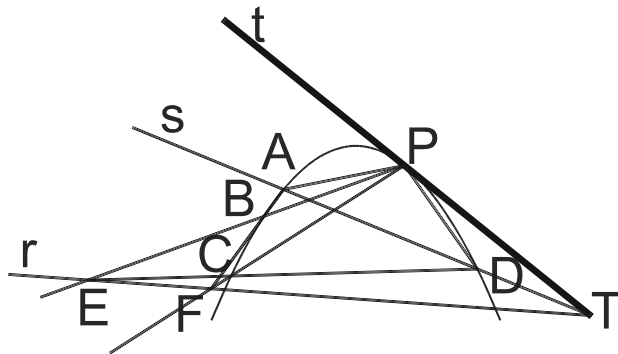


Fig.3.25 b) – Parábola

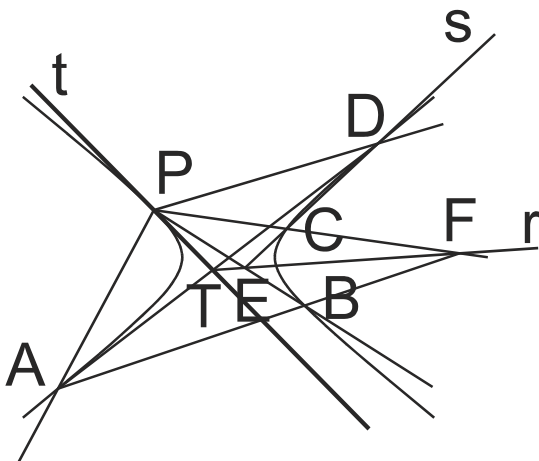


Fig.3.25 c) – Hipérbole

Da definição de cónicas por cinco condições deduz-se este procedimento para determinar a tangente num ponto da cónica. Neste caso, tal como nos anteriores, a cónica pode ser conhecida graficamente, mas é suficiente conhecer cinco pontos, ou seja, o ponto P de tangência, e outros pontos quaisquer A , B , C e D na cónica. PB e CD interseccionam-se em E . AB e PC interseccionam-se em F . EF define r e AD define s . As retas r e s interseccionam-se em T que é um ponto da tangente.

3.3.2.7. TRAÇADO DA TANGENTE NUM PONTO P DE UMA CURVA CÓNICA CENTRAL, CONHECIDO O CENTRO O E A CURVA GRAFICAMENTE, OU DE QUE SE CONHECEM O CENTRO O , O PONTO P DE TANGÊNCIA E OS PONTOS A E B DA CURVA

Obviamente que este problema só se aplica às cónicas centrais, porque as parábolas não têm centro. Tal como no ponto anterior, não é necessário conhecer graficamente a curva, é suficiente conhecer apenas algumas condições, ou seja, neste caso, o ponto P de



tangência, o centro O e outros dois pontos A e B da curva. Traça-se PO e o ponto C , simétrico de P relativamente a O . Onde PA intersesta CB é o ponto D . Onde AC intersesta PB é o ponto E . DE define a reta r que é paralela à tangente t . Utilizámos como fundamento as cónicas por cinco condições e as propriedades do diâmetro.

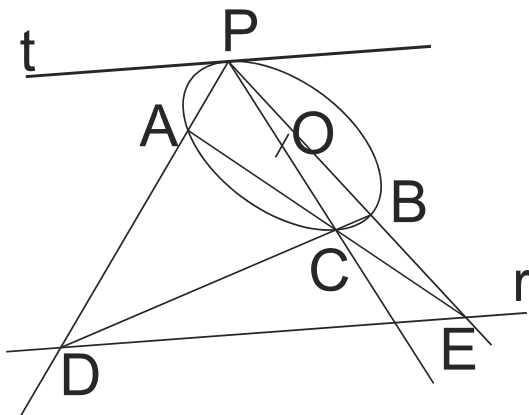


Fig. 3.26 a) – Elipse

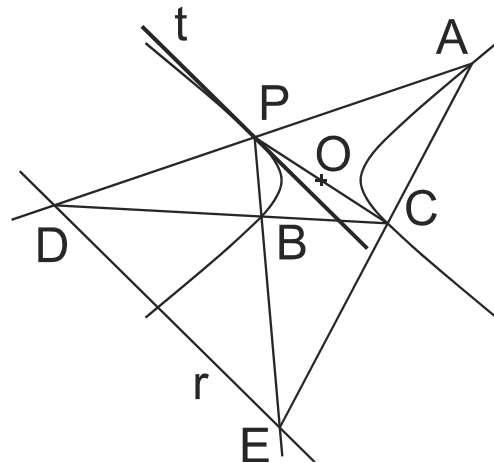


Fig. 3.26 b) – Hipérbole

3.3.2.8. TRAÇADO DA TANGENTE t NUM PONTO P DADO DE UMA CÓNICA CENTRAL, SENDO IGUALMENTE CONHECIDOS UM DIÂMETRO AB E AS TANGENTES t_1 e t_2 NOS EXTREMOS DO DIÂMETRO

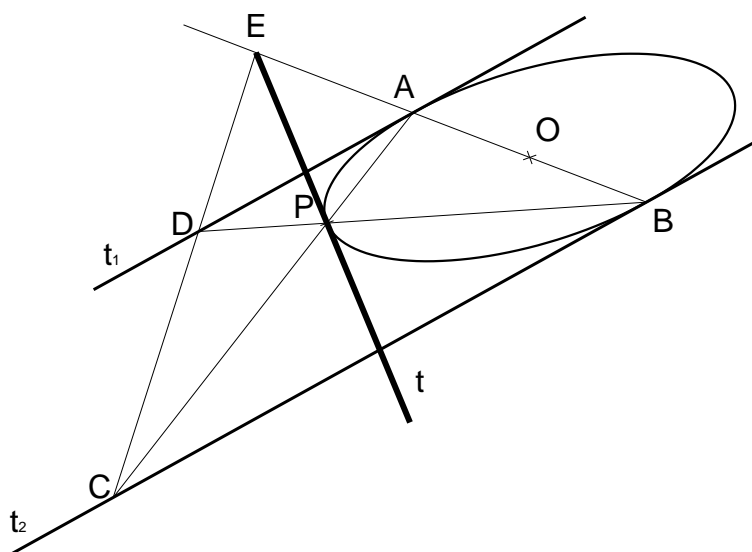


Fig. 3.27 – Determinação da tangente num ponto P da cónica dadas as tangentes em pontos de um diâmetro

Traçam-se as retas AP e BP e interseccionam-se com t_2 e t_1 , determinando C e D . A reta CD intersecciona a reta AB em E , que é um ponto da tangente t .

3.3.2.9. DADAS AS TANGENTES t_1 , t_2 E t_3 E OS PONTOS DE TANGÊNCIA A E B , EM t_1 E t_2 , DETERMINAR O PONTO C , DE TANGÊNCIA EM t_3

Como aplicação das propriedades de Pólo e Polar desenvolvemos um método expedito para, dadas três tangentes a uma cónica e os pontos de tangência em duas delas, determinar o terceiro ponto de tangência. Consiste em traçar as retas AG e BF , que unem cada ponto dado com a intersecção das duas outras tangentes a que o ponto não pertence, e interseccioná-las em P . Por outro lado, as tangentes que contêm A e B , t_1 e t_2 , interseccionam-se no ponto E . A reta EP intersecciona a tangente t_3 em C , que é o ponto de tangência.

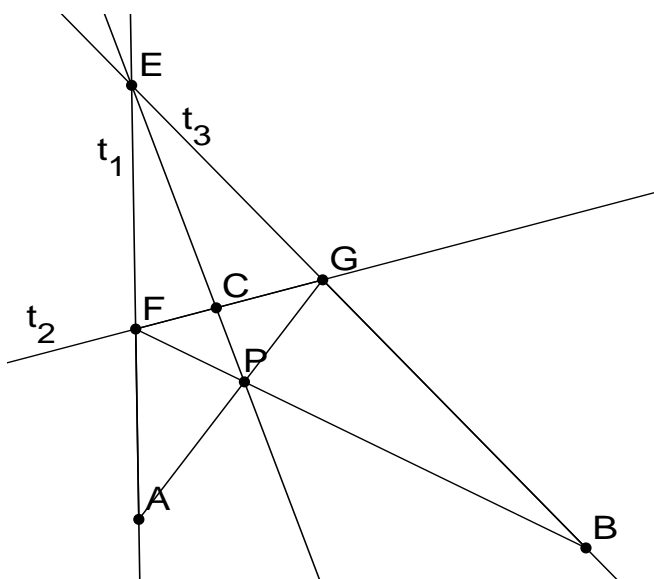


Fig. 3.28 – Determinar terceiro ponto de tangência

3.4. AS CURVAS CÓNICAS CENTRAIS E A SUA DETERMINAÇÃO GRÁFICA

Nos pontos seguintes serão analisadas algumas particularidades relevantes das cónicas centrais e de cada curva cónica em particular, e que podem contribuir para tornar mais expedita a sua utilização prática. Não obstante, há que salientar que, em cada momento, deve ser tido em conta que é necessário saber qual a curva em causa, porque cada uma delas pode originar soluções gráficas diversas ou, pelo menos, implicar adaptações nos procedimentos.



3.4.1. DETERMINAÇÃO DOS DIÂMETROS CONJUGADOS DAS CÔNICAS CENTRAIS, ELIPSE OU HIPÉRBOLE, DADA A DIREÇÃO d DE UM DELES, CONHECIDA A CURVA GRAFICAMENTE

Adaptando a construção proposta por IZQUIERDO ASENSI (1985, 175), e decorrente dos conceitos de Pólo e polar, traça-se três paralelas à direção dada e interseccionam-se com a curva cônica. Traça-se seguidamente as diagonais dos dois quadriláteros e unem-se os dois pontos de intersecção das diagonais por uma reta cuja intersecção com a cônica define o diâmetro AB . M , o ponto médio de AB , é o centro da cônica e passando, por ele, uma paralela a d obtemos o diâmetro conjugado CD . O fundamento do método é o mesmo que permite o traçado de tangentes paralelas a uma direção dada já referido anteriormente.

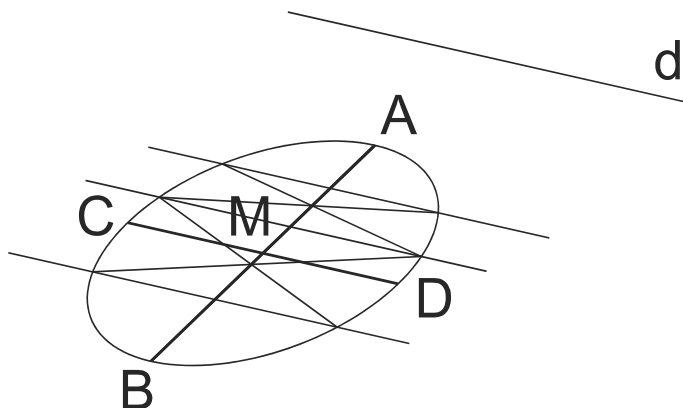


Fig. 3.29 – Determinação de dois diâmetros conjugados

3.4.1.1. DETERMINAÇÃO DO CENTRO DE UMA CÔNICA CENTRAL CONHECIDA ESTA GRAFICAMENTE

É um problema de resolução idêntica ao anterior, estabelecendo-se uma direção qualquer, determinando o diâmetro AB e o seu conjugado CD , e, logo, o centro, o ponto M , na intersecção dos dois diâmetros.

3.4.2. DETERMINAÇÃO DOS EIXOS MAIOR E MENOR DA ELIPSE DADOS DIÂMETROS CONJUGADOS

Apresenta-se seguidamente um conjunto de diferentes métodos para, conhecidos os diâmetros conjugados AB e CD determinar os eixos maior e menor da elipse. É um dos problemas centrais no trabalho gráfico com cónicas tendo em conta, por exemplo, que as

secções em cones oblíquos, ou as curvas cónicas em axonometria, se apresentam em regra através de diâmetros conjugados.

3.4.2.1. MÉTODO HOMOLÓGICO (ROUBAUDI, 1961) e (RICCA, 2000)

Faz-se passar a reta d , tangente em A e paralela a CD . Traça-se a perpendicular a d e determina-se O_1 , centro da circunferência de raio O_1 a C_1 . Para obter C_1 procede-se da mesma forma que para O_1 . Unir O a O_1 , determinar a meia distância e a perpendicular e , que intersesta d no centro E da circunferência que passa em O a O_1 . Essa circunferência intersesta a reta d definindo os pontos da direção dos eixos maiores e menores, de acordo com ROUBAUDI (1961, 19, fig. 21) com a correção introduzida por RICCA (2000, 327 fig. A-16), que introduz um problema semelhante, conhecendo a elipse e o seu centro. Para determinar as dimensões dos eixos da elipse traçam-se duas retas a partir das intersecções da circunferência de centro E dirigidas a O_1 . Nas intersecções das duas retas com a circunferência de centro O_1 traçam-se paralelas a OO_1 , direção de afinidade da elipse com a circunferência, até intersestar as direções dos eixos.

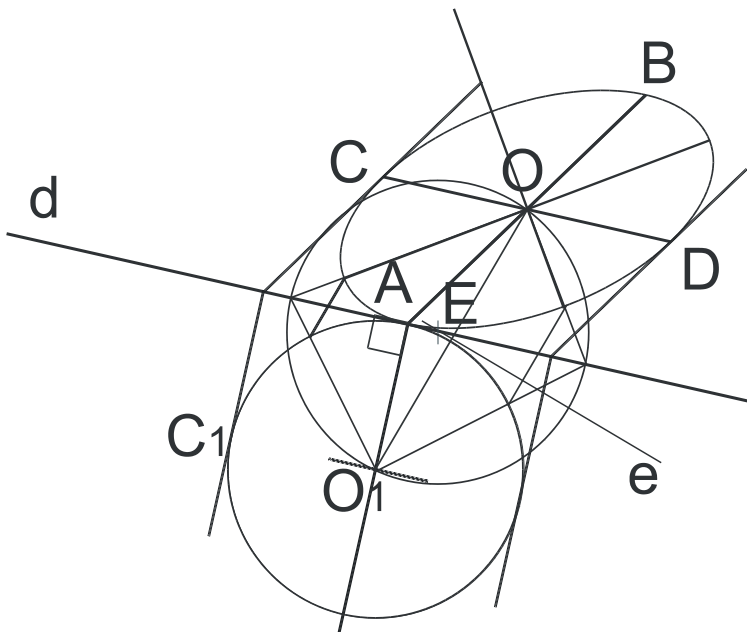


Fig.3.30 – Eixos a partir de diâmetros conjugados por homologia

Igualmente em PEGADO (1899, 133) no seu Ponto 264 e respetiva figura 201 da Est. 40 se apresenta uma solução semelhante para a determinação da direção dos eixos, e, num segundo passo determinar as suas dimensões.



3.4.2.2. MÉTODO DE MANNHEIM

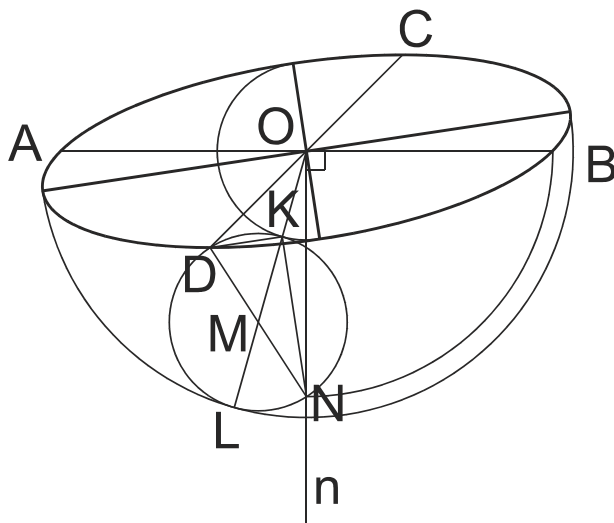


Fig. 3.31 – Método de Mannheim

Citando IZQUIERDO ASENSI (1988, 124, fig. 10.8.b), por B traçar um arco até n perpendicular a AB , obtendo o ponto N . Unindo N a D obtemos o meio da distância M e traçamos a circunferência com centro M e raio DM . Unindo O a M obtemos K e L na circunferência de centro M . O quadrilátero $[DLNK]$ tem lados paralelos aos eixos maior e menor da elipse. OL define a medida do semieixo maior e OK define a medida do semieixo menor.

3.4.2.3. MÉTODO DE CHASLES

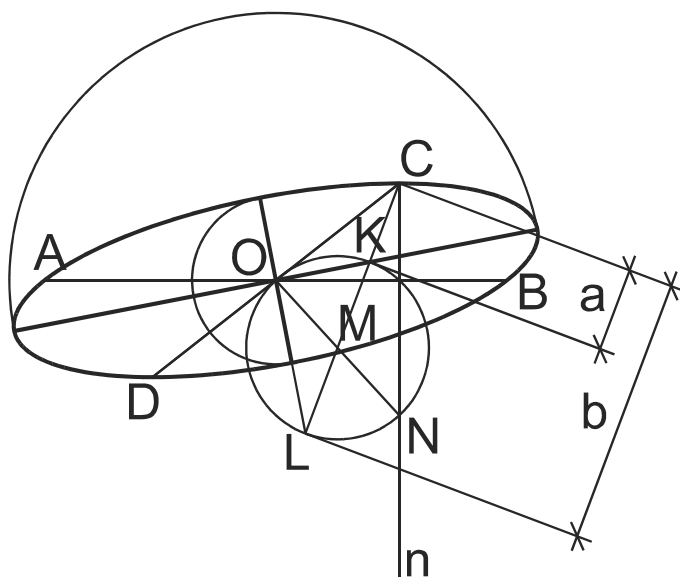


Fig. 3.32 – Método de Chasles



De acordo com IZQUIERDO ASENSI (1988, 123, fig. 10.8.a), por C traçar n perpendicular a AB . Sobre n marcar $CN=OB$. Unindo O a N e determinando o ponto médio M podemos construir a circunferência de raio OM . Unindo C a M e intersetando com a circunferência obtemos os pontos K e L que com O e N definem as direções dos eixos da elipse. As distâncias $a = CK$ e $b = CL$ definem as meias distâncias dos eixos menor e maior que têm direções de OL e OK .

3.4.2.4. MÉTODO DESCRITO EM CUNHA (1982, 158)

Segundo CUNHA (1982, 158, Fig. 6.42b) faz-se passar pelo menor diâmetro conjugado, CD neste caso, uma circunferência de centro O . Traça-se o diâmetro EF perpendicular a CD . Determina-se seguidamente a bissetriz do ângulo EBF a qual define a direção do eixo maior, que lhe é paralelo. Obviamente o eixo menor é perpendicular. EB interseta o eixo menor em G . EG é a medida a do semieixo menor e GB é a medida b do semieixo maior.

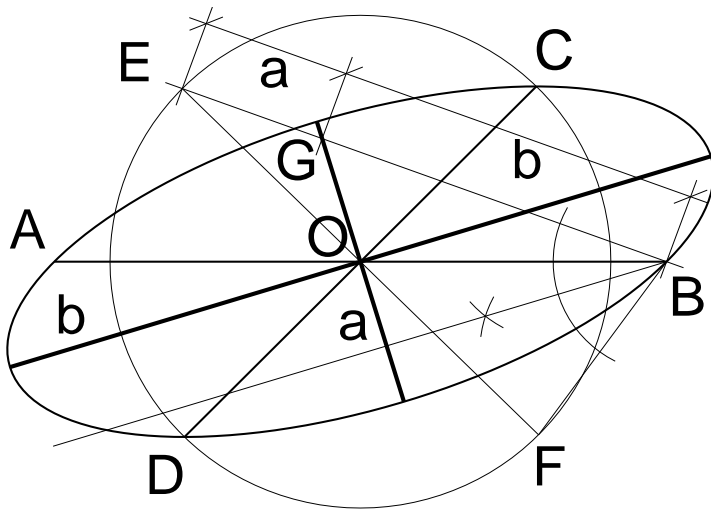


Fig. 3.33 – Determinação dos eixos dados diâmetros conjugados

3.4.2.5. MÉTODO DE AFINIDADE

Conhecidos os diâmetros conjugados AB e CD estabelece-se a relação de afinidade da elipse com uma circunferência com o mesmo centro e diâmetro igual ao do maior diâmetro conjugado, neste caso AB . Traça-se, no centro O , a perpendicular a AB que interseta a circunferência em C_1 . Une-se por uma reta C_1C , definindo a direção de afinidade d . Determina-se M , ponto médio de CC_1 , e por este ponto traça-se perpendicularmente a mediatriz de CC_1 até intersetar AB em Q . Com centro em Q , e raio QC_1 , traça-se uma

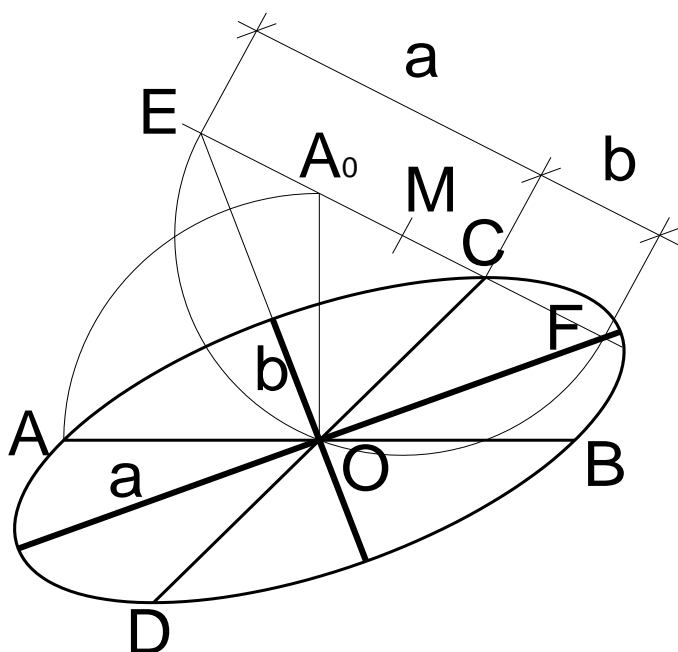


Fig. 3.35 – Método de Ritz

3.4.3. DETERMINAÇÃO DOS EIXOS E FOCOS DA HIPÉRBOLE SENDO DADOS OS DIÂMETROS CONJUGADOS

Tendo em conta que são raras e complexas as referências a este problema na literatura, desenvolvemos este método tendo em conta as propriedades da hipérbole que apresentámos no Cap. 2 Fig. 2.60, em conjunto com o método derivado do hiperboloide que consta dos traçados da hipérbole que se descrevem no ponto seguinte.

Dado o diâmetro AB que contém pontos da hipérbole, e o seu conjugados CD , constrói-se o paralelogramo $[EGFH]$ de lados paralelos aos diâmetros e com o mesmo centro O . As diagonais EF e GH do paralelogramo são as assíntotas, a_1 e a_2 , da hipérbole. A bissetriz do ângulo das assíntotas em relação a A , ou seja o ângulo EOH , define a direção da reta e_1 que contém o eixo transversal e a outra bissetriz das assíntotas e_2 é o eixo de simetria dos ramos da hipérbole. A partir de A traça-se uma perpendicular a e_1 intersecando-o em A_0 , e uma paralela a e_1 intersecando a_1 em A_1 . A partir de A_1 traça-se uma perpendicular a e_1 que interseca o arco de centro O e raio OA_0 em A_2 . A reta t que passa em A_2 e é paralela a e_1 é a tangente na circunferência de gola. Tal permite determinar I na intersecção de t com e_2 . Traçada a circunferência de centro O e raio OI esta interseca e_1 em X_1 e X_2 que definem o eixo transversal. Traçando por X_1 e X_2 perpendiculares a e_1 , até intersecarem as assíntotas em J e K , obtemos a circunferência focal com centro O e raio OJ e OK . Esta interseca e_1 nos focos F_1 e F_2 .

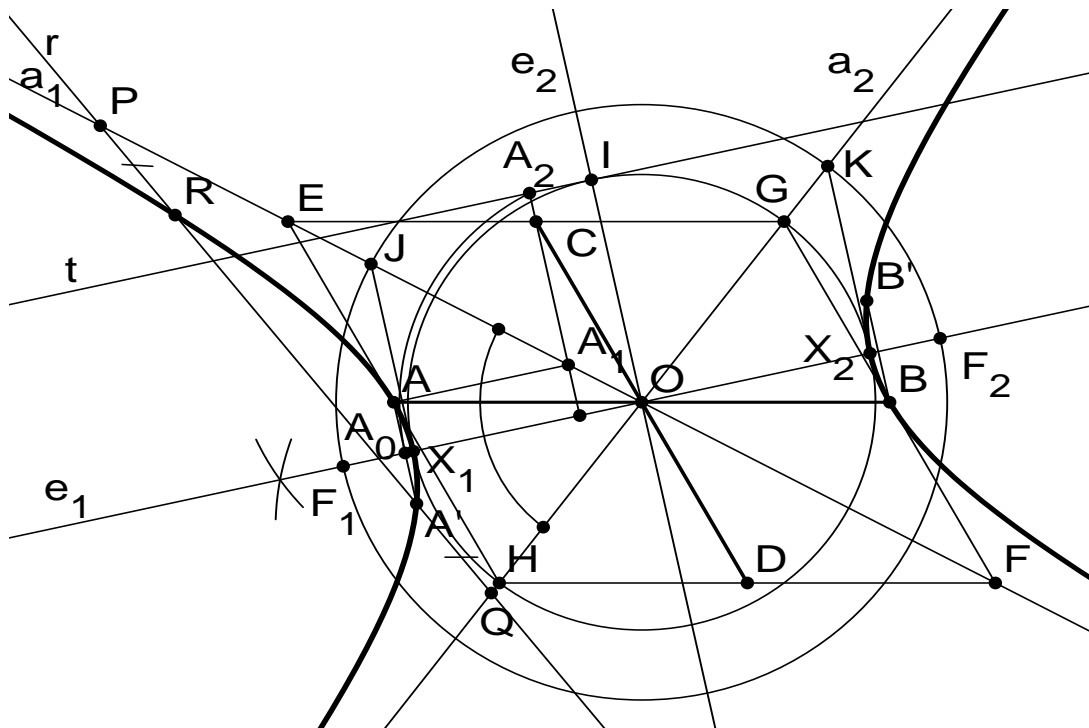


Fig. 3.36 – Determinação de eixos e focos da hipérbole por diâmetros conjugados

Se quisermos definir a hipérbole por pontos podemos determinar A' e B' , simétricos de A e B relativamente ao eixo e_1 , e traçar uma reta r qualquer a partir de um destes quatro pontos, no caso A' , e intersectá-la com as assíntotas em P e Q . A partir de P definimos R , ponto da hipérbole, sendo o segmento PR igual a $A'Q$. Para obter outros pontos traçam-se outras retas a partir de pontos conhecidos da hipérbole e repete-se o processo.

3.4.4. DETERMINAR OS DIÂMETROS CONJUGADOS, COM EXTREMO DE UM DELES NUM PONTO P QUALQUER DA ELIPSE CONHECIDOS OS EIXOS ABE E CD

A partir de uma propriedade descrita em DAY (1868, 75-76) pode deduzir-se o processo para, a partir dos eixos da elipse, determinar o diâmetro conjugado de um outro cujo ponto P da elipse é um dos extremos.

Determina-se os focos F_1 e F_2 . A bissetriz do ângulo F_1PF_2 interseca o eixo maior em E . Seguidamente determina-se G , na intersecção da perpendicular em E ao eixo maior com o arco de centro E e que passa em P . Traça-se GH paralelo à corda CB até interseccionar o eixo

maior em H . Depois determina-se I , na intersecção do arco, com centro E e que passa em H , com a perpendicular a PE . EI define a direção do eixo conjugado. A paralela a EI que passa em O intersesta a paralela ao eixo maior que passa em I no ponto R que é um dos extremos do diâmetro conjugado. Os outros extremos dos diâmetros, Q e S , são simétricos de P e R relativamente ao centro O .

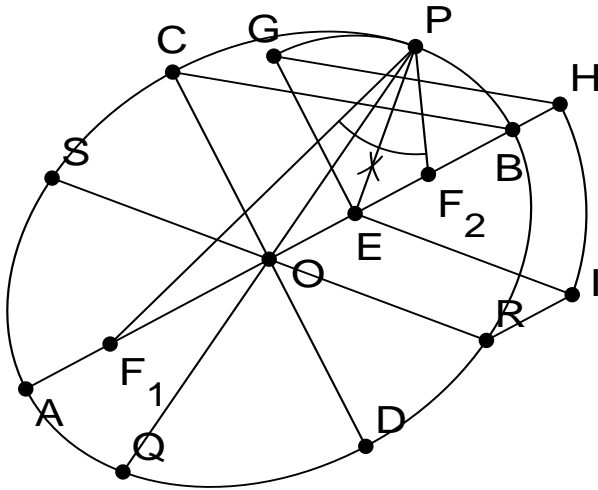


Fig. 3.37 – Determinar diâmetros conjugados dados os eixos da elipse

3.5. TRAÇADOS RELATIVOS A CADA UMA DAS CURVAS CÔNICAS

Abordaremos seguidamente o desenvolvimento de traçados especificamente aplicados a cada uma das curvas cónicas, tendo em conta propriedades específicas de cada uma delas embora, embora sejam utilizados métodos geométricos genéricos. De referir ainda que, em alguns dos casos são utilizados procedimentos cuja fundamentação teórica será abordada mais à frente. Não obstante, são apresentados neste ponto quando correspondam a construções geométricas objeto de utilização genérica, e não necessitem do conhecimento da sua fundamentação teórica para a sua utilização prática. Nesses casos, optou-se por indicar apenas o campo teórico da sua fundamentação.

3.5.1. A ELIPSE

3.5.1.1. CONSTRUÇÃO DA ELIPSE DE EIXO MAIOR AB E MENOR CD RESULTANTE DA ROTAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA EM TORNO DO EIXO MAIOR

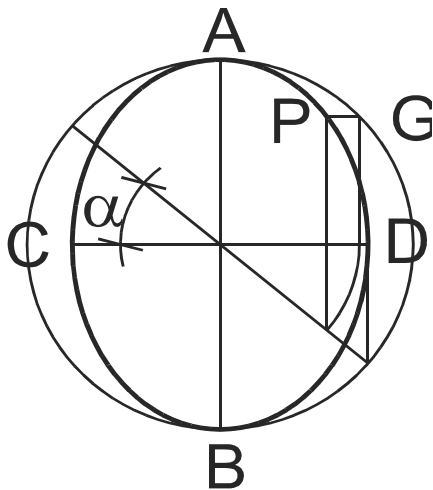


Fig. 3.38 – Elipse por rotação

Traça-se a circunferência de diâmetro AB e determina-se um ângulo α de rotação do eixo CD , para que os extremos do segmento de reta que define o diâmetro da circunferência se situem em paralelas a AB a passar em C e D .

Para determinar um ponto P qualquer da curva define-se G qualquer sobre a circunferência AB , projeta-se G sobre CD , roda-se na medida do ângulo e inverte-se a projeção até P , sendo PG paralelo a CD .

Este método de rotação da circunferência é de utilização genérica para obtenção de pontos da elipse, sempre que se conheçam os eixos.

3.5.1.2. DETERMINAÇÃO DO PONTO E DA ELIPSE A UMA DISTÂNCIA d DO EIXO MAIOR, CONHECIDOS OS EIXOS

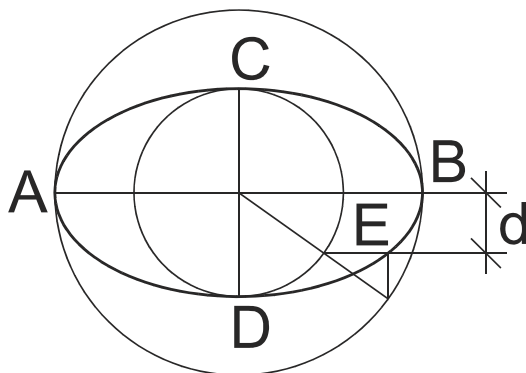
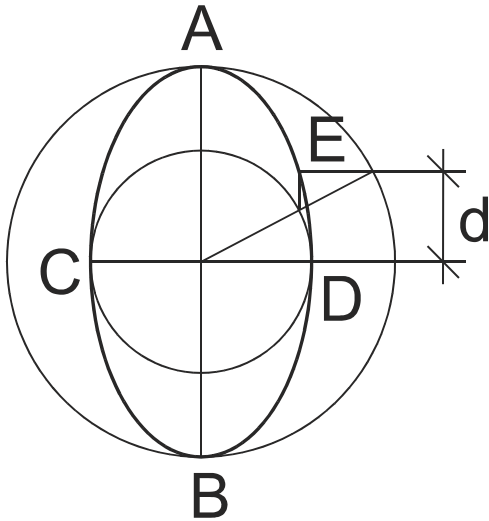


Fig. 3.39 – Ponto da elipse a uma dada distância do eixo maior

De acordo com IZQUIERDO IZQUIERDO ASENSI (1985, 125) e CUNHA (1982, 157) desenha-se as circunferências de diâmetros AB e CD . Traça-se uma paralela a AB à distância d . Onde esta intersesta a circunferência menor traça-se um raio até intersestar a circunferência maior e, nesse ponto, uma paralela a CD . A intersecção das duas paralelas ao eixo é o ponto E da elipse. Outros pontos obtêm-se pelo mesmo procedimento.

3.5.1.3. DETERMINAÇÃO DO PONTO E DA ELIPSE A UMA DISTÂNCIA d DO EIXO MENOR, CONHECIDOS OS EIXOS



Sendo um problema similar ao do ponto anterior, e adaptando a partir de IZQUIERDO ASENSI (1985, 125) e CUNHA (1982, 157), traça-se uma paralela à distância d do eixo menor e intersectando com a circunferência maior para obter a direção do raio. Onde este intersecta a circunferência menor traça-se uma paralela a AB até intersectar a paralela a CD em E . Repete-se a diferentes distâncias para obter outros pontos da elipse.

Fig. 3.40 – Elipse partindo do eixo menor

3.5.1.4. DADOS OS DIÂMETROS CONJUGADOS AB E CD DETERMINAR OS PONTOS E E F DA ELIPSE A UMA DETERMINADA DISTÂNCIA DO DIÂMETRO CD

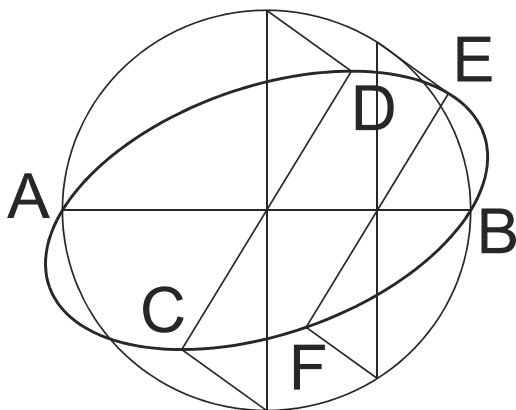


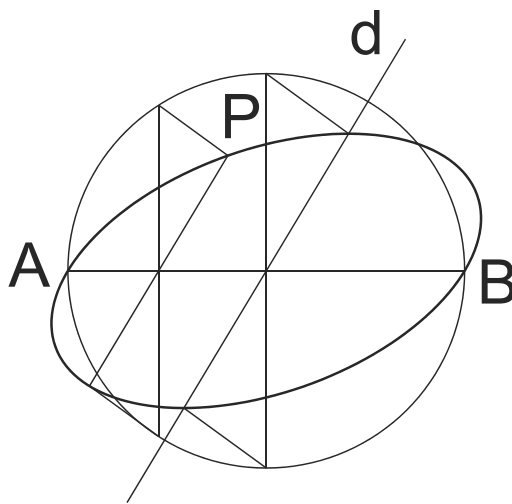
Fig. 3.41 – Pontos da elipse por diâmetros conjugados

De acordo com IZQUIERDO ASENSI (1985, 175), CUNHA (1982, 158, Fig. 6.41b) e RICCA (2000, 329, Fig. A-18) pelo centro traça-se uma perpendicular a AB e a circunferência com o mesmo diâmetro. Os pontos onde a perpendicular intersectou a



circunferência são unidos por segmentos a C e D definindo dois triângulos. À distância pretendida traça-se uma paralela a CD . Onde essa paralela intersesta o eixo AB traça-se uma perpendicular ao eixo até cruzar a circunferência. Por esses dois pontos traçam-se as paralelas que determinam E e F construindo triângulos semelhantes e de lados paralelos aos anteriores.

3.5.1.5. CONSTRUÇÃO GRÁFICA DA ELIPSE CONHECIDO UM DIÂMETRO AB , A DIREÇÃO d DO SEU CONJUGADO, E UM PONTO P QUALQUER



Com procedimento idêntico ao do problema anterior, traça-se triângulos semelhantes e de lados paralelos aos do triângulo relativo ao ponto P da elipse determinando os extremos do diâmetro conjugado. Para obter mais pontos repete-se o processo.

Fig. 3.42 – Direção de diâmetro e ponto

3.5.1.6. CONSTRUÇÃO DA ELIPSE, PELO MÉTODO DOS FEIXES PROJETIVOS, CONHECIDOS OS EIXOS E O PARALELOGRAMO RESULTANTE DAS TANGENTES NOS EXTREMOS DOS EIXOS

Tendo em conta que os eixos são caso particular dos diâmetros conjugados o processo é válido, também, para construir a elipse, dados os diâmetros conjugados. Segundo IZQUIERDO ASENSI (1985, 176), consiste em dividir AB e BC num determinado número de partes iguais e depois traçar retas por E e pelos pontos correspondentes a cada uma das partes de AB até as intersestar com os segmentos de reta que definidos pelos pontos de cada parte de BC e por D , pela ordem definida.

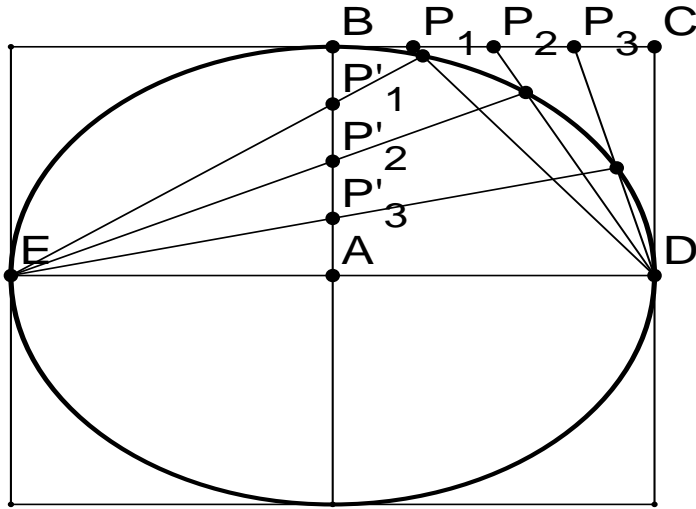


Fig. 3.43 – Elipse por feixes projetivos

3.5.1.7. DETERMINAÇÃO DA TANGENTE NUM PONTO P DA ELIPSE DADA GRAFICAMENTE E CONHECENDO OS SEUS EIXOS

Vamos utilizar neste ponto e nos seguintes traçados derivados da circunferência principal da elipse.

Traça-se a circunferência principal, de diâmetro igual ao eixo maior da elipse e prolonga-se este. Pelo ponto P da elipse traça-se uma perpendicular ao eixo maior até interseção a circunferência em P_r . Traça-se o raio correspondente. A tangente t_r à circunferência é perpendicular ao raio e interseção a reta do eixo maior em R . RP define a tangente t à elipse. Este problema seria similar ao do traçado da tangente a uma elipse conhecida graficamente a partir de um ponto exterior R no prolongamento do eixo maior.

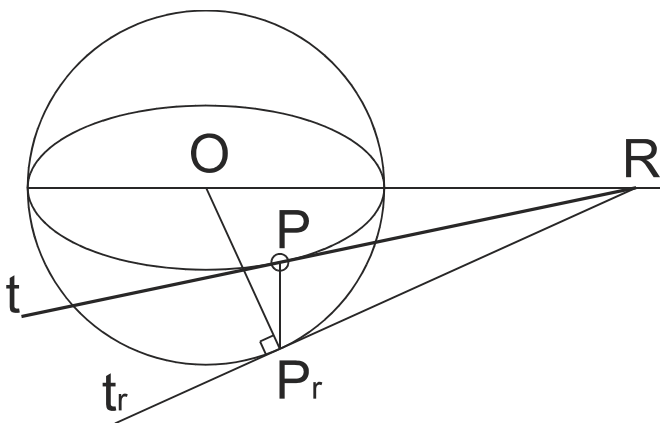


Fig. 3.44 – Tangente à elipse no ponto P



3.5.1.8. DETERMINAÇÃO DAS TANGENTES DA ELIPSE DADA GRAFICAMENTE, A PARTIR DE UM PONTO P EXTERIOR

Traça-se a circunferência principal de diâmetro igual ao eixo maior. A elipse é a rotação da circunferência em torno de um diâmetro. OP interseca a elipse em R . Projeta-se R perpendicularmente ao eixo maior até R_r na circunferência. A reta OR_r interseca em P_r a perpendicular ao eixo maior a passar em P . Por P_r determina-se os pontos T_r e T'_r de tangência à circunferência, traçando-se a partir do ponto médio de P_rO um arco de circunferência a passar em O que interseca a circunferência nos pontos de tangência nesta. Invertendo a rotação, traça-se perpendiculares ao eixo maior por T_r e T'_r até intersestar a elipse em T e T' que são os pontos de tangência.

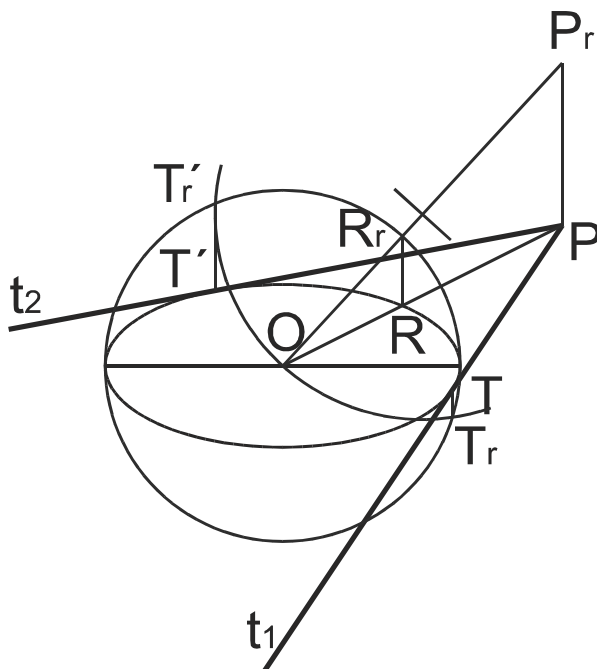


Fig. 3.45 a) – Tangentes à elipse a partir de um ponto exterior

Um processo alternativo para a resolução do mesmo problema é o indicado por CUNHA (1982, 159) mas que implica a determinação dos focos. Traça-se um arco de circunferência com centro em P e a passar por F_2 e intersesta-se com outro de centro F_1 e raio igual ao eixo maior, ou seja, um arco da circunferência diretora. Os dois arcos intersestam-se em I e J e os segmentos IF_1 e JF_1 intersestam a elipse nos pontos de tangência T_1 e T_2 das tangentes t_1 e t_2 .

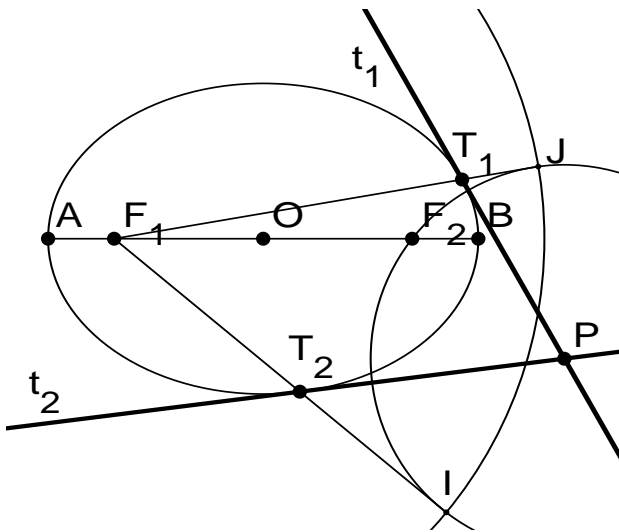


Fig. 3.45 b) – Tangentes à elipse a partir de um ponto exterior

3.5.1.9. DETERMINAÇÃO DAS TANGENTES DA ELIPSE, DADA GRAFICAMENTE, PARALELAS A UMA DIREÇÃO d , CONHECIDO O EIXO MAIOR DA CURVA

Começa-se por traçar a reta r paralela a d a passar no centro da curva, e determina-se R , de intersecção de r com a elipse. Com diâmetro igual ao eixo maior da elipse traça-se a circunferência principal e projeta-se R , perpendicularmente ao eixo maior, sobre a circunferência obtendo R_r que, com O , define r_r . O diâmetro da circunferência, perpendicular a r_r , determina nesta os pontos T_r e T'_r . Projetando perpendicularmente ao eixo estes pontos sobre a elipse obtemos T e T' que são os pontos de tangência, nos quais passamos as tangentes t_1 e t_2 .

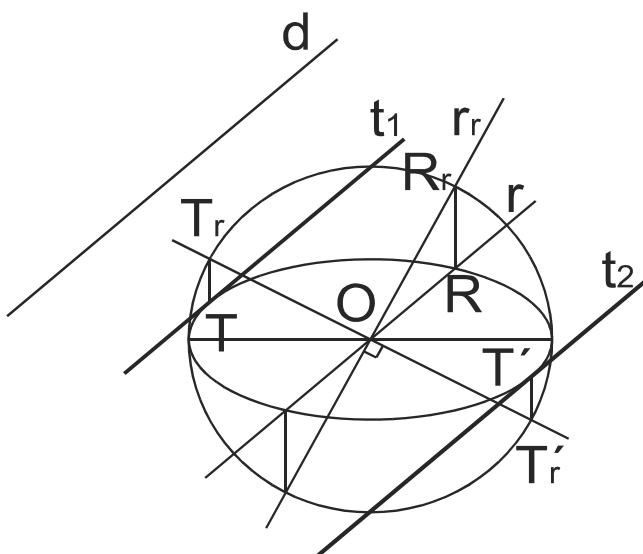


Fig. 3.46 – Tangentes paralelas a uma direção



3.5.1.10. CONHECIDO O EIXO MAIOR AB E UM PONTO P DA ELIPSE DETERMINAR A TANGENTE NESSE PONTO

Determina-se o eixo menor e , depois, os focos F_1 e F_2 . Por uma propriedade descrita por DAY (1868, 73) deduz-se que, se unirmos por um segmento P a qualquer dos focos e pelo seu ponto médio M traçarmos MO até interseção com a circunferência de diâmetro AB obtemos o ponto I que é um ponto da tangente t . IF_1 é perpendicular à tangente.

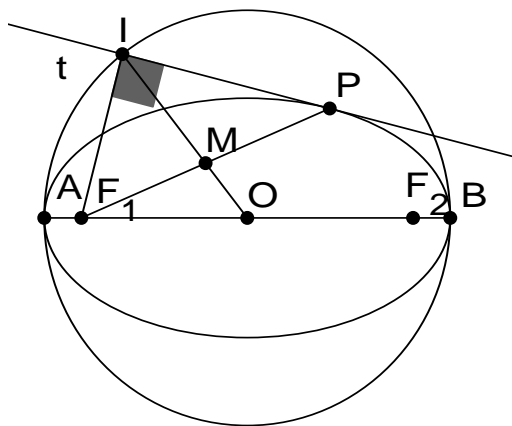


Fig. 3.47 – Tangente num ponto

3.5.1.11. DADO O EIXO MAIOR AB E UM PONTO P DA ELIPSE DETERMINAR A TANGENTE EM P E OS FOCOS DA ELIPSE F_1 E F_2

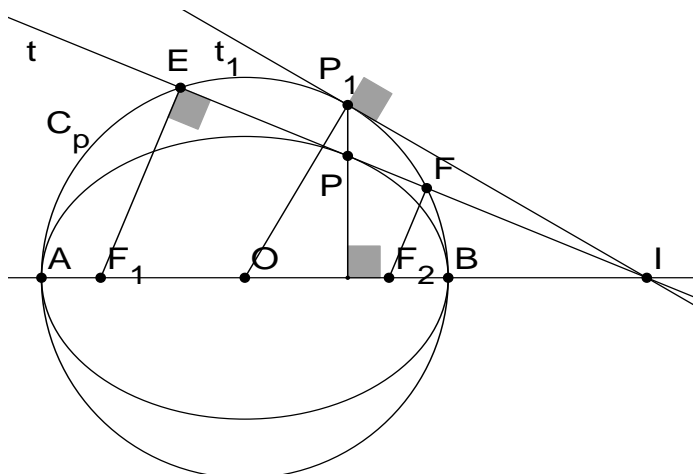


Fig. 3.48 – Focos a partir do eixo maior e de um ponto

Traça-se a circunferência principal C_p e projeta-se P ortogonalmente ao eixo sobre C_p , determinando P_1 . Por P_1 traça-se a tangente t_1 à circunferência que interseção o eixo em

1. IP define a tangente t à elipse. A tangente t intersesta a circunferência C_p em E e F . Nestes pontos traça-se perpendiculares a t que intersestam o eixo em F_1 e F_2 .

3.5.2. A PARÁBOLA

Devemos lembrar que todas as parábolas, sendo definidas apenas pela distância do foco à diretriz, são graficamente semelhantes, ou seja, variam apenas de tamanho, pois tal propriedade vai ser tida em conta em alguns dos traçados seguintes.

3.5.2.1. DETERMINAÇÃO GRÁFICA DA PARÁBOLA, CONHECIDOS A TANGENTE t NO VÉRTICE E DOIS PONTOS A IGUAL DISTÂNCIA DESTA

O processo seguinte, que não encontramos documentado na literatura, foi apresentado em COSTA (2009). Determina-se o vértice da parábola na projeção ortogonal do ponto médio de AB sobre t . Para determinar um ponto C qualquer da parábola, a uma determinada distância do eixo, traça-se C_1C_2 paralelo ao eixo à distância pretendida, determina-se M , ponto médio de VC_1 e N , ponto médio de AC_2 , e onde NM intersesta o eixo e faz-se passar uma reta a partir de A a qual intersesta C_1C_2 no ponto C . Para obter outros pontos procedeu-se da mesma forma. Este processo tem a limitação de, por si só, não permitir determinar o foco. Não obstante é igualmente válido para o traçado da parábola quando é dado um ponto de tangência de uma tangente paralela à corda AB , como se descreverá em 3.5.2.11..

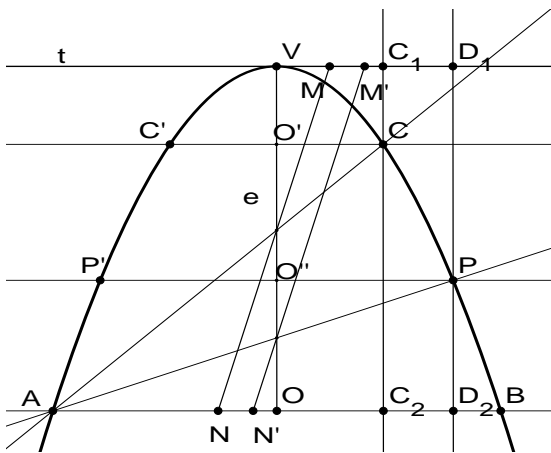


Fig.3.49 a)

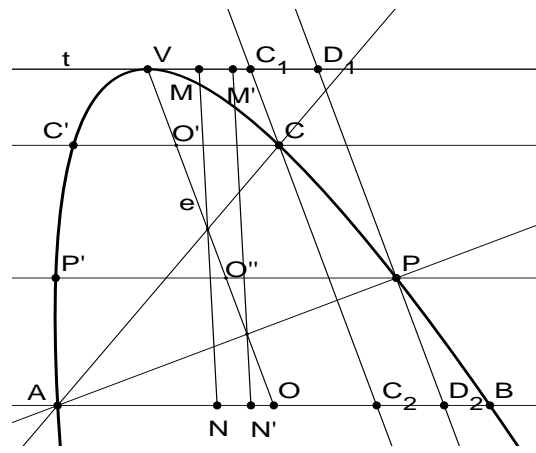


Fig. 3.49 b)

Fig. 3.49 – Parábola ponto a ponto



3.5.2.2. CONSTRUÇÃO DA PARÁBOLA POR FEIXES PROJETIVOS, CONHECIDA A DISTÂNCIA FOCAL

A partir de IZQUIERDO ASENSI (1985, 195, fig.10.33) e CUNHA (1982, 164) estabelece-se o seguinte procedimento. Traça-se o quadrado $[VABC]$. De notar que VA e AB têm comprimentos iguais a $2p$, ou seja o dobro da distância focal ou parâmetro, medida do foco F à diretriz d . O **parâmetro da parábola** é igual à distância do foco à diretriz.

Divide-se VA e AB num qualquer número de partes. Nos pontos de VA traçam-se paralelas ao eixo. O ponto 1 de AB une-se ao vértice e onde a linha intersesta a paralela que passa em 1 obtemos o primeiro ponto. Procedemos da mesma forma para os outros pontos e, se for necessário determinar mais, é só marcar espaços iguais ao longo das duas retas e repetir o processo.

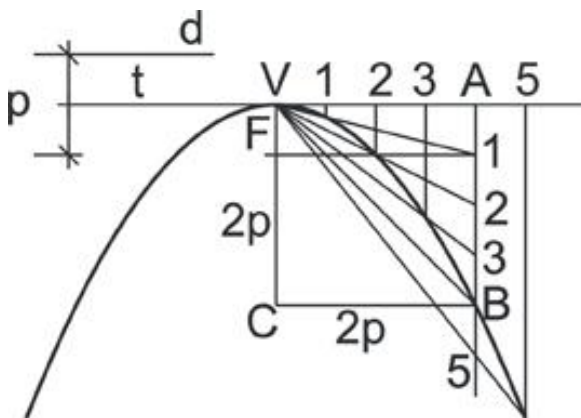


Fig. 3.50 – Parábola por feixes projetivos

3.5.2.3. CONSTRUÇÃO DA PARÁBOLA CONHECIDO O PARÂMETRO (Método de Michetti)

Em MICHETTI (1998, 93) encontra-se a construção seguinte. Considera-se uma linha auxiliar, paralela ao eixo e a distância deste igual ao parâmetro. Estabelece-se A como vértice da parábola. A uma distância qualquer deste ponto definimos um ponto B sobre o eixo e, nesse ponto fazemos passar uma perpendicular até intersestar a paralela ao eixo em B' . Com centro em B , traça-se o arco de circunferência de raio BB' até intersestar o eixo em B'' . Determina-se de seguida o ponto O , ponto médio de AB'' , e traça-se a circunferência de centro O , que tem o segmento por diâmetro. A circunferência intersesta a perpendicular ao eixo nos pontos nos pontos B_1 e B_2 que são pontos da parábola. Para obter outros pontos repetiu-se o processo marcando sobre o eixo C e D .

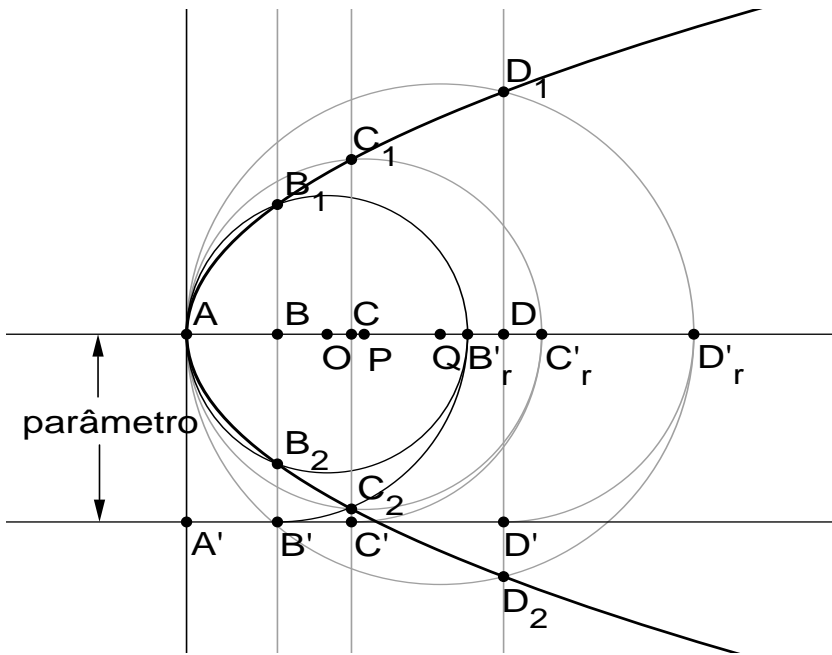


Fig. 3.51 – Parábola conhecido o parâmetro

3.5.2.4. DETERMINAÇÃO DE PONTOS DA PARÁBOLA DE DADOS UM PONTO A A SUA TANGENTE t_1 E O EIXO

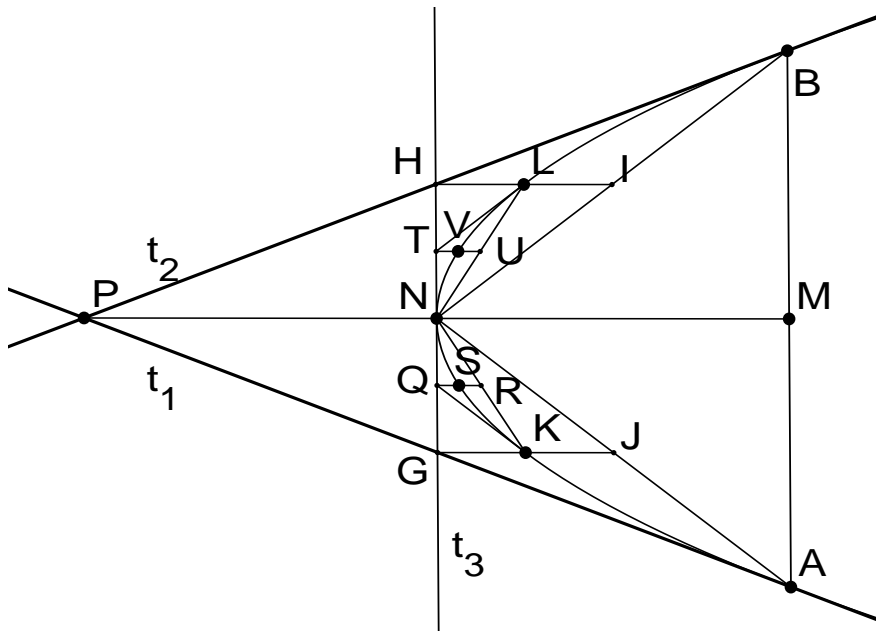


Fig.3.52 – Parábola (Teorema de Fermat)



Segundo BOYER (2005, 240), nos estudos de Fermat sobre o que são conhecidas como as *parábolas de Fermat*, ou seja equações do mesmo tipo da parábola, do ponto de vista analítico, este demonstrou que, **se por um ponto A da parábola traçarmos a sua tangente e a intersetarmos com o eixo da parábola, o ponto de intersecção é equidistante do vértice relativamente à projeção ortogonal do ponto A sobre o eixo.** Tal propriedade permite determinar outros pontos da curva, situados entre A e B , sendo B simétrico de A relativamente ao eixo.

Sendo A e B simétricos relativamente ao eixo, as suas tangentes t_1 e t_2 são-no igualmente. O ponto M , projeção ortogonal de A sobre o eixo, é igualmente o ponto médio de AB , o que vai ser utilizado no desenvolvimento do problema.

Segundo o teorema sendo P a intersecção da tangente com o eixo, o ponto N , ponto médio de PM , é o vértice da parábola. Em COSTA (2005, 64) desenvolvemos concluindo que G , a intersecção das tangentes t_1 e t_3 em N e A , é igualmente o ponto médio da projeção de A sobre a tangente no vértice e o próprio vértice. Ou seja, **a intersecção de qualquer tangente da parábola com a tangente no vértice é o ponto médio da projeção do ponto de tangência sobre a tangente no vértice e o próprio vértice.**

A tangente t_3 no vértice N da parábola é paralela a AB . Por outro lado lembre-se que na parábola todos os diâmetros são paralelos ao eixo (ponto 2.9. Fig.2.61). Então se, por exemplo, traçarmos a corda NA e determinarmos o seu ponto médio J , GJ é um diâmetro e K , o seu ponto médio, é um ponto da parábola.

Daqui podemos concluir que, **se pelo ponto médio de uma corda qualquer da parábola traçarmos o diâmetro respetivo, paralelo ao eixo, e que passa no ponto de intersecção das tangentes nos extremos da corda, o ponto médio do segmento do diâmetro entre a corda e as tangentes no extremo destes é um ponto da parábola.** Então K e L , simétrico de K relativamente ao eixo, são pontos da parábola. Aplicando a mesma propriedade concluímos que também se traçarmos a corda KN e nela determinarmos o seu ponto médio R e traçarmos o diâmetro paralelo ao eixo este interseta t_3 em Q sendo QK a tangente em K paralela à corda NK . Conclui-se do exposto que **dada uma corda da parábola, se pelo seu ponto médio fizermos passar o diâmetro, paralelo ao eixo, este interseta a parábola num ponto cuja tangente é paralela à corda.**

Voltando à propriedade antecedente, o ponto S ponto médio de QR sendo R ponto médio de KN . Igualmente são pontos da curva L e V , simétricos de K e S relativamente ao eixo. Tal permite determinar novos pontos da curva.

Estas propriedades permitem concluir um processo genérico para resolver problemas do tipo do seguinte e têm uma consequência significativa pois permitem concluir que,

atendendo que as cordas e diâmetros a passar no ponto médio podem não ser ortogonais desde que a corda não seja perpendicular ao eixo, então **uma parábola em axonometria é outra parábola ou degenera em reta**, se o plano da parábola for perpendicular ao plano de representação. Tal será desenvolvido no ponto próprio, respeitante à representação axonométrica de cónicas.

3.5.2.5. DETERMINAÇÃO DA PARÁBOLA SENDO DADOS OS PONTOS A E B E AS SUAS TANGENTES t_1 E t_2

Por aplicação direta das propriedades anteriores, aplicando uma afinidade seria obtido um resultado similar ao do problema anterior, ou seja, o presente problema corresponde à sua apresentação em axonometria, o que é coerente com a teoria, pois na afinidade as condições de paralelismo mantêm-se, não se mantendo a ortogonalidade. Por outro lado, é possível concluir que, nas mesmas condições do problema anterior, ou seja, sendo P a intersecção das tangentes t_1 e t_2 e M , ponto médio da corda AB , N , ponto médio de PM , é um ponto da parábola e a sua tangente t_3 é paralela a AB . Aplicando as mesmas propriedades podemos obter todos os outros pontos, determinar as respetivas tangentes e determinar novos pontos entre A e B .

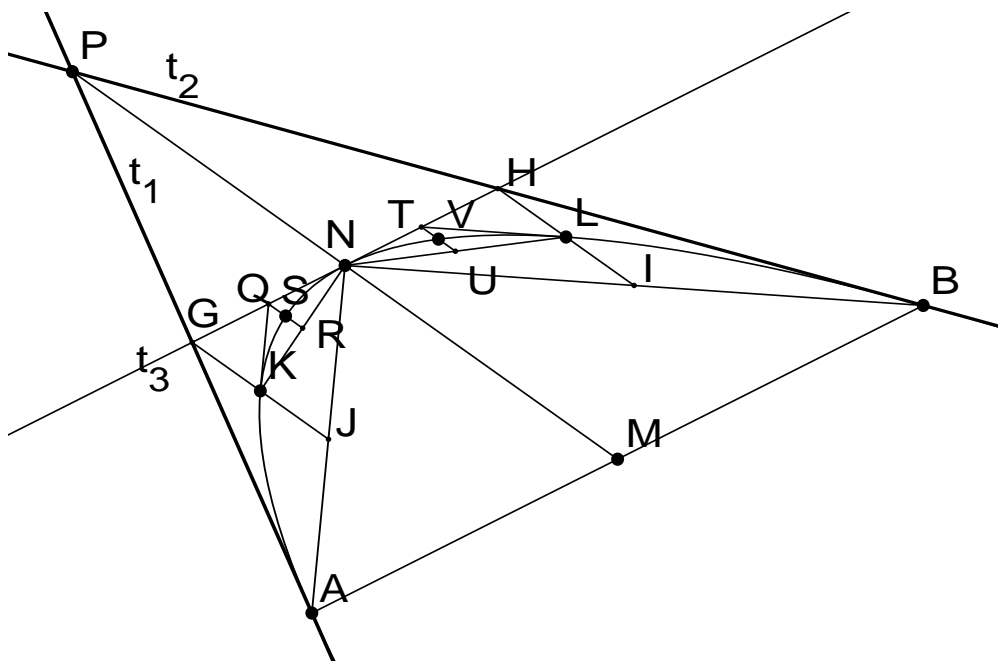


Fig. 3.53 – Parábola definida por dois pontos e suas tangentes



3.5.2.6. CONSTRUÇÃO DA PARÁBOLA CONHECIDOS UM PONTO A QUALQUER, O VÉRTICE V E O EIXO e . OBTENÇÃO DO PONTO P A UMA DISTÂNCIA DADA DO EIXO

Utiliza-se nesta, e em construções seguintes, o processo descrito em COSTA (2005, 64) e posteriormente desenvolvido em COSTA (2009), partindo da relação de semelhança entre todas as parábolas e das propriedades descritas nos problemas anteriores, conjugando-as com uma outra que se pode deduzir a partir de IZQUIERDO ASENSI (1985, 189, fig. 10.25.) e que se pode enunciar como que **uma tangente a uma parábola é perpendicular a uma reta que passa no foco, no ponto de intersecção da tangente com a tangente no vértice**. O conjunto das propriedades descritas, neste e nos dois problemas anteriores, permitiu-nos concluir que:

Se por um ponto traçarmos uma tangente à parábola, esta tangente interseca a tangente no vértice no ponto médio da distância entre a projeção ortogonal do ponto sobre a tangente no vértice e o próprio vértice da curva e a tangente no ponto e a reta que passa no ponto médio e no foco são perpendiculares.

Assim, deste conjunto de propriedades resulta um método expedito com aplicação na resolução de diversos problemas. Encontram-se igualmente referências parciais a este conjunto de propriedades em RICCA (2000, 335, fig. A-29), ou mais claramente com AKOPYAN; ZSLAVSKY (2007, 19), mas só encontrámos igualmente formalizada de forma completa em DOWNS (2003, 88), através de uma aplicação prática.

Na resolução do problema proposto, o processo consiste, portanto, em determinar o ponto M , ponto médio da distância BV sobre a tangente t ao vértice. Traça-se MA , que é a tangente à parábola no ponto A e a sua perpendicular em M até intersectar o eixo obtendo F , que é o foco.

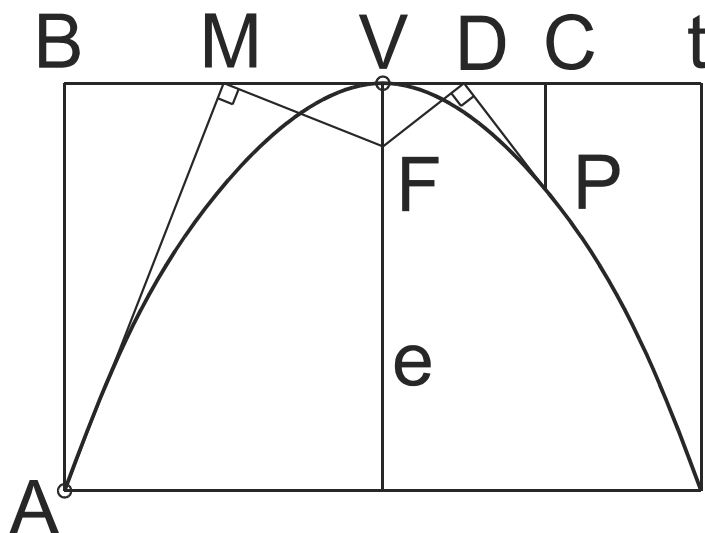


Fig. 3.54 – O foco e pontos da parábola

Conhecido o foco F , para obter um ponto qualquer P da parábola podemos passar uma paralela ao eixo, definir o ponto C sobre a tangente t no vértice, à distância do eixo a que pretendemos obter P , e determinar D , ponto médio da distância, e traçar DF e a sua perpendicular até interseccionar a paralela ao eixo que passa em C .

3.5.2.7. CONSTRUÇÃO DA PARÁBOLA CONHECIDOS UM PONTO A QUALQUER, O VÉRTICE V E O EIXO e . OBTENÇÃO DO PONTO P A UMA DISTÂNCIA DADA m DA TANGENTE t NO VÉRTICE

Procede-se da mesma forma que no caso anterior para determinar o foco. A partir dos dados, determina-se M a meia distância de BV . MA define a tangente em A . Traça-se em M a perpendicular a MA que intersecciona o eixo no foco F . Determina-se em seguida a diretriz d da parábola, paralela à tangente t , sendo que a distância de V a R é igual à distância de V ao foco F . A obtenção do ponto P pode ser feita traçando uma paralela à diretriz à distância m da tangente t no vértice, medindo a distância r entre a paralela e a diretriz e com centro no foco e raio igual a essa distância traçar o arco que define P na intersecção com a paralela.

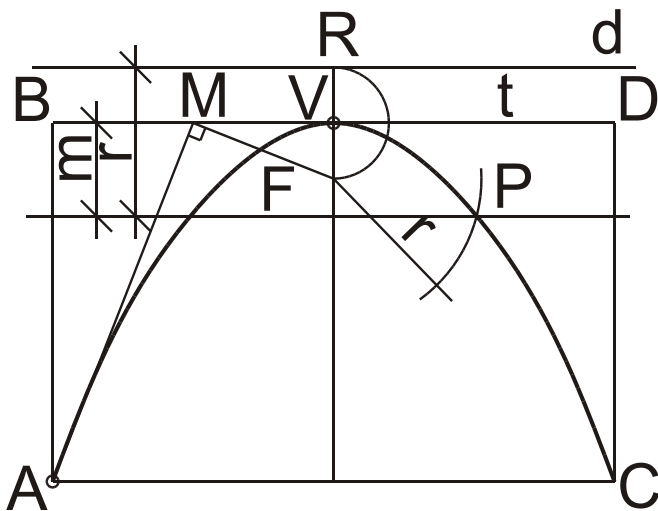


Fig. 3.55 – Foco e pontos da parábola

3.5.2.8. DADA A PARÁBOLA GRAFICAMENTE DETERMINAR O SEU EIXO e E O FOCO F

Traçando três retas paralelas quaisquer e as diagonais das suas intersecções com a parábola, os centros dessas diagonais definem a direção d , que na parábola é sempre paralela ao eixo e . Se traçarmos qualquer perpendicular p a d e determinarmos a meia



distância M entre os pontos A e B , de intersecção de p com a parábola, por M traçamos e paralelo a d . Para determinar o foco F , pode utilizar-se o processo já descrito, ou seja, por exemplo em A traçar uma paralela ao eixo, determinar a meia distância na tangente t entre esse ponto e o vértice V , e unir a meia distância a A . A perpendicular a esse segmento no mesmo ponto intersesta o eixo em F .

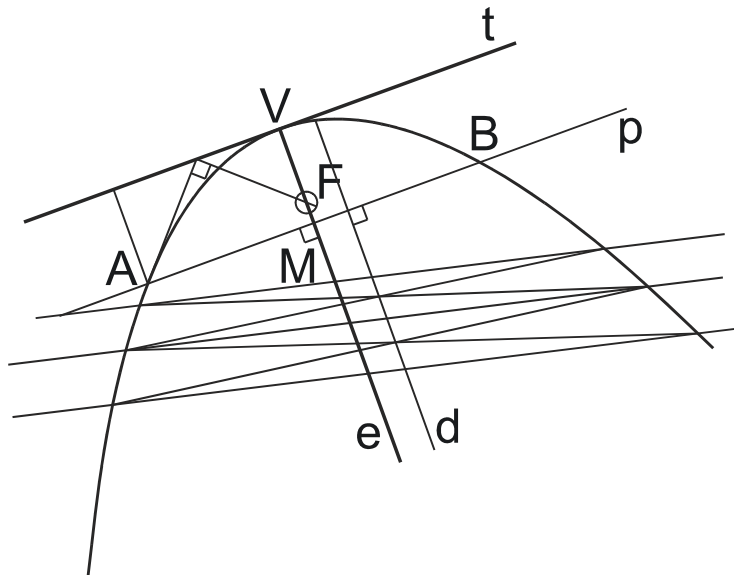


Fig. 3.56 – Eixo e foco da parábola dada graficamente

3.5.2.9. CONSTRUÇÃO GRÁFICA DA PARÁBOLA QUE É DEFINIDA PELA TANGENTE NO VÉRTICE E POR DOIS PONTOS A DIFERENTES DISTÂNCIAS DESTA, UTILIZANDO COMO AUXILIAR OUTRA PARÁBOLA

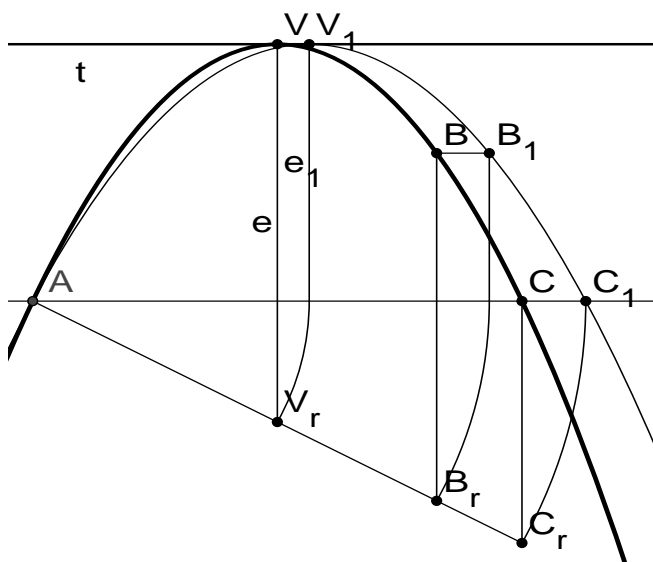


Fig. 3.57 – Parábola por rotação

Dados os pontos A e B e a tangente t no vértice vamos utilizar como auxiliar a parábola que adaptamos de forma a passar em A , ter eixo perpendicular a t e que o vértice V_1 se situe sobre t . Determinamos assim o ponto C_1 , intersecção da parábola com a paralela a t que passa em A . Se pelo ponto B dado, traçarmos uma paralela até intersecção com a parábola auxiliar obtém-se B_1 . Rodando o plano da parábola com centro em A obtemos B_r que estabelece a rotação de B_1 até coincidir com a projeção de B . Fica assim definido por C_1AB_r o ângulo de rotação do plano da parábola auxiliar até coincidir com a parábola pretendida. A partir de V_1 e projetando-o obtemos o eixo e_1 , o qual, rodado, permite conhecer o eixo e da nova parábola e o seu vértice V . Da mesma forma que se procedeu à determinação do ponto C pode-se determinar outros pontos da parábola.

3.5.2.10. CONSTRUÇÃO DA PARÁBOLA QUE PASSA EM C E D CONHECIDA UMA OUTRA QUE PASSA NOS PONTOS A E B À MESMA DISTÂNCIA DA TANGENTE T NO VÉRTICE, O VÉRTICE V E O EIXO e .

OBTENÇÃO DO PONTO P A UMA DISTÂNCIA DADA DA TANGENTE NO VÉRTICE

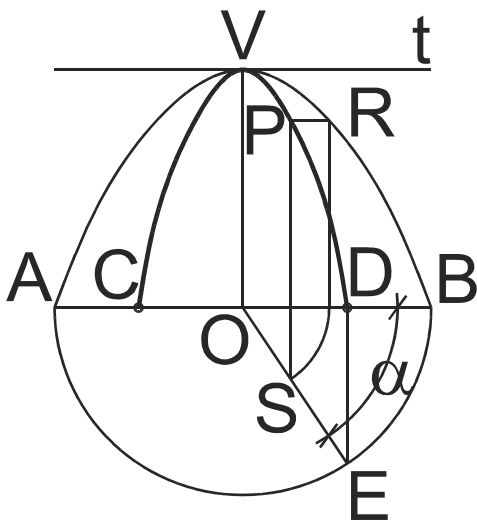


Fig.3.58 – Construção da parábola por rotação

A distância entre A e B tem que ser superior à entre C e D . A construção é feita por rotação da parábola dada em torno do eixo e . Traça-se a semicircunferência de A a B . Por D traça-se uma paralela ao eixo até cruzar a semicircunferência no ponto E o qual se une a O . Para obter P marca-se R à distância pretendida e na parábola que é conhecida, traça-se uma paralela ao eixo até ao segmento que une A e B e o arco de centro O até obter S no segmento. Na intersecção da paralela ao eixo que passa em S e da paralela à tangente que



passa em R obtemos P . Procedendo da mesma forma, marcando novos pontos na parábola inicial, obtemos outros pontos da parábola.

3.5.2.11. CONSTRUÇÃO DA PARÁBOLA CONHECIDOS TRÊS PONTOS A , B E V , E A DIREÇÃO EV DO EIXO SENDO E O PONTO MÉDIO DA CORDA

Este problema apresenta condições similares às do problema 3.5.2.1, ou seja, mantendo as condições de paralelismo definidas embora não as de perpendicularidade. Atendendo a que o processo de resolução do problema se baseia em paralelismo e determinação de pontos médios podemos utilizar o mesmo processo.

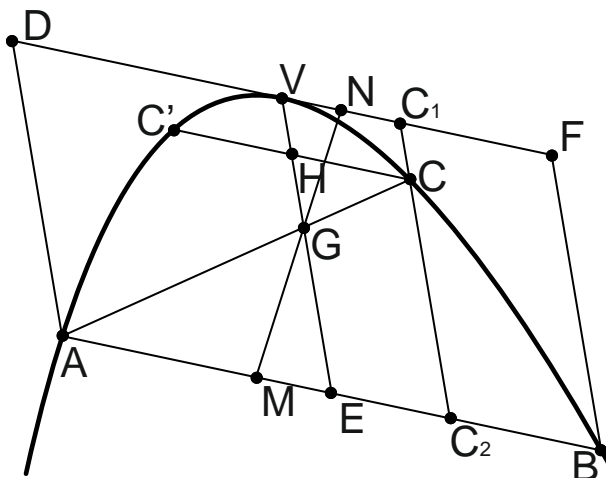


Fig. 3.59 – Parábola por 3 pontos e direção do eixo

A reta VE é o diâmetro conjugado da corda AB e DF é a tangente em V . Então, adaptando a este caso o método de resolução do caso anterior, podemos determinar o ponto C . Traça-se C_1C_2 paralelo ao diâmetro à distância pretendida, determinando M , ponto médio de AC_2 , e N , ponto médio de VC_1 e obtendo G na intersecção de MN com o diâmetro. A reta AG intersesta C_1C_2 no ponto C da parábola. Traçando por C uma paralela à corda AB esta intersesta o diâmetro em H , sendo C' simétrico de C relativamente a H . Para obter novos pontos, é possível repetir o processo.

3.5.2.12. CONSTRUÇÃO DA PARÁBOLA DADA A CORDA AB PERPENDICULAR AO EIXO E VÉRTICE V_2 , CONHECIDA GRAFICAMENTE UMA PARÁBOLA COM O MESMO VÃO E VÉRTICE V_1 . DETERMINAÇÃO DE UM PONTO X DA PARÁBOLA A UMA DISTÂNCIA d_1 À TANGENTE NO VÉRTICE, E DE UM PONTO Y DA PARÁBOLA À DISTÂNCIA d_2 DO EIXO

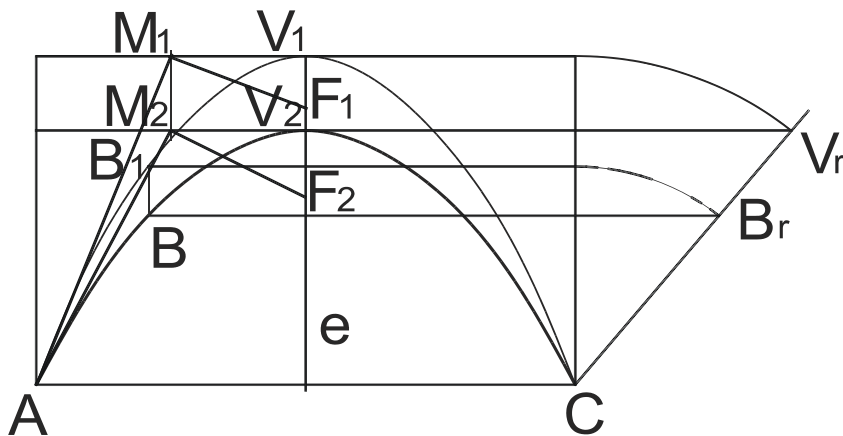


Fig. 3.61 – Parábola dados o eixo e dois pontos

3.5.2.14. DETERMINAÇÃO GRÁFICA DA PARÁBOLA CONHECIDA A TANGENTE t NO VÉRTICE E DOIS PONTOS A E B DA PARÁBOLA A DIFERENTES DISTÂNCIAS DESTA

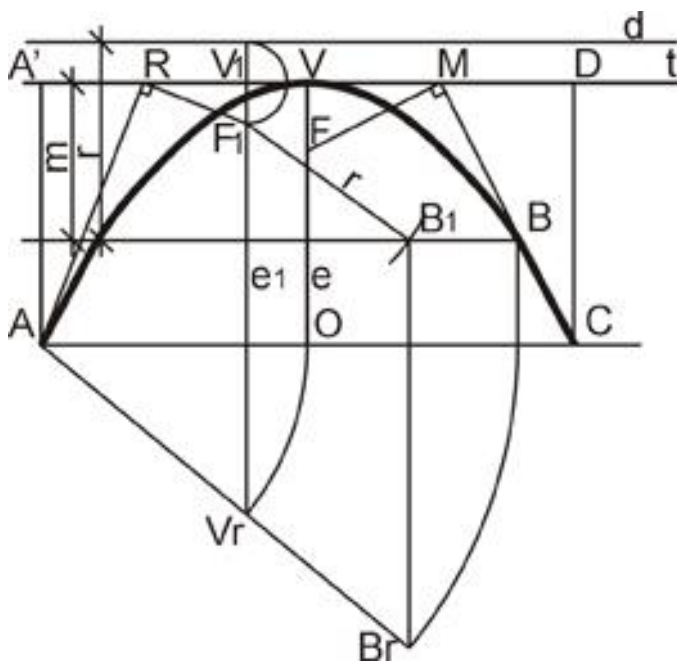


Fig. 3.62 – Parábola por dois pontos e tangente no vértice

Define-se sobre t o vértice V_1 de uma outra parábola que tem a mesma tangente no vértice. Proceder-se como anteriormente para determinar o foco F_1 desta outra parábola e o seu ponto B_1 , que se situa à mesma distância da tangente que B . Determina-se B_r projetando B sobre AO e rodando essa projeção com centro em A até à perpendicular que passa em B_1 . AB_r é a rotação do plano da parábola que passa em A e B até que esta coincida em projeção com a parábola que passa em B_1 . Se sobre AB_r projetarmos V_1 , obtendo V_r , e invertermos a rotação, determinamos V que é o vértice da parábola

pretendida. Para não sobrecarregar o desenho junto a A , optou-se por partir de C simétrico de A relativamente ao eixo e determinar o foco F .

Este problema pode ser considerado como o da determinação do arco parabólico de uma ponte conhecendo a cota do tabuleiro horizontal e os dois pontos de apoio nas margens, a diferentes cotas.

2º MÉTODO

O mesmo problema tem uma outra solução, que igualmente não encontramos descrita na literatura, e que consiste na utilização, como linhas auxiliares, das parábolas que têm a mesma tangente t no vértice e cujos focos são A e B . Na intersecção das duas parábolas obtemos F_1 e F_2 que são os focos das duas parábolas que satisfazem as condições descritas. Só representámos uma delas, aquela cujo eixo se situa entre A e B .

Este processo resulta de se ter concluído que, sendo dado pontos da curva e a tangente no vértice, e sabendo que a tangente num ponto e a sua perpendicular que passa no foco se interseitam no ponto médio entre o vértice e a projeção ortogonal do ponto sobre a tangente, então o inverso também é verdade, ou seja, se trocarmos o foco e o ponto tal também se verifica.

A outra parábola solução seria a que tem os pontos A e B do mesmo lado do eixo.

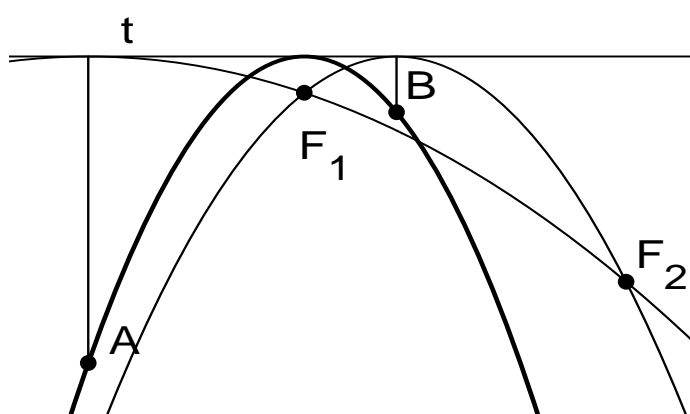


Fig. 3.63 – Parábola por A e B e tangente t no vértice – 2º método

Do desenvolvimento deste método resulta, portanto, a seguinte propriedade:

Se considerarmos dois pontos A e B de uma parábola p focos de duas outras p_1 e p_2 , com a mesma tangente no vértice, os dois pontos de intersecção de p_1 e p_2



são os focos de duas parábolas que passam em A e B . E a sua propriedade dual: Duas parábolas com a mesma tangente no vértice interseitam-se em dois pontos que são focos de outras duas parábolas cuja tangente no vértice é a mesma reta.

Saliente-se que as parábolas auxiliares podem ser determinadas ponto a ponto pelos processos anteriormente descritos ou, em desenho no computador, com recurso a programa que desenhe a curva ou, caso o programa informático vetorial que estamos a utilizar não o faça, desenhando uma parábola qualquer e depois, por zoom, ajustar a distância focal à dimensão necessária, tendo em conta, como já foi enunciado, que todas as parábolas são graficamente semelhantes, ou seja, só variam no tamanho.

3º MÉTODO

Do decurso da investigação com apoio da geometria dinâmica resultou o processo seguinte para resolver o mesmo problema, utilizando uma curva cónica como auxiliar.

Tem clara desvantagem prática em relação ao processo anterior, por ser menos expedito, mas referimo-lo aqui pois permite reforçar outra das conclusões do processo investigativo, a das potencialidades da utilização das curvas cónicas como auxiliares nos traçados de outras curvas cónicas, sobretudo nos traçados com recurso a programas informáticos gráficos. Por outro lado, pretende-se exemplificar, com suporte num caso concreto, a metodologia utilizada a título indicativo.

Decorreu da investigação a conclusão que, *se por dois pontos A e B de uma parábola traçarmos duas perpendiculares à tangente no vértice V e retas VA e VB , estas últimas retas interseitam as perpendiculares em dois pontos que definem uma reta paralela à tangente no vértice.* Com esta premissa construiu-se o modelo seguinte.

Do ponto de vista da aplicação prática da propriedade, no caso concreto, há o problema de não ser possível, com os dados, ou seja, dois pontos e a tangente no vértice, determinar diretamente o vértice, se não utilizarmos a propriedade descrita em 3.5.2.6.. Então utilizámo-la como elemento de controle, para confirmar os resultados.

Por outro lado, como já se disse, não conhecemos o vértice. Então procede-se indiretamente. Determina-se as projeções ortogonais C e D respetivamente de A e B sobre a tangente no vértice. Sobre uma reta qualquer paralela à tangente projeta-se ortogonalmente C e D obtendo C_1 e D_1 . Traçando as retas C_1B e D_1A estas interseitam-se em E_1 . Repete-se o processo com outras retas paralelas à tangente, tantas vezes quantas as necessárias para traçar a curva auxiliar. No caso foram determinados E_2 , E_3 , E_4 e E_5 . Com programa de

geometria dinâmica determinou-se que o lugar geométrico dos diferentes pontos E , a curva resultante, que é uma hipérbole que passa em A e B sendo suficientes cinco pontos para definir uma curva cónica.

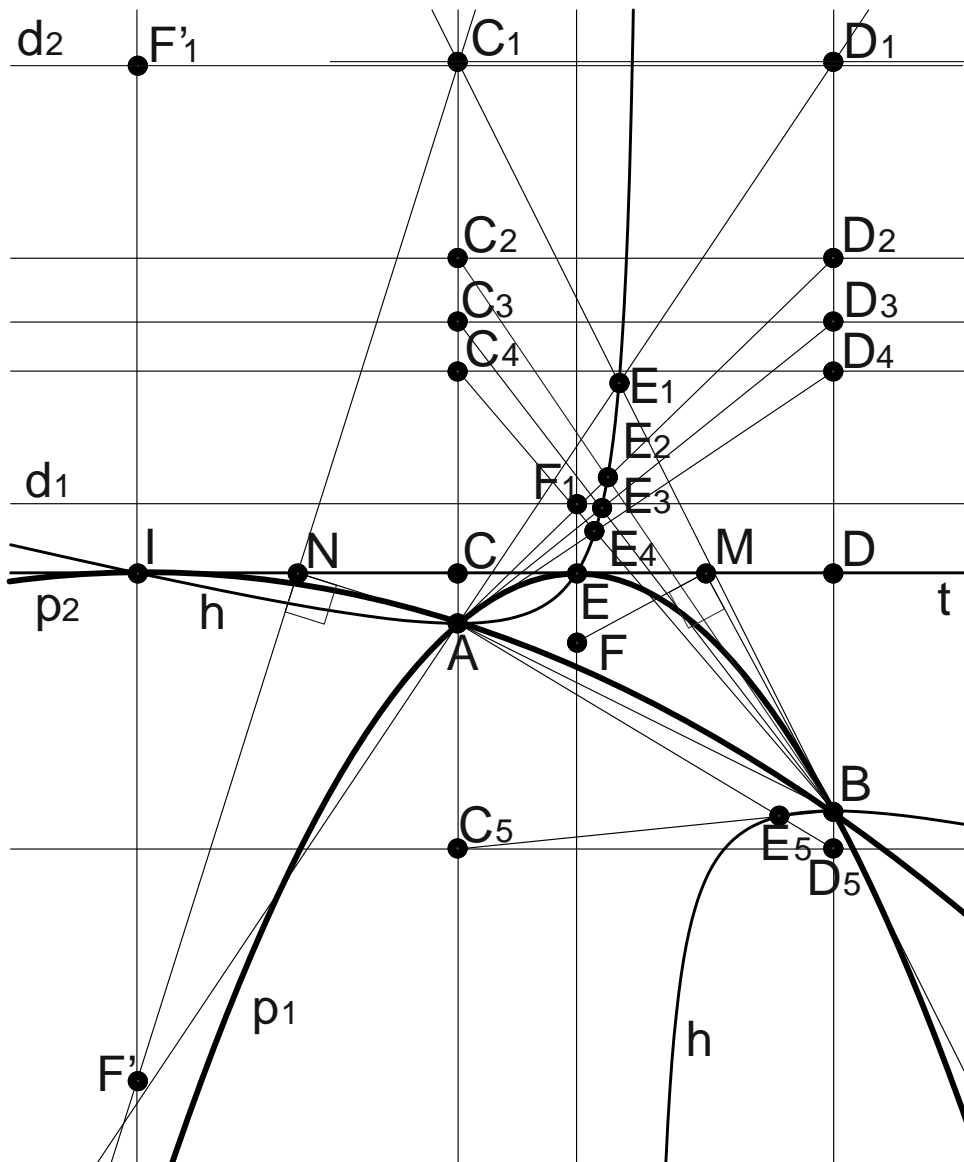


Fig. 3.64 a) – Parábola por A e B e tangente t no vértice – 3º método

Se traçarmos a curva noutro meio repetimos o processo até ser possível determinar a curva. Na intersecção da hipérbole com a tangente no vértice obtemos os pontos E e I que são os vértices das duas soluções possíveis já referidas no caso anterior. Para determinar



os focos F e F' e as diretrizes d_1 e d_2 das duas parábolas solução utilizamos o método descrito no ponto 3.5.2.6..

Como se mostra na figura seguinte podemos simplificar o processo em geometria dinâmica sendo apenas necessário traçar uma paralela à tangente e modificar a sua posição até que E coincida com a tangente passando a ser o vértice da parábola, o que permite determinar o foco G e a diretriz d .

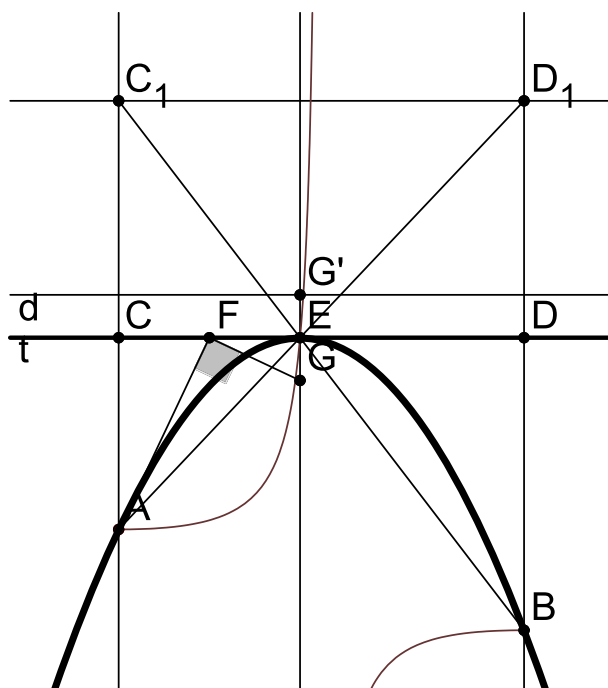


Fig. 3.64 b) – Parábola por A e B e tangente t no vértice – 3º método

Por outro lado, em TODD (2009, 89) encontramos a demonstração gráfica por geometria dinâmica de outra propriedade, que pode complementar a que enunciámos anteriormente, e que apresentamos, adaptada a este contexto.

A propriedade de Todd referida enuncia-se da seguinte forma: **Se pelo ponto de intersecção das tangentes em dois pontos da parábola fizermos passar uma perpendicular ao eixo, e sobre ela projetarmos ortogonalmente os pontos de tangência, as retas que passam na projeção ortogonal de cada um dos pontos e no outro ponto interseccionam-se no vértice da parábola.**

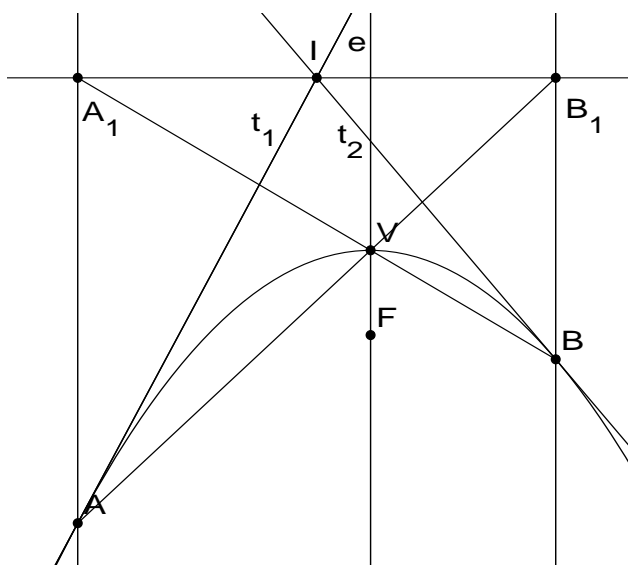


Fig. 3.64 c) – Propriedade das parábolas descrita por Todd

Então utilizamos em conjunto esta propriedade com a enunciada em 3.5.2.6..

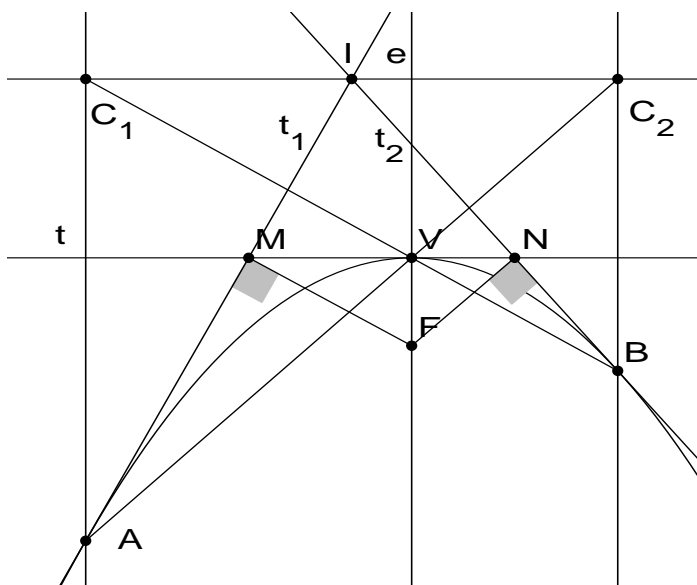


Fig. 3.64 d) – Conjunto de propriedades testadas

A reta que passa em C_1 e C_2 no procedimento anterior passa em I , intersecção das tangentes. Por outro lado, nos pontos M e N fazemos passar perpendiculares às tangentes que se intersectam nos focos. Foram testadas estas condições em conjunto.

Para o problema em causa, concluiu-se que não tem aplicação prática, em geometria estática, porque não conhecemos V , F ou o eixo e , portanto, não é possível conhecer M e N . Logo, não é possível estabelecer um método para resolver o problema. No entanto, fica



expresso um conjunto de propriedades úteis, em geometria dinâmica, para resolver expeditamente diversos outros problemas.

Independentemente do processo de construção das parábolas, estas soluções ilustram, por si só, as potencialidades da utilização do computador para aos traçados geométricos permitindo novos procedimentos, mais expeditos e, sobretudo as vantagens do recurso a programas informáticos de geometria dinâmica.

3.5.2.15. DETERMINAÇÃO DE TANGENTES E PONTOS DA PARÁBOLA DEFINIDA POR DUAS TANGENTES, t_1 E t_2 , E RESPECTIVOS PONTOS DE TANGÊNCIA, A E B

Em LIMING (1981, 330) encontra-se um procedimento para determinação de tangentes da parábola. Conjugando tal com a propriedade que enuncia que, na parábola, os diâmetros conjugados de qualquer corda são paralelos ao eixo, é possível determinar o ponto de tangência de cada tangente.

Assim, traça-se a corda AB e sobre ela escolhe-se um ponto F qualquer. Traça-se FG e FH respetivamente paralelas a t_1 e t_2 até intersetarem a outra tangente em G e H . A reta GH é a tangente pretendida t_3 . Para determinar o ponto P de tangência determina-se M , o ponto médio de AB e traça-se MT , sendo T a intersecção de t_1 e t_2 , definindo d que é o diâmetro e tem, portanto, a direção do eixo. Traçando FP paralelo a d determinamos P .

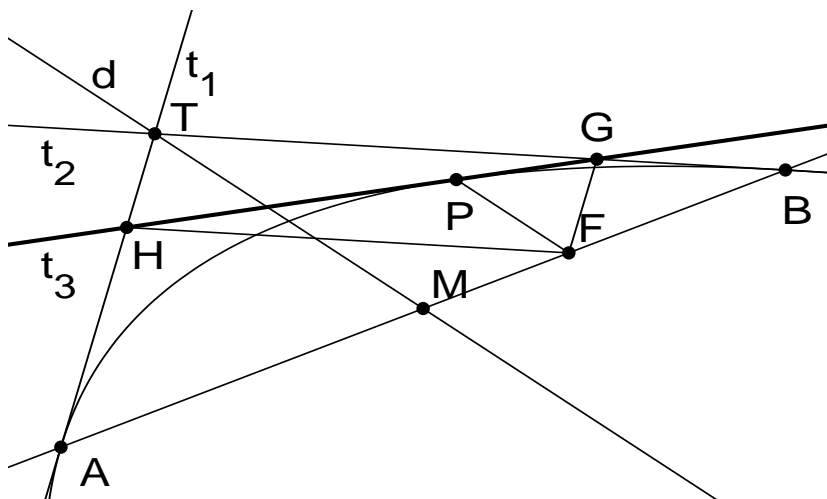


Fig. 3.65 – Parábola por A e B e tangentes t_1 e t_2

Este método revela-se muito útil pois, para obter novas tangentes e pontos da parábola, é só escolher outros pontos sobre AB e repetir o processo, o que permite obter qualquer ponto da curva e respetiva tangente.

3.5.2.16. DETERMINAÇÃO DO FOCO F , O EIXO e , O VÉRTICE V E A TANGENTE t NO VÉRTICE DE UMA PARÁBOLA DEFINIDA POR DOIS PONTOS A E B E RESPECTIVAS TANGENTES t_1 E t_2

Em SÁNCHEZ GALLEGO (1997, 85, Fig. 2.27) apresenta-se graficamente que a tangente num ponto da parábola é a bissetriz do ângulo entre a direção da reta que passa no ponto e é paralela um diâmetro com a reta que passa no ponto de tangência e no vértice. Tal resulta obviamente de que os diâmetros, na parábola, são paralelos ao eixo. Então, em conjunto com outras propriedades da parábola, podemos concluir um procedimento para determinar o foco, o eixo, a tangente no vértice e o próprio vértice.

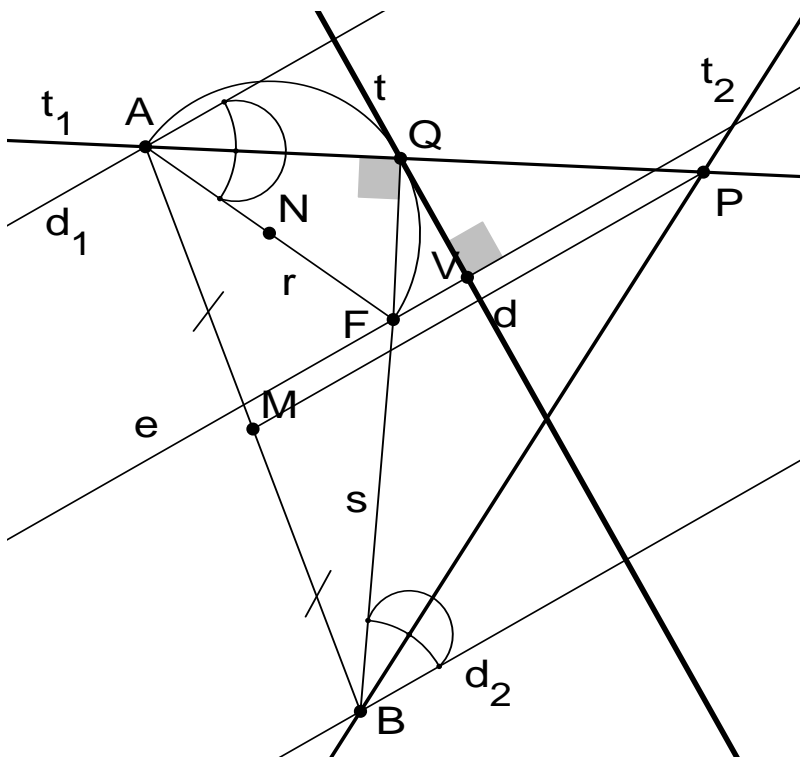


Fig. 3.66 – Foco e vértice de parábola

Traça-se a corda AB e determina-se o seu ponto médio M . A reta MP define o diâmetro conjugado d . Seguidamente traça-se por A a reta d_1 paralela a d e determina-se a reta r , simétrica de d_1 relativamente a t_1 . Por B traça-se a reta d_2 paralela a d e determina-se a reta s , simétrica de d_2 relativamente a t_2 . A intersecção das retas r e s é o foco F . Por F passa o eixo e , paralelo a d . Determinou-se depois o ponto Q da tangente no vértice, determinando N , ponto médio de AF e traçando a semicircunferência de diâmetro AF . Esta intersesta t_1 em Q . Alternativamente, e mais simples, seria determinar I , na intersecção de t_1



com o eixo e , sendo Q ponto médio de AI . Por Q traça-se t , a tangente no vértice, perpendicular ao eixo e . O vértice V é a intersecção de t e e .

Com este problema fica igualmente demonstrado que **uma parábola fica definida por dois pontos e respectivas tangentes**, pois só há uma solução que satisfaça as condições. Por outro lado, como foi apresentado no capítulo antecedente, a parábola é discriminante entre as elipses e as hipérbolas.

3.5.3. A HIPÉRBOLE

A metodologia dos processos descritos em seguida, para os diversos traçados, funda-se em grande medida na representação do hiperbolóide de revolução de uma folha, de eixo vertical e diretriz no plano horizontal de projeção, em dupla projeção ortogonal e a adaptação posterior das duas projeções do contorno aparente à geometria plana, conjugando-a com outros traçados já conhecidos. Esta metodologia já tinha sido testada em COSTA (2005, 68 - 78), e é agora aprofundada. Da construção do hiperbolóide de revolução resulta que a hipérbole é o contorno aparente da superfície e concluiu-se que **as geratrizes frontais**, tangentes na gola do hiperbolóide **são, em projeção frontal, as assíntotas da hipérbole de contorno aparente do hiperbolóide e, ao mesmo tempo, o contorno aparente do cone diretor da superfície.**

3.5.3.1. DADO O EIXO TRANSVERSO AB E CONHECENDO UM PONTO C QUALQUER DA HIPÉRBOLE, DETERMINAR AS ASSÍMPTOTAS E OS FOCOS DA HIPÉRBOLE

Por C construiu-se um retângulo com lados paralelos e perpendiculares ao eixo transversal AB , sendo centro O . A circunferência com centro O e diâmetro AB é o círculo de gola de um hiperbolóide de revolução, cujas diretrizes simétricas são representadas pela circunferência maior. A tangente à gola no ponto D , e paralela ao eixo transversal, corresponde a duas geratrizes, retas cruzadas de sistemas opostos no hiperbolóide, intersectando as diretrizes em dois pontos E coincidentes, os quais projetados verticalmente definem G . Traçando a reta GO define-se a assíntota a_1 e a sua simétrica a_2 . Em A traça-se a tangente à gola até obter H na intersecção com a assíntota. OH é o raio da circunferência que define a distância focal e , logo os focos F_1 e F_2 na intersecção com o eixo.

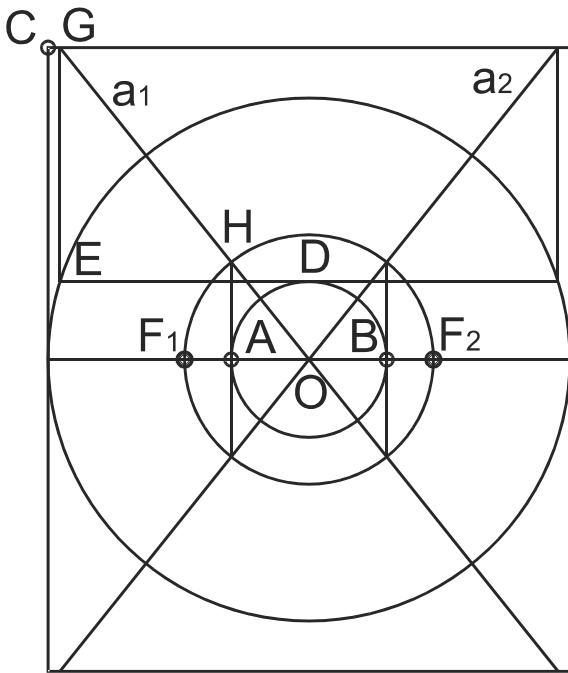


Fig. 3.67 – Assíntotas e focos da hipérbole

3.5.3.2. DADO O EIXO TRANSVERSO AB E UM PONTO C DA HIPÉRBOLE DETERMINAR UM PONTO P DA HIPÉRBOLE A UMA DISTÂNCIA d DA RETA QUE CONTÉM O EIXO TRANSVERSO

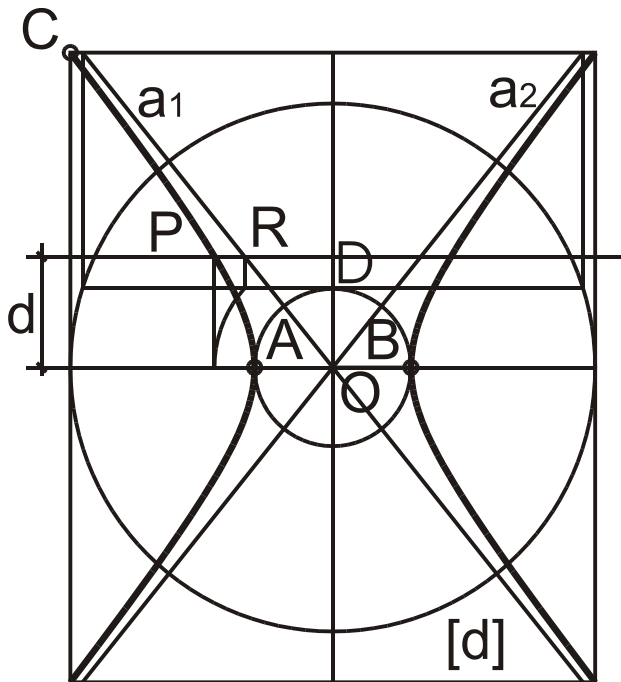


Fig. 3.68 – Ponto da hipérbole a distância dada do eixo transversal



Pelo processo descrito no caso anterior, dado C traça-se a circunferência que representa a diretriz, determinam-se as assíntotas e a paralela ao eixo transversal a passar em D . O e D definem o eixo da hipérbole. Sobre a assíntota, e à distância d pretendida, define-se o ponto R e por este ponto traça-se uma paralela ao eixo secundário da hipérbole até interseção com a tangente de D no ponto S . Com centro em O e raio até S traça-se o arco até à reta do eixo transversal. Por esse ponto traça-se uma paralela ao eixo secundário até à distância a que se pretende obter P , ou seja a perpendicular que passa em R . Para determinar outros pontos da hipérbole repetíamos o processo.

3.5.3.3. DADAS AS ASSÍMPTOTAS a_1 e a_2 DA HIPÉRBOLE E O EIXO TRANSVERSO AB DETERMINAR UM PONTO P A UMA DISTÂNCIA d DO EIXO TRANSVERSO

Mesmo sendo os elementos dados no caso anterior diferentes deste problema em causa, no entanto o método utilizado permite uma simplificação do caso, pois se procedeu intermedicamente à determinação das assíntotas. A partir daqui procede-se da mesma forma, ou seja, define-se R na assíntota à distância pretendida, traça-se uma paralela ao eixo até à tangente t na circunferência de gola, roda-se esse ponto, com centro de rotação no centro da hipérbole, até à reta que contém o eixo transversal. Na intersecção do arco com o eixo transversal traça-se uma perpendicular a este e intersecciona-se as perpendiculares aos eixos para obter o ponto P .

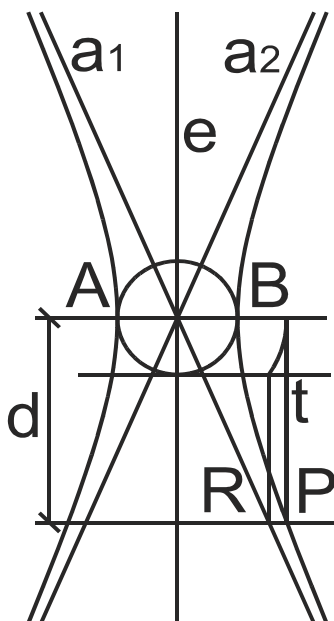


Fig. 3.69 – Ponto da hipérbole definida pelas assíntotas e eixo transversal

3.5.3.4. DADO O EIXO TRANSVERSO AB E UM PONTO C QUALQUER DA HIPÉRBOLE DETERMINAR UM PONTO P DA HIPÉRBOLE A UMA DISTÂNCIA d DO EIXO SECUNDÁRIO DA HIPÉRBOLE

Faz-se passar a paralela ao eixo à distância d . Esta intersesta a reta do eixo transverso no ponto R . Rodando R , em torno de O , até ao eixo da hipérbole obtém-se D , que é o ponto que define as geratrizes t_1 e t_2 tangentes à circunferência de gola da superfície com diâmetro AB . Para determinar as geratrizes determina-se a meia distância entre D e O , e a passar em O e centro na meia distância, determina-se na circunferência os pontos de tangência. Prolongando as geratrizes de D até que intersectem a diretriz circular $[d]$, obtêm-se os pontos G e E . Estes pontos correspondem nas diretrizes do hiperbolóide de revolução aos pontos H e F , que pertencem a geratrizes de sistemas opostos, as quais se prolongam até intersectar o retângulo envolvente. Assim determinamos F e H e a sua simétrica em relação ao eixo. As duas intersectam-se num ponto que projetado na linha à distância d define o ponto P nas condições propostas.

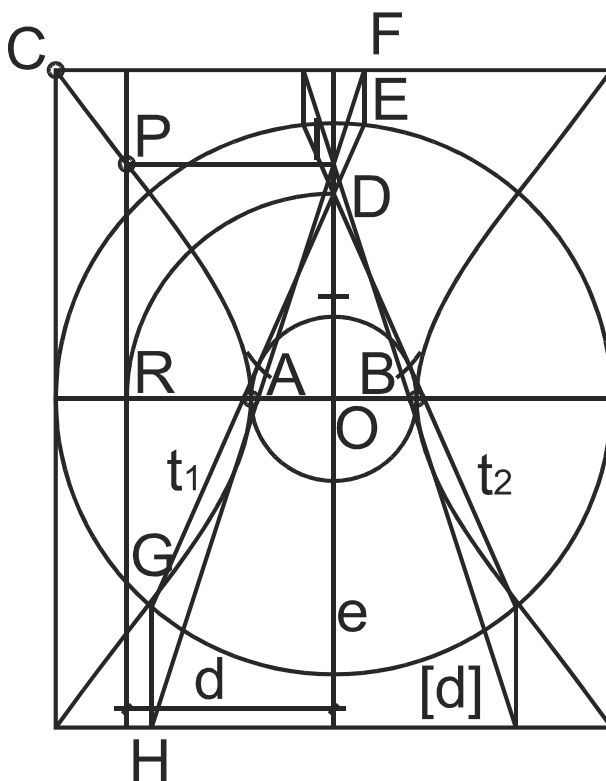


Fig. 3.70 – Ponto da hipérbole a uma distância qualquer do eixo secundário

De notar ainda que as geratrizes, em projeção no plano da hipérbole, se revelam tangentes à curva, o que permite, por exemplo, o estabelecimento de um processo de determinação das tangentes à hipérbole ou até o estabelecimento de outras relações.



3.5.3.5. DADA A HIPÉRBOLE DE EIXO TRANSVERSO AB E ASSÍMPTOTAS a e a' DETERMINAR OUTRA HIPÉRBOLE COM AS MESMAS ASSÍMPTOTAS E EIXO TRANSVERSO CD

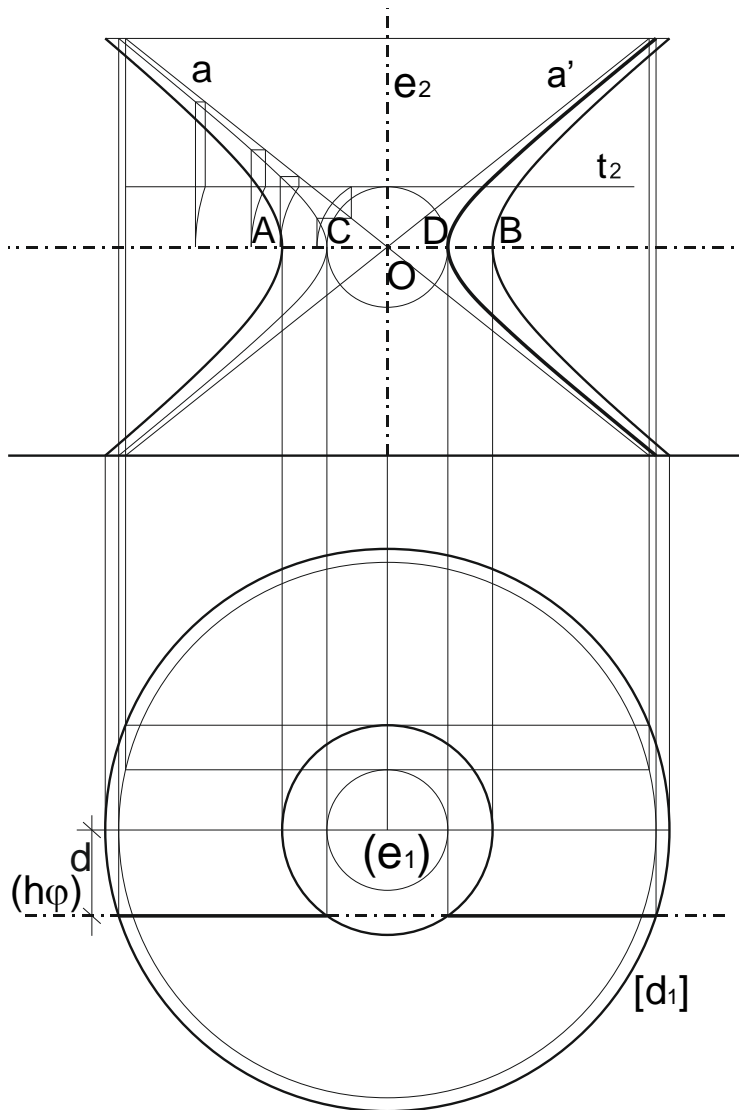


Fig. 3.71 – Hipérboles com as mesmas assíntotas

A hipérbole dada é contorno aparente do hiperbolóide de revolução de gola AB , com assíntotas a e a' , pelo que o problema consiste em determinar a secção produzida no hiperbolóide pelo plano frontal φ à distância d do eixo, ou seja, a hipérbole de gola de diâmetro CD , com as mesmas assíntotas. Ou, generalizando, trata-se da determinação de hipérboles com as mesmas assíntotas.

Representa-se CD nas condições propostas e determina-se o plano φ e a circunferência de gola correspondente. Nesta traça-se a tangente t no ponto de intersecção da circunferência com o eixo. Marcando pontos nas assíntotas e traçando paralelas ao

eixo até t , e, com centro em O , traçando arcos que intersectam a reta do eixo transverso em pontos onde traçamos paralelas ao eixo até cruzar com as perpendiculares respectivas, o que permite determinar pontos sucessivos da hipérbole pretendida.

Tal como em casos anteriores poderíamos juntar as duas projeções numa única construção, o que não fizemos por tornar mais confusa a interpretação do processo construtivo.

3.5.3.6. DADA A HIPÉRBOLE DE EIXO TRANSVERSO AB E DISTÂNCIA FOCAL F_1F_2 DETERMINAR A HIPÉRBOLE CONJUGADA, OU SEJA, A HIPÉRBOLE COM AS MESMAS ASSÍMPTOTAS E IGUAL DISTÂNCIA FOCAL

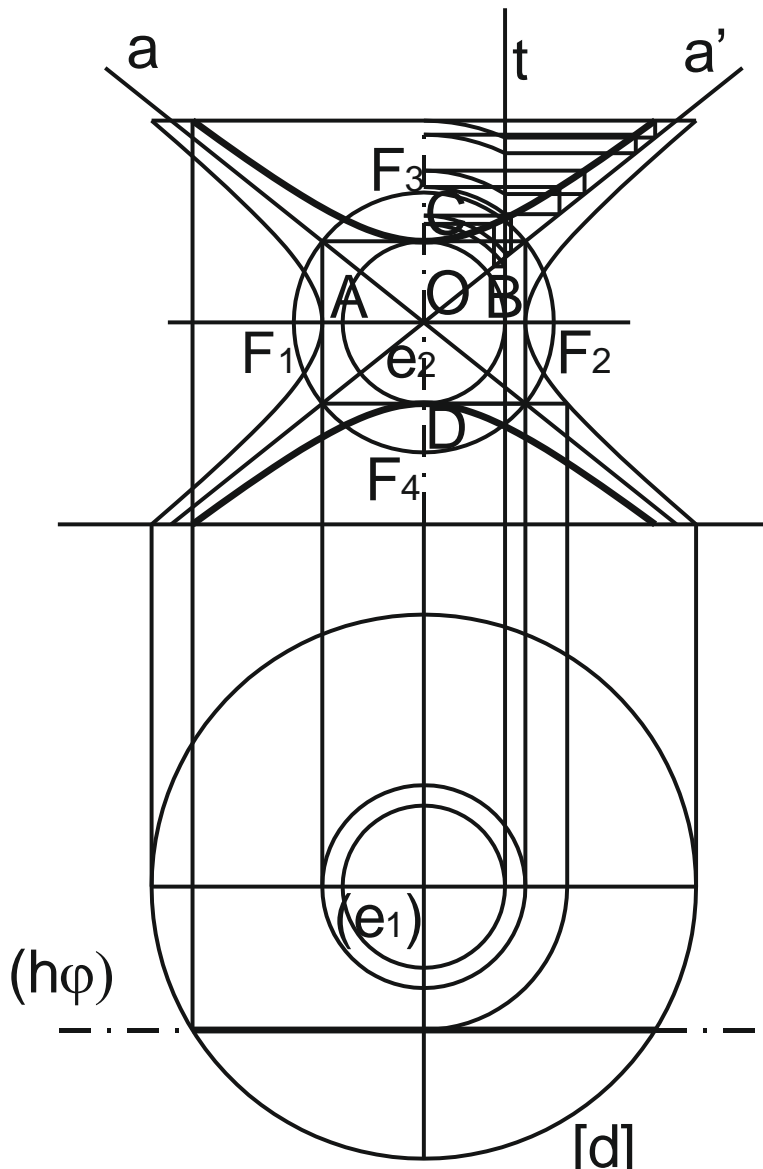


Fig. 3.72 – Hipérbole conjugada como secção de hiperboloide



Do ponto de vista prático trata-se de uma secção frontal no mesmo hiperboloide, só que ultrapassando o raio do círculo de gola.

Trata-se, portanto, de um problema idêntico ao anterior, só que a posição do plano de secção implica que a hipérbole se forme em quadrantes opostos relativamente às assíntotas. O círculo focal permite conhecer F_3 e F_4 a partir de F_1 e F_2 e traçando perpendiculares ao eixo transverso em A e B até às assíntotas, e depois paralelas ao eixo transverso, obtemos um retângulo que define os pontos C e D . Toda a restante construção da hipérbole pode decorrer pelos procedimentos descritos anteriormente, utilizando como eixo transverso CD .

Simplificado o processo, para resolver o problema só é necessário determinar os focos F_3 e F_4 e o eixo transverso CD e depois, por exemplo, pelo processo dos focos e eixo transverso descrito no início do capítulo determinar postos da hipérbole. Fica no entanto evidente a relação entre a hipérbole conjugada e o hiperboloide de revolução.

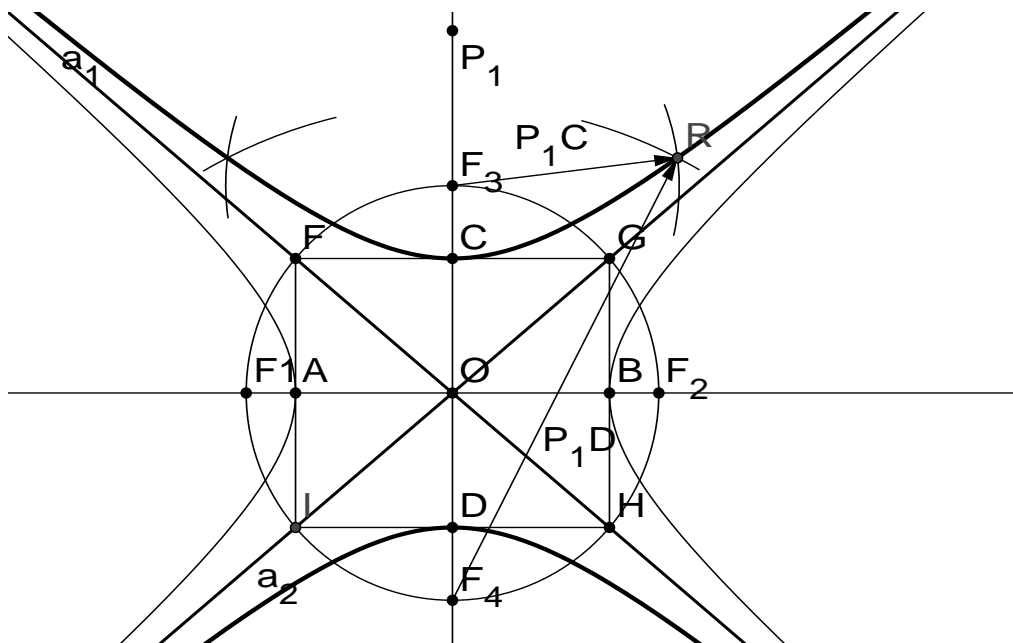


Fig. 3.73
– Pontos de hipérbole conjugada

3.5.3.7. DADO O HIPERBOLÓIDE DE REVOLUÇÃO, E A SUA HIPÉRBOLE DE CONTORNO APARENTE, DEFINIDOS GRAFICAMENTE, E O EIXO TRANSVERSO, DETERMINAR A HIPÉRBOLE SECÇÃO NO MESMO HIPERBOLOIDE RESULTANTE DE UM PLANO DE SECÇÃO θ QUE PASSA NO MESMO EIXO E FORMA UM ÂNGULO α COM O PLANO DE PROJEÇÃO

Determina-se em projeção C e D , que definem um novo eixo transverso CD .

Foram determinados pontos na hipérbole à mesma distância do eixo transversal que os da hipérbole dada, por rotação na projeção frontal e obtenção dos mesmos pontos em projeção horizontal.

Este problema é idêntico a qualquer outro que envolva secções planas em superfícies de revolução a passar no eixo da superfície.

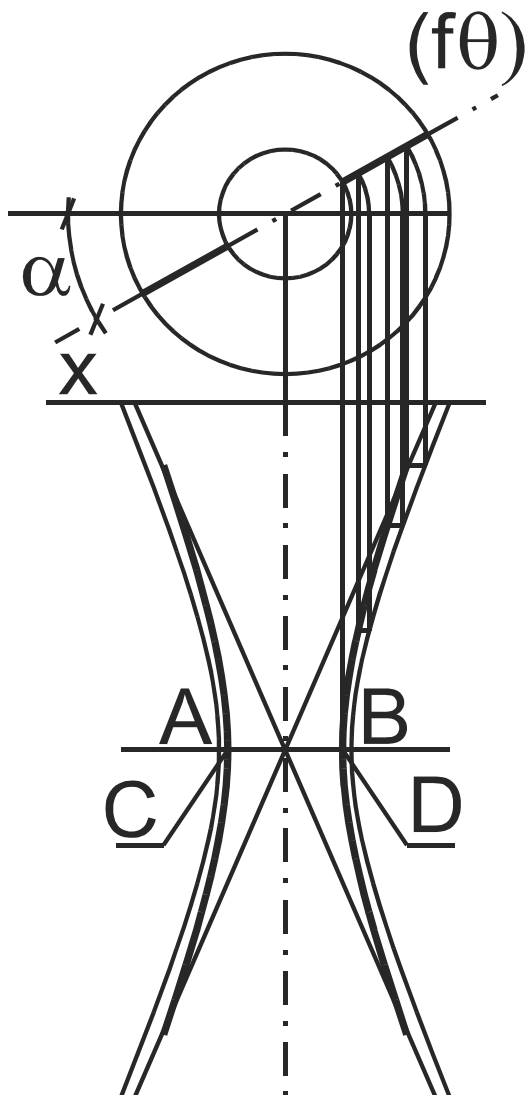


Fig. 3.74 – Rotação da hipérbole em torno do seu eixo

3.5.3.8. CONSTRUIR A HIPÉRBOLE POR FEIXES PROJETIVOS DADO O EIXO TRANSVERSO /E UMA CORDA AB PERPENDICULAR AO EIXO TRANSVERSO

Adaptando e completando a partir de MINIFIE (1851, Plate 20 Fig. 3) pode deduzir-se que por A faz-se passar uma paralela ao eixo transversal e intersecciona-se esta com a tangente no vértice definindo um segmento que se divide num número qualquer de partes iguais, definindo uma ordem a partir de A. Divide-se no mesmo número de partes o



segmento definido por A e o ponto médio de AB . Constituem-se dois feixes de segmentos de reta, o primeiro gerado a partir do vértice V e dirigido para os pontos do primeiro segmento referido AC , e o segundo a partir de I e dirigido para os pontos do segundo segmento AF . A intersecção dos segmentos do primeiro feixe, com os respetivos do segundo feixe, define pontos da hipérbole.

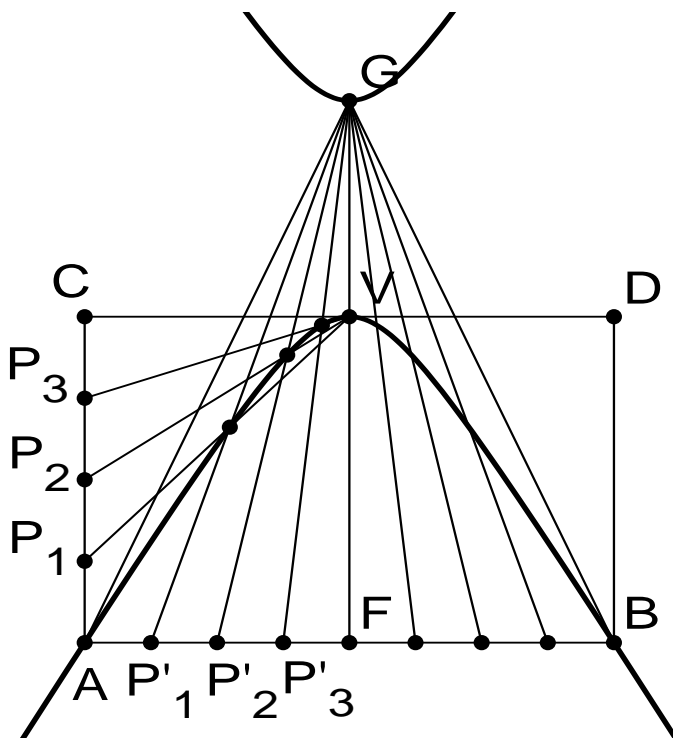


Fig. 3.75 – Hipérbole por feixes projetivos

3.5.3.9. DETERMINAR A HIPÉRBOLE DEFINIDA PELAS ASSÍMPTOTAS a_1 E a_2 E UM PONTO P DA CURVA

No primeiro método, como na figura exemplifica, permite a determinação direta de pontos do ramo oposto da curva e permite obter pontos do mesmo ramo. Utiliza-se a propriedade descrita em 2.9. (Fig. 2.61) que enuncia que na intersecção de qualquer reta com as assímtotas e com os dois ramos da hipérbole a distância de um ponto da curva à assímtota mais próxima é igual à distância da outra assímtota ao outro ponto da curva sobre a mesma reta. Esta construção aparece referida em CUNHA (1982, 161).

P' é o simétrico de P relativamente a O . Traça-se por P uma reta r qualquer que interseta as assímtotas em A e B . Em seguida, mede-se BC igual a PA sendo C um ponto da curva. Para obter mais pontos no mesmo ramo repete-se o processo. Os pontos do outro ramo podem ser obtidos por simetria relativamente a O ou fazendo passar por P uma reta que interseccione as duas assímtotas do mesmo lado.



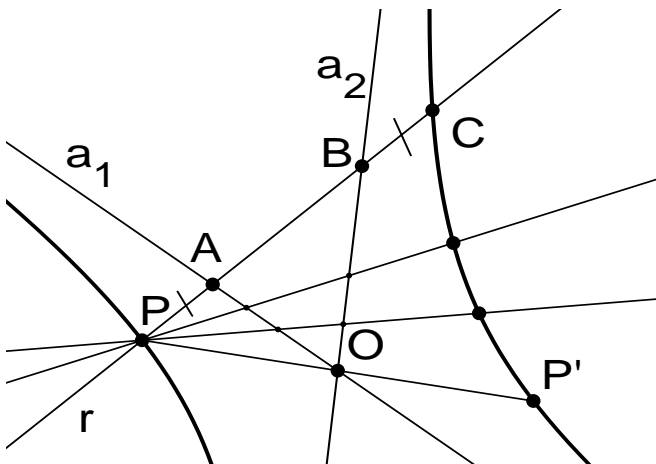


Fig. 3.76 – Hipérbole dadas as assíptotas e P (1º método)

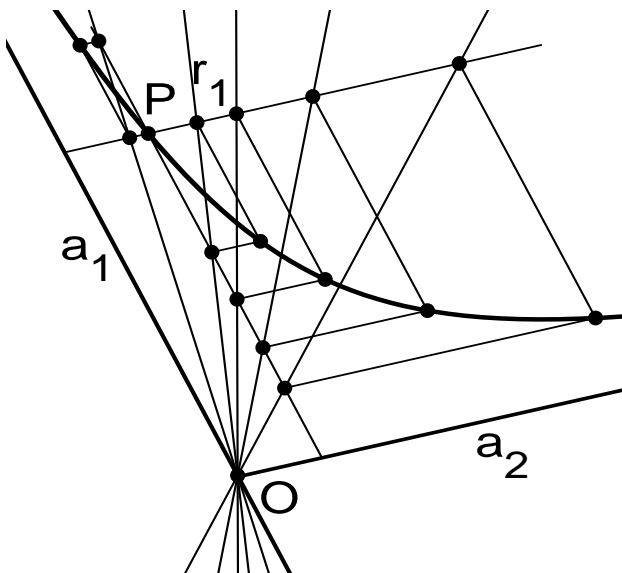


Fig. 3.77 – Hipérbole dadas as assíptotas e P (2º Método)

O segundo método, igualmente referido em CUNHA (1982, 161), difere do anterior por permitir obter diretamente pontos do mesmo ramo da curva e, depois, se necessário, obter por simetria pontos do outro ramo.

Consiste em fazer passar pelo ponto P dado paralelas às assíptotas e depois intersectá-las com um feixe de retas a partir do centro O da hipérbole. Por exemplo, traçando a reta r_1 esta intersecta as paralelas às assíptotas em dois pontos que definem uma diagonal de um paralelogramo de lados paralelos às assíptotas. Construído o paralelogramo o vértice deste, oposto a P , é um ponto da hipérbole. Para obter novos pontos no mesmo ramo repete-se o processo. Os pontos no ramo oposto são obtidos por simetria relativamente a O .



3.5.3.10. DADA UMA HIPÉRBOLE GRAFICAMENTE DETERMINAR OS EIXOS, AS ASSÍMPTOTAS E OS FOCOS

Traça-se duas cordas paralelas CD e EG e determina-se os respectivos pontos médios M e N . MN é uma reta que contém um diâmetro pelo que intersecamos MN com a hipérbole em A_1 e B_1 e o respetivo ponto médio O que é o centro da hipérbole.

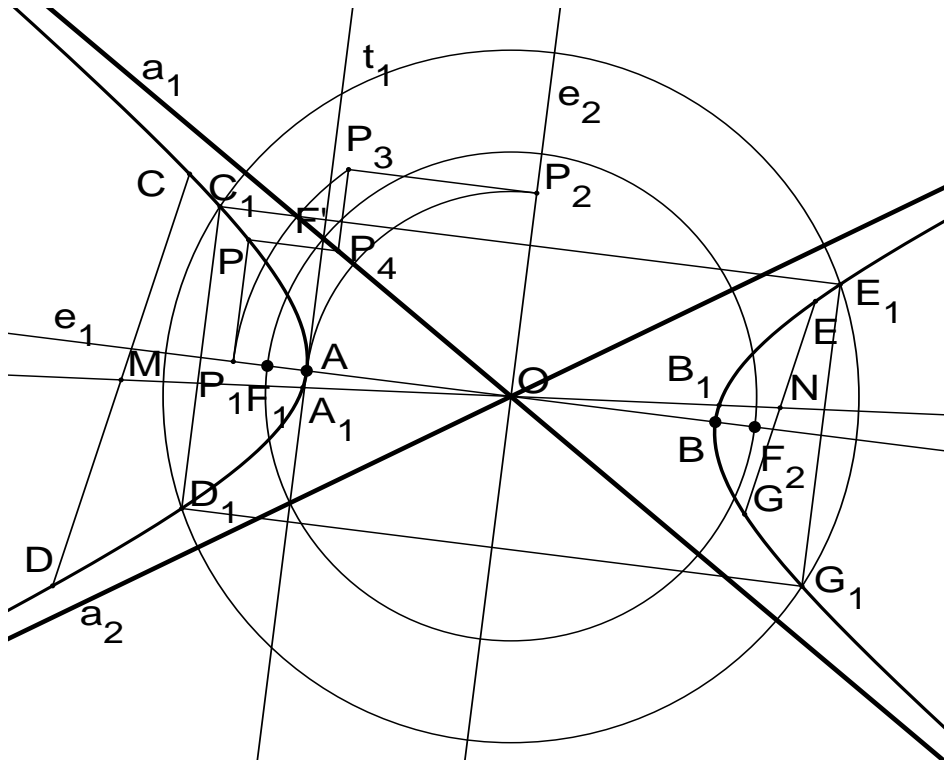


Fig. 3.78 – Assíntotas, eixos e focos de hipérbole gráfica

Traça-se uma circunferência de centro O e que intersekte a hipérbole, obtendo-se os pontos C_1 , D_1 , E_1 e G_1 que definem um retângulo de lados paralelos aos eixos. Assim e_1 e e_2 a passar em O são os eixos e A e B os vértices da hipérbole. Projetamos um ponto qualquer P da hipérbole ortogonalmente sobre o eixo e_1 obtendo P_1 e rodamos A , com centro O , até ao eixo e_2 obtendo P_2 . Seguidamente, rodamos P_1 novamente com centro em O , até intersecar a paralela a e_1 que passa em P_2 , obtendo P_3 . Sendo P_4 a intersecção das projeções ortogonais de P e P_3 , respetivamente a e_2 e e_1 , é um ponto da assíntota a_1 , e a assíntota a_2 vai ser simétrica de a_1 relativamente aos eixos. Traçando a tangente t_1 , no vértice A , a sua intersecção F com a assíntota é um ponto do círculo focal, sendo F_1 e F_2 os focos.

3.5.3.11. DEFINIDA UMA HIPÉRBOLE POR UM PONTO P QUALQUER E AS ASSÍMPTOTAS a_1 e a_2 DETERMINAR OS EIXOS E OS FOCOS

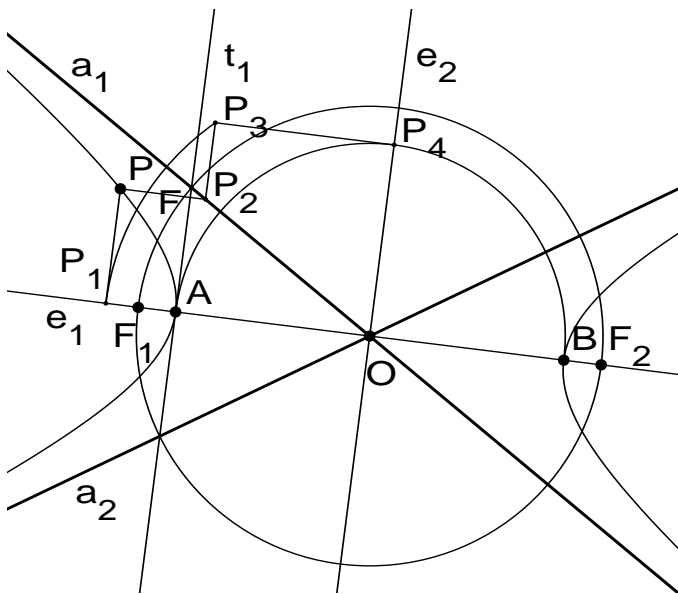


Fig. 3.79 – Hipérbole por ponto e assíptotas

Os eixos e_1 e e_2 são bissetrizes das assíptotas. Projeta-se ortogonalmente P sobre e_1 obtendo P_1 . A projeção ortogonal sobre e_2 intersesta a_1 em P_2 . Projetando P_2 ortogonalmente a e_1 até intersestar o arco com centro O e raio P_1O , obtém-se P_3 . P_4 , a projeção ortogonal de P_3 sobre e_2 , pertence ao círculo de gola, que define A e B vértices da hipérbole. No vértice A traça-se a tangente t_1 e onde esta intersesta a assíptota é um ponto F do círculo focal. O círculo focal intersesta o eixo e_1 nos focos F_1 e F_2 .

3.5.3.12. TRAÇADO DAS TANGENTES t_1 e t_2 A UMA HIPÉRBOLE QUE PASSAM NUM PONTO EXTERIOR P , CONHECIDA A HIPÉRBOLE GRAFICAMENTE, OS FOCOS F_1 E F_2 E O EIXO TRANSVERSO AB

Clarificando o processo descrito em CUNHA (1982, 162), traça-se uma circunferência com centro em P e a passar num dos focos, F_1 neste caso, e uma circunferência, com centro no outro foco F_2 , e raio igual ao eixo transverso. As duas circunferências intersestam-se em D e E . Os pontos D e E definem com F_2 duas retas. Só uma delas intersesta os dois ramos da hipérbole, definindo no ramo oposto a F_2 o ponto de tangência T_1 . A outra reta intersesta o ramo do mesmo lado de F_2 em dois pontos, sendo o ponto de tangência T_2 o mais próximo de F_2 dos dois. PT_1 e PT_2 definem as tangentes t_1 e t_2 .

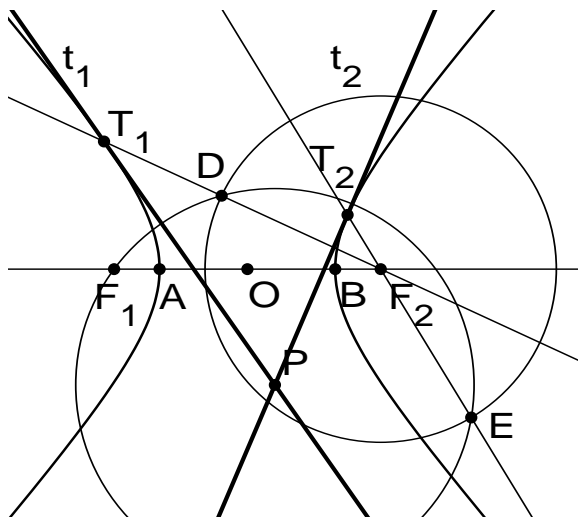


Fig. 3.80 – Tangentes à hipérbole por ponto exterior

3.5.3.13. TRAÇADO DE HIPÉRBOLES DADOS DOIS PONTOS, A e B , E AS TANGENTES, t_1 E t_2 , EM A E B (Método dinâmico para obtenção das diversas hipérboles nas condições propostas)

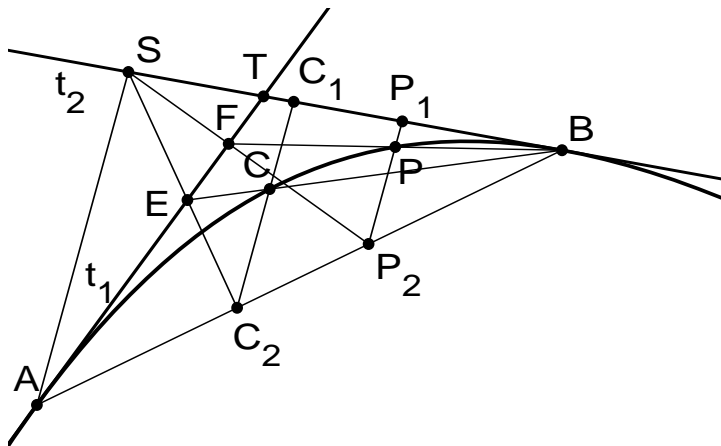


Fig. 3.81 – Hipérbole por 2 pontos e 2 tangentes

Em LIMING (1981, 331) encontra-se a construção de uma hipérbole, dadas duas tangentes, t_1 e t_2 , e os respetivos dois pontos de tangência, A e B , método que aqui apresentamos adaptado. Com estes dados constrói-se uma reta de controlo qualquer AS , sendo S um ponto de t_2 . Traça-se depois uma paralela qualquer a AS que intersesta t_2 em C_1 e AB em C_2 . Traça-se depois C_2S que intersesta t_1 em E . A intersecção de EB com C_1C_2 é um ponto da hipérbole. Repetindo o processo, passando novas paralelas a AS , obtemos outros pontos, como por exemplo P , da mesma hipérbole.

Utilizando geometria dinâmica foi possível comprovar que este traçado é específico para hipérbolas e, por outro lado, esta hipérbole não está completamente definida, pois depende da direção da reta de controlo AS . Assim variando a direção de AS obtêm-se diferentes hipérbolas com as mesmas condições. Tal resulta da hipérbole estar definida por quatro condições, dois pontos e respetivas duas tangentes e não por cinco condições.

A necessidade de cinco condições para definir uma cónica será abordada no ponto seguinte. Por outro lado, a metodologia dos traçados dinâmicos será abordada no ponto respeitante à construção de NURBS (Non Uniform Rational Basis Spline).

3.5.3.14. TRAÇADO DA HIPÉRBOLE DADOS TRÊS PONTOS, A e B , E AS TANGENTES, t_1 E t_2 , EM A E B

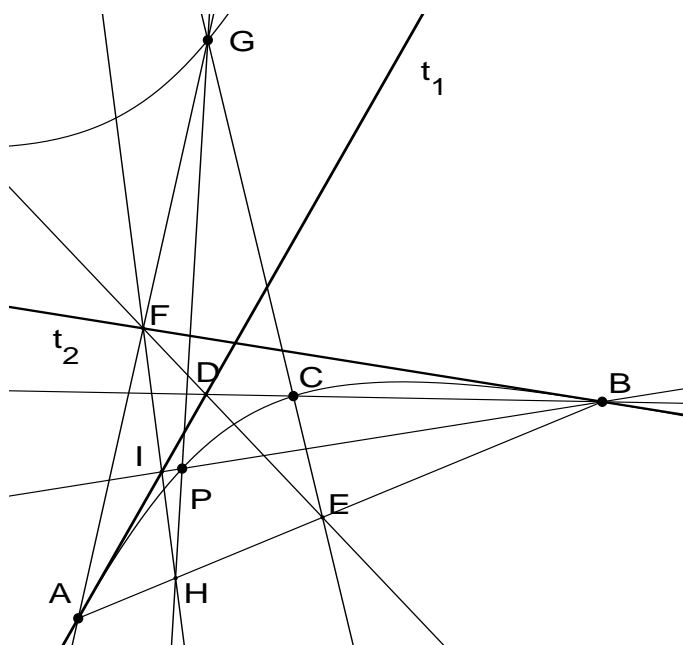


Fig. 3.82 – Hipérbole por 3 pontos e duas tangentes

Do método anterior concluiu-se o método para o problema de uma hipérbole em concreto. Agora a hipérbole está definida, pois são dados três pontos e duas tangentes. Traça-se a reta CB que interseca t_1 em D . Traça-se DE qualquer, sendo E ponto de AB , que interseca t_2 em F . As retas FA e CE interseccionam-se em G , que é um ponto do outro ramo da hipérbole. Fazendo outra reta DE , e repetindo o processo, obtêm-se novos pontos no outro ramo da hipérbole. Mantendo fixos F e G obtemos outros pontos no mesmo ramo. Assim, define-se um ponto H em AB . FI intersecciona t_1 em I . As retas IB e GH interseccionam-se em P que é ponto da hipérbole. Para determinar outros pontos da hipérbole define-se novos pontos em AB e repete-se o processo.



3.6. O TRAÇADO DAS CURVAS CÓNICAS A PARTIR DE CINCO CONDIÇÕES

De acordo com Heath, no preâmbulo de APOLLONIUS; HEATH (1896, cli), Apolónio chegou a propriedades que lhe permitiam a definição de uma curva cónica por cinco pontos desta, embora não a tenha formulado de forma explícita sobretudo porque, as elipses, parábolas e hipérbolas eram vistas, à época, como curvas distintas, com propriedades próprias e dando origem a três definições diferentes.

A partir do desenvolvimento dos fundamentos da geometria projetiva e de acordo com a literatura respeitante a este tema, foi possível concluir o que já referimos anteriormente sobre o tema, ou seja, que cinco condições, pontos ou tangentes definem uma cónica. Do ponto de vista prático utilizando o Teorema de Pascal e o seu dual, o Teorema de Brianchon, podem ser desenvolvidos procedimentos que permitem que, a partir das condições dadas, se possam determinar novos pontos e tangentes da mesma curva. De notar que estes teoremas dizem respeito à determinação dos pontos de tangência nas tangentes dadas ou das tangentes em pontos dados, ou seja, dizem respeito a condições de incidência.

IZQUIERDO ASENSI (1985, 195-203) desenvolve este tema em cada um dos casos para diferentes condições, para determinar os centros de uma relação projetiva entre uma circunferência com uma curva cónica o que, sendo útil e interessante do ponto de vista teórico, sobretudo para a fundamentação da Geometria Projetiva, não é prático para a determinação de novos pontos e tangentes de cónicas e, logo, para os traçados com execução mais expedita.

Não obstante, em IZQUIERDO ASENSI (1985, 201) encontramos também o quadro *Cónicas definidas por pontos e tangentes* que define todas as circunstâncias possíveis para as condições dadas, e que têm a ver com os pontos dados serem, ou não, pontos de tangência das tangentes dadas. Pela sua relevância para a obtenção das diversas soluções para os traçados reproduzimo-lo seguidamente, traduzindo-o para português. O número de soluções é, nesta situação, um, dois ou quatro, tendo em conta cada um dos pontos isolados, por si, ou cada tangente sem ponto de contacto, não estando em causa que as 5 condições dão origem, em cada caso concreto e consoante a posição relativa de pontos e retas, apenas a uma só solução, ou seja, que as cinco condições definam uma única cónica. O número de soluções é 0 sempre que as condições dadas não permitam obter qualquer cónica.

CASOS	TANGENTES	PONTOS DE CONTACTO DAS TANGENTES	PONTOS ISOLADOS	TOTAL DE PONTOS	NÚMERO DE SOLUÇÕES
1º	0	0	5	5	1
2º	1	0	4	4	2 ou 0
3º	1	1	3	4	1
4º	2	0	3	3	4 ou 0
5º	2	1	2	3	2 ou 0
6º	2	2	1	3	1
7º	3	0	2	2	4 ou 0
8º	3	1	1	2	2 ou 0
9º	3	2	0	2	1
10º	4	0	1	1	2 ou 0
11º	4	1	0	1	1
12º	5	0	0	0	1

Fig.3.83 – Quadro das cinco condições para definir uma cónica

Em NAGORE (1988, Tomo III, 141-154) encontramos os procedimentos que permitem a determinação de novos pontos ou tangentes, sendo dados cinco condições, pontos ou tangentes, mas só para os casos em que são dados cinco pontos, cinco tangentes, quatro pontos e a tangente num deles, 3 pontos e 2 tangentes em dois deles, 2 pontos e respetivas tangentes e uma terceira tangente, 1 ponto e respetiva tangente e outras 3 tangentes, correspondendo aos 1º, 3º, 6º, 9º, 11º e 12º casos do quadro acima. Em suma, Nagore só apresenta solução para os casos em que os pontos dados são pontos de tangência das tangentes ou as tangentes o sejam em pontos dados. Não obstante a limitação dos casos, nos processos desenvolvidos por Nagore, eles correspondem à maioria das situações típicas que surgem nos problemas.



Abordaremos seguidamente de forma sintética os conceitos e teoremas que serão utilizados como fundamentação teórica da resolução de problemas, existindo incidência dos pontos dados sobre as tangentes. Como veremos mais à frente, procurámos desenvolver processos que permitam definir metodologias expeditas para resolver os restantes casos ou, pelo menos, parte deles.

3.6.1. TEOREMA DE PASCAL

O Teorema de Pascal pode ser enunciado como estabelecendo que os lados opostos de um *hexalátero* se interseitam em pontos que pertencem à mesma reta.

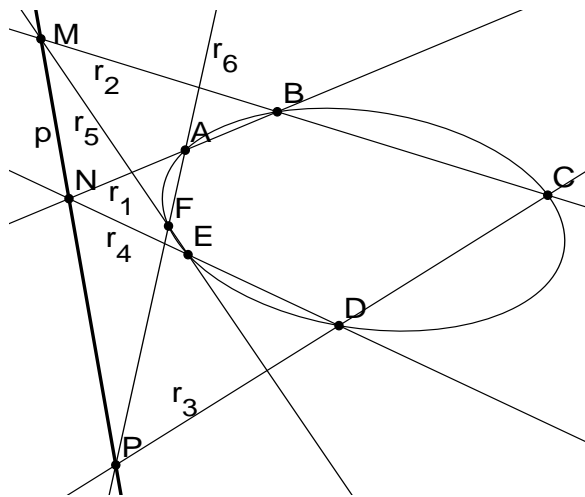


Fig.3.84 – Teorema de Pascal

Considere-se 6 pontos A, B, C, D, E e F de uma cónica, ordenados em sequência, por facilitar a explanação. Os seis pontos definem um *hexavértice* convexo. Traçando segmentos de reta que passem por todos os pontos, numa sequência lógica e seguindo sempre na direção do ponto seguinte, os pontos de intersecção de cada par de retas que contêm segmentos opostos interseitam-se em pontos da mesma reta, designada *Pascala*.

Assim AB define r_1 , BC define r_2 , CD define r_3 , DE define r_4 , EF define r_5 e FA define r_6 . A intersecção dos pares de retas opostas $r_1 r_4$, $r_2 r_5$ e $r_3 r_6$, permite determinar M, N e P , pontos que definem uma só reta, a *Pascala*.

A designação de **Pascala** é utilizada na literatura como homenagem a Pascal, aparecendo por vezes referida como a *reta de Pascal* e é portanto **a reta definida pelas intersecções dos lados opostos de um hexavértice inscrito numa cónica.**

Estamos a utilizar designações próprias da Geometria Projetiva e que não encontramos tanto na literatura científica como em dicionários e enciclopédias de referência de língua portuguesa, e que adaptámos ao português a partir das designações em português do Brasil quando se encontraram, em espanhol ou em inglês.

Um **Polivértice** é assim designado porque de facto permite definir propriedades que dizem respeito aos seus vértices, no caso em estudo como pontos da curva cónica. Assim o *polivértice*, por união dos seus vértices, dá origem a um polígono constituído por segmentos de reta numa sequência, por tal forma que em cada vértice se unam dois segmentos e dando origem a uma figura fechada sendo, portanto, possível percorrê-la sem interrupções. Então nem todos os polígonos são *polivértices*. Por exemplo, se um hexágono convexo é um *hexavértice* já o polígono estrelado de seis vértices definido por dois triângulos que se entrecruzam não é um *hexavértice* porque não há continuidade entre os dois triângulos.

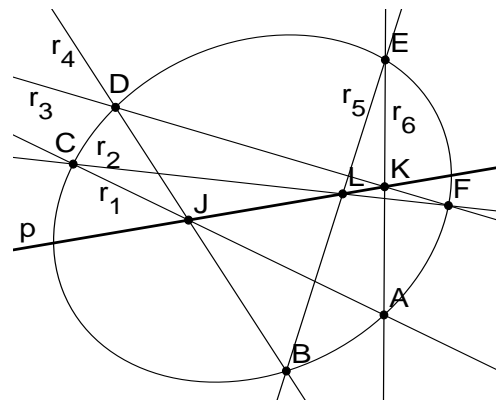


Fig. 3.85 – Determinação da Pascal
em *hexavértice* não convexo

Na figura acima obteve-se a reta *Pascal* de forma similar à anterior, mas começando por traçar *AC*, e depois *CF*, *FD*, *DB*, *BE* e por último *EA*, passando por todos os vértices de forma que, em cada um deles, só passem duas retas e definindo com os segmentos um polígono contínuo e fechado no ponto inicial. Os pares de retas a intersestar são as opostas $r_1 r_4$, $r_2 r_5$ e $r_3 r_6$, definindo *J*, *L* e *K*, pontos que definem a reta *Pascal*.

Outra sequência possível seria, por exemplo, *AD*, *DB*, *BF*, *FC*, *CE* e por último *EA*, dando origem a uma reta *Pascal* diferente.

As mesmas regras são aplicáveis ao *pentavértice*, ao *quadrivértice* e ao *trivértice* que utilizaremos em seguida.



3.6.1.1. O HEXAVÉRTICE E O TEOREMA DE PAPPUS DE ALEXANDRIA

Uma propriedade similar do *hexavértice* já tinha sido descoberta muitos séculos antes por Pappus de Alexandria. O teorema de Pappus, aplicado à Geometria Projetiva, enuncia que, constituído um *hexavértice* por pontos de duas retas a e b , as intersecções de lados opostos no *hexavértice* se situam sobre uma reta. De notar que, hoje, podemos considerar duas retas concorrentes ou paralelas como caso particular das cónicas, ou seja, cónicas degeneradas, e, logo, o Teorema de Pascal como um alargamento do âmbito do Teorema de Pappus.

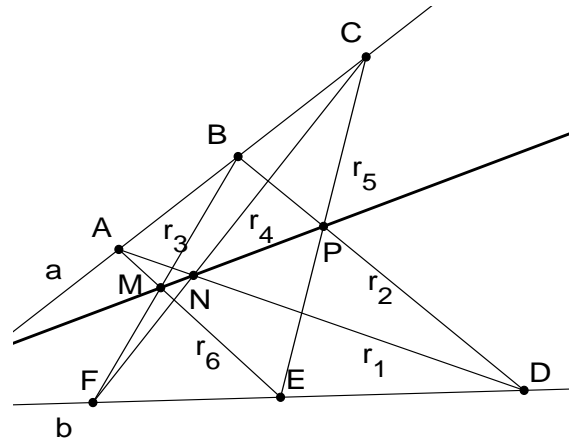


Fig.3.86 – Teorema de Pappus

3.6.1.2. O PENTAVÉRTICE E O TEOREMA DE PASCAL

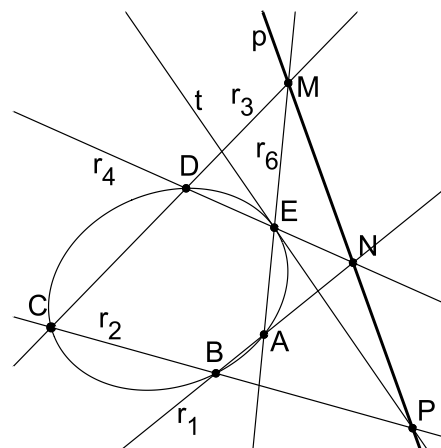


Fig.3.87 – Pentavértice e *Pascala*

O *pentavértice* aplicado ao teorema de Pascal corresponde a considerar que os pontos E e F do *hexavértice* coincidem, ou seja E é um ponto duplo, pelo que a reta correspondente EF , ou seja r_5 , é substituída pela tangente em E , o que equivale a considerar os dois pontos como coincidentes.

Tal como no hexavértice são admitidas outras sequências de uniões dos vértices desde que respeitadas as condições já enunciadas. Assim, a intersecção das retas r_3 e r_6 define o ponto M , r_1 e r_4 definem o ponto N , e r_2 e a tangente t em E definem P . Os pontos M , N e P pertencem à reta *Pascal*.

3.6.1.3. O QUADRIVÉRTICE E O TEOREMA DE PASCAL

Parte-se da consideração de dois dos pontos como representando, cada um deles, um lado do hexavértice, no caso C e D , pelo que esses lados são substituídos pelas tangentes nos pontos. Tal como para o *hexavértice* e *pentavértice* são admitidas outras sequências de pontos e os outros pontos como representando dois pontos cada. No caso foram considerados pontos duplos C e D . Assim, a intersecção da tangente em C e r_6 define o ponto M , a de r_4 e r_1 define N e a da tangente em D e r_2 define o ponto P , sendo MNP a *Pascal*.

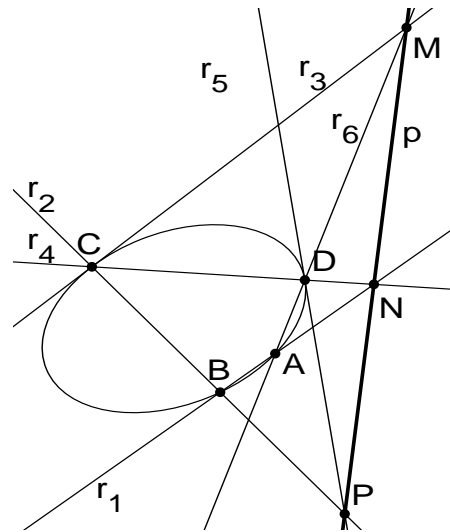


Fig.3.88 – Quadrivértice e *Pascal*

3.6.1.4. O TRIVÉRTICE E O TEOREMA DE PASCAL

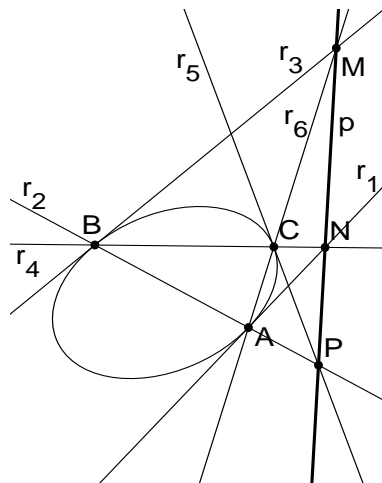


Fig.3.89 – Trivértice e *Pascal*



No *trivértice* os três pontos representam 2 pontos cada um. Assim a reta oposta de um lado do triângulo é a tangente no vértice oposto. Daqui resulta que r_3 é a tangente em B e intersesta a reta oposta r_6 em M , r_1 é a tangente em A e intersesta a oposta r_4 em N e r_5 , tangente em C , intersesta r_2 em P , pelo que a *Pascala* é novamente definida por M , N e P . São igualmente admitidas para o *trivértice* seqüências de pontos diferentes desde que respeitem as regras anteriormente enunciadas.

3.6.2. TEOREMA DE BRIANCHON

O Teorema de Brianchon enuncia que as diagonais de um hexalátero circunscrito a uma cónica se intersestam num ponto.

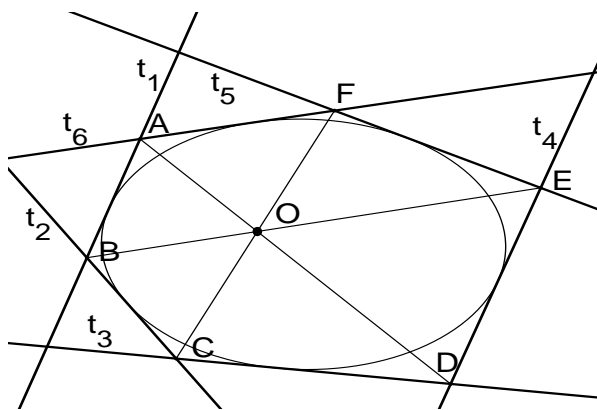


Fig.3.90 – Teorema de Brianchon

Considere-se as tangentes t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 e t_6 a uma curva cónica e assim ordenadas consecutivamente numa ordem definida em função da posição relativa dos pontos de tangência e que definem um *hexalátero*. Se na mesma ordem designarmos por A, B, C, D, E e F os pontos de intersecção das tangentes consecutivas e traçarmos **as diagonais do hexalátero estas intersestam-se no ponto O designado por **PONTO DE BRIANCHON**.**

Um **hexalátero** é a **figura geométrica definida por quaisquer seis retas numa seqüência das intersecções respetivas definidora da própria seqüência das tangentes**. Por outro lado também se poderia alterar a ordem das tangentes dando origem a uma seqüência dos pontos de intersecção diferente, desde que respeitadas as regras definidas anteriormente para as tangentes e respetivos pontos de tangência. Um *hexalátero* é portanto uma entidade geométrica dual do *hexavértice*.

Tenha-se igualmente em conta que, tal como foi feito para o teorema de Pascal utilizámos graficamente a elipse como exemplo. Se, por exemplo, tivéssemos utilizado a

hipérbole teríamos dado origem a uma posição relativa das tangentes completamente diferente.

O Teorema de Brianchon e o Teorema de Pascal são **teoremas duais**, ou seja, são teoremas em que, a partir de um, se pode demonstrar o outro, e em que num, substituindo pontos por retas e retas por pontos, se obtém o outro.

3.6.2.1. O PENTALÁTERO E O TEOREMA DE BRIANCHON

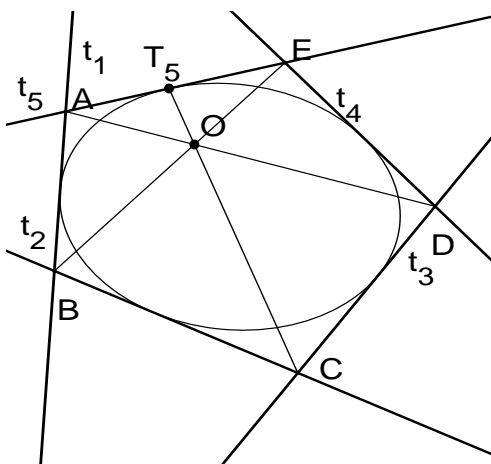


Fig. 3.91 – Pentalátero e Teorema de Brianchon

Construímos o *pentalátero* respeitando as mesmas regras respeitantes ao *hexalátero*. Sendo dadas apenas as cinco tangentes t_1 , t_2 , t_3 , t_4 e t_5 a sexta tangente, considerada como coincidente com a quinta neste caso, é substituída pelo ponto de tangência T_5 em t_5 . Assim sendo a intersecção das retas diagonais do *pentalátero*, ou seja, AD , BE e CT_5 define o ponto de Brianchon.

O **Pentalátero** é a figura geométrica definida por quaisquer cinco retas, respeitando-se as mesmas regras definidas para o *hexalátero*, designadamente que a ordenação sequencial das tangentes respeite a ordenação na mesma sequência dos seus pontos de intersecção.

3.6.2.2. O QUADRILÁTERO E O TEOREMA DE BRIANCHON

São desenvolvidos procedimentos similares aos respeitantes ao *hexalátero* e *pentalátero*. Assim, na sequência considerada, a tangente t_2 é coincidente com t_1 pelo que é substituída pelo ponto de tangência T_1 . Igualmente a tangente t_6 é coincidente com t_5 pelo



que é substituída pelo ponto de tangência T_5 na tangente t_5 . Assim sendo as retas AD , T_1E e CT_5 interseam-se em O , ponto de Brianchon.

O quadrilátero é, neste contexto, um hexalátero com dois lados inexistentes e que são substituídos pelos pontos de tangência na reta antecedente na sequência utilizada.

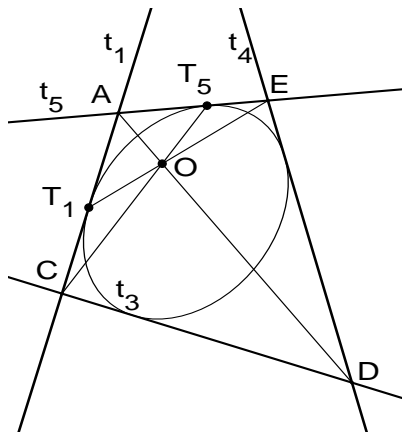


Fig. 3.92 – Quadrilátero e Teorema de Brianchon

Quadrilátero completo é a configuração obtida a partir de qualquer conjunto de quatro retas, três das quais não concorrem para o mesmo ponto, e que se interseam duas a duas de todos os modos possíveis. Os seus pontos são as seis intersecções das retas A , B , C , D , E e F .

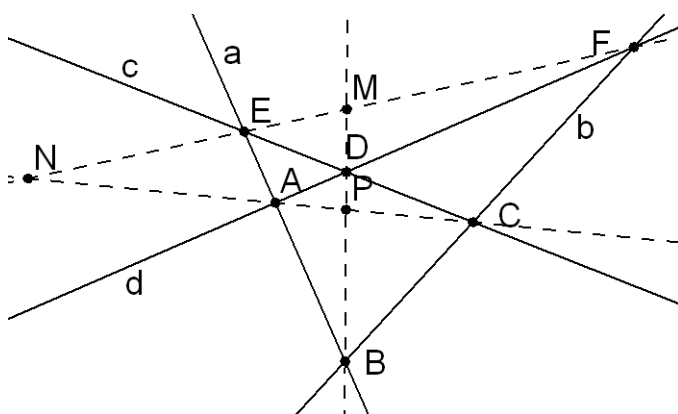


Fig. 3.93 – Quadrilátero completo

Vértices opostos são A e C , B e D , e E e F porque não pertencem ao mesmo lado. As três **diagonais** são as retas que unem vértices opostos. As três diagonais interseam-se em três pontos, M , N e P , definindo o **trilátero diagonal**.



3.6.2.3. O TRILÁTERO E O TEOREMA DE BRIANCHON

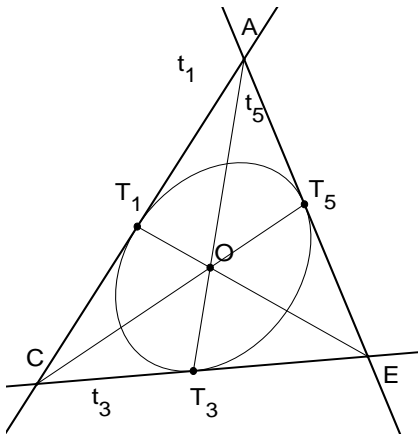


Fig. 3.94 – Trilátero e Teorema de Brianchon

Novamente são utilizadas regras similares às respeitantes ao *hexalátero*, *pentalátero* e *quadrilátero*. Assim, na sequência considerada, a tangente t_2 é coincidente com t_1 pelo que é substituída pelo ponto de tangência T_1 . Igualmente as tangentes t_4 e t_6 são coincidentes, respetivamente com t_3 e t_5 , pelo que são substituídas respetivamente pelos pontos de tangência T_3 na tangente t_3 e T_5 na tangente t_5 . Assim sendo as retas T_1E , AT_3 e CT_5 intersectam-se em O , ponto de Brianchon.

O **trilátero** é, nesta circunstância, um *hexalátero* com três lados inexistentes e que são substituídos pelos pontos de tangência na reta antecedente na sequência utilizada.

3.6.3. APLICAÇÃO DOS TEOREMAS DE PASCAL E BRIANCHON AOS TRAÇADOS DAS CÔNICAS

Não seguiremos para os doze casos seguintes a ordenação de IZQUIERDO ASENSI (1985, 201), mas antes a de NAGORE (1988, Tomo III, 141-154), pois corresponde a aplicar nos primeiros seis casos o teorema de Pascal e depois nos seis casos seguintes o teorema de Brianchon, o que facilita a exposição.

Por outro lado, e não obstante na exposição se utilizar posições dos dados que dariam como resultado a definição de uma elipse, interessa salientar que estes processos são aplicáveis, por definição, a qualquer das cónicas.

3.6.3.1. PASCAL – 1º caso

Dados cinco pontos da cónica A , B , C , D e E determinar outro ponto P da cónica.

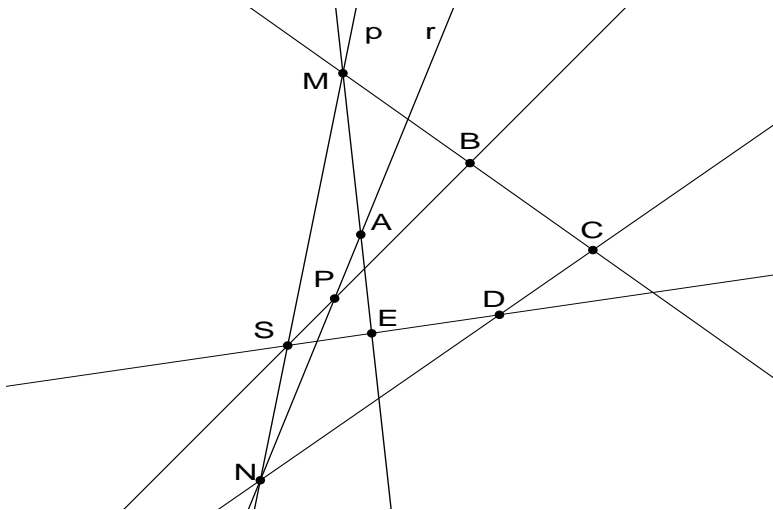


Fig. 3.95 – Dados 5 pontos determinar outro ponto

Adaptando de NAGORE (1988, T. III, 145), o problema resolve-se por aplicação direta do teorema de Pascal.

Traçar a reta BC até intersecar AE em M . Por A fazer passar a reta r com uma direção qualquer até intersecar CD em N . MN define a reta *Pascala* p . DE interseca a reta *Pascala* em S . SB interseca NA no ponto P que é um ponto da cónica.

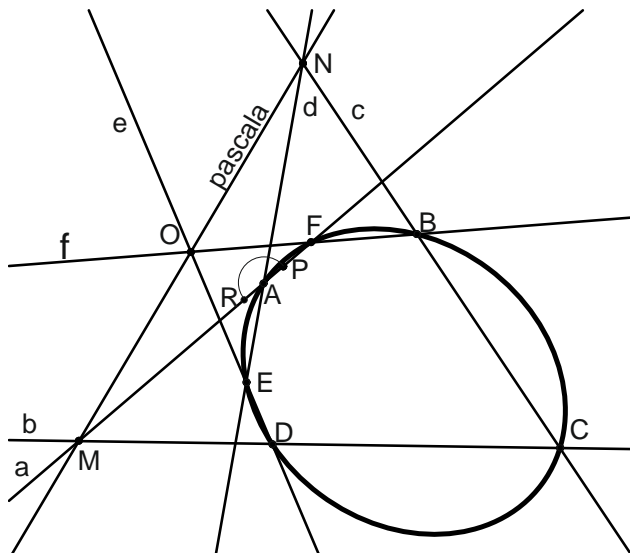


Fig. 3.96 – Dados 5 pontos determinar a curva graficamente

Como desenvolvimento do mesmo método exemplificamos como permite a determinação de todos os pontos da curva, traçando a reta r com diversas direções. Se rodarmos a reta r 180° , em torno de A , obtemos toda a curva. Se a reta r for paralela a CD a reta *Pascala* passa em M e é igualmente paralela.



De qualquer forma o método, por partir de uma reta definida a partir de um ponto da cónica, não responde, só por si, a outro problema que é o de determinar os extremos de uma corda de que não se conhece qualquer dos extremos. Tal problema é na verdade o da intersecção de uma reta com a cónica.

Há na literatura referências diversas a outros métodos por aplicação dos mesmos princípios mas que, em regra, permitem apenas determinar um sexto ponto numa direcção qualquer, não controlada.

Por outro lado, utilizando este processo de criação podemos gerar um modelo em geometria dinâmica que permita a obtenção de qualquer curva cónica com independência da posição dos dados ou ainda rotinas de programação para obtenção de curvas cónicas informaticamente.

3.6.3.2. PASCAL – 2º caso

Dados quatro pontos A, B, C e D e a tangente t num deles determinar outro ponto P da cónica.

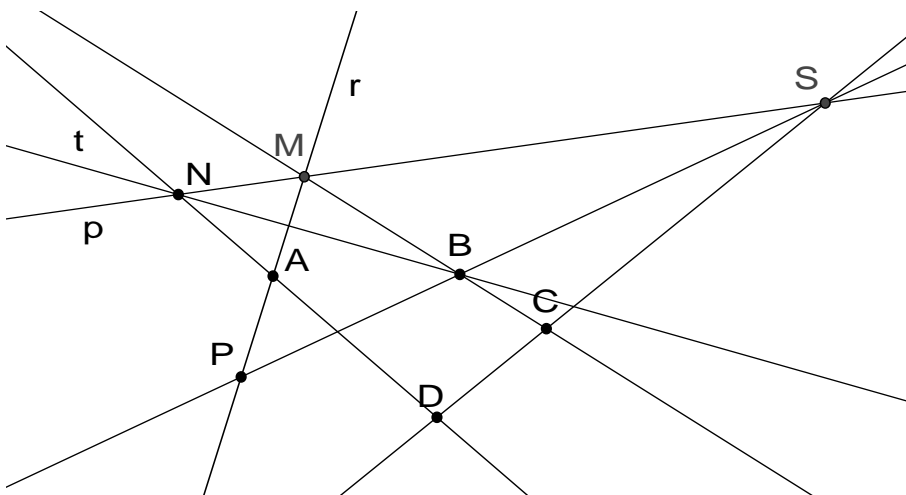


Fig. 3.97 –
Dados quatro
pontos e a
tangente num
deles determinar
outro ponto

Aplica-se o teorema de Pascal adaptado ao caso do *pentavértice* a obter.

De acordo com NAGORE (1988, T. III, 145) intersecta-se a reta DA com a tangente t obtendo N . Traça-se a reta r a passar em A e com a direcção pretendida para obter o ponto P . A intersecção M , de r com BC , define com N a reta pascala p . CD intersecta a pascala em S . SB define a reta que intersecta r no ponto P . Se rodarmos r 180° em torno de A obtemos, nas mesmas condições, todos os pontos da curva.



3.6.3.3. PASCAL – 3º caso

Dados três pontos A , B e C e as tangentes a e b , respetivamente em A e B , determinar outro ponto P da cónica.

Aplica-se o teorema de Pascal adaptado ao *quadri vértice* a obter. De acordo com o método exposto por NAGORE (1988, T. III, 146), AC interseca a tangente b , do ponto B , em N . Por C traçar a reta r com a direção pretendida para obter o ponto P e r interseca AB em M . MN define a reta Pascal p . A tangente a , em A , interseca p em S . SB interseca r no ponto pretendido P . Novamente se salienta que, com outras direções da reta r , pode-se obter outros pontos da curva em qualquer direção.

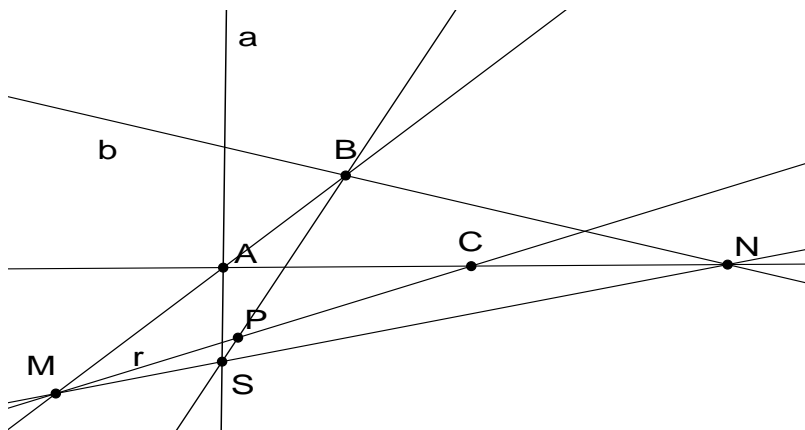


Fig. 3.98 – Dados três pontos e as tangentes em dois deles determinar outro ponto

3.6.3.4. PASCAL – 4º caso

Dados cinco pontos A , B , C , D e E determinar a tangente t no ponto A da cónica.

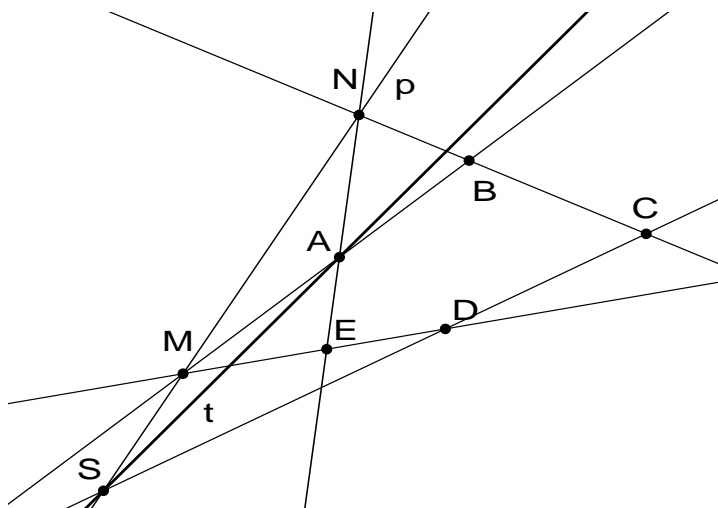


Fig. 3.99 – Dados 5 pontos determinar a tangente num deles

Adaptando de NAGORE (1988, T. III, 147) a intersecção de AB com ED define M . A intersecção de AE com BC define N . MN é a *Pascal* p . O ponto S é a intersecção de p com CD . SA define a tangente t .

3.6.3.5. PASCAL – 5º caso

Dados quatro pontos A, B, C e D e a , a tangente em A , determinar a tangente t em C .

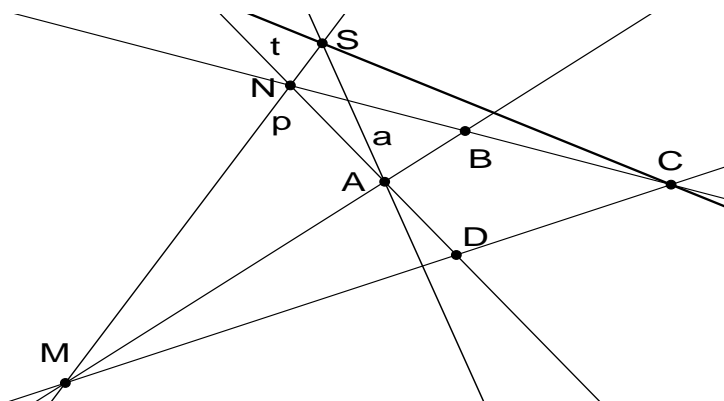


Fig. 3.100 – Dados 4 pontos e 1 tangente determinar outra tangente

Adaptando de NAGORE (1988, T. III, 147) a intersecção M das retas definidas por CD e AB define com a intersecção N das retas AD e BC a reta *Pascal* p . A intersecção da tangente a em A com a *Pascal* é S . A reta SC é a tangente pretendida.

3.6.3.6. PASCAL – 6º caso

Dados três pontos A, B e C e as tangentes a e b , respetivamente em A e B , determinar a tangente t em C da cónica.

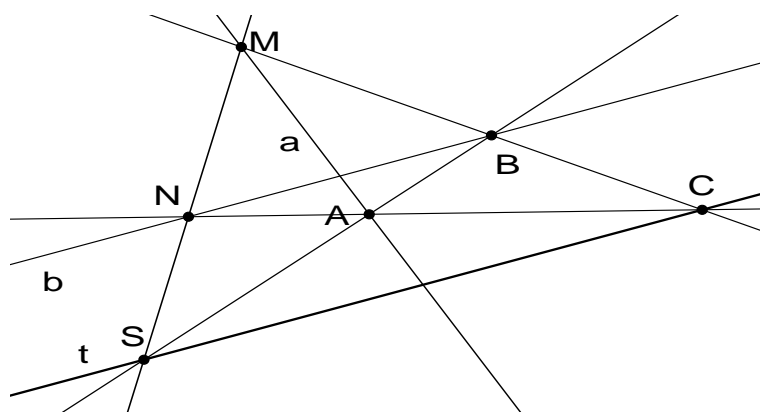


Fig. 3.101 – Dados 3 pontos e 2 tangentes determinar tangente



Utilizando o processo descrito em NAGORE (1988, T. III, 148) começa-se por interseçar a tangente a com a reta BC determinando M . Intersecta-se depois AC com a tangente b determinando N . MN define a reta *Pascala* p . A intersecção de p com AB é S . SC define a tangente t pretendida.

3.6.3.7. BRIANCHON – 1º caso

Dadas cinco tangentes da cónica a, b, c, d e e determinar o ponto P de tangência de a na cónica.

Adaptando de NAGORE (1988, T. III, 149), o problema resolve-se por aplicação direta do teorema de Brianchon.

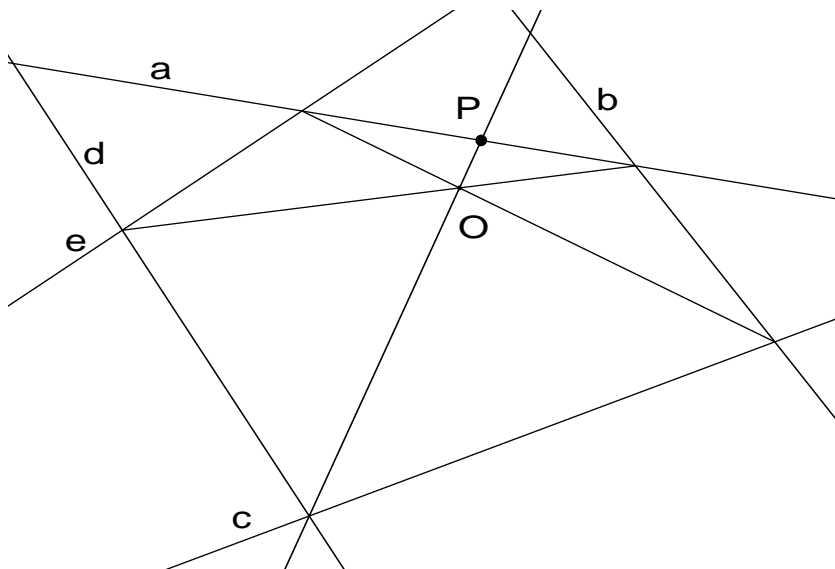


Fig. 3.102 – Dados cinco tangentes determinar um ponto de tangência

Assume-se que a tangente a representa duas tangentes do hexalátero e traça-se as diagonais deste, determinando o ponto de Brianchon O . Uma das diagonais é a reta que une a intersecção de e e d com a intersecção de a e b . Outra diagonal é a que une a intersecção de b e c com a intersecção de a e e . As duas diagonais interseccionam-se no ponto O . A diagonal que passa em O , a partir da intersecção de d com c , intersecciona a tangente a no ponto P de tangência.

Evidentemente que podemos repetir o processo relativamente a cada uma das outras tangentes e assim obter os cinco pontos de tangência.

3.6.3.8. BRIANCHON – 2º caso

Dados 4 tangentes a , b , c e d e o ponto de tangência A em a determinar outro ponto P de tangência de d na cónica.

Aplica-se o teorema de Brianchon adaptado ao caso do *pentalátero*, sendo que o lado em falta se considera coincidente com d e é substituído pelo ponto P a obter.

De acordo com NAGORE (1988, T. III, 149) traça-se a reta diagonal do *pentalátero* resultante da intersecção de a com d e da intersecção de b com c . Outra diagonal é o segmento que une A com a intersecção de c com d . As duas diagonais interseam-se em O . A terceira diagonal resulta de traçarmos a reta que passa em O e na intersecção de a com b . Esta terceira diagonal interseca d no ponto P de tangência.

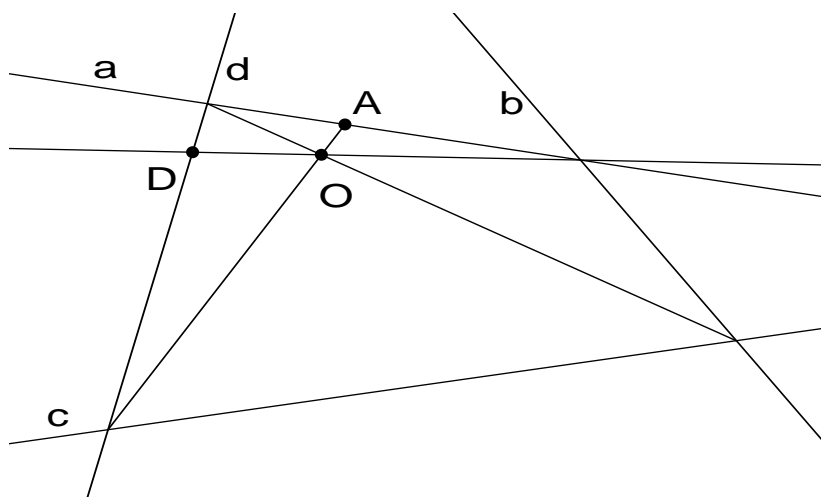


Fig. 3.103 – Dados quatro tangentes e um ponto de tangência determinar outro ponto

3.6.3.9. BRIANCHON – 3º caso

Dados 3 tangentes a , b e c e os pontos de tangência A e B , respetivamente em a e b , determinar outro ponto P da cónica.

Aplica-se o teorema de BRIANCHON adaptado ao *quadrilátero* a obter, sendo que o quarto lado se considera coincidente com c e é substituído por P .

De acordo com NAGORE (1988, T. III, 150), traçam-se duas diagonais do *quadrilátero*, uma que une A à intersecção de b com c , e a outra que une B com a intersecção de a com c , definindo na intersecção das duas O . A reta que passa em O e na intersecção de a com b é a terceira diagonal e interseca c no ponto P pretendido.

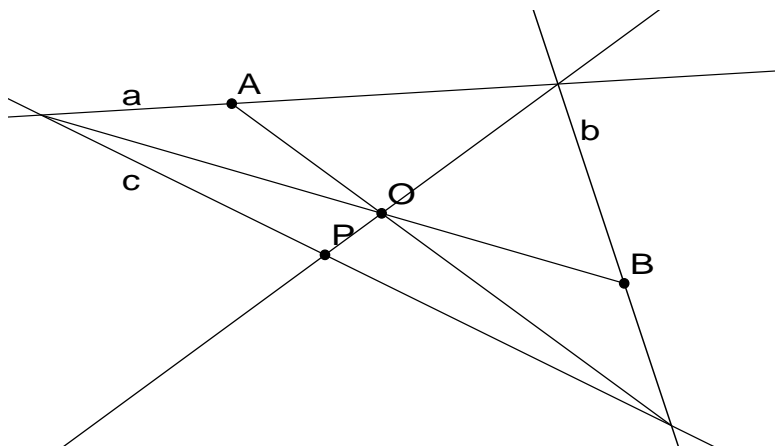


Fig. 3.104 – Dadas três tangentes e os pontos de tangência em duas delas determinar outro ponto de tangência

3.6.3.10. BRIANCHON – 4º caso

Dados 5 tangentes a, b, c, d e e determinar outra tangente t que passa no ponto A da tangente a da cónica.

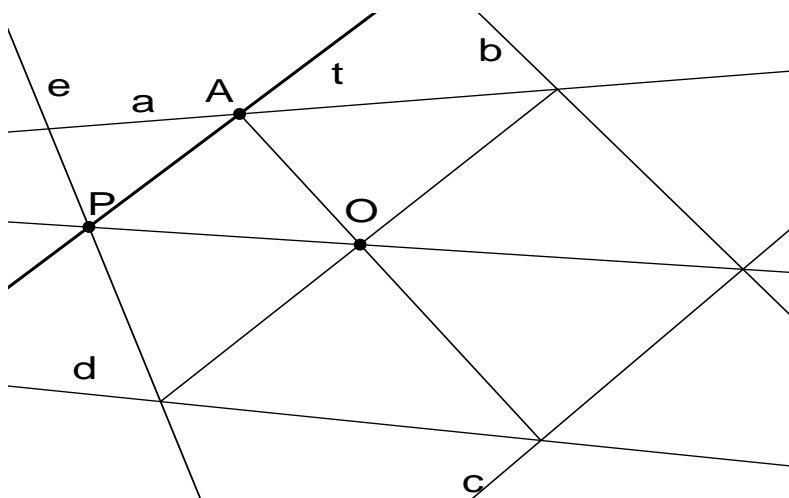


Fig. 3.105 – Dadas cinco tangentes determinar outra tangente

Adaptando de NAGORE (1988, T. III, 150) escolhe-se um ponto A qualquer da reta a e traça-se a diagonal do *hexalátero* que passa em A e na intersecção de c com d . Traça-se outra diagonal que passa na intersecção de a com b e na intersecção de d com e . A intersecção das duas diagonais define o ponto O . Traçando a terceira reta diagonal, que passa em O e na intersecção de b com c , esta interseca e no ponto P que, com A , define a tangente t .

Para além de podermos definir diferentes pontos A obtendo novas tangentes, podemos aplicar o mesmo processo para pontos de qualquer das outras tangentes.



3.6.3.11. BRIANCHON – 5º caso

Dados 4 tangentes a , b , c e d e o ponto de tangência A de a determinar a tangente t da cónica.

Adaptando de NAGORE (1988, T. III, 150) traça-se a diagonal do *pentalátero* a obter que passa na intersecção de a com d e na intersecção de b com c . Escolhe-se Q qualquer sobre a tangente d . Traça-se a diagonal que passa em Q e na intersecção de a com b . As duas diagonais interseccionam-se em O . AO é a terceira diagonal e intersecciona c em P . PQ define a tangente t pretendida.

Escolhendo diferentes pontos Q sobre t , ou utilizando o mesmo processo definindo o ponto Q sobre a tangente c podemos determinar diferentes tangentes à cónica.

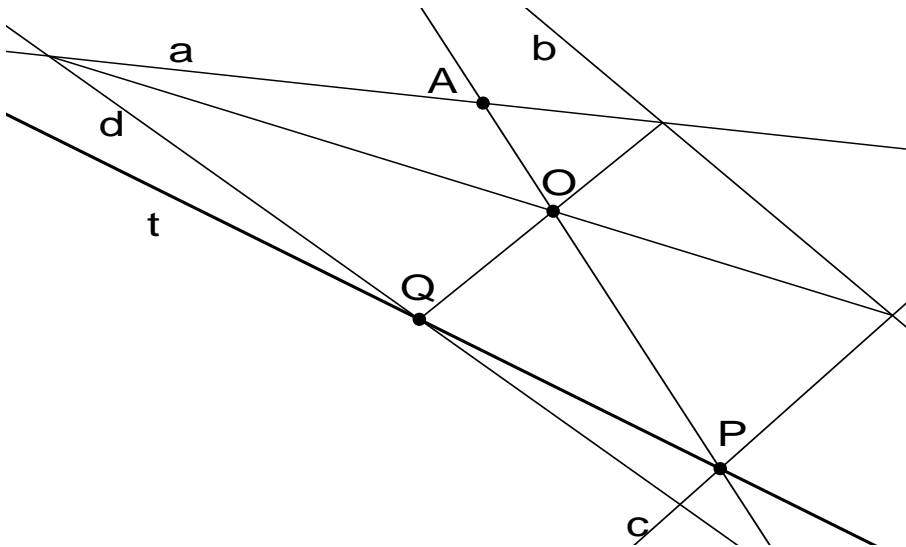


Fig. 3.106 –
Dados quatro
tangentes e um
ponto determinar
a tangente

3.6.3.12. BRIANCHON – 6º caso

Dados 3 tangentes a , b e c e os pontos de tangência A e B , respetivamente em a e b , determinar a tangente t da cónica.

Utilizando o processo descrito em NAGORE (1988, T. III, 151) começa-se por determinar a diagonal do *quadrilátero* a obter, que passa em A e na intersecção de b com c . Escolhe-se Q qualquer em c e traça-se a diagonal que passa em Q e na intersecção de a com b . As duas diagonais determinam O . A reta BO intersecciona a em P . PQ define a tangente t pretendida.

Com diferentes pontos Q sobre c obtemos diferentes tangentes à cónica.

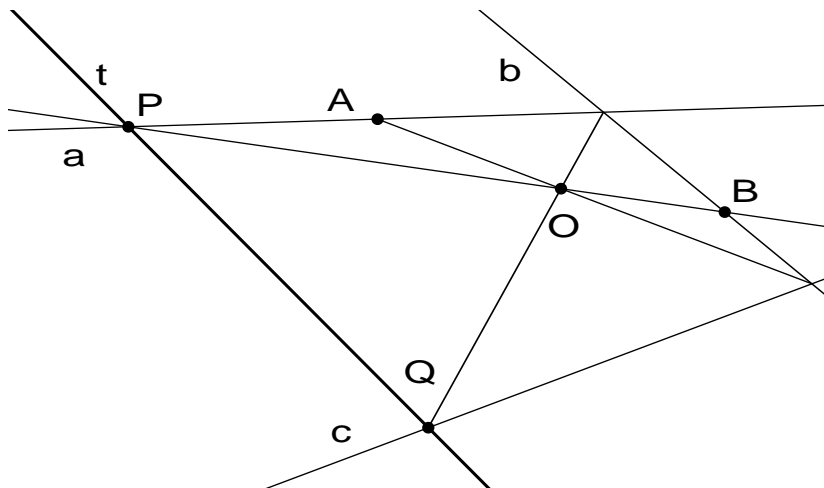


Fig. 3.107 – Dados três tangentes e dois pontos de tangência determinar outra tangente

3.6.4. O CENTRO E DIÂMETROS DE CÔNICAS DEFINIDAS POR CINCO CONDIÇÕES

A partir da definição de uma cônica por cinco condições e dos métodos resultantes da aplicação prática dos Teoremas de Pascal e Brianchon é possível determinar o centro, eixos, focos e pontos da cônica em circunstâncias pré-determinadas.

3.6.4.1. DADOS CINCO PONTOS A, B, C, D E E DETERMINAR O CENTRO O

A construção está executada em dois passos, para melhor compreensão. Na Fig. 3.108 a) é determinado um sexto ponto F da cônica pelo método que permite a determinação de um ponto numa direção qualquer a partir de um dos cinco pontos dados, estabelecendo-se uma paralela a uma corda pré-existente, no caso CD.

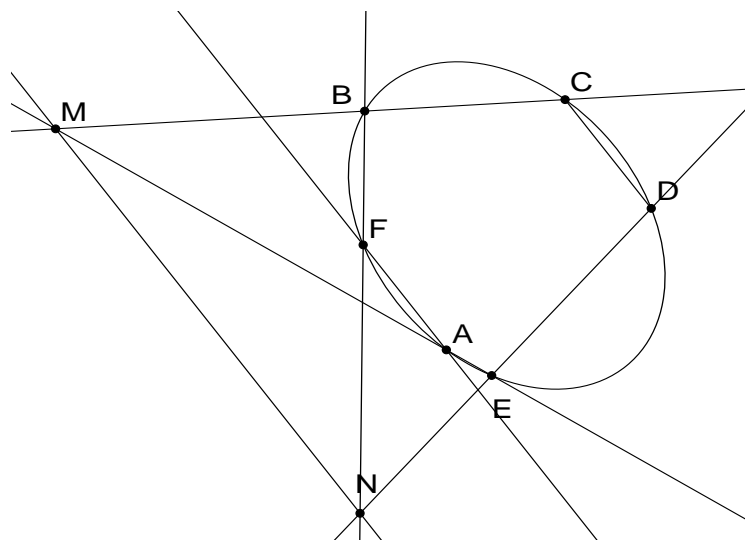


Fig. 3.108 a) – Centro a partir de cinco pontos

Na Fig. 3.108 b) repete-se o processo para determinar outro ponto G definindo outra corda paralela a outra definida por qualquer par de pontos. Determina-se em seguida os pontos médios de cada corda dos dois pares de paralelas e com os pontos médios de cada par define-se a direção de um diâmetro, sendo o centro O a intersecção dos dois diâmetros.

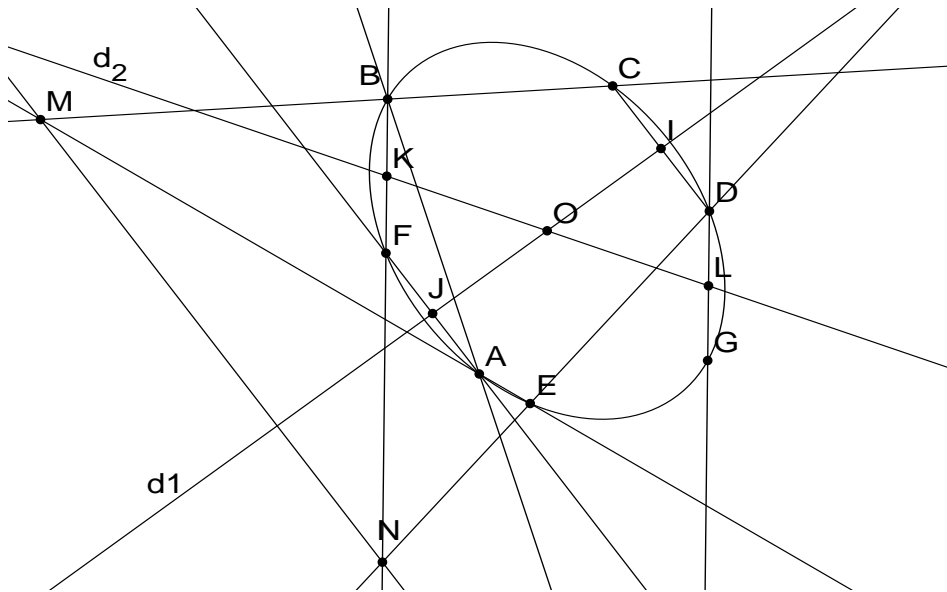


Fig. 3.108 b) – Centro a partir de cinco pontos

3.6.4.2. DADOS CINCO PONTOS A , B , C , D E E DE UMA CÓNICA DETERMINAR DIÂMETROS CONJUGADOS

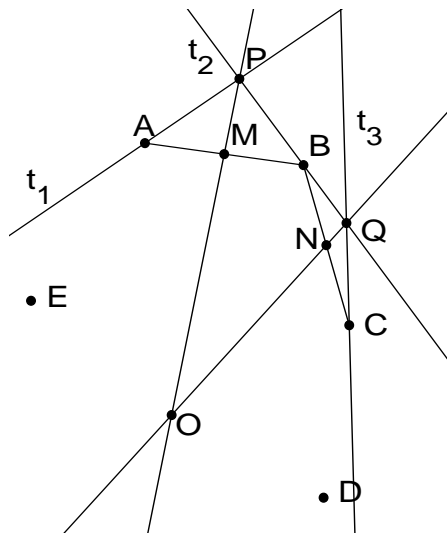


Fig. 3.109 a)
– Centro de elipse

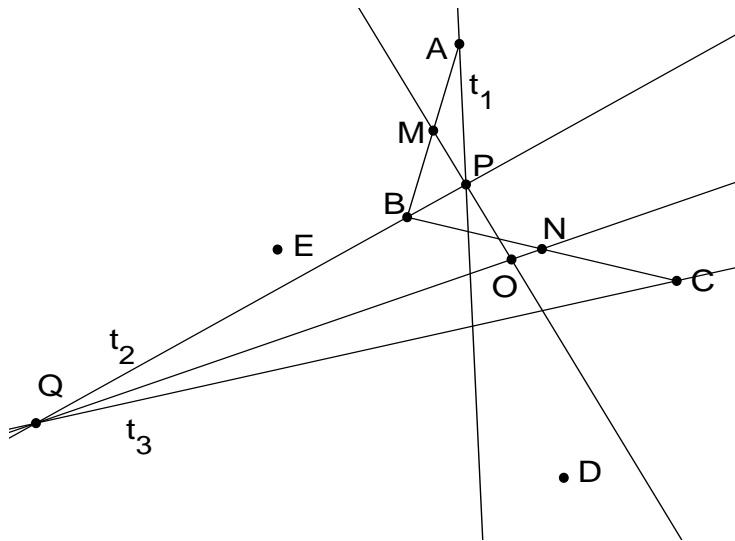


Fig. 3.109 b) – Centro de hipérbole

Como se expôs anteriormente dois diâmetros conjugados definem a cónica e, a partir deles, podemos determinar os seus eixos e os focos. Para isso, no mínimo, é necessário conhecer um diâmetro e uma corda de direção conjugada deste. Então, utilizando o método descrito em “PASCAL - 4º caso” começa-se por determinar as tangentes t_1 , t_2 e t_3 , respetivamente em A , B e C . A reta que passa na intersecção de t_1 e t_2 e no ponto médio de AB é uma reta diametral. A reta que passa na intersecção de t_2 e t_3 e no ponto médio de BC é outra reta diametral. A intersecção das duas retas diametraes é o centro O da cónica.

Se o centro estiver interior ao arco de círculo que passa em A , B e C a cónica é uma elipse, se o centro estiver exterior ao arco de círculo a cónica é uma hipérbole. Se as retas diametraes forem paralelas a cónica é uma parábola cujo eixo é paralelo às retas diametraes e a curva fica definida por uma corda, respetiva reta diametral e o ponto da parábola nessa diametral. Num segundo passo, determinamos os diâmetros conjugados.

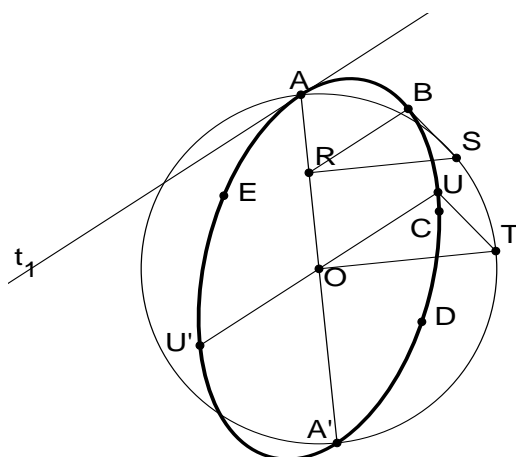


Fig. 3.110 – Diâmetros conjugados por cinco condições

Se a cónica for uma das centrais (elipse ou hipérbole) podemos proceder como na figura e determinar o diâmetro AA' , sendo o ponto A' simétrico de A relativamente a O e a sua tangente que é paralela a t_1 . Depois, e de acordo com CUNHA (1982, p. 158, Fig. 6.41b), conhecido B , ou qualquer dos outros pontos da cónica, e sabendo que o diâmetro conjugado de AA' passa em O , e é paralelo à tangente t_1 em A , é possível determinar o diâmetro conjugado UU' . Para tal, e utilizando método já explanado anteriormente, traça-se a circunferência de diâmetro AA' , e centro em O , e um raio perpendicular a AA' que intersesta a circunferência em T . Por B traça-se uma paralela a t_1 que intersesta AA' em R . Em R traça-se igualmente uma perpendicular a AA' até intersestar a circunferência em S . Traça-se o segmento SB e por T uma paralela a SB até intersestar a direção do diâmetro conjugado em U . U é portanto um dos extremos do diâmetro conjugado e o outro extremo é U' , o simétrico de U relativamente ao centro O .

3.6.5 INTERSECÇÃO DE UMA RETA COM UMA CÓNICA

O problema da intersecção de uma reta com uma cónica, seja definida pelos eixos e focos ou por pontos e, ou, tangentes, é um problema de aplicação prática por si, mas pode igualmente resultar da necessidade de determinação de cordas ou diâmetros da cónica com determinada direção, dos quais não se conhece qualquer dos extremos, que é na prática o mesmo problema da intersecção de uma reta com uma cónica. Não obstante a relevância do problema são raras as abordagens na literatura consultada e mesmo essas demonstraram-se de resolução complexa, implicando muitas vezes inúmeros passos ou necessitando no seu desenvolvimento de outras áreas do conhecimento, designadamente de utilização direta ou indireta de geometria analítica. Por exemplo PEGADO (1899, 125) no ponto 245, relativamente à intersecção de uma reta com a cónica, propõe que num primeiro passo se construa a curva por feixes homológicos, em determinadas condições concretas, e depois estabelecer por proporções métricas, método que não abordámos neste texto, determinar indiretamente o resultado. Um outro exemplo é o método proposto por SAURÍ (2009, 78-79) que, além de ser limitado pois implica conhecer os eixos e focos da cónica, resulta ser expedito em geometria analítica, ou utilizando geometria dinâmica, mas que tem um segundo passo na resolução complexa em geometria de régua e compasso. Dado que optámos por utilizar neste trabalho exclusivamente métodos geométricos expressos por traçados gráficos de solução o mais elegante possível, propomo-nos seguidamente desenvolver procedimentos genéricos para a resolução do problema.



3.6.5.1. INTERSECÇÃO DE UMA RETA r COM UMA CÓNICA CENTRAL DEFINIDA PELO EIXO MAIOR OU PELO EIXO TRANSVERSO E PELOS FOCOS

O método tem a limitação de ser necessário conhecer previamente o eixo principal e os focos e é proposto por SAURÍ (2009, 78-79). Determina-se um ponto simétrico de um dos focos e pelo outro foco faz-se centro da *Circunferência diretora*. Os pontos da intersecção pretendida são os centros de duas circunferências tangentes à *Circunferência diretora* e que passam no outro foco e pelo ponto seu simétrico relativamente à reta r .

Estabelece-se, por exemplo, que por F_1 se trace a circunferência diretora e por F_2 se determine o simétrico F'_2 relativamente a r . Pretende-se determinar os pontos I e J , de intersecção da reta r com a cónica, propondo-se que os consideremos como centro de duas circunferências tangentes à circunferência diretora. Para além disso, como se pode constatar pela figura, o centro I da circunferência, para esta passar por F_2 e F'_2 , tem obviamente que ser um ponto da reta r . Por outro lado, para a circunferência passar por T_1 o centro I pertence à perpendicular ao meio do segmento RF_2 . Para a circunferência ser tangente a C_d os pontos T_1 , I e F_1 têm que pertencer à mesma reta. Assim sendo, só com os dados e o método enunciado por Saurí não é possível conhecer I diretamente, porque não se conhece T_1 , tornando-se um problema de resolução simples em geometria dinâmica ou analiticamente. Significativamente apesar de este ser o método de enquadramento de Saurí, não é apresentada tradução gráfica. O mesmo se passa com a circunferência de centro F_2 e o ponto T_2 . Por geometria dinâmica foi possível determinar a solução estabelecendo um ponto I qualquer sobre a reta e determinar nas mesmas condições, ou seja M ponto médio de T_1F_2 e MI perpendicular a T_1F_2 , o lugar geométrico descrito por T_1 movendo I e intersetar esse lugar geométrico com C_d .

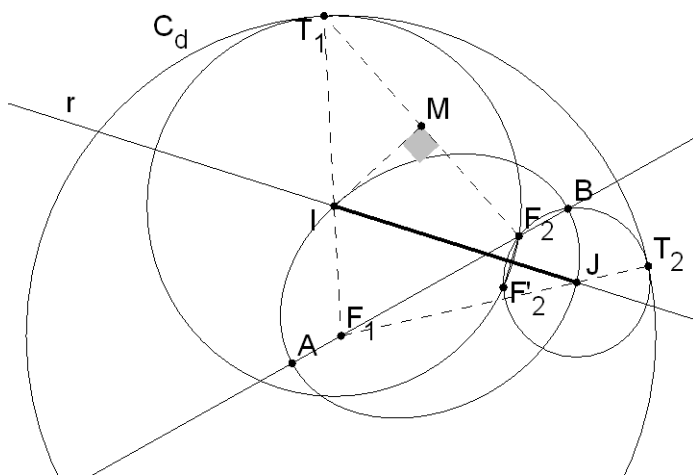


Fig. 3.111 a) – Intersecção de reta com cónica definida por eixo e focos (1ª etapa)

De qualquer forma é possível resolver o problema, utilizando tangências entre circunferências. Em CUNHA (1982, 141-152), por exemplo, encontra-se uma ampla abordagem desta questão. No caso concreto, pode-se descrever o problema como a determinação de circunferências tangentes a outra dada, C_d , e que passam por dois pontos quaisquer, F_2 e F'_2 , o que corresponde ao processo descrito em CUNHA (1982, 146-147, Fig. 6.24 e)).

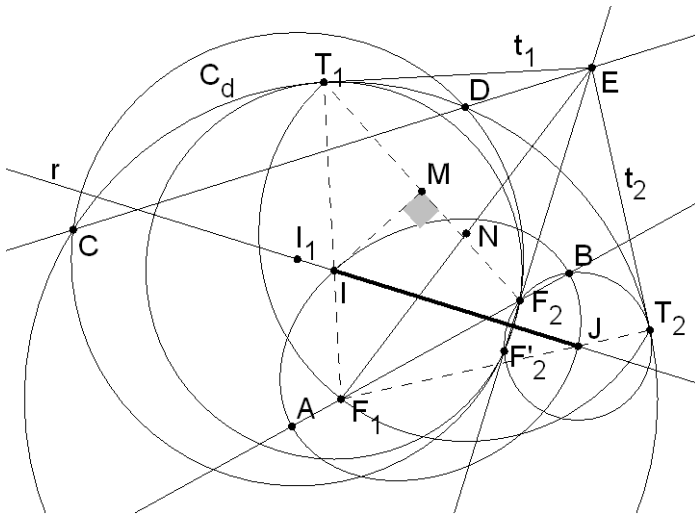


Fig. 3.111 b) – Intersecção de reta com cónica definida por eixo e focos (2ª etapa)

Define-se um ponto I_1 qualquer da reta r e traça-se uma circunferência auxiliar, a passar por F_2 e F'_2 , que intersecte C_d . Os pontos de intersecção, C e D , definem uma reta que interseca $F_2F'_2$ em E . A partir de E traça-se as tangentes t_1 e t_2 a C_d . Para isso, determina-se N , ponto médio de EF_1 , e traça-se o arco de centro N a passar por F_1 que interseca C_d nos pontos de tangência T_1 e T_2 . As retas T_1F_1 e T_2F_1 interseca r em I e J , centros das circunferências e pontos de intersecção da reta com a cónica.

3.6.5.2. INTERSECÇÃO DE RETA r COM PARÁBOLA DEFINIDA POR FOCO F E DIRETRIZ d

Igualmente em SAURÍ (2009, 78-79) encontra-se descrita a seguinte resolução do problema aqui proposto, decorrente do anterior e tendo em conta que na parábola o *Círculo diretor* é substituído pela diretriz.

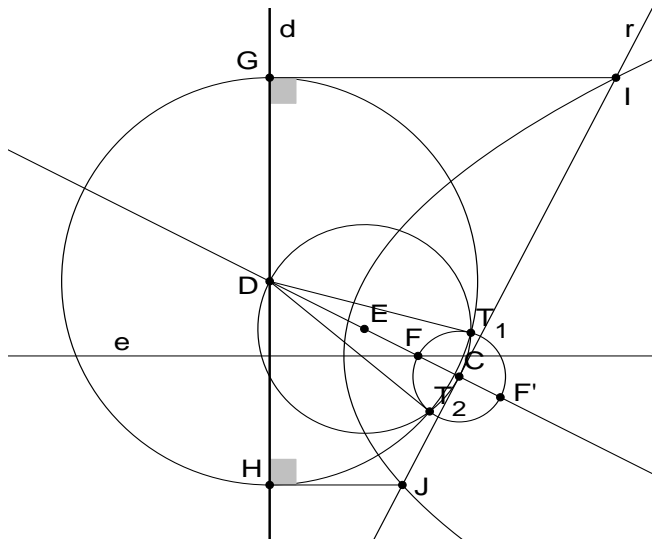


Fig. 3.112 – Intersecção de
reta com parábola

Determina-se F , simétrico de F relativamente à reta r , e a reta FF' , perpendicular a r , interseca a diretriz em D . C é o centro da circunferência que tem diâmetro FF' . Para determinar as tangentes DT_1 e DT_2 a essa circunferência a partir de D determina-se E , ponto médio de DC , e com centro em E traça-se a circunferência de raio ED que interseca a circunferência de centro C nos pontos de tangência T_1 e T_2 . Depois traça-se a circunferência de centro D a passar por T_1 e T_2 que interseca d em G e H . Nesses pontos traçam-se perpendiculares à diretriz que interseçam a reta em I e J , pontos de intersecção da reta com a parábola.

3.6.5.3. INTERSECÇÃO DE UMA RETA COM UMA CÓNICA DEFINIDA POR DIÂMETRO CONJUGADOS AA' E UU'

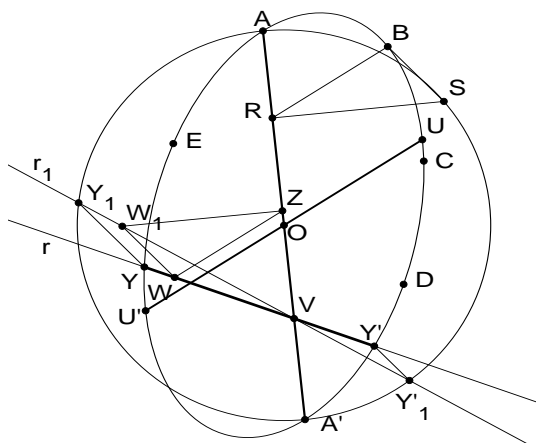


Fig. 3.113 a) – Intersecção de
reta com cónica definida por
diâmetros conjugados

O método que desenvolvemos aqui decorre da solução que encontrámos para o problema da determinação de diâmetros conjugados a partir de cinco condições. O ponto V é a intersecção da reta r com o diâmetro AA' . Aplica-se seguidamente à reta a afinidade que transforma a cónica numa circunferência. Para tal escolhe-se um ponto W qualquer da reta e traça-se WZ paralelo a BR e a reta ZW_1 paralela a RS . Onde esta interseção a paralela a BS que passa em W é o ponto W_1 que define com V a reta r_1 reta afim de r . A reta r_1 interseca a circunferência em Y_1 e Y'_1 . Os pontos afins destes, Y e Y' sobre a reta r , são os pontos de intersecção da reta com a cónica.

Não esqueçamos que os eixos das cónicas são casos particulares de diâmetros conjugados pelo que o mesmo método é igualmente passível de utilização, desde que se realizem as adaptações necessárias.

Por outro lado o método da homologia também permite resolver o problema da intersecção de uma reta dada com uma parábola.

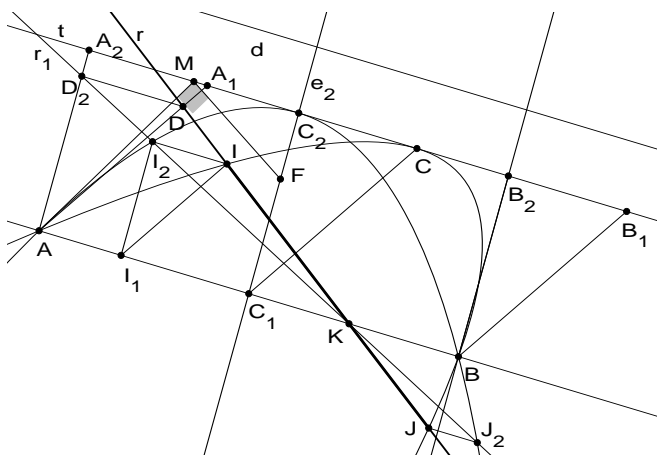


Fig. 3.113 b)
– Intersecção de
reta com parábola

São dados a reta r e a parábola definida pelos pontos A , B e C e a tangente t em C paralela a AB . Com estes dados AB é um diâmetro. O seu ponto médio C_1 , com C , definem a direção do eixo da parábola. Vamos estabelecer uma homologia da parábola com outra com t como tangente no vértice. Assim, traça-se C_1C_2 perpendicular a t sendo C_2 vértice da parábola. O triângulo $[CC_1C_2]$ define a homologia que, neste caso, é uma afinidade. Pelos pontos A e B constroem-se triângulos de lados paralelos ao anterior. A reta r interseca A_1A em D . Traça-se por D uma paralela a AB que interseca AA_2 em D_2 . A reta r interseca AB em K . Então K e D_2 definem r_1 que é a homóloga de r na mesma homologia. Determina-se M , ponto médio de A_2C_2 , traça-se AM e a sua perpendicular em M que interseca o eixo e_2 no foco F . À mesma distância de F a t traça-se a diretriz d . Então, pelo método de Saurí, que não está representado, determina-se a intersecção de r_1 com a parábola homóloga em I_2 e



J_2 . Traçando por I_2 e J_2 paralelas a AB estas intersectam r em I e J , pontos de intersecção de r com a parábola. Por outro lado a parábola fica definida por cinco pontos o que permite utilizar este método para resolver qualquer outro problema relacionado com a parábola.

3.6.5.4. INTERSECÇÃO DA RETA r COM A CÓNICA CENTRAL DEFINIDA PELA DIREÇÃO d PARALELA A r , PELO DIÂMETRO CONJUGADO AB E UM PONTO P

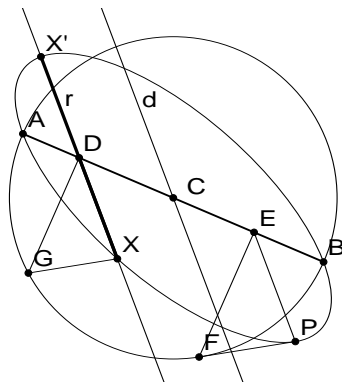


Fig. 3.114 – Intersecção de reta com cónica definida por diâmetro e Ponto

Por P traçamos uma paralela a r que intersecta o diâmetro em E . Estabelecemos uma relação homológica entre a cónica e uma circunferência de diâmetro AB . Assim, se em E traçarmos uma perpendicular a AB esta intersecta a circunferência em F . Traçamos FP e o triângulo $[EFP]$ define a relação de homologia. Como a reta intersecta o diâmetro AB no ponto D , traçamos uma perpendicular por D que intersecta a circunferência em G e construímos um triângulo $[DGX]$ de lados paralelos a $[EFP]$. X é um dos pontos de intersecção da reta com a cónica e o outro ponto é X' , simétrico de X relativamente a D .

Este enunciado potencia uma metodologia geral para determinar a intersecção da reta com a cónica central com quaisquer dados, que seria fazer passar no centro da cónica uma direção d paralela a r , determinar o diâmetro conjugado e depois proceder como descrito.

3.6.5.5. INTERSECÇÃO DA RETA r COM A CÓNICA DEFINIDA PELOS PONTOS A, B E C E PELAS TANGENTES t_1 E t_2 EM A E C

O método que aqui desenvolvemos é de possível utilização genérica para qualquer dos casos de definição de cónicas por cinco condições sendo condições necessárias conhecer três pontos e as tangentes em dois deles.

Trata-se de estabelecer uma relação homológica entre a cônica e uma circunferência cujo centro de homologia é V , ponto de intersecção das duas tangentes t_1 e t_2 .

Na prática pode entender-se como uma projeção de um cone oblíquo em que V é o vértice, a circunferência é a base do cone, as tangentes t_1 e t_2 são as geratrizes do contorno aparente e a cônica é uma secção qualquer neste cone.

Para tal a circunferência da base tem que existir nos mesmos quadrantes definidos por t_1 e t_2 onde existam pontos da secção. Assim no quadrante onde se situa B traça-se a bissetriz do ângulo entre as tangentes e escolhe-se um dos seus pontos como centro O da circunferência da base. Traça-se de seguida perpendiculares a t_1 e t_2 determinando os pontos de tangência A_1 e C_1 , que são os homólogos de A e C na homologia estabelecida, o que permite desenhar a circunferência da base com raio OC_1 . Traçando a geratriz do cone VB esta intersesta a circunferência, do mesmo lado em que B se situa relativamente a AC , em B_1 que é o homólogo de B . Representam-se seguidamente as retas BA e BC e as suas homólogas A_1B_1 e B_1C_1 . A reta r intersesta BA e BC em M e N . Traçando as retas VM e VN e intersetando-as respetivamente com A_1B_1 e B_1C_1 obtemos os homólogos M_1 e N_1 . Estes dois pontos definem a reta r_1 , homóloga de r , e que é a intersecção de um plano que passa no vértice e em r com o plano da base. A reta r_1 intersesta a circunferência da base em X_1 e Y_1 que são os homólogos de X e Y , os pontos de intersecção pretendidos. Assim, traçam-se as retas, geratrizes, VX_1 e VY_1 que intersestam a reta r nos pontos X e Y , pontos de intersecção da reta com a cônica.

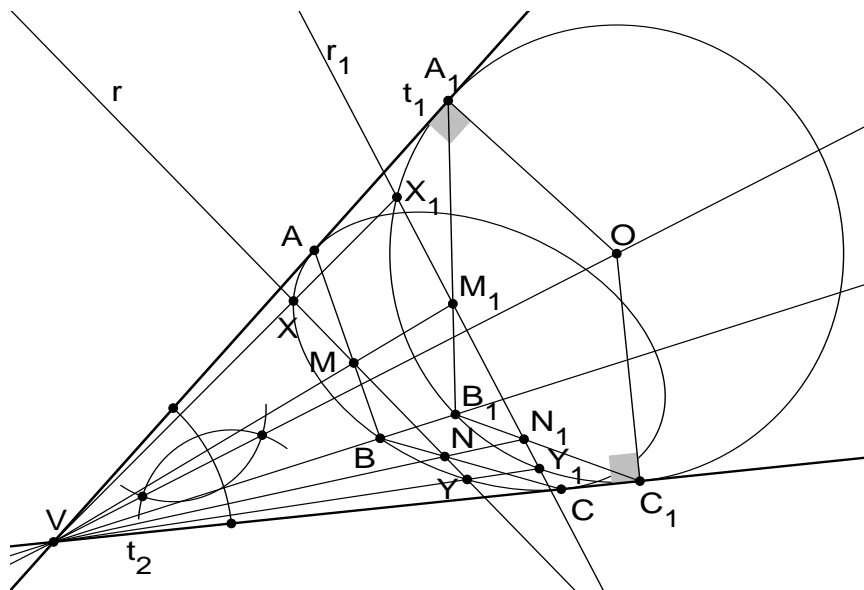


Fig. 3.115 – Intersecção de reta com cônica definida por cinco condições



3.6.6. POR CINCO CONDIÇÕES DETERMINAR OUTROS PONTOS OU TANGENTES

3.6.6.1. DADAS TRÊS TANGENTES, t_1 , t_2 E t_3 , E DOIS DOS SEUS PONTOS DE CONTACTO, A E B, DETERMINAR O OUTRO PONTO DE TANGÊNCIA DA CURVA CÓNICA

Determina-se P , intersecção das tangentes t_1 e t_2 em A e B .

Se, como no caso da figura a), a tangente t_3 passa entre AB e P , constrói-se um quadrilátero completo $PSTR$, sendo R e S , respetivamente, pontos de intersecção de t_1 e t_3 e de t_3 e t_2 . O ponto T é intersecção da reta RB com a reta AS . Traça-se seguidamente a diagonal TP que interseta t_3 em C que é o ponto de tangência de t_3 . Assim, podemos considerar estar perante o caso de serem dados três pontos e duas tangentes em dois deles, já apresentado anteriormente, que permite a determinação de outros pontos da curva pelo método dos feixes projetivos.

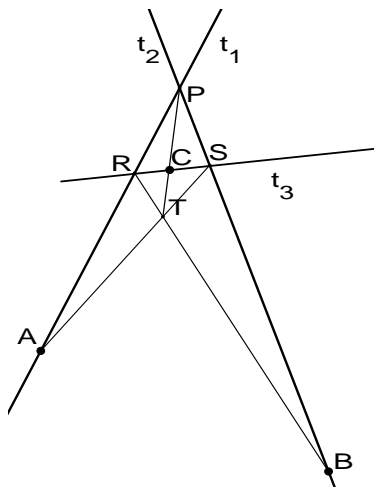


Fig.3.116 a) – 3 Tangentes 2 pontos

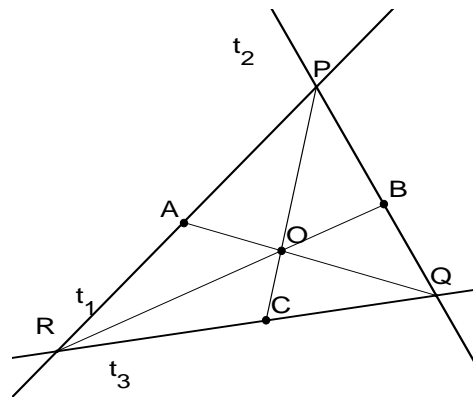


Fig.3.116 b) – 3 Tangentes 2 pontos

Se, como no caso da figura b), a tangente t_3 se situa para o lado oposto de AB relativamente a P podemos utilizar o traçado do trilátero para, através do ponto de Brianchon O , determinar o ponto C de tangência em t_3 . Para tal designa-se por P , Q e R os pontos de intersecção das tangentes. Traça-se em seguida os segmentos AQ e BR que se interseçam no ponto de Brianchon. A reta que passa em P e no ponto de Brianchon, O , interseta t_3 no ponto de tangência C . Novamente, ficamos perante a circunstância de termos

três pontos e duas tangentes em dois deles, o que permite a determinação de novos pontos pelo método dos feixes projetivos.

3.6.6.2. DADAS QUATRO TANGENTES, t_1 , t_2 , t_3 E t_4 , E O PONTO DE CONTACTO A, EM t_1 , DETERMINAR OS PONTOS DE TANGÊNCIA NA CURVA CÓNICA

Começou-se por identificar os pontos do *quadrilátero completo* definido por $QRST$, respetivamente pontos de intersecção de t_1 e t_2 , t_2 e t_3 , t_3 e t_4 e t_4 e t_1 . P é a intersecção de t_1 e t_3 . U é a intersecção das diagonais. A reta AU interseca t_3 em C , que é o ponto de tangência de t_3 . Num segundo passo, vamos determinar os pontos de tangência em t_2 e t_4 .

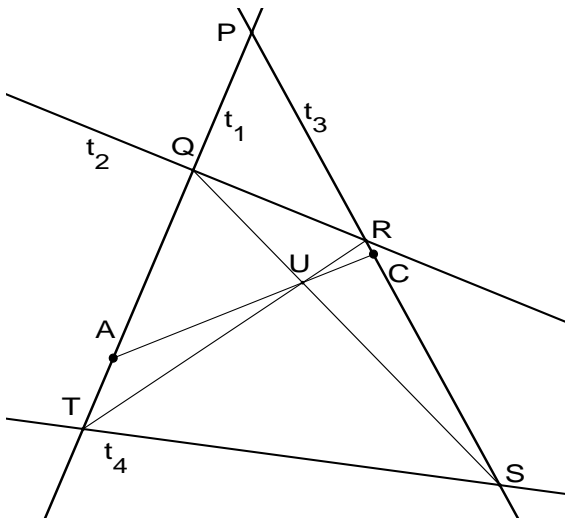


Fig. 117 a) – 4 tangentes 1 ponto (passo 1)

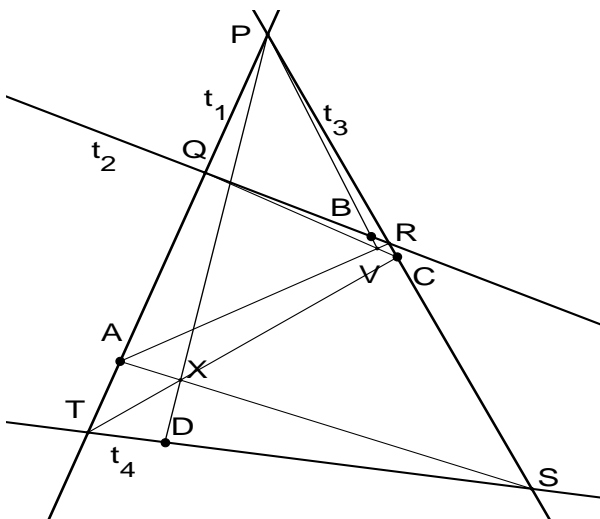


Fig.3.117 b) – 4 Tangentes 1 ponto (passo 2)



Para determinar o ponto B , de tangência em t_2 , intersecta-se QC e AR determinando o ponto V . A reta VP intersecta t_2 no ponto B pretendido. Para determinar o ponto D , em t_4 , procede-se de forma similar, ou seja, intersecta-se CT com AS , determinando X , e a reta XP intersecta t_4 no ponto D de tangência. Para determinar outros pontos podemos escolher três dos pontos e duas tangentes em dois deles e resolver pelo método relativo aos feixes projetivos.

3.6.6.3. DADAS CINCO TANGENTES t_1, t_2, t_3, t_4 e t_5 DETERMINAR OS PONTOS DE TANGÊNCIA NA CURVA CÓNICA

Designamos I, J, L, M e N os pontos de intersecção de duas tangentes consecutivas. Seguidamente aplicamos o teorema de Brianchon ao *pentalátero*. Para determinar o ponto A , de tangência em t_1 , intersectou-se LI com NJ determinando P . A reta MP intersecta t_1 em A . Para determinar os outros pontos de tangência, B, C, D e E , procedeu-se de igual forma.

Tal como se pode comprovar este processo equivale ao traçado do pentágono estrelado de vértices exteriores I, J, L, M e N e vértices nas concavidades P, Q, R, S e T . Traçando a reta, que passa num vértice exterior e no da concavidade oposta, esta intersecta a tangente oposta ao vértice exterior, no seu ponto de contacto.

Para determinar outros pontos da curva cónica podemos considerar três dos pontos e duas das tangentes em dois deles e aplicar o processo por feixes projetivos.

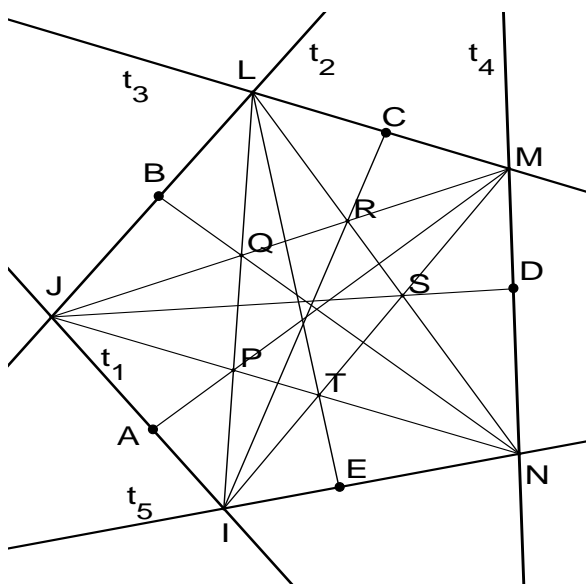


Fig. 3.118 – 5 Tangentes determinar pontos

3.6.6.4. DADAS QUATRO TANGENTES t_1 , t_2 , t_3 e t_4 E UM PONTO P DE UMA CÓNICA DETERMINAR A TANGENTE t_5 EM P INTERIOR AO QUADRILÁTERO DEFINIDO PELAS QUATRO TANGENTES

Dado não se ter encontrado solução através dos processos descritos anteriormente, e ser um problema que surgiu inúmeras vezes ao longo da investigação, utiliza-se um traçado indireto por aplicação do Teorema de Brianchon ao *pentalátero*. O resultado foi testado por geometria dinâmica.

Sendo K , L , M e N os pontos de intersecção das tangentes dadas e considerando que P se situa mais próximo de N considerou-se a intersecção da tangente pretendida com t_3 e t_4 , sendo possível considerar qualquer outra alternativa, obtendo o mesmo resultado, ou seja, a mesma tangente em P .

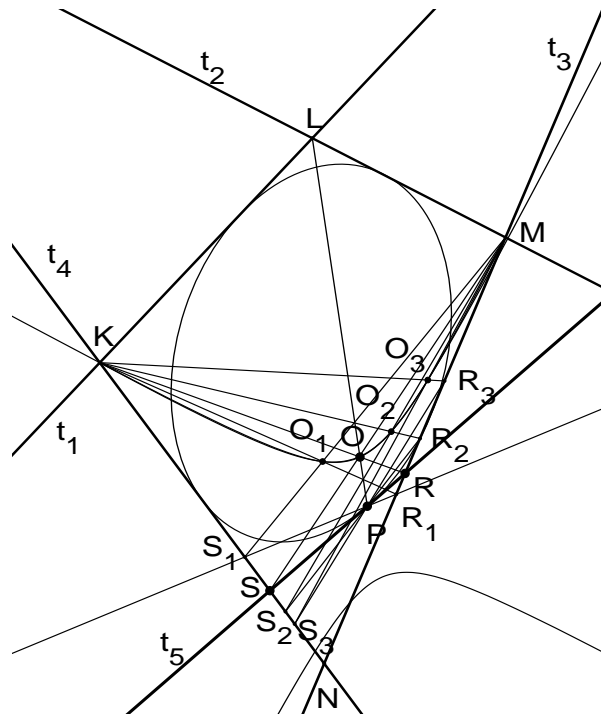


Fig. 3.119 – Tangente em P dadas 4 tangentes

Assim sendo, estabelecendo que a tangente interseta t_3 e t_4 em R e S e traçando RK e SM interseccionam-se em O , ponto de Brianchon, e este é um ponto de LP . Então, passa-se por P uma reta que interseta t_3 em R_1 e t_4 em S_1 e traçando R_1K e S_1M , que se intersecciona em O_1 . Como O_1 não é ponto de LP , repete-se o processo para outras retas a passar em P



obtendo-se O_2 e O_3 e assim sucessivamente. Foi possível comprovar, por geometria dinâmica, que a curva auxiliar descrita pelos diferentes pontos é uma hipérbole que passa em K e M . Assim sendo, é suficiente determinar O_1 , O_2 e O_3 pois, com os pontos K e M , a hipérbole está determinada por cinco pontos. Esta curva intersesta LP em O . A reta KO intersesta t_3 em R e a reta MO intersesta t_4 em S . RS é a tangente pretendida t_5 que passa em O . Por cinco tangentes é possível determinar os pontos de tangência e, com estes determinar todos os pontos da curva.

Não obstante ter sido possível definir a curva lembre-se que se utilizou, implicitamente, uma condição acessória, a de que a tangente t_5 intersecte t_3 e t_4 em pontos do quadrilátero $[KLMN]$. Por isto, não estamos perante uma definição genérica da cónica o que nos leva a voltar a apreciar o tema mais à frente, na análise detalhada desta questão.

3.7. O MÉTODO DOS FEIXES PROJETIVOS

Estes procedimentos apesar de serem referidos, nas suas bases teóricas, em diversos autores como, por exemplo IZQUIERDO ASENSI (1985, 196-203) e NAGORE (1988, 124-134) entre outros, não foram encontrados de forma completamente explícita do contexto teórico na literatura consultada, encontrámo-los apenas desenvolvidos de forma mais exaustiva nas suas aplicações práticas em LIMING (1979, 317-332). Assim sendo, na organização e sequência expositiva iremos recorrer a uma interpretação de diversos problemas que são ressaltados no texto de Liming, com referência aos contextos teóricos que se extraem de Izquierdo Asensi e Nagore, introduzindo as alterações necessárias, com vista a tornar a exposição coerente com a do restante texto, salientando propriedades, semelhanças dos diversos casos entre si e possibilidades de utilização noutros contextos.

Para complementar a fundamentação teórica, no *Leçons de Géométrie Projective* de ENRIQUES (1930, 214) encontramos as seguintes formulações relativas ao Teorema de Steiner sobre a geração projetiva das cónicas:

“En projetant les points d’une conique de deux points fixes de cette conique, A e B, on obtient deux faisceaux de rayons projectifs.

En coupant les tangentes à une conique par deux tangentes fixes de cette conique, a e b, on obtient deux pontuelles projectives...

Réciproquement:

Dans le plan

Le lieu des intersections des rayons homologues de deux faisceaux projectifs, qui ne sont ni perspectifs ni concentriques, est une conique.

L'enveloppe des droites qui joignent les points homologues de deux pontuelles projectives, qui ne sont ni perspectives ni coincidentes, est une conique.”

Adaptando de NAGORE (1988, 124-129) podemos concluir que, tendo num plano dois feixes projetivos de centros O e O' não coincidentes nem perspectivos, e um raio de um deles percorre todo o feixe num sentido constante, o seu homólogo percorre o outro feixe igualmente num sentido constante, e o ponto de intersecção dos raios homólogos gera uma curva cónica.

De notar que, em geometria projetiva, são **perspetivas** duas formas de primeira categoria, ou seja, pontos ou retas, e da mesma classe, quando são projeção ou secção de uma mesma forma.

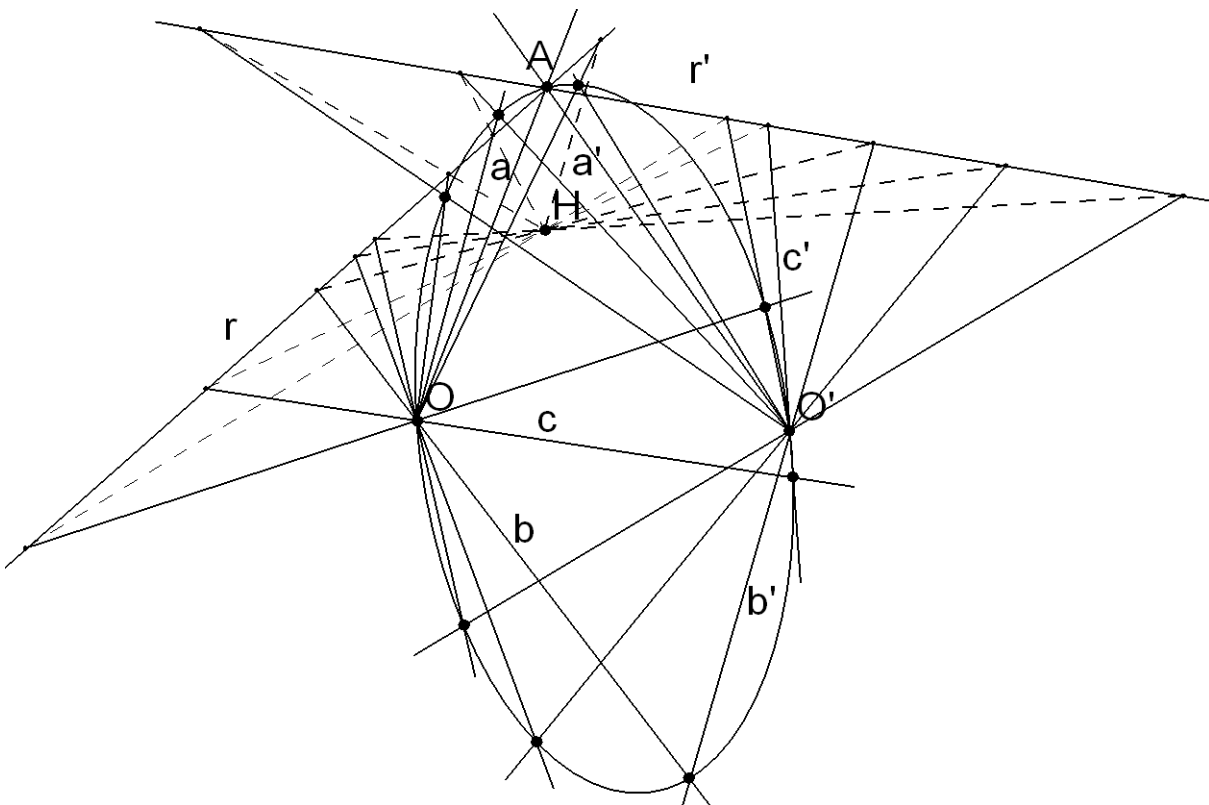


Fig. 3.120 – Curva de segundo grau, curva cónica, obtida por feixes projetivos



Do que foi afirmado anteriormente decorre que, como se apresenta na figura antecedente, sendo O e O' centros dos dois feixes estabeleceu-se que A , ponto de intersecção dos raios homólogos a e a' de cada um dos feixes, é também ponto de intersecção das secantes r e r' , respetivamente dos feixes de centro O e O' . Para determinar o centro projetivo H traçou-se dois raios b e c do feixe de O com uma direção qualquer e com sentido de rotação sinistrogiro, ou direto, relativamente a a , e outros dois raios b' e c' , com centro O' e sentido de rotação relativamente a a' idêntico. Procedeu-se depois à intersecção de b e c com a secante r , e b' e c' com a secante r' . As duas retas a tracejado no desenho, uma que passa nos pontos de intersecção de b e b' com as secantes respetivas, e a outra nos pontos de intersecção de c e c' com as secantes respetivas, interseccionam-se em H , que é o centro projetivo. Qualquer reta que passe em H intersecciona r e r' em pontos que unidos a O e O' definem raios homólogos. Estes raios homólogos interseccionam-se em pontos que definem uma cónica. A curva cónica, nestas circunstâncias, passa nos pontos O , O' , A e no ponto de intersecção de b com b' e no ponto de intersecção de c com c' , ou seja cinco pontos definidos através das condições dadas.

Como se verifica, os processos derivados deste método são relativamente expeditos para, a partir dos dados, ou seja, os cinco pontos e, ou, tangentes da curva cónica, determinar um conjunto de novos pontos ou um conjunto de novas tangentes, sendo particularmente úteis nos traçados a papel e lápis, ou quando se pretende apenas uma parte da curva, ou ainda em desenho assistido por computador (CAD), dado que os programas vetoriais não possuem, em regra, funcionalidades para traçar as diferentes curvas cónicas por cinco pontos ou tangentes. É de referir ainda que, ao permitir a sua utilização noutros contextos, são úteis para a resolução de diversos problemas em concreto. O método dos feixes projetivos pode igualmente ser utilizado de forma integrada com outros procedimentos com vista a uma mais eficaz resposta a problemas concretos.

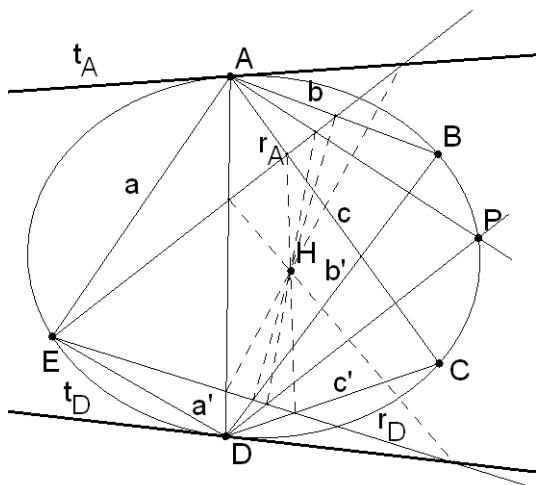


Fig. 3.121 – Pontos e tangentes por feixes projetivos (1º processo)

Igualmente em NAGORE (1988, 130) é explicitada a aplicação da propriedade anteriormente descrita à formulação teórica da prática dos traçados das cónicas dadas pelas cinco condições.

Assim se, como na figura 3.121, forem dados cinco pontos, A , B , C , D e E , por dois não consecutivos, no caso A e D , podemos construir dois feixes projetivos definidos, o primeiro, a partir de A , com os raios a dirigido a E , ponto intermédio entre A e D , b dirigido a B e c dirigido a C , e o segundo feixe, a partir de D , constituído por a' dirigido a E , b' dirigido a B e c' dirigido a C , tendo ambos os feixes sentido de rotação dextrogiro, ou retrógrado. Então, como na definição teórica antecedente, a partir do ponto E , ponto comum a a e a' , com uma direção qualquer, traçamos duas retas secantes de cada um dos feixes, r_A e r_D para, respetivamente, os feixes de centro em A e centro em D . Os raios b e b' interseam as secantes respetivas em pontos que definem uma reta, a tracejado no desenho. Esta reta interseam outra reta, definida pelas intersecções de c e c' com as secantes respetivas, em H que é o centro projetivo.

Partindo da relação projetiva estabelecida, podemos estabelecer novos pares de raios homólogos. Fazemos passar uma reta qualquer por H . O ponto onde esta reta interseam r_A define com A um raio. O raio homólogo é definido por D e a intersecção da reta que passa em H com r_D . A intersecção dos dois raios homólogos é P um ponto da cónica. Para obter novos pontos da cónica, teremos que fazer passar novas retas por H e proceder de forma idêntica.

Não obstante não estar completamente explícito em NAGORE (1988, 130), pode concluir-se, no entanto, que para obter as tangentes em A e D , respetivamente t_A e t_D , traçamos o raio AD cujo homólogo DA é coincidente. O ponto de intersecção de AD , com a secante r_A , define com H uma reta que interseam r_D num ponto de t_D . Para obter t_A , procede-se de forma idêntica, ou seja, DA interseam r_D num ponto que com H define uma reta que interseam r_A num ponto de t_A .

Através dos traçados de LIMING (1979, 317-332) pode concluir-se da existência de um processo alternativo ao anteriormente exposto, não obstante se ter tido que deduzir a fundamentação teórica por esta não ser apresentada.

Assim concluímos que, se por dois pontos consecutivos de uma curva cónica construirmos dois feixes de raios projetivos, cada um deles definido por três raios dirigidos a outros três pontos da curva cónica, sendo o sentido de rotação dos raios de cada feixe numa direção determinada, cada um dos pares de raios consecutivos constitui com os pares de raios, seus homólogos do outro feixe, *quadriláteros completos*, em que os dois pontos consecutivos da cónica para os quais se dirigem os pares de raios são uma diagonal, sendo



que a outra diagonal passa no ponto de intersecção das tangentes à cónica nos pontos que são centros dos feixes.

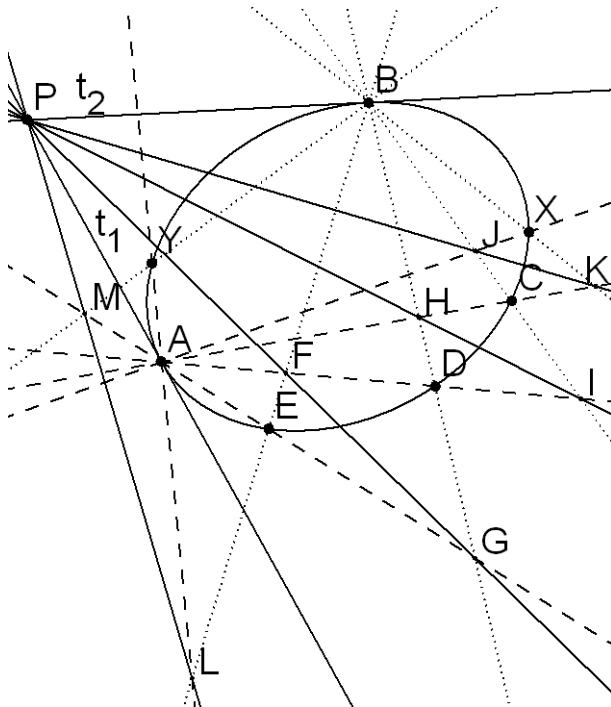


Fig. 3.122 – Pontos e tangentes por feixes projetivos (2º processo)

Aplicando tal princípio ao caso da figura acima, um dos pares de raios contíguos na rotação de sentido dextrogiro do feixe de A passa D e E , tal como o par de raios homólogos com origem em B . O *quadrilátero completo* fica definido pelas retas AD e AE , BD e BE e as diagonais DE e FG . Com o par de raios que parte de A para C e D e o par de raios homólogos com origem em B , define-se um novo *quadrilátero completo* constituído pelas retas AC e AD , BC e BD e as diagonais CD e HI . As diagonais CD e DE não estão representadas porque desnecessárias para este efeito. As diagonais FG e HI interseccionam-se em P , ponto de intersecção das tangentes t_1 e t_2 , que têm tangência, respetivamente, nos pontos A e B .

Para determinar um ponto X qualquer, que define com A uma corda com uma direção pretendida, traçamos o raio a partir de A . Como o raio passa entre B e C na rotação X situa-se antes do ponto C . Assim, interseccionamos o raio com a direção pretendida com o raio BC em J . Traça-se JP que é uma reta diagonal do novo *quadrilátero completo*. AC intersecciona a mesma diagonal em K . Traçamos BK que é o raio homólogo de AJ . Os dois raios interseccionam-se em X , que é o ponto pretendido da cónica.

O mesmo processo é válido para, a partir de uma direção definida, se determinar uma corda a partir de B , sendo suficiente inverter o processo.



Se pretendermos uma corda AY , com direção para Y entre A e B , podemos proceder de forma idêntica que para a determinação de X . O raio pretendido sucede, na rotação, ao raio AE . O raio com a direção pretendida intersesta BE em L . LP é a diagonal. AE intersesta a diagonal em M . MB é o raio homólogo. O ponto Y , então, é a intersecção do raio de A , AL , com MB .

Tal como ficou evidente, ao não se ter desenhado uma das diagonais de cada *quadrilátero completo*, por ela não ter intervenção no processo, e que é a diagonal que passa em pontos consecutivos da cónica, como por exemplo CX , tal implica que, por este processo, não é possível determinar, diretamente, cordas da cónica em que um dos extremos não seja A ou B . Para determinar, por exemplo, uma corda XZ com uma direção pretendida qualquer, teríamos que constituir um novo sistema de dois feixes de raios em que, um deles teria centro em X e o centro do outro feixe seria B ou C , e construir de novo todo o processo.

3.7.1. APLICAÇÕES PRÁTICAS DO MÉTODO DOS FEIXES PROJETIVOS

Tendo partido da explanação teórica vamos agora passar à sua aplicação na prática, designadamente da demonstração da potencialidade de obter, simultaneamente, diversos outros pontos da curva. Como verificaremos a utilização deste método é particularmente eficaz quando se pretende determinar troços da curva e não pontos particulares.

3.7.1.1. DADOS TRÊS PONTOS A , B e C E DUAS TANGENTES, t_1 e t_2 , EM DOIS DELES DETERMINAR OUTROS PONTOS DA CURVA CÓNICA (1º Caso)

Neste caso parte-se do pressuposto que é possível determinar a intersecção das duas tangentes, nos limites do desenho. As tangentes t_1 e t_2 intersesta-se em P . Se t_1 e t_2 forem paralelas então o feixe que parte de P é de retas igualmente paralelas.

Representamos o processo adotado, do ponto de vista gráfico, nas etapas que designamos por a) e b). Na primeira etapa, constrói-se dois feixes de retas, um de raios a partir de A intersesta BC e outro de raios que a partir de B intersesta AC , intermediado por diagonais a partir de P . Para tal, traça-se as retas que contêm as cordas AC e BC . Para obter um ponto entre C e B marca-se um ponto D_1 sobre CB e traça-se D_1A . Traça-se D_1P que intersesta AC em D_2 . A reta BD_2 intersesta AD_1 em D , que é um ponto da curva. Definindo outros pontos sobre BC e repetindo o processo obtêm-se novos pontos.

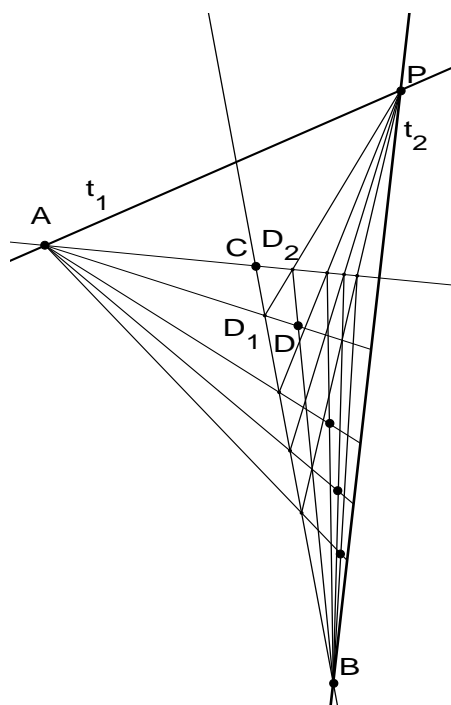


Fig.3.123 a) – 3 pontos 2 tangentes

Na etapa que designamos por b) para obter um ponto entre A e C escolhe-se um ponto E_1 sobre AC e traça-se E_1B . Traça-se E_1P que intersesta BC em E_2 . A reta AE_2 intersesta E_1B em E, que é um ponto da curva. Definindo outros pontos sobre AC e repetindo o processo obtêm-se novos pontos.

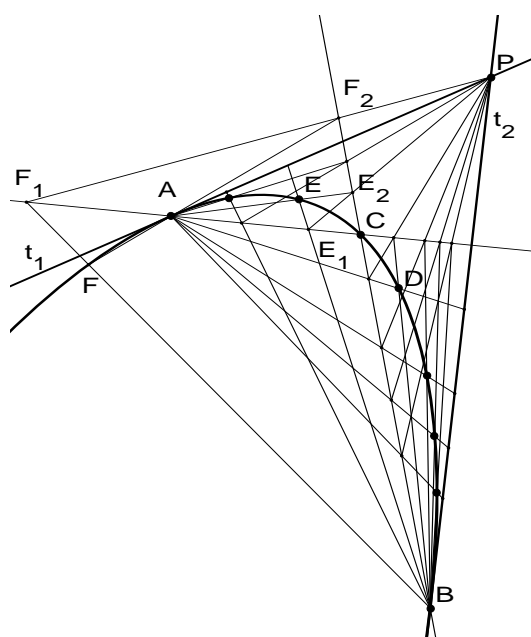


Fig. 3.123 b) – 3 pontos 2 tangentes

Para obter outros pontos da curva que não se situem entre A e B , por exemplo F para o outro lado relativamente a A , procede-se de forma similar à utilizada para os pontos entre A e C . Escolhe-se um ponto F_1 sobre AC e traça-se F_1B . Traça-se F_1P que intersesta BC em F_2 . A reta AF_2 intersesta F_1B em E , que é um ponto da curva. Definindo outros pontos sobre AC , e repetindo o processo, obtêm-se novos pontos.

3.7.1.2. DADOS TRÊS PONTOS A , B e C E DUAS TANGENTES, t_1 e t_2 , EM DOIS DELES DETERMINAR OUTROS PONTOS DA CURVA CÓNICA (2º Caso)

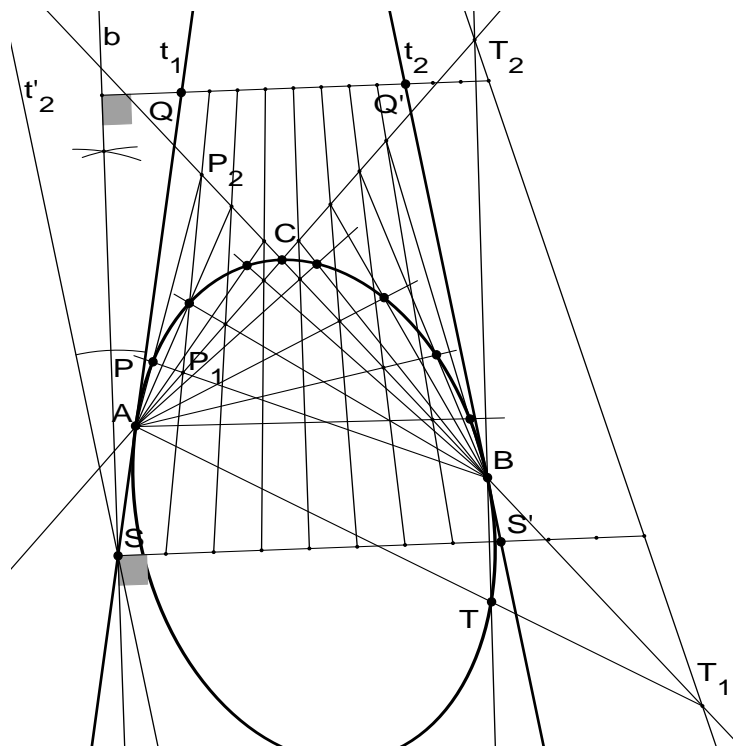


Fig. 3.124 – 3 pontos 2 tangentes que não se intersestam no desenho

Neste caso vamos partir do pressuposto que não é possível, ou não é prático, determinar o ponto de intersecção das duas tangentes t_1 e t_2 dadas nos limites da representação.

Vamos construir um feixe de retas diagonais dirigidas ao ponto de intersecção das duas tangentes sem o determinar. Para tal num ponto S qualquer de t_1 traça-se t'_2 paralela a t_2 e determina-se b , bissetriz do ângulo entre t'_2 e t_1 . Por S traça-se uma perpendicular a b



até interseção t_1 em S' . Por outro ponto qualquer de b traça-se outra perpendicular que interseção t_1 e t_2 em Q e Q' respetivamente. Divide-se SS' e QQ' num qualquer número de partes iguais, neste caso oito partes, e traça-se as retas do feixe que se dirige para o ponto de interseção das tangentes.

A partir daqui o procedimento é similar ao do caso anterior, ou seja, para determinar P , a partir da primeira reta do feixe, e entre AC , traçamos BP_1 sendo P_1 o ponto de interseção da reta do feixe com AC . P_2 é a interseção da reta do feixe com BC . O ponto P é definido pela interseção de BP_1 com AP_2 .

Procede-se da mesma forma para os pontos entre A e C e inverte-se o processo para pontos entre B e C .

Para obter um ponto para além de B procede-se da mesma forma que para os situados entre BC , acrescentando intervalos iguais sobre QQ' e SS' obtendo retas do feixe para lá de B . Uma das retas interseção BC em T_1 e AC em T_2 . T é a interseção de AT_1 com BT_2 .

3.7.1.3. DADOS TRÊS PONTOS A , B e C E DUAS TANGENTES, t_1 e t_2 , EM DOIS DELES, DETERMINAR OUTROS PONTOS DA CURVA CÓNICA (3º Caso)

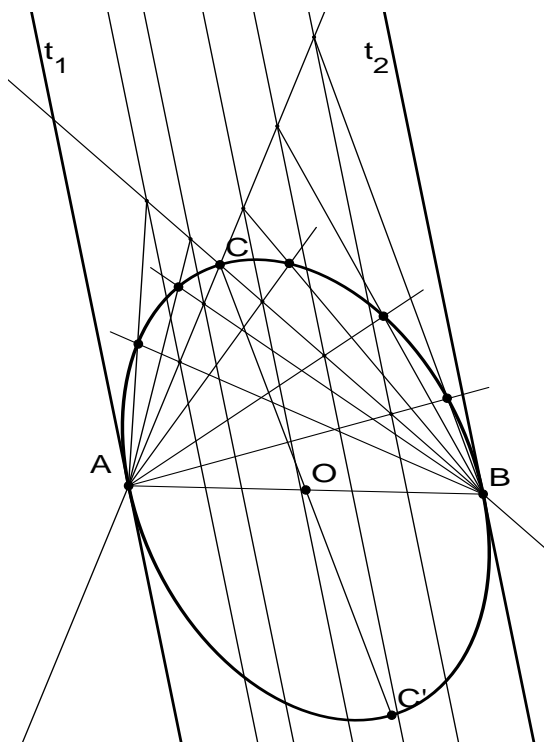


Fig. 3.125 – 3 pontos 2
tangentes paralelas

Neste caso as duas tangentes dadas, t_1 e t_2 , são paralelas sendo que as retas do feixe intermédio são igualmente paralelas.

Procede-se de forma idêntica à dos casos anteriores para determinar pontos entre A e C e entre C e B , tendo em conta que as retas do feixe de diagonais são paralelas às tangentes. Assim para determinar um ponto entre A e C traça-se uma reta a partir de B até interseção a reta AC . Nesse ponto traça-se uma paralela às tangentes até interseção a reta BC . Essa intersecção define com A uma reta. O ponto pretendido é a intersecção da reta do feixe de A com a reta homóloga do feixe de B .

Para obter pontos entre C e B inverte-se o processo, traçando o primeiro feixe a partir de A e dirigido a BC .

Pelas propriedades das cónicas, dado que as tangentes em A e B são paralelas, conclui-se que AB é um diâmetro, tendo as retas do feixe de diagonais a direção do diâmetro conjugado. Assim sendo o ponto O , ponto médio de AB , é o centro da cónica. Tal permite definir C' simétrico de C relativamente a O , que também é um ponto da cónica e assim, caso se pretenda, determinar os pontos da curva entre A e C' e entre B e C' .

3.7.1.4. DADOS QUATRO PONTOS A, B, C e D E A TANGENTE t EM D DETERMINAR OUTROS PONTOS DA CURVA CÓNICA

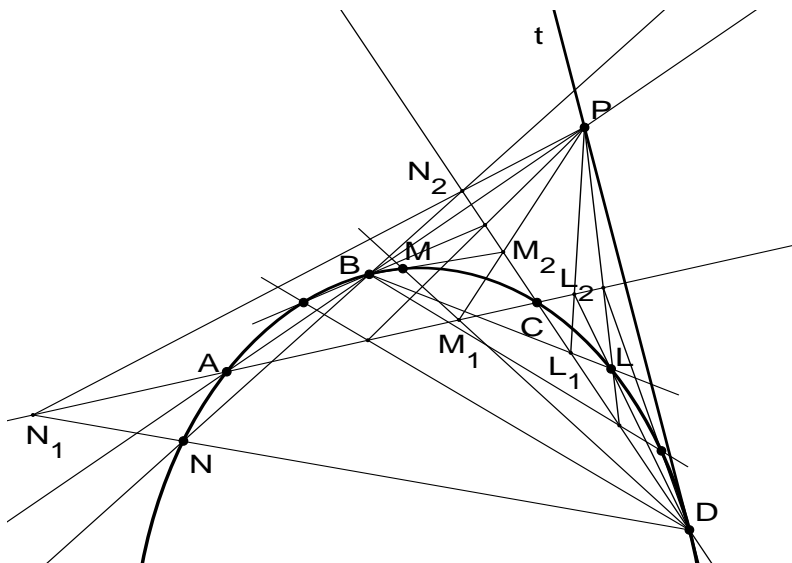


Fig. 3.126 – 4 pontos e tangente num deles



Traça-se a reta AB e intersesta-se com t em P . Para determinar pontos entre C e D traça-se BL_1 , sendo L_1 um ponto da reta CD . Traça-se seguidamente a reta do feixe intermédio L_1P , que intersesta a reta AC em L_2 . O ponto L da cónica é a intersecção da reta BL_1 com a reta DL_2 . Para obter novos pontos entre C e D repete-se o processo. Para determinar pontos entre B e C , como por exemplo M , traçamos a reta DM_1 sendo M_1 um ponto de AC . Em seguida traça-se a reta M_1P . Esta intersesta CD em M_2 . M é a intersecção de BM_2 com DM_1 . Para determinar pontos para além de A , como por exemplo N , traça-se a reta DN_1 sendo N_1 um ponto de AC situado para além de A . Traça-se a reta N_1P que intersesta CD em N_2 . A intersecção de N_2B com N_1D é o ponto N pretendido.

Para determinar pontos entre C e E , por B traça-se uma reta do primeiro feixe que intersesta CE em F_1 . Faz-se a reta do feixe intermédio F_1P . Esta intersesta AC em F_2 . A reta do terceiro feixe é F_2D . A intersecção de BF_1 com F_2D é o ponto F pretendido. Para determinar um ponto G , entre D e E , traça-se BG_1 sendo G_1 um ponto situado abaixo de BD e procede-se de forma idêntica à anterior. Para determinar um ponto H , entre B e C , traça-se a reta DH_1 sendo H_1 um ponto de AC . A reta H_1P intersesta CE em H_2 . A reta H_2B intersesta DH_1 em H , o ponto pretendido. Para determinar um ponto I qualquer, entre A e B , traça-se a reta DI_1 a passar entre A e B e procede-se da mesma forma que para H .

3.7.1.5. DADOS CINCO PONTOS A, B, C, D e E DETERMINAR OUTROS PONTOS DA CURVA CÓNICA

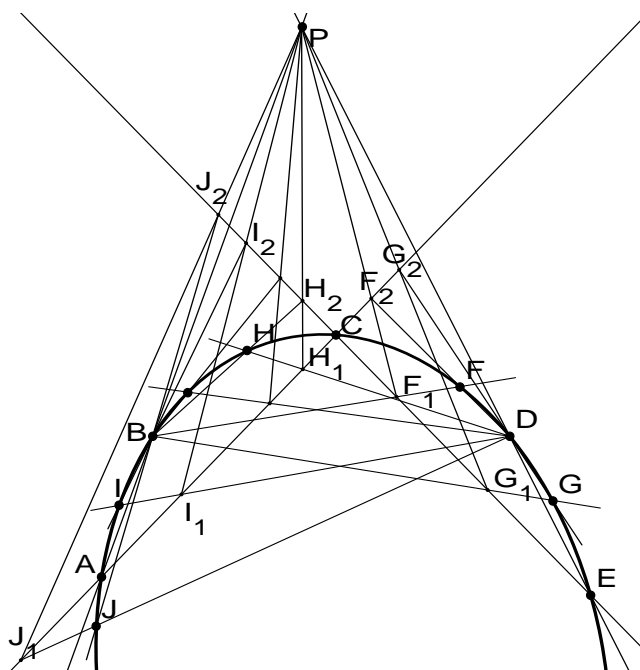


Fig. 3.127 – Determinação da cónica por 5 pontos

As retas AB e DE interseam-se em P . Traçam-se as retas AC e CE . Por último, para determinar um ponto J para além de A define-se J_1 , sobre AC , de forma que DJ_1 passe para o lado oposto de A em relação aos outros pontos, e procede-se de igual forma que para os pontos anteriores.

3.7.1.6. DADAS DUAS TANGENTES, t_1 E t_2 , E RESPECTIVOS PONTOS DE TANGÊNCIA A E B , SENDO B UM VÉRTICE DA CÓNICA, DETERMINAR OUTROS PONTOS DA CURVA

Por B ser um vértice da curva nele passa o eixo e , que é perpendicular à tangente. P é o ponto de intersecção das duas tangentes. Determina-se M , ponto médio de PB . Determina-se depois N , ponto médio de PM . Projeta-se A ortogonalmente sobre o eixo e , definindo Q . As retas NQ e MA interseam-se em C que é um ponto da curva. Agora temos três pontos e as tangentes em dois deles o que permite que, pelo método dos feixes projetivos, se determinem novos pontos da curva. Igualmente é possível determinar os pontos simétricos, relativamente ao eixo, dos agora determinados,

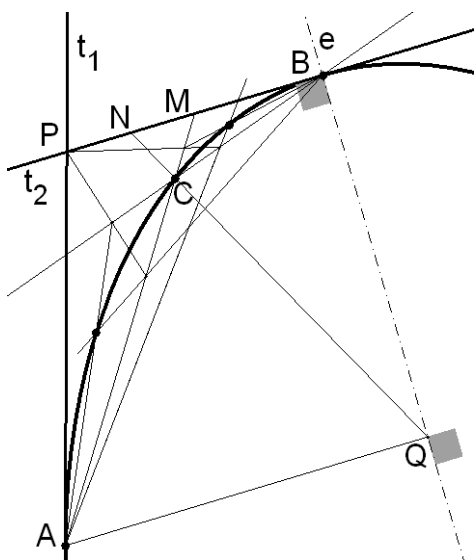


Fig. 3.128 – 2 pontos 2 tangentes e eixo

3.7.1.7. DETERMINAR A TANGENTE t_1 NUM PONTO A DA CÓNICA DADOS OS PONTOS A , B , C E D DESTA, SENDO D UM VÉRTICE, E CONHECENDO A DIREÇÃO DO EIXO e QUE PASSA EM D , OU SENDO DADA A CURVA GRAFICAMENTE E O EIXO

Para além dos pontos A e D e da direção do eixo e é necessário conhecer pelo menos mais dois pontos B e C entre A e D , ou alternativamente conhecer graficamente a parte da curva entre A e D . Começa-se por traçar a tangente t_4 por D e perpendicular ao



eixo. Constitui-se dois feixes de duas retas dirigidas a B e C , um a partir de A e o outro a partir do ponto D . Constitui-se o *quadrilátero completo* em que BC é uma diagonal. A outra diagonal intersesta t_4 em P , que é o ponto de intersecção da tangente t_1 pretendida com t_4 , o que permite traçar a tangente t_1 , por A e P . De notar que A , B e C possibilitam a obtenção de outros pontos simétricos deles relativamente ao eixo e .

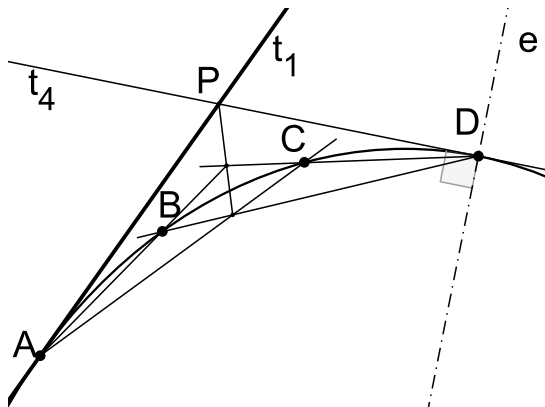


Fig. 3.129 – Tangente num ponto

Se a curva for conhecida graficamente os pontos B e C são dois quaisquer pontos da curva.

3.7.1.8. DADA A CURVA CÓNICA CONHECIDA GRAFICAMENTE OU DADOS CINCO PONTOS, A , B , C , D E E , DETERMINAR AS TANGENTES t_1 E t_5 EM A E E

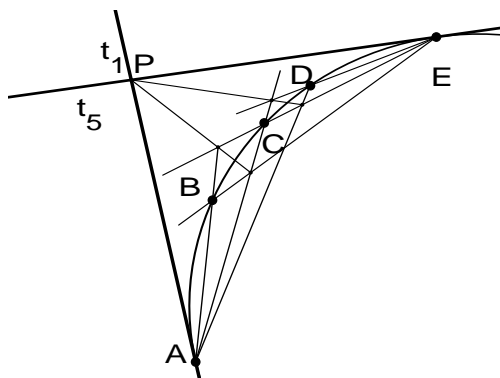


Fig. 3.130 – Tangentes dados 5 pontos (1º método)

Constrói-se dois feixes de retas a partir de dois dos pontos conhecidos da curva, os pontos de que se pretende obter as tangentes, no caso A e D , e dirigidos aos três restantes pontos. Se a curva for conhecida graficamente escolhe-se três pontos quaisquer. As retas,

do feixe que parte de A , interseccionam as retas do feixe de B formando dois quadriláteros completos, de que BC e CD são diagonais. As outras diagonais dos dois quadriláteros interseccionam-se em P , que é igualmente o ponto de intersecção das tangentes t_1 e t_5 , respetivamente de A e de D .

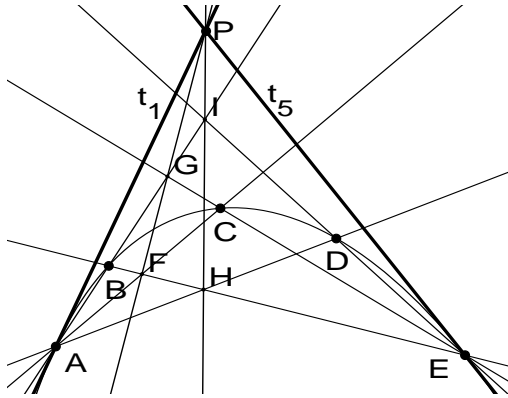


Fig. 3.131 – Tangentes dados 5 pontos (2º Método)

O processo utilizado no exemplo acima é similar ao anterior. Permite, no entanto, concluir que podemos determinar a diagonal oposta a BC , como no caso anterior, e, depois, em alternativa, em vez da oposta a CD , a diagonal oposta a BD . O resultado é idêntico mas, sobretudo nos traçados a papel e lápis, pode permitir maior rigor.

3.8. AS CÓNICAS PELA TEORIA DAS PROPORÇÕES

Indica-se seguidamente um caso de aplicação da geometria métrica às cónicas, designadamente das proporções, apenas a título de exemplo, porque a aplicação destes procedimentos implica um estudo aprofundado das proposições de Apolónio e, paralelamente, dos desenvolvimentos posteriores, designadamente, os decorrentes do estudo da perspetiva, do Teorema de Desargues, de Poncelet e de todos os que contribuíram para a criação e desenvolvimento da Geometria Projetiva, o que estaria em contradição com os objetivos desta investigação. De qualquer forma, utilizou-se ao longo deste capítulo diversos componentes teóricos e aplicações práticas decorrentes da Geometria Projetiva. Para complemento deste tema, é importante referir que HAUSSNER (1928,199-359) é, neste contexto, uma sintética, clara e bem fundamentada explanação teórica, bem merecedora de edição portuguesa.



3.8.1. DETERMINAÇÃO DA TANGENTE A UMA CÓNICA CENTRAL NUM PONTO DADO P , CONHECIDO UM DIÂMETRO AB E A DIREÇÃO DO DIÂMETRO CONJUGADO d

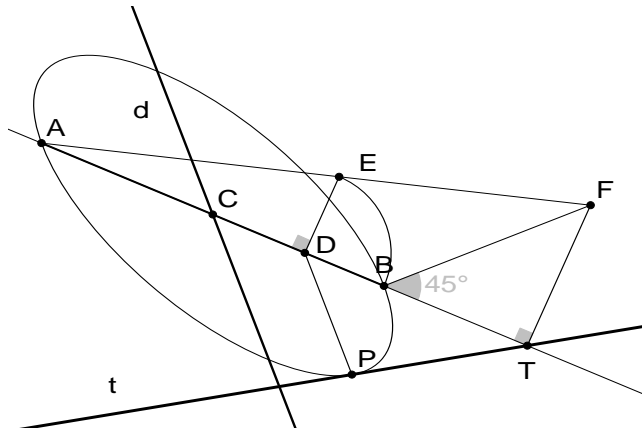


Fig. 3.132 – Tangente à elipse por proporções

O ponto C , centro da cónica, é o ponto médio do diâmetro e por ele marcamos a direção d do diâmetro conjugado. Traça-se a ordenada de P , que é PD paralelo a d , até interseção em D a reta que contém o diâmetro AB . Se D se situar entre A e B a cónica é uma elipse, localizando-se fora do segmento AB a cónica é uma hipérbole. Trata-se agora de respeitar a proporcionalidade $TB:TA = BD:AD$, segundo a proposição 13 de APOLLONIUS; HEATH (1896, 26-27), sendo T , o ponto pretendido, por ser a intersecção da tangente t com a reta que contém o diâmetro AB . Vamos recorrer a um método gráfico que desenvolvemos. Esta proporcionalidade pode ser obtida com recurso ao teorema de Tales de Mileto. Traçando por D o segmento DE igual a BD e perpendicular a AB , a reta AE estabelece graficamente uma proporção para $BD:AD$. Então AF estabelece a mesma proporção para $TB:TA$. Para determinar T fazemos passar em B uma reta a 45° que interseção a reta AE em F , tendo em conta que, se a curva é uma elipse, a reta a 45° é traçada no sentido exterior ao segmento AB , se a curva é uma hipérbole, a reta a 45° é traçada no sentido interior ao segmento AB . Traçando FT perpendicular a AB , na intersecção obtemos T , ou seja TB é igual a FT e a proporção referida é respeitada. PT define a reta t , tangente em P .

É ainda de ter em conta que se quisermos obter pontos da cónica, para além de P , A e B , podemos determinar o ponto simétrico de P relativamente a D e os pontos simétricos de destes dois pontos relativamente ao centro C da cónica. Com cinco destes pontos definimos toda a cónica.

De notar que a aplicação deste método permite igualmente a determinação dos extremos do diâmetro d e, conseqüentemente, a determinação da intersecção de uma reta r qualquer com a cónica.

3.9. CONCLUSÕES DO CAPÍTULO

Ao longo deste capítulo procurou-se desenvolver um conjunto de traçados de aplicação prática mas, que, em paralelo, são construções geométricas, ou seja, construções mentais com expressão gráfica, permitindo a criação de pensamento geométrico estruturado e suportado na teoria. Para tal, procedeu-se à recolha seletiva de traçados constantes da literatura, desde os mais divulgados a outros menos conhecidos e, paralelamente, procurando o desenvolvimento de soluções mais expeditas, mais elegantes, para problemas identificados ou para outros que o processo investigativo revelou serem necessários para resolução de problemas mais complexos. Optou-se, portanto, por fixá-los no texto nesta fase e deste modo, pois vão ter reflexos no desenvolvimento do processo de exposição, mas, sobretudo, pelas potenciais implicações em problemas mais complexos.

Tal opção implicou a articulação, sempre que necessário, com a própria exposição teórica de regras e métodos subjacentes e, por outro lado, levou à constatação que os traçados têm ligações, na maioria das vezes, a diversas propriedades com origem muito diferente, tanto quanto ao momento histórico como ao contexto científico em que foram produzidas, o que implicou a dificuldade de organizar os diversos problemas, por sequência de temas, pois as resoluções implicam, por vezes, a utilização de conhecimentos com origem em diferentes contextos, que não o do momento expositivo no texto. Nesses casos, procurou-se contextualizar e remeter para o tópico teórico adequado. Nos manuais de geometria são utilizados usualmente procedimentos diferentes, que são a compartimentação estrita por áreas teóricas, seguida de explanação e desenvolvimento de problemas de aplicação da teoria exposta. Situando-se esta investigação na busca de soluções de geometria aplicada ao design, procurou-se corresponder à prática que detetámos na literatura de referência de aplicação prática em diversas áreas de atividade.

Refira-se a propósito que se comprovou igualmente a existência contemporânea de trabalhos, sobre, ou contendo temas da geometria das cónicas e sua aplicação, e no caso em estudo, de tradução gráfica, desde textos de investigação teórica na área da matemática, até às aplicações em áreas tão diversas como a informática, sobretudo na computação gráfica, ou a medicina, na construção de equipamentos de imagiologia, até áreas mais próximas do design como as artes visuais, a arquitetura ou, até, as engenharias. Não é o caso português, onde na literatura, depois dos anos sessenta do século passado, quase só se encontraram textos ou de divulgação ou de geometria não euclidiana.

Tendo-se iniciado a exposição pelos métodos baseados no conhecimento dos eixos, focos e diretrizes, para a determinação de pontos da curva ou de tangentes à curva, ou seja, os mais divulgados, passou-se depois à exposição da resolução de problemas, que ocorrem inúmeras vezes no trabalho prático com as cónicas, e que implicam a partir do conhecimento



gráfico da curva ou parte dela, determinar o centro e eixos e, conseqüentemente os focos. Na decorrência deste modo de exposição tornou-se evidente a necessidade de introduzir conceitos fundamentais das operações em geometria projetiva designadamente *Pólo* e *Polar*, homologia e o seu caso particular a afinidade. Partindo-se da constatação de que, para definir a curva graficamente, não é necessário conhecê-la totalmente, sendo suficiente conhecer uma parte dela, é igualmente possível identificar condições para a sua definição.

Assim, pela literatura, e confirmando pela experiência prática dos traçados, identificou-se que o conhecimento de cinco pontos da curva a define. Daqui decorreu a verificação de que, neste contexto, o conhecimento de um diâmetro ou de tangentes nos extremos de um diâmetro ou corda reduz o número de pontos necessários para definir a cónica. Tal implicou a exposição da teoria subjacente à definição das cinco condições e do método da sua utilização na prática.

Demonstrou-se no capítulo anterior que, consoante o problema em causa e o método de abordagem, pode a apresentação da curva cónica resultar numa definição de eixos ou de diâmetros conjugados. Torna-se assim um problema central, no trabalho com as cónicas, o da determinação dos eixos quando se conhece diâmetros conjugados, e o problema inverso. Na decorrência do método expositivo adotado introduz-se nesta fase o tema, tendo-se sido encontradas na literatura referências diversas, e vários métodos de resolução, o que comprova a sua relevância. Por outro lado, introduz-se, relativamente à determinação dos diâmetros conhecidos os eixos da elipse, um método que desenvolvemos a partir de uma propriedade conhecida.

Constatando-se o surgimento no decurso da investigação de inúmeras particularidades que diferenciam a resolução de problemas relativos às cónicas centrais dos relativos à parábola e, até, de entre as centrais, o caso da elipse do da hipérbole, desenvolveu-se seguidamente um conjunto de traçados aplicados a cada uma das cónicas em particular. Para tal, em alguns dos casos, utilizou-se nos traçados rotações em torno dos eixos das curvas, que são relações de afinidade particulares. Tratando-se de uma abordagem pouco usual na literatura sobre o tema mostrou, no entanto, ser muito útil na resolução de problemas concretos.

Dos traçados relativos à parábola resultou a deteção de uma propriedade não descrita na literatura, e que permite o traçado da parábola, conhecidos um diâmetro perpendicular ao eixo e o vértice, e que, por implicar um procedimento repetitivo sistemático, permite a criação de um algoritmo de produção expedita do traçado da curva com suporte informático.

Ainda quanto à parábola, foi igualmente detetada a relevância da utilização conjunta de uma propriedade de Fermat com outras, configurando uma relação que permite que, a partir de um ponto da parábola e conhecendo o vértice e a sua tangente, determinar o foco, processo que se revelou de grande utilidade prática.

Também foi testada, através de resolução de problemas concretos, e sobretudo por rotação, o estabelecimento de relação entre a parábola solução e outra parábola. Tendo em conta que, em regra os programas de CAD não permitem traçados expeditos da parábola, tal método pode ser útil pois, a partir de uma parábola desenhada, podemos obter qualquer outra.

No decurso da exposição e num caso concreto relativo à parábola procedeu-se à explanação, a título de exemplo, do próprio processo investigativo e da metodologia utilizada.

Independentemente do processo de construção das parábolas, a solução com recurso a parábolas auxiliares, ilustra, por si só, as potencialidades da utilização do computador para aos traçados geométricos permitindo novos procedimentos, mais expeditos.

Nos traçados relativos à hipérbole foram utilizados os métodos decorrentes das propriedades da hipérbole, mas também um método decorrente do próprio processo construtivo do hiperboloide de revolução de uma folha considerando a hipérbole geradora, método que se revelou eficaz apesar de não se terem encontrado referências na literatura.

Da análise dos traçados descritos anteriormente concluiu-se da vantagem de introduzir dois temas da geometria projetiva, o da definição da cónica por cinco condições e o dos feixes projetivos. Tal resultou da comprovação da necessidade, que surge no trabalho prático de determinação de pontos e tangentes com condições particulares, ou até de troços da curva quando esta não está completamente definida.

Então passou-se à contextualização teórica das cinco condições sendo que se comprovou que os Teoremas de Pascal e Brianchon permitem a definição de uma cónica, dadas cinco condições, pontos e tangentes, sendo verificada a relação de incidência, ou seja, que sempre que o número de pontos dados seja três, quatro ou cinco, as tangentes dadas o sejam nesses pontos, e, da mesma forma, quando são dadas três, quatro ou cinco tangentes, os pontos dados sejam os de tangência.

Por outro lado, comprovou-se no decurso da investigação que os métodos decorrentes dos Teoremas de Pascal e Brianchon são úteis mesmo que não se verifique a relação de incidência. Tal, associado ao quadro de Izquierdo Asensi, relativo às cinco



condições com não incidência, leva-nos a voltar ao tema mais à frente. Outro tema que surgiu decorrente deste, e que foi o da existência apenas de quatro das condições para definição de uma cónica e da abordagem do problema, tema a que voltaremos.

Desta análise das cinco condições resultou ainda a constatação de que o método de NAGORE (1985, T. III, 145) permite criar um modelo para, em geometria dinâmica, representar qualquer curva cónica a partir de cinco dos seus pontos, ou até uma rotina para programação com a mesma finalidade.

A partir da definição da cónica por cinco condições procede-se depois à resolução de alguns problemas concretos, designadamente a determinação do centro da cónica e de diâmetros conjugados. Tais assuntos conjugados com as construções geométricas anteriores permitem a resolução dos diversos problemas de cónicas definidas por pontos e, ou, tangentes.

Tendo em conta o encadeamento que orientou a construção do trabalho estamos agora em condições de introduzir o tema da intersecção de uma reta com uma cónica, outro dos fundamentais na resolução de problemas com as cónicas, por representar, efetivamente, a determinação de cordas, ou até de diâmetros, de que não se conhece qualquer dos pontos extremos. Da revisão da literatura comprovou-se que, não obstante a relevância do tema, talvez por se entender ser apenas um problema prático, as referências são escassas e os métodos expostos mostram-se, ou limitados pelos dados a casos concretos, ou implicando um domínio aprofundado da geometria projetiva. Assim sendo, propõem-se métodos diferentes com objetivo de suprir a lacuna, sendo que num deles a cónica é definida por diâmetros conjugados, e num outro, de utilidade mais genérica, define-se a cónica por três pontos e duas das tangentes nesses pontos. Tal permite a resolução de todos os casos de definição da curva por pontos e tangentes desde que seja possível, a partir dos dados, traçar duas tangentes em dois pontos da curva e dispor, pelo menos, de um terceiro ponto.

Em decorrência, volta-se a reexaminar a questão da determinação de tangentes pelas cinco condições. Concluiu-se desta análise que estando definida a cónica pelos pontos de tangência das tangentes o problema é de aplicação direta. Daqui decorre a necessidade de determinar os casos em que os pontos dados não são pontos de tangência. Testou-se assim um método para, sendo dado quatro tangentes e um ponto da curva não pertencente a qualquer das tangentes definir a curva. Foi possível determinar a curva cónica mas, no entanto, teve de estabelecer-se uma condição acessória, o que implica voltar ao tema mais à frente.

Passou-se seguidamente aos traçados pelo método dos feixes projetivos, tendo-se concluído da sua evidente utilidade, sempre que se pretenda obter pontos sucessivos numa sequência da curva, ou quando se pretendem estabelecer rotinas informáticas para o traçado da curva.

Depois de se ter procedido a uma explanação sintética do método dos feixes projetivos foram desenvolvidas soluções para diversos problemas, designadamente casos particulares, mas também os relativos à determinação de pontos e tangentes com condições específicas, e que não são abordados, em regra, na literatura científica.

Do conjunto dos dois métodos referidos, o das cinco condições e o dos feixes projetivos conclui-se que, em regra, quando se pretende obter pontos particulares ou tangentes em condições concretas podemos utilizar os métodos derivados dos Teoremas de Pascal e Brianchon, quando se pretendem obter troços das curvas é mais eficaz, em regra, a utilização do método dos feixes projetivos. Tal conclusão é apenas indicativa sendo que, por certo, em circunstâncias concretas, pode ser útil o recurso aos dois métodos em articulação.

Por último é feita uma referência breve a uma outra área da geometria projetiva, a das proporções métricas, tema já aflorado no Cap. 2, e de que se apresenta um caso concreto, resolvido com metodologia desenvolvida especificamente para o efeito, mas aplicável a outros problemas. Não obstante, o tema não é aprofundado, porque implica a explanação teórica do tema e o domínio da sua aplicação ao caso das cónicas, designadamente das proporcionalidades possíveis de estabelecer, em cada circunstância. Revelando-se um tema com implicações complexas, considera-se, como tal, de difícil utilização no âmbito de uma utilização expedita, não obstante o seu evidente interesse para uma formação avançada.

Apesar de ao longo do capítulo termos procurado responder a diversos problemas, muitos dos quais por serem de evidente utilidade nas aplicações práticas, evidentemente não esgotámos o tema, sendo que, por certo, a aplicação das inúmeras propriedades das cónicas que constam da literatura sobre o tema, mas não são descritas ao longo do texto, e a sua testagem na aplicação na resolução de problemas, podem conduzir à descoberta de novas propriedades ou soluções mais expeditas para problemas concretos, ou de mais fácil compreensão e utilização. Tal contribui para a convicção de que o tema das cónicas, ao contrário do que alguns parecem pensar, está longe de esgotado, e que outros contributos e a sua persistente análise, têm potencialidades de exploração futura.

Ao longo do capítulo procurou-se responder aos principais problemas detetados no exercício prático do trabalho com as cónicas, designadamente os decorrentes da



determinação de diâmetros e cordas e dos seus conjugados, e especialmente, o da intersecção de uma reta com a cónica, com aplicação direta na determinação de diâmetros e cordas de que não conhecemos qualquer dos pontos extremos. Não é abordada diretamente, no entanto, a questão da intersecção de duas cónicas, não obstante o evidente interesse teórico e potencialidades de utilização prática, por se ter comprovado a necessidade de introduzir o estudo mais aprofundado da geometria projetiva, sendo que muitas das referências bibliográficas se encontram em textos de geometria não euclidiana, o que extravasa o âmbito deste trabalho e limita o alcance da sua utilização por não matemáticos. Não obstante esse tema voltará a ser aflorado indiretamente mais à frente.

Como se foi evidenciando, para diversos problemas há mais que uma solução, sendo por vezes mais elegante, mais simples, uma que outra, dependendo das condições dadas tanto matemática como graficamente. Procurámos, por isso, evidenciar vantagens e inconvenientes de cada um, concluindo, no entanto, que o trabalho prático com as cónicas pode tornar-se mais expedito com o conhecimento aprofundado das propriedades e métodos aplicáveis e com o cruzamento de conhecimentos de contextos diferentes.

Tenhamos em conta que, se ao longo da exposição deste capítulo quisemos evidenciar o próprio processo de construção da investigação, ou seja, fazendo uma recolha de métodos, processos de resolução e aplicações práticas, e experimentação de outros, que pode parecer casuística, procurou-se antes analisar as potencialidades resultantes da teoria de suporte e da sua aplicação na prática, e das suas consequências. Tal como evidenciámos na definição da investigação procurámos atuar tanto na investigação fundamental sobre o tema, procurando o conhecimento teórico enquadrador, mas, paralelamente, analisar consequências e potencialidades de aplicação prática na resolução de problemas.

Ao longo do capítulo utilizámos designações próprias da Geometria Projetiva sendo que algumas das quais não encontrámos, tanto na literatura científica portuguesa, como em dicionários e enciclopédias de referência de língua portuguesa, pelo que as adaptámos ao português a partir das designações em português do Brasil, quando se encontraram, ou do espanhol, do francês ou ainda do inglês.

3.10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DO CAPÍTULO

AKOPYAN, A. V.; ZASLAVSKY, A.A. – **Geometry of conics**. Rhode Island: American Mathematical Society, 2007. [Trad. da edição russa de 2000 do Moscow Center for Continuous Mathematical Education.] ISBN 978-08218-4323-9.

APOLLONIUS OF PERGA; HEATH, T. L. – **Treatise on conic sections: edited in modern notation with introductions including an essay on the earlier history of the subject by T. L. HEATH, M. A.** Cambridge: The University Press, 1896.

BOYER, Carl B. – **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 2005. [Trad. de A History of Mathematics. John Wiley & Sons, Inc, 1991]. ISBN 85-212-0023-4.

COSTA, Joaquim M. C. Bonifácio – Intersecção de superfícies não planas em dupla projecção ortogonal. Castelo Branco: Instituto Politécnico de Castelo Branco, Escola Superior de Artes Aplicadas, 2005. [Estudo para Concurso de Provas Públicas para Professor-Adjunto].

[COSTA], Joaquim BONIFÁCIO – Determinação gráfica da parábola conhecidos dois pontos da curva e a tangente no vértice (exemplo prático de geometria aplicada ao design). Convergências. Castelo Branco: ESART – IPCB, nº2, Jan. (2009) art. 32. [<http://convergencias.esart.ipcb.pt/artigo/32> acedido em 20/12/2009].

CUNHA, Luís Veiga da – **Desenho técnico**. 5ª ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1982.

DAY, H. G. – **Properties of conic sections proved geometrically**. London and Cambridge: MacMillan and Co. [University Press], 1868.

DOWNS, J. W. – **Practical conic sections**. Palo Alto, California: Dover Publications, Inc., 2003.

DUBBEL, Heinrich et al – **Manual de construção de máquinas**. Tomos I e II. Curitiba: Hemus, 1974. ISBN 85-289-0270-6. [Tradução para português da 13ª ed. rev. e ampliada em língua alemã]

HAUSSNER, Robert – **Geometría descriptiva**. Barcelona: Editorial Labor, S. A., 1928. [Trad. de alemão para castelhano por Carlos Mendizábal Brunet].

IZQUIERDO ASENSI, Fernando – **Geometría descriptiva superior y aplicada**. 3d ed. Madrid: Ed. Dossat, 1985. ISBN 84-237-0441-6.

LIMING, Roy A. – **Mathematics for computer graphics**. Fallbrook [California]: Aero Publishers, Inc., 1981. ISBN 0-8168-6751-8.

MICHETTI, A. – Possibili costruzioni delle ellissi del Colosseo. In DOCCI, M. - **Il colosseo: Studi e ricerche**. Roma: Gangemi Editore, 1998. ISBN 88-492-0055-2. p. 89-97. Numero monográfico de disegnare Anno X, n. 18/19 ISSN IT 1123-9247.

MINIFIE, WM. – **A text book of geometrical drawing, for the use of mechanics and schools**. Baltimore: WM. MINIFIE & CO., 1851.



NAGORE, Fernando – **Geometría Métrica y Descriptiva para Arquitectos**. Tomos I, II y III. Pamplona: EUNSA, Ediciones Universidad de Navarra, S.A., 1986, 1987 e 1988. ISBN 84-313-0961-X (obra completa).

PEGADO, L.P. da Motta – **Curso de geometria descriptiva da Escola Polytechnica**. Lisboa: Academia Real das Ciências, 1899. [2 volumes].

RICCA, Guilherme – **Geometria Descritiva: método de Monge**. 2d ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2000.

ROUBAUDI, C. – **Traité de géometrie descriptive**. 10d ed. Paris: Masson et C.^a, Éditeurs, 1961.

SÁNCHEZ GALLEGO, Juan Antonio – **Geometría descriptiva: Sistemas de proyección cilíndrica**. Barcelona: Edicions UPC [Universitat Politècnica de Catalunya, SL], 1997. ISBN 978-84-9880-381-5.

SAURÍ, Miguel Angel Gil – **Geometría aplicada a la técnica**. Madrid: Editorial CIENCIA 3, 2009. ISBN 978-84-95391-15-5.

TODD, Philip – **101 conic sections examples using geometry expressions**. Saltire Software Inc., 2009. ISBN 1-882564-13-8.







4. DAS CURVAS CÓNICAS ÀS SUPERFÍCIES E APLICAÇÕES NO DESIGN

4.1. SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

Procedemos agora a uma descrição das superfícies geradas a partir das curvas cónicas. Estas são as superfícies quádricas e outras superfícies que, não o sendo, contêm curvas cónicas ou em que têm origem em curvas cónicas.

Superfícies quádricas ou superfícies de segunda ordem são as em que se verifica que, do ponto de vista analítico, qualquer secção na superfície dá origem a uma curva cónica, própria ou degenerada, segundo HILBERT; COHN-VOSSSEN (1999, 12).

HILBERT; COHN-VISSEN (1999, 12-15) salienta ainda que os cilindros circular, elíptico, parabólico e hiperbólico, assim como os cones de segunda ordem são superfícies quádricas. Também o são os elipsoides, quaisquer que sejam as relações dimensionais dos seus três eixos, incluindo, por tal, a superfície esférica, os hiperboloides de uma ou duas folhas, o parabolóide hiperbólico e o parabolóide de revolução ou elíptico.

Consta da literatura que as secções planas em superfícies quádricas são curvas cónicas, reais ou degeneradas. É possível concluir igualmente, do estudo realizado, que sucessivas secções paralelas em superfícies quádricas são curvas cónicas do mesmo tipo ou degeneradas.

Exemplo de superfícies geradas com curvas cónicas reais ou degeneradas mas que não são quádricas são, por exemplo os conoides gerados por uma circunferência e uma reta num plano paralelo à circunferência. Por outro lado, podemos considerar como igualmente geradas a partir das curvas cónicas diversas outras resultantes de *NURBS* assim como diversas resultantes da geometria projetiva, inclusivamente na área não euclidiana, ou da topologia, mas com crescente aplicação na resolução de problemas do quotidiano. Assim, as últimas décadas têm sido marcadas pela definição de diversos tipos novos de superfícies

que anteriormente se consideravam de impossível definição matemática, como por exemplo, as *manifolds* ou algumas das outras superfícies topológicas.

A classificação das superfícies é de relativa complexidade, pois não há um critério único e objetivo, ou seja, não existe uma taxonomia. Exemplificando, algumas das quádricas são de revolução, algumas das quádricas são regradas, algumas das regradas são planificáveis, há uma helicoidal planificável que é regradada mas não de revolução. De autor para autor encontramos diferentes processos de descrição e metodologia de classificação que entenderam seguir. Aliás, e de acordo com RICCA (2000, 215): “Não existe um critério geométrico que permita uma classificação detalhada das superfícies.” Propõe-nos assim um critério de grupos de superfícies que se excluem mutuamente, a saber: regradas planificáveis, regradas empenadas e curvas regradas ou não. Aliás, critério similar é igualmente utilizado por IZQUIERDO ASENSI (1988, 163), ao referir que tem adotado uma classificação, que, ainda que em alguns aspetos não se adapte a um excessivo rigor científico, parece muito apropriada pela sua clareza. É esta classificação que reproduzimos de forma adaptada a seguir:

Grupo	Família	Classe	Superfície	
Regradas		Planas	Plano	
		Poliédricas	Regulares	Tetraedro
				Cubo
				Octaedro
				Dodecaedro
				Icosaedro
		Irregulares		
Radiadas	Cónicas	Pirâmides Cónicas		
	Cilíndricas	Cilíndricas Prismáticas		
	Alabeadas (empenadas)			
Curvas	Revolução		Esfera Toro	
Compostas				

Fig. 4.1 – Quadro resumo das superfícies



De qualquer forma, apesar de se constatar a impossibilidade prática de criar uma taxonomia das superfícies, elas são agrupadas normalmente por conjuntos de características e propriedades comuns. Assim, procede-se em seguida a uma exposição sobre algumas das superfícies de utilização mais comum, a começar pelas quádricas. Relembre-se que, como consta do glossário, uma quádrica é uma superfície curva do 2º grau, ou seja, uma superfície que é interseccionada por qualquer reta em 2 pontos.

ROUBAUDI (1961, 377) enuncia que em geral, uma cónica girando em torno de um eixo gera uma superfície de quarta ordem. Para que essa superfície seja de segunda ordem, é necessário e suficiente que a projeção do eixo de rotação sobre o plano da cónica seja um eixo desta curva. Mais à frente na página 413 sugere como método para trabalhar com quádricas em geral, transformar por homologia os seus contornos em contornos de superfícies de revolução do mesmo tipo e depois fazer as adaptações necessárias em cada caso.

Parece igualmente relevante, neste contexto, referir as superfícies que, por serem planificáveis, logo, executáveis com materiais planos, tal como referir outras de utilização prática em inúmeras situações.

Neste contexto é de referir COSTA (2005) em que, para além de uma descrição geral das superfícies, se faz uma abordagem das intersecções de superfícies com recurso às curvas cónicas, como traçados auxiliares.

4.1.1. SUPERFÍCIE CÓNICA E CILÍNDRICA

Tendo em conta que as superfícies cónicas e cilíndricas são geradas por retas, geratrizes, ou seja, cónicas degeneradas, desenvolvendo-se a partir de um vértice ou paralelas entre si e de uma diretriz circular são igualmente superfícies quádricas, de acordo com a definição anteriormente referida. Por outro lado, são nas superfícies quádricas superfícies de uma só curvatura ou curvatura simples, o que é característica das superfícies planificáveis. O conceito de **curvatura** foi desenvolvido por Gauss e, em topologia, é hoje descrito segundo VARELA (2013, 51) pelas curvaturas normais num ponto da superfície: “As curvaturas normais num ponto são as curvaturas das linhas de intersecção da superfície com os planos perpendiculares à superfície nesse ponto”. Sendo que a curvatura é zero nas retas e, nas curvas, analiticamente, pode ser orientada como positiva num sentido e negativa no contrário, estamos perante diversos métodos de abordagem sendo o mais usual o dos máximos e dos mínimos, ou seja, definir a curvatura da superfície naquele ponto como o produto das curvaturas máxima e mínima encontradas. As curvaturas máximas e mínimas são designadas por curvaturas principais. Se à mínima corresponder uma reta o valor é

zero, o que multiplicado pelo valor da curvatura máxima dá sempre zero o que corresponde a uma superfície planificável. Quando o referido produto é diferente de 0 a superfície é de dupla curvatura, e logo não planificável, podendo ser positiva quando a máxima e mínima são do mesmo sinal, ou seja no mesmo sentido, ou negativa quando de sinais diferentes, ou quando as direções de curvatura forem opostas. Relembre-se que o tema da curvatura das linhas planas curvas foi abordado no ponto 2.2, indicando que a curvatura num ponto é o inverso do raio da circunferência osculatriz nesse ponto.



Fig. 4.2 – Museu Guggenheim de Bilbao

Como exemplo de possibilidade de trabalho com superfícies de dupla curvatura a partir de materiais planificáveis refira-se que, no projeto do Museu Guggenheim de Bilbao, o arquiteto Frank Gehri, pretendendo obter formas curvas irregulares na estrutura de revestimento em chapa metálica, dividiu as superfícies em secções quadrangulares que, sendo no desenho original de curvatura dupla, têm uma das curvaturas próxima do zero. Depois cada secção de chapa foi moldada por calandragem na outra curvatura pretendida, sendo a forma final muito aproximada do pretendido. Esta técnica de planificação, transformando superfícies de curvatura dupla em troços de superfícies de curvatura simples, cônicas ou cilíndricas, é muito similar à utilizada na construção de cascos de navio em chapa metálica ou nas fuselagens de aviões.

De notar ainda que em todas as superfícies toma especial relevância o **contorno aparente**. Como resultado da nossa experiência visual os sistemas de representação rigorosa integraram a representação, em objetos tridimensionais, de linhas que, na visão dependem da nossa posição no espaço variando, portanto, com a posição, mas sendo muitas vezes determinantes para a identificação do objeto em causa. Nos sistemas de projeção cilíndrica (vistas, dupla projeção ortogonal e axonometrias) os contornos de visibilidade são determinados pela intersecção de retas perpendiculares aos planos de representação e tangentes às superfícies com o plano de representação, na projeção cônica



as retas tangentes às superfícies partem de um ponto pré-definido, que na perspetiva representa o observador. No caso apresentado, em dupla projeção ortogonal, os pontos *A* e *B* correspondem aos pontos do contorno na diretriz em projeção frontal e *C* e *D* aos pontos do contorno em projeção horizontal. Sobre a definição da superfície cónica e da superfície cilíndrica deve conferir-se o ponto 2..

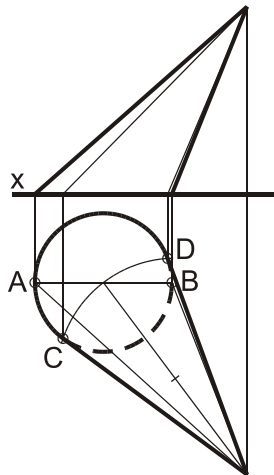


Fig. 4.3 – Superfície cónica oblíqua

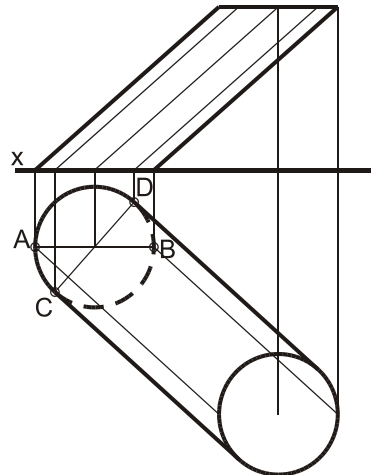


Fig. 4.4 – Superfície cilíndrica oblíqua

4.1.2. ESFERA

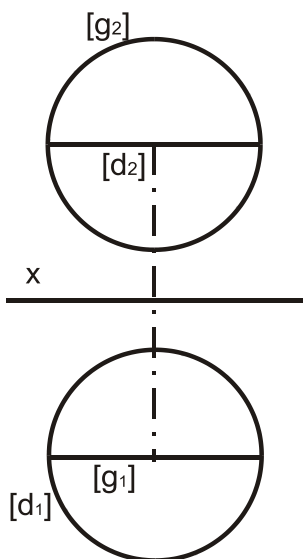


Fig. 4.5 – Esfera

Pode ser descrita como a superfície gerada pela rotação de uma circunferência em torno de um dos seus diâmetros, embora, em geometria descritiva, usualmente apareça representada pelas duas circunferências perpendiculares que definem os contornos aparentes frontal e horizontal, sendo que, indiferentemente, uma delas é considerada diretriz e a outra geratriz.

Sendo uma forma geométrica de dupla curvatura tem através de métodos geométricos aproximados sido construída com materiais planificáveis como no caso da bola de futebol ou nas estruturas geodésicas conhecidas em inglês como *domes*.

4.1.3. ELIPSOIDE

O elipsoide pode ser descrito como a rotação da elipse em torno de um dos seus eixos, **elipsoide de revolução**, ou como gerado pela utilização de uma elipse como diretriz e de uma outra perpendicular e com um eixo comum que é a geratriz da superfície, dando origem ao **elipsoide elíptico**. Uma esfera pode ser considerada um elipsoide de eixos iguais. Na Fig. 4.8 são determinados um ponto P do elipsoide e a projeção de um ponto R do elipsoide sobre uma esfera de raio igual ao eixo maior do elipsoide.

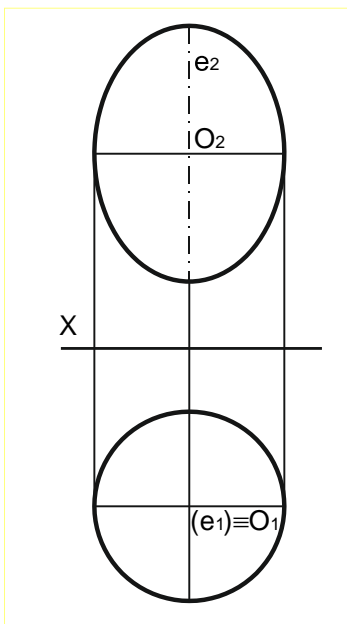


Fig. 4.6 – Elipsoide de revolução

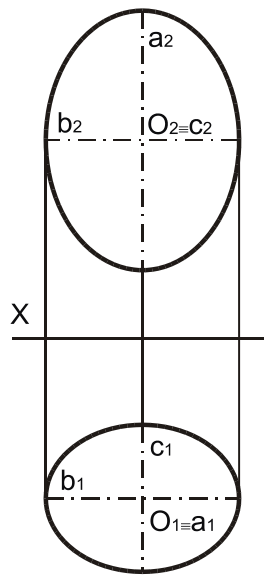


Fig. 4.7 – Elipsoide elíptico

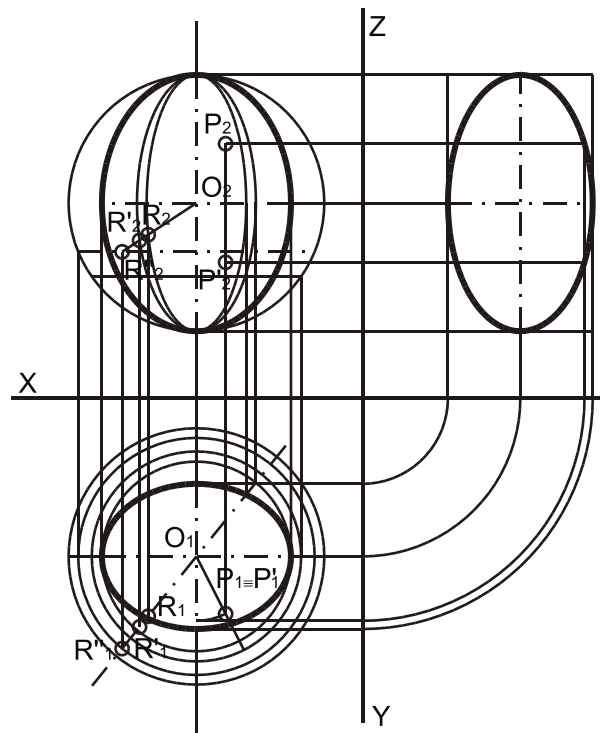
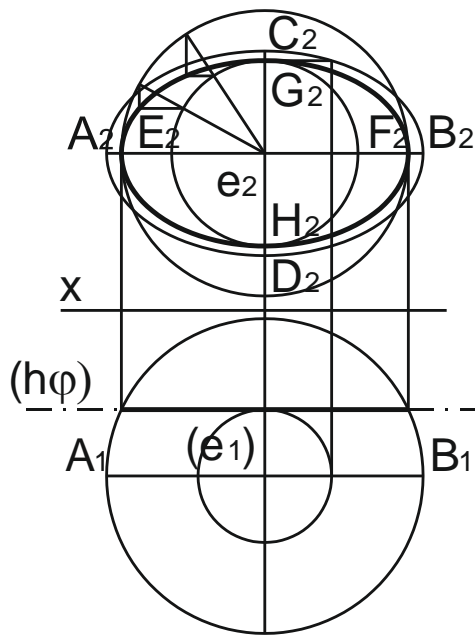


Fig. 4.8 – Pontos na superfície do elipsoide

4.1.3.1. DADA A ELIPSE DE EIXO MAIOR E MENOR AB e CD E O ELIPSOIDE DE REVOLUÇÃO DE EIXO MAIOR AB DETERMINAR A ELIPSE DE EIXO MAIOR EF , QUE É UMA SECÇÃO NO ELIPSOIDE PARALELA À ELIPSE ANTERIOR, DETERMINANDO O EIXO MENOR GHE OUTROS PONTOS DA CURVA



Apresenta-se este problema como um dos exemplos possíveis de aplicação dos traçados anteriormente descritos. Sendo de determinação direta o eixo EF o eixo GH é determinado pela rotação de 90° da distância desde o eixo e ao plano φ , o que permite obter a posição de G no elipsoide. Conhecidos os dois eixos utilizou-se o procedimento descrito em 3.5.1.2.

Fig. 4.9 – Determinação de secção num elipsoide

Fig. 4.10 – Cama Nido
desenhada por Gunther Thony

A forma geométrica da cama Nido pode ser obtida por manipulação informática de uma superfície em elipsoide.



Modern Bed Design for Bedroom Furniture, Nido with Lomme System by Gunther Thony

4.1.4. PARABOLÓIDE

O **paraboloide de revolução** resulta da rotação da parábola em torno do seu eixo. Se a rotação tiver uma diretriz elíptica diz-se que é um **paraboloide elíptico**. Atender ainda à particularidade de uma secção plana a um paraboloide de revolução, oblíqua ao seu eixo, ser uma elipse, mas cuja **projeção no plano da diretriz é uma circunferência**, aliás,

situação idêntica à do cilindro de revolução, segundo ROUBAUDI (1961, 381, fig. 417), e aqui apresentado na Fig. 4.13. Situando-se o centro da secção a meia distância entre os extremos da secção pode-se representar diretamente a circunferência em projeção horizontal.

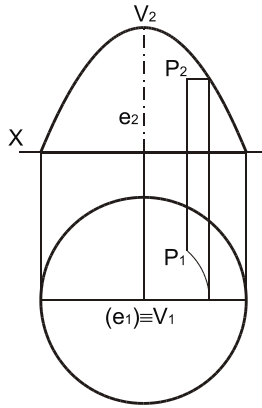


Fig. 4.11 – Paraboloide de revolução

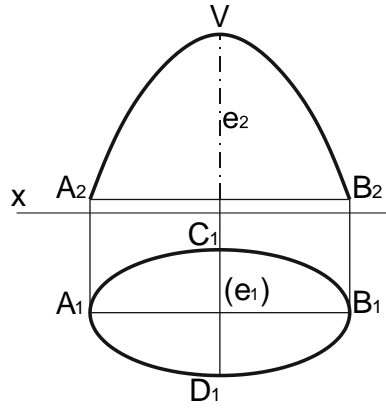


Fig. 4.12 – Paraboloide elíptico

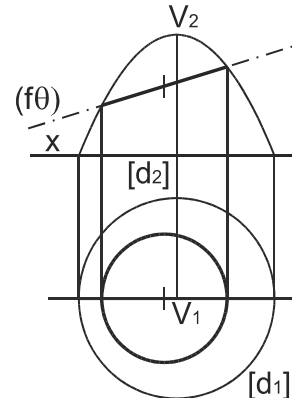


Fig. 4.13 – Secção em parabolóide

4.1.4.1. CONSTRUÇÃO DA PARÁBOLA QUE PASSA EM C E D E QUE RESULTA DE UMA SECÇÃO PLANA PARALELA AO EIXO NUM PARABOLOIDE DE REVOLUÇÃO, CONHECIDA GRAFICAMENTE A PARÁBOLA QUE GERA O PARABOLOIDE E O SEU EIXO. OBTENÇÃO DO PONTO P A UMA DISTÂNCIA DADA DA TANGENTE NO VÉRTICE

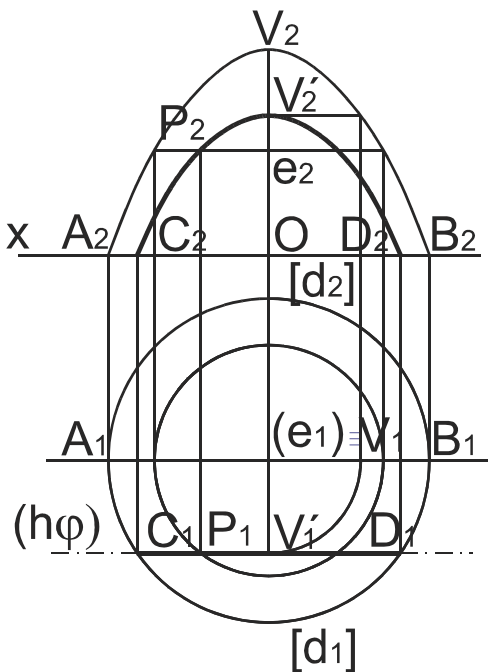


Fig. 4.14 – Parábola secção de parabolóide



Este problema é igualmente um exemplo de aplicação dos traçados anteriormente descritos. As linhas de referência de A e B definem o diâmetro da circunferência diretriz $[d]$ do parabolóide. À distância pretendida marca-se o plano de secção φ . A intersecção do plano com o eixo define o ponto V_1 , projeção horizontal do vértice da parábola. Para obter a sua projeção frontal, traça-se o arco de circunferência de raio O_1 a V_1 e a sua intersecção com o diâmetro é projetada sobre a parábola de A a B . Por esse ponto da parábola traça-se a paralela ao eixo x obtendo V_2 . Os pontos C e D são definidos pela intersecção do plano com a diretriz $[d]$. Para obter um ponto P qualquer na parábola de secção define-se P_1 e traça-se a circunferência de centro no eixo e que passa em P_1 e projeta-se o seu diâmetro sobre a parábola geratriz definindo a cota do ponto P .

4.1.5. PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO OU PARABOLÓIDE REGRADO

O **parabolóide hiperbólico** ou **parabolóide regrado**, é uma superfície gerada por uma reta que se desloca paralelamente a um plano diretor, apoiando-se constantemente em duas outras retas não coplanares, que são as diretrizes, sendo portanto uma superfície regrada. Por outro lado pode ser considerada como a superfície gerada por uma parábola geratriz cujo vértice percorre todos os pontos da parábola diretriz, sendo os planos das parábolas geratrizes paralelos entre si. Uma secção por um plano perpendicular aos planos das parábolas geratrizes e ao plano da parábola diretriz dá origem a uma hipérbole.

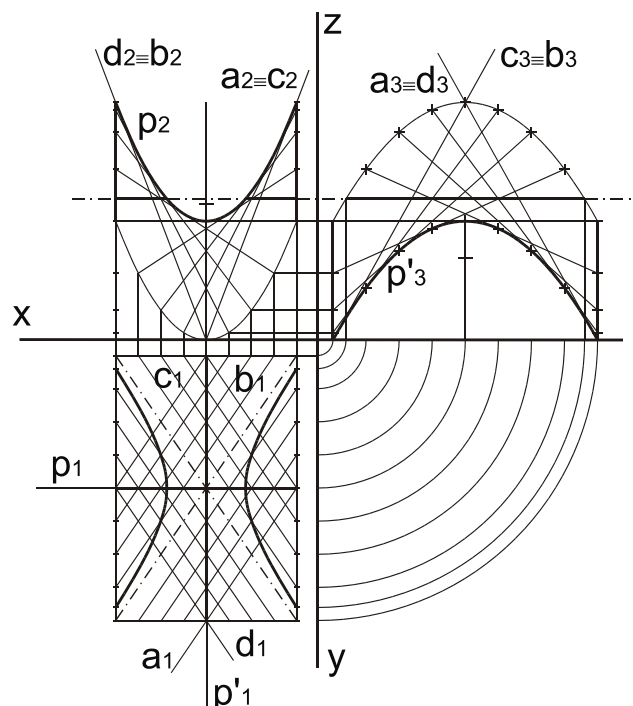


Fig. 4.15 – Parabolóide hiperbólico

São muito utilizadas na arquitetura e no design secções desta superfície, em quadrilátero de lados opostos paralelos apenas numa das projeções, quadrado, retângulo ou em paralelogramo, como, por exemplo, o caso do losango que, na figura antecedente, se define na projeção horizontal. Para tal, pode-se por exemplo definir os quatro vértices em projeção horizontal e atribuindo a cada par de vértices opostos cota diferente. Depois, dividindo em partes iguais cada par de lados opostos pode-se traçar as retas que unem os pontos intermédios de cada lado com os correspondentes do lado oposto.



Este é um exemplo de utilização de quatro paraboloides hiperbólicos na geometria da estrutura de sombreamento e foi desenvolvida na Faculdade de Design da CEPT University, Ahmedabad, Gujarat, Índia.

Fig. 4.16 – Estrutura de sombreamento e zona de lazer

Fig. 4.17 – Estrutura de sombreamento

Um outro exemplo de estrutura de sombreamento, com toldos de telas em forma de paraboloides hiperbólicos, neste caso no Freeport de Alcochete, com delimitação periférica quadrangular.





A imagem seguinte corresponde a uma instalação hoteleira nas Ilhas Maurícias, com projeto do arquiteto Norman Foster, com cobertura de estrutura de madeira com sequência múltipla de paraboloides hiperbólicos.



Fig. 4.18 – Cobertura em paraboloides hiperbólicos

4.1.6. HIPERBOLÓIDE DE UMA FOLHA

O **hiperboloide de uma folha** resulta da rotação de uma hipérbole em torno do seu eixo. Se a rotação tiver diretriz circular, diz-se que é um **hiperboloide de revolução**, se a diretriz for elíptica, diz-se que é um **hiperboloide elíptico**. Tanto um como o outro, podem ser gerados por geratrizes retas que se deslocam sobre duas diretrizes, ambas circulares ou elípticas, por tal forma que não exista paralelismo entre as geratrizes e o eixo. Para tal, o mais prático é dividir as diretrizes num determinado número de partes iguais, mas depois fazendo corresponder um ponto de uma diretriz a outro qualquer da outra, exceto ao que define a paralela ao eixo. Seguidamente, procede-se da mesma forma para os pontos consecutivos à direita na diretriz e à esquerda, criando dois sistemas de retas com direções opostas. A hipérbole surge desenhada em contorno aparente da superfície. No plano perpendicular ao eixo e que passa no centro da hipérbole, obtém-se o círculo de gola. As assíntotas da hipérbole correspondem às duas geratrizes de sistemas opostos e que, em projeção paralela ao plano de representação da hipérbole, são tangentes ao círculo de gola. Se fizermos passar duas paralelas ao eixo nos limites do eixo transversal, que é o diâmetro do círculo de gola no plano da hipérbole contorno, e as cruzarmos com as projeções das assíntotas, obtemos, a partir do centro da superfície e raio igual à distância até aos pontos atrás referidos, a distância focal. O hiperboloide de revolução é igualmente conhecido por hiperboloide de cone diretor, o qual é definido pela rotação das assíntotas em torno do eixo.



As propriedades e processo geométrico construtivo do hiperboloide de revolução possibilitaram que, no ponto 3., tivessem sido desenvolvidos processos geométricos de traçado da hipérbole que não encontrámos descritos na literatura.

O hiperboloide de revolução é hoje uma superfície amplamente utilizada em estruturas que exijam grande estabilidade e robustez, como as torres de refrigeração de centrais térmicas e nucleares de produção de energia elétrica. A primeira torre em hiperboloide de revolução foi construída no final do século XIX em Polibino, na Rússia, e foi projetada como torre de suporte de depósito de água pelo engenheiro russo Vladimir Shukhov (1853–1939). Em sequência Shukov desenvolveu projetos para diversas estruturas com diferentes finalidades como, por exemplo, torres de telecomunicações.



Fig. 4.23 – Projeto Omniflow com estrutura em hiperboloide

As torres de produção de energia elétrica Omniflow tiveram origem num projeto inicialmente desenvolvido na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto e são hoje produzidas pela empresa Omniflow, para a produção de energia utilizando de forma combinada um painel solar cônico e uma hélice de pás para a produção eólica. Tendo-se comprovado que as torres eólicas mais usuais apresentam problemas de segurança e rentabilidade, e têm de ser desativadas, quando sujeitas a mudanças súbitas de intensidade ou direção do vento, optaram pela colocação da eólica na horizontal e protegê-la por uma estrutura com forma aproximada do hiperboloide de revolução que recebendo a energia eólica pelo tubo de proteção reduz os riscos de danificação e aumenta a rentabilidade.



Fig. 4.24 –
Passadiço
pedonal em
hiperboloide
de revolução

O exemplo antecedente diz respeito a um passadiço pedonal com proteção em hiperboloide de revolução, na Corporation Street, em Manchester, ligando o prédio do Marks & Spencer com o Manchester Arndale. O projeto concluído em 1999 é do atelier Hodder+Partners. Os elementos de ligação em arcos circulares perpendiculares ao eixo do hiperboloide seriam dispensáveis, como se pode comprovar pelas fixações destes serem interiores às barras estruturais do hiperboloide que correspondem às geratrizes. Estes elementos circulares dever-se-ão provavelmente a imperativos de segurança dos transeuntes.

4.1.6.1. DEFORMABILIDADE EM HIPERBOLOIDES DE REVOLUÇÃO

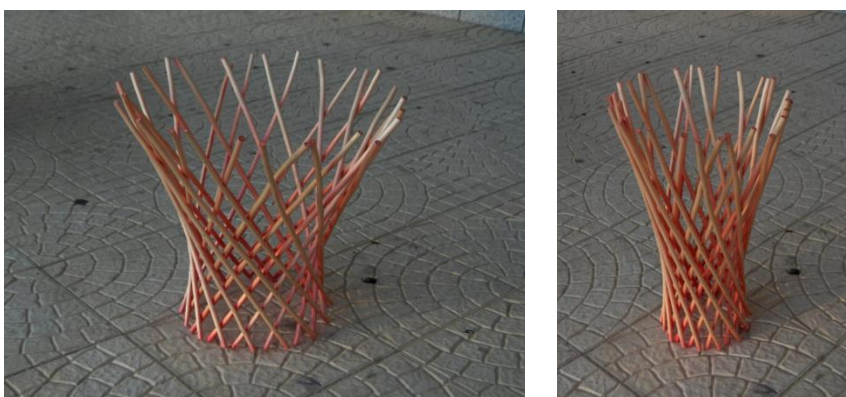


Fig. 4.25 –
Hiperboloide como
estrutura adaptável



Se uma das propriedades do hiperboloide de revolução é a sua robustez e estabilidade outra é, e aparentemente de forma antagónica, a deformabilidade mantendo a a sua configuração geométrica, e que é descrita em HILBERT; COHN-VOSSEN (1999, 16-17) dizendo respeito à possibilidade de apenas existindo ligações não rígidas em dois pontos de cada geratriz de um sistema direcional com as geratrizes do sistema contrário, pelo processo descrito anteriormente na definição da superfície e, não existindo fixação rígida, esta é deformável, e com aumento ou diminuição da distância entre as diretrizes pode-se estreitar ou alongar a superfície, tal como se pode comprovar pela figura antecedente. Tal propriedade já foi utilizada na conceção de mesas circulares de altura regulável e pode ser igualmente utilizável por exemplo num bengaleiro contentor de guarda-chuvas, que alarga consoante o número de guarda-chuvas envolvido.

4.1.7. HIPERBOLÓIDE DE DUAS FOLHAS

É o gerado pela rotação de uma hipérbole em torno da reta que contém o seu eixo transversal e os focos. Pode ser **hiperboloide de duas folhas, de revolução ou elíptico**, consoante a diretriz perpendicular ao eixo de rotação for circular ou elíptica, sendo a superfície gerada pela rotação da hipérbole em torno do seu eixo principal.

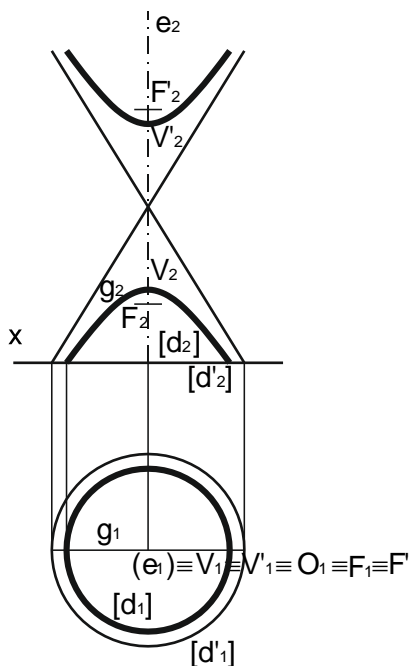


Fig. 4.26 – Hiperboloide de revolução de duas folhas

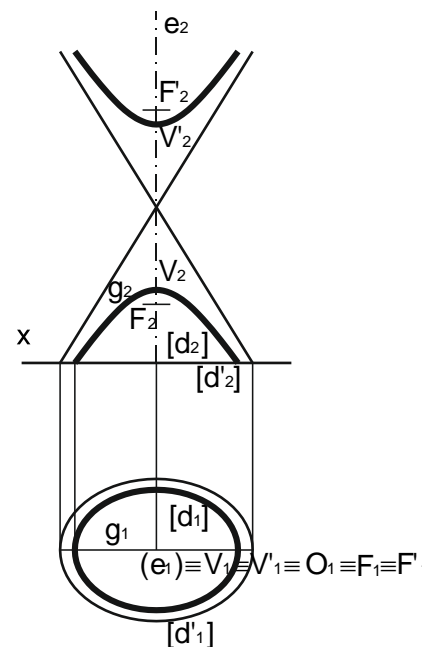


Fig. 4.27 – Hiperboloide elíptico de duas folhas

4.1.8. SUPERFÍCIES QUÁDRICAS E SUAS APLICAÇÕES

Não se deve concluir este ponto sobre as quádricas sem referir Antoni Gaudi (1852-1926) pela utilização profusa e inovadora das cónicas e curvas similares a estas no desenvolvimento criativo de novos processos estruturais e, sobretudo, de elevada qualidade estética, como é exemplo a Sagrada Família de Barcelona, ou Félix Candela (1910-1997) como precursor da sua utilização na arquitetura da América latina, com um largo número de projetos de elevada qualidade, e por ter sido fonte de ensino e inspiração de inúmeros arquitetos. É de referir igualmente Santiago Calatrava (1951-) que, na atualidade, é porventura o arquiteto que mais tem utilizado as curvas cónicas e as superfícies quádricas nos seus projetos, tanto em coberturas como na conceção de pontes, e sem nunca esquecer a genialidade de Óscar Niemeyer (1907-2012), porventura quem mais contribuiu, de forma prática através dos seus projetos, para a divulgação pública das superfícies quádricas. Por último, é de referir ainda Pancho Guedes (1925-2015), arquiteto português que utilizou de forma extensiva e criativa as formas curvas, integrando a geometria nas artes visuais e na arquitetura com a sempre presente influência da arte africana. O domínio das propriedades estruturais das quádricas possibilitou designadamente o desenvolvimento de novas soluções de estruturas metálicas, mas igualmente a construção de coberturas em betão armado, usualmente designadas por cascas, pela similitude com a casca de ovo, que permitem economia de material, por reduzida espessura da placa, permitindo assim a sua utilização de coberturas de grandes vãos. Por outro lado, ao alargar as potencialidades dos métodos construtivos, a utilização das cónicas e quádricas libertou igualmente o projeto de alguns constrangimentos quanto à utilização de superfícies curvas o que tem amplo desenvolvimento na conceção de inúmeros projetos atuais com o surgimento de novas potencialidades tecnológicas com origem nas cónicas e em outros tipos de curvas com elas relacionadas.

4.2. OUTRAS SUPERFÍCIES GERADAS POR CURVAS CÓNICAS

4.2.1. TORO, ELIPSÓIDE E GLOBÓIDE

Se uma circunferência rodar em torno de um eixo, no mesmo plano da circunferência, descrevendo uma superfície de revolução, esta designa-se por **Toro**. Se em vez de uma circunferência utilizarmos uma elipse, obtemos um **Toroide elipsoidal**. Se colocamos uma circunferência num plano oblíquo ao eixo de rotação, e descrevermos uma superfície de revolução, obtemos um **globoide**. Como é evidente no caso do globoide e



dependendo da posição da elipse relativamente ao eixo de rotação podemos obter configurações muito diversas.

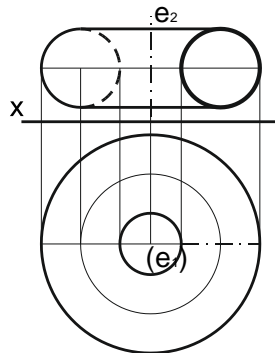


Fig. 4.28 – Toro

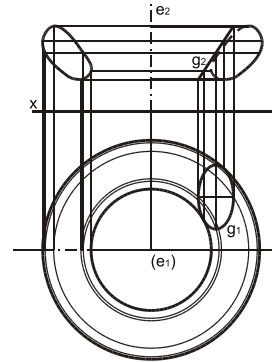


Fig. 4.29 – Globoide

4.2.2. CAPIALÇADO CILÍNDRICO

Como caso geral a **superfície cilíndrica** tem uma diretriz e geratrizes paralelas entre si. Neste caso é apresentada uma superfície com duas diretrizes, duas curvas paralelas e uma geratriz reta r .

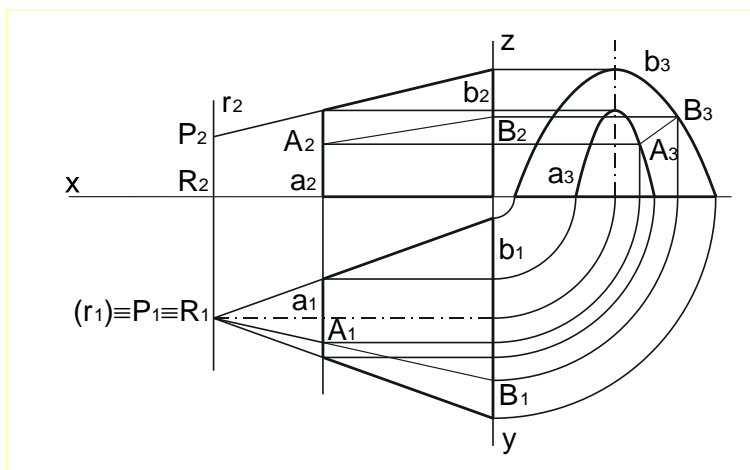


Fig. 4.30 – Capialçado cilíndrico

4.2.3. CILINDRÓIDE

No primeiro caso é apresentado um **cilindroide** definido por duas diretrizes curvas e uma reta geratriz paralela a um plano diretor. O outro caso por duas diretrizes curvas e retas paralelas entre si o que pode ser considerado um caso de um troço de superfície cilíndrica.

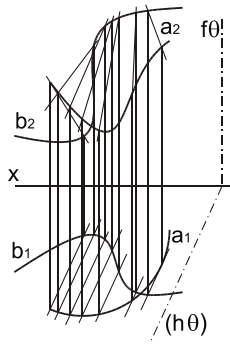


Fig. 4.31 – Cilindroide de plano diretor

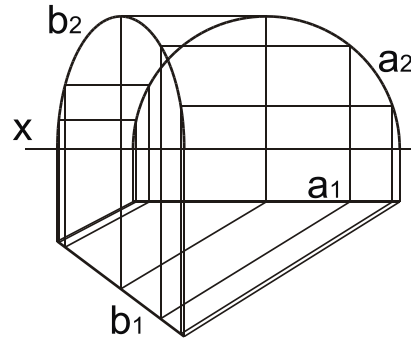


Fig. 4.32 – Cilindroide de diretrizes cónicas

4.2.4. CONÓIDES

Os **conoídes** são definidos por uma diretriz circular e outra diretriz reta num plano paralelo ao da primeira. Se a segunda diretriz é perpendicular ao eixo o conoide é **reto**. Se a segunda diretriz do conoide é uma reta que não passa no eixo diz-se que é **oblíquo**.

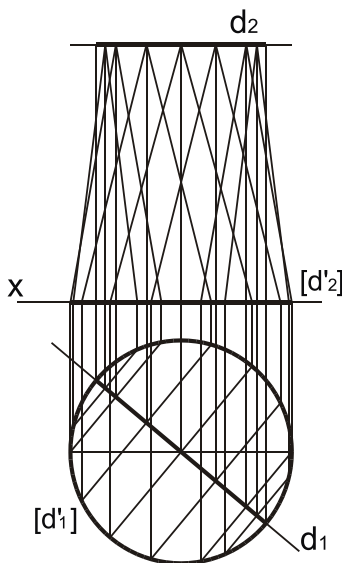


Fig. 4.33 – Conoide reto



Fig. 4.34 – Biblioteca da FAUP

A lage da cobertura da Biblioteca da Faculdade de Arquitetura da Universidade do Porto desenhada por Álvaro Siza Vieira é em conoide intersetado por um envidraçado em prisma triangular. Igualmente de Siza Vieira é a pala em superfície cilíndrica de diretriz em catenária no Pavilhão de Portugal na Expo de Lisboa.



4.2.5. CONVOLUTAS

As convolutas são utilizadas, em regra, como superfícies planificáveis que auxiliam a concordância entre superfícies. Estão representadas duas convolutas, com uma das diretrizes em circunferência, mas que, no caso da Fig. 4.35 a segunda diretriz é, em projeção, uma circunferência, mas de facto, uma curva alabeada pela inscrição numa superfície curva. No caso da Fig. 4.36, a convoluta diz-se reta ou plana, porque as diretrizes existem em planos paralelos, sendo a segunda diretriz elíptica.

À mesma família das convolutas pertence o cone empenado, o qual é definido pela diretriz circular $[d']$ e pela diretriz $[d]$ elíptica mas de projeção circular.

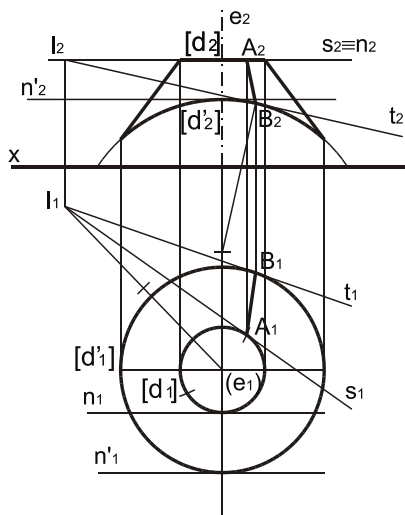


Fig. 4.35 – Convoluta

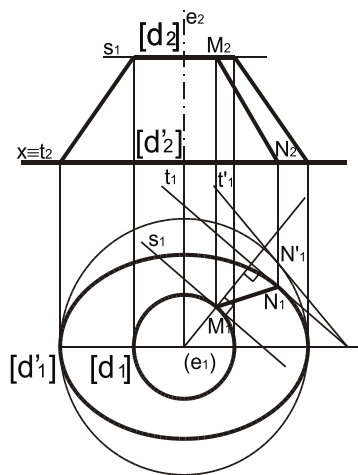


Fig. 4.36 – Convoluta

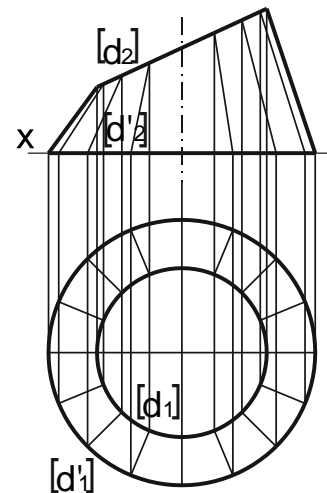


Fig. 4.37 – Cone empenado



Fig. 4.38 – Bocal de secador em convoluta

Os bocais de secadores de cabelo são, em regra, descritos por superfícies conoides ou convolutas. No caso concreto, o RCY-2 da Eletric Co, trata-se aparentemente de uma convoluta em transição entre uma circunferência e uma elipse, sendo a superfície interseçada por um cilindro de eixo perpendicular ao plano de simetria do secador.

4.2.6. CORNO DE VACA

É uma superfície regrada de transição entre duas diretrizes semicirculares iguais, e em planos paralelos, mas com eixo oblíquo. Coincidente com a intersecção dos dois arcos em projeção frontal existe uma geratriz de topo. Se cada parte dos arcos à esquerda e à direita da geratriz for dividida em partes iguais definem-se as outras geratrizes.

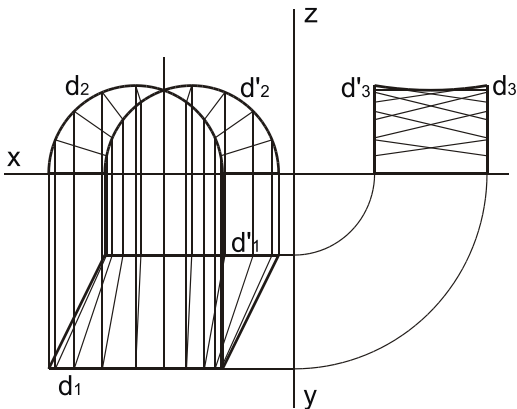


Fig. 4.39 – Corno de vaca

4.2.7. CAPIALÇADOS

Os **capialçados**, do castelhano capialçado, em francês arrière-voussure, são vãos de transição entre a superfície interior e exterior de paredes de espessura significativa ou, sobretudo, aberturas para obtenção de luz solar, sem obrigar a rasgar largos vãos no exterior, sendo de formas muito variadas. Apresenta-se seguidamente representações de alguns dos mais usuais.

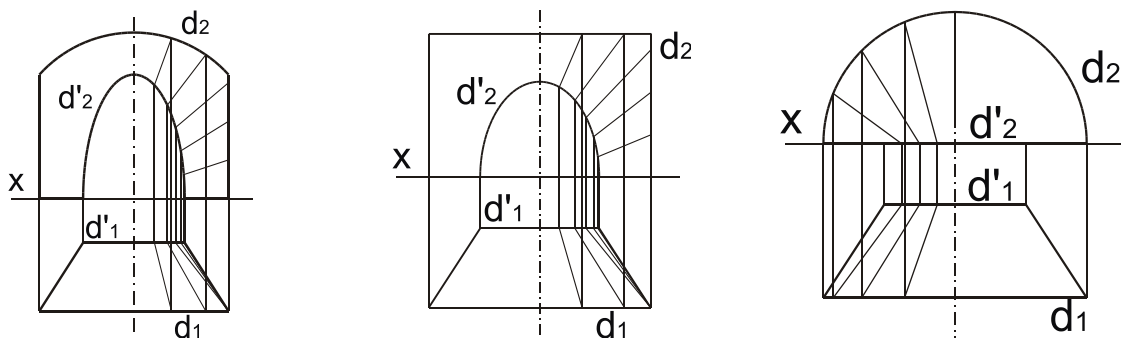


Fig. 4.40 - Capialçados



4.2.8. LUNETOS

Os **lunetos** são normalmente utilizados como aberturas laterais em abóbadas. Estas são, em regra, cilíndricas, esféricas ou ogivais. Os lunetos implicam a determinação da intersecção da superfície da abóbada com o próprio luneto. Nos casos apresentados seguidamente a abóbada é cilíndrica e os lunetos **cilíndrico reto**, ou seja perpendicular à abóbada, **cilíndrico oblíquo**, de eixo oblíquo à abóbada, o luneto **cónico**, gerado por um cone perpendicular à abóbada, e o luneto **esférico**.

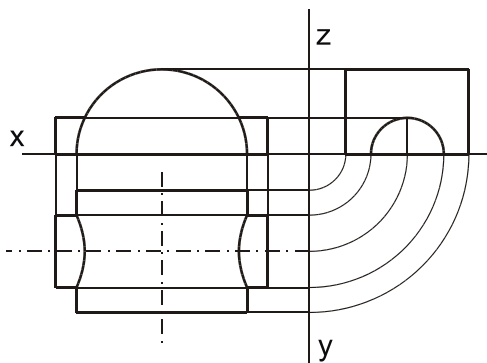


Fig. 4.41 – Luneto cilíndrico reto

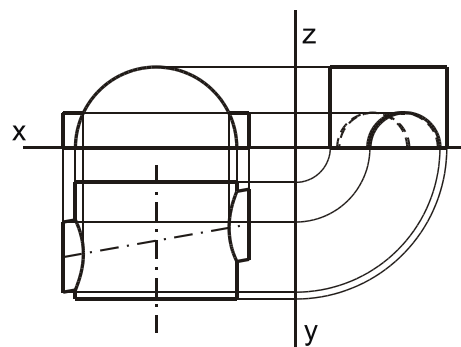


Fig. 4.42 – Luneto cilíndrico oblíquo

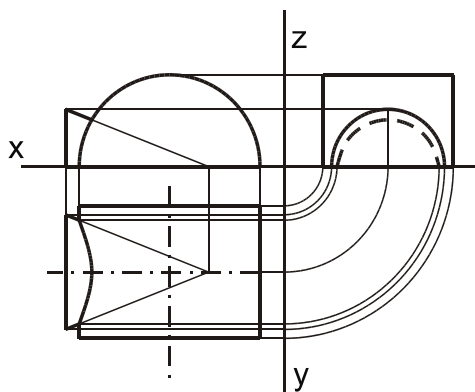


Fig. 4.43 – Luneto cónico

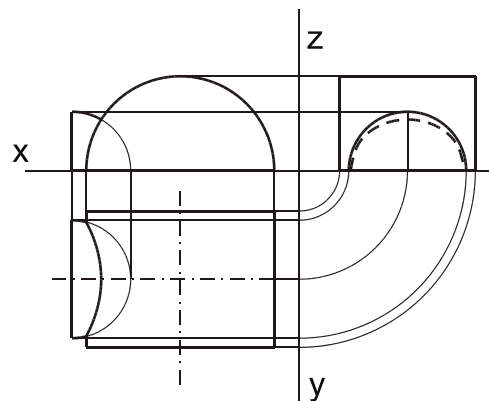


Fig. 4.44 – Luneto esférico

4.2.9. CÚPULA BIZANTINA

A cúpula bizantina é derivada da abóbada esférica vazada quase completamente em duas direções perpendiculares, obtendo-se em projeção horizontal um corte quadrangular apenas ultrapassado pelos pontos de apoio da abóbada, ou incompletamente vazada, definida uma distância inferior do vazamento ao eixo. Seguidamente é colocada em cima da esfera da cúpula anterior, e superiormente às secções laterais, uma nova semiesfera.

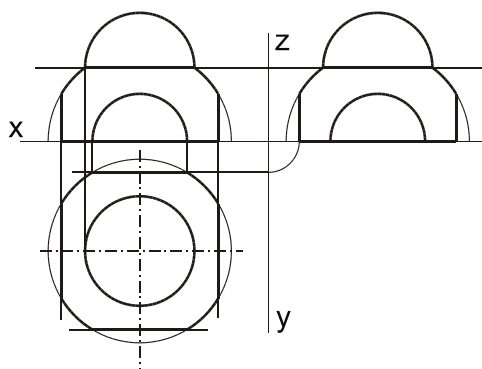


Fig. 4.45 – Cúpula bizantina

4.3. UTILIZAÇÃO DE SUPERFÍCIES QUÁDRICAS NO DESIGN DE ESTRUTURAS ALIGEIRADAS

Existem outras superfícies regradas, normalmente de utilização em coberturas tanto de betão armado como de outros materiais moldáveis. Como exemplo, e adaptando de IZQUIERDO ASENSI (1985, 578-579) este conjunto de paraboloides definidos por uma parábola e uma cónica degenerada, utilizou-se a forma representada na figura e adaptável a uma estrutura para eventos. Ou seja, uma superfície que, com materiais moldáveis, por exemplo para construção de toldos e tendas de campismo, implicando apenas a determinação da verdadeira grandeza das superfícies. No caso apresentado, as seis superfícies iguais dariam origem à cobertura descrita na imagem, por exemplo em poliéster aluminizado e impermeabilizado, com bainhas nas seis uniões centrais para introdução das varetas rígidas de alumínio. Igualmente toda a periferia teria bainhas para introdução de varetas articuladas de encaixe, em fibra de vidro.

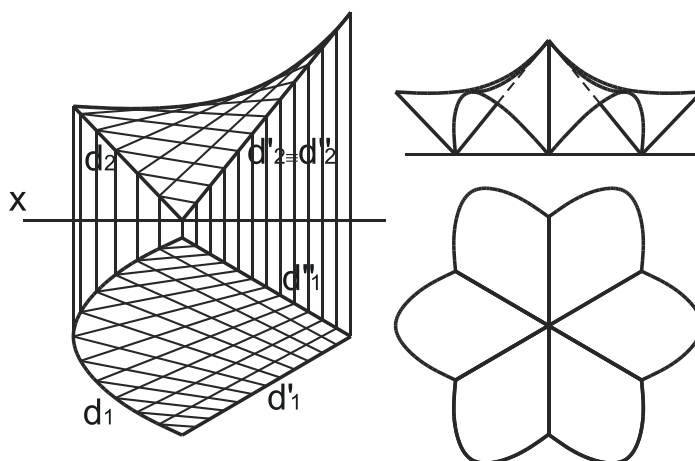


Fig. 4.46 – Superfície com seis paraboloides

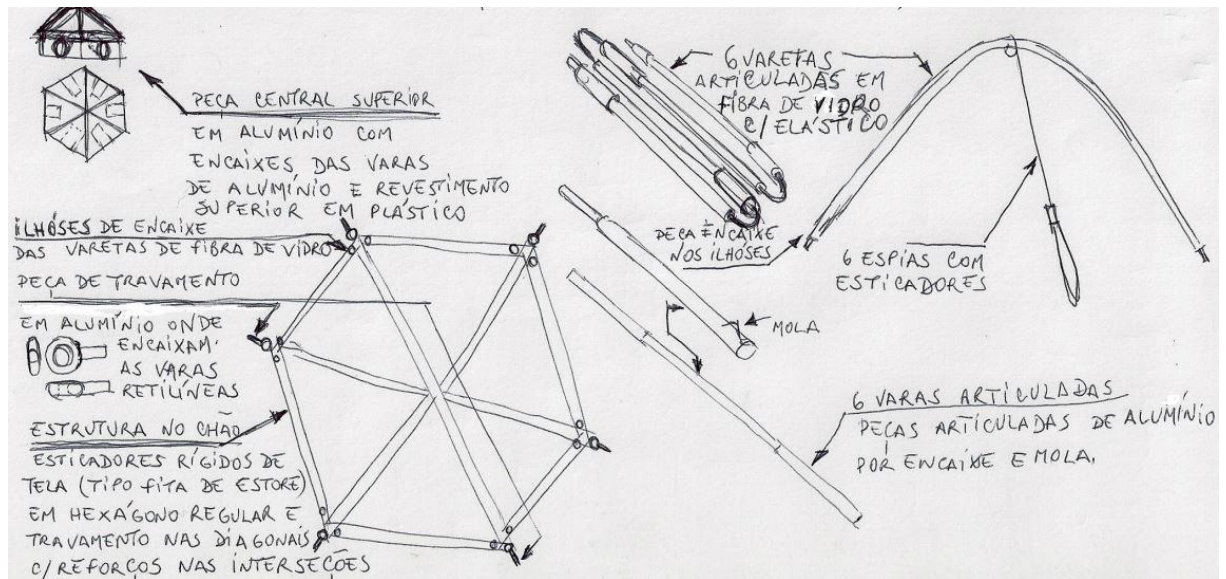


Fig. 4.47 – Esquema construtivo do toldo para eventos

Do que fica dito, parece ser evidente a intenção de realçar a multiplicidade de soluções para superfícies complexas, e para as suas intersecções, e a diversidade de soluções ao nosso dispor para cada problema concreto.

No estudo de superfícies e sua aplicação em sistemas estruturais é referência, por exemplo, ENGEL (1967) que inclui inúmeras sugestões estruturais apresentadas graficamente.



Fig. 4.48 – Estruturas Chelsea Post e Pebbleside

Da diversidade de exemplos possível de construção de estruturas aligeiradas para o design de ambientes recolhemos estas estruturas de sombreamento e iluminação noturna Chelsea Post e Pebbleside da Arc-Can Shade Structures.

4.4. OUTROS TIPOS DE SUPERFÍCIES

Referem-se seguidamente outros tipos de superfícies que, sendo menos divulgadas, têm aplicação no nosso quotidiano, por exemplo, no projeto de objetos e na modelação tridimensional com aplicação na animação.

4.4.1. SUPERFÍCIE CÍCLICA

A superfície cíclica é uma superfície criada por uma geratriz circunferência de raio variável, que se desloca sobre uma curva diretriz qualquer de tal forma que os centros das geratrizes existem na diretriz. A superfície é tubular quando resulta de uma geratriz esférica.

4.4.2. SUPERFÍCIES DADAS PELA SUA ESTRUTURA E SUPERFÍCIES GRÁFICAS

Utilizando as designações de GORDON (1980, 210-211), as superfícies dadas pela sua estrutura são superfícies definidas por algumas linhas pertencentes a essa superfície. A superfície dada pela sua estrutura não é considerada como completamente determinada.

Podem existir superfícies com a mesma estrutura, mas que são distintas. São, por exemplo, os objetos volumétricos não construídos por primitivas gráficas, a partir de sólidos simples de descrever, mas por definições sucessivas de diretrizes e que, portanto, permitem mais que uma interpretação por não estarem completamente descritos os pontos interpolados entre cada diretriz. Nas utilizações mais tradicionais, poderíamos referir como exemplo os cascos dos barcos, que são normalmente definidos por perfis transversais sucessivos. Estas superfícies têm utilizações novas, como por exemplo na animação 3D.

As superfícies podem ser sempre definidas graficamente. Algumas são determinadas geometricamente, outras **só se definem com o recurso à análise do desenho linear que ajuda a definir a superfície.** Assim, as superfícies definidas graficamente, não são definidas pela sua estrutura, mas por regras de construção gráfica, caso a caso. A superfície topográfica do solo, por exemplo, é deste tipo, que é impossível de descrever geometricamente pelos métodos usuais. Na realidade, toda a geometria dos fenómenos caóticos é também do mesmo tipo, ou seja, abre novos horizontes, que, com os conhecimentos atuais, já permitem inúmeras aplicações práticas, designadamente na criação de padrões, na criação de texturas de diferentes materiais, nas superfícies dos jogos e animações 3D. Sugere-se a tal propósito o estudo das superfícies Bézier, engenheiro que em 1972 introduziu um novo tipo de superfícies para modelar carroçarias de automóveis. Tais superfícies utilizam linhas como as Splines e as Bézier, agrupáveis num conjunto



designado por NURBS na literatura científica, que aqui se referem por serem utilizadas por programas informáticos de ampla divulgação.

Apresentam-se seguidamente alguns exemplos de utilização de superfícies curvas de tipos invulgares.

4.4.3. MANIFOLDS

Com origem na dinâmica de fluidos, e com estudo sobretudo em topologia, surgiu outro tipo de superfícies as *manifolds*. Tal como é evidente também noutros diferentes problemas da geometria, alguns dos quais abordámos em diferentes fases deste texto, é notória a complexidade da definição e nível de interligações da realidade em geometria, como neste exemplo limite, as *manifolds*, superfícies que poderíamos representar por um modelo em estruturas tubulares similares aos tubos de escape, daí o nome, em que alguns dos tubos podem ter forma similar ao laço de Moebius, em que o interior e o exterior se confundem através de cruzamentos e inversões de direção, como uma manga que é revirada para dentro dela própria e depois pode voltar a sair atravessando a própria superfície. Também neste caso é, por vezes, impossível utilizar conceitos de interior ou exterior, ou relações dimensionais, pelo que são formas por vezes de difícil definição geométrica dentro da geometria euclidiana.



Fig. 4.49 – Superfície *manifold*

O caso representado diz respeito à estrutura de escape da Titek Stainless Steel Turbo Manifold Nissan S13/S14/S15 SR20DET.

4.4.4. SUPERFÍCIES TZITZEICA

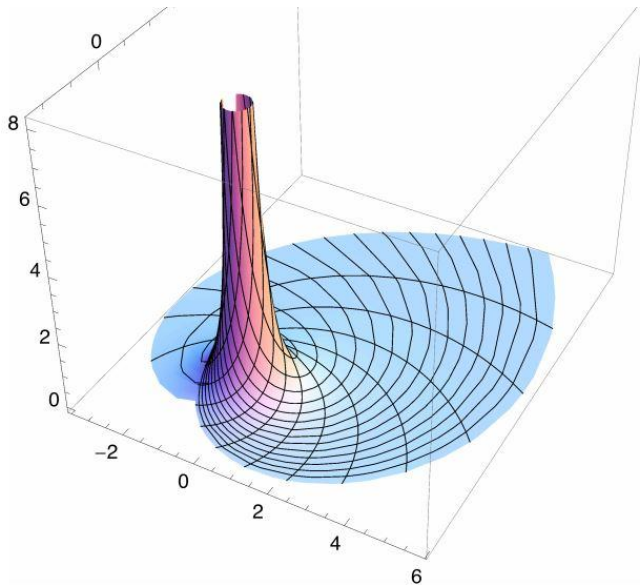


Fig. 4.50 – Superfície Tzitzeica

Em AGNEW et al (2010, 15) no contexto de apresentação de exemplos de diversas superfícies Tzitzeica, ou seja, superfícies geradas por curvas assintóticas é apresentado o exemplo da figura.



Fig. 4.51 – Ilha de Cristal

A Ilha de Cristal é um projeto não executado de Norman Foster (FOSTER and Partners) de bairro residencial e serviços para 30.000 habitantes para a Ilha de Cristal em Moscovo, aparentemente gerado por superfícies *Tzitzeica* do tipo referido.



4.5. SUPERFÍCIES COMPLEXAS NO DESIGN E NA ARQUITETURA

O primeiro exemplo, na Fiera Milano, utiliza coberturas dos passadiços de interligação entre os pavilhões em estrutura metálica e revestimento em vidro, em superfície Bézier.



Fig. 4.52 – Cobertura de passadiços na Fiera Milano

São de referir, como exemplos estruturais antecedentes deste tipo de estrutura, pela utilização de procedimentos de triangulação, as estruturas de cobertura no estádio olímpico de Berlim desenhadas pelo arquiteto Frei Otto com superfícies em parabolóide hiperbólico, com método de triangulação com técnica similar à utilizada para a construção de estruturas geodésicas, com forma esférica, e cuja criação é atribuída a Buckminster Fuller, durante a segunda guerra mundial, embora existam referências ao seu estudo, em período anterior, na Alemanha.

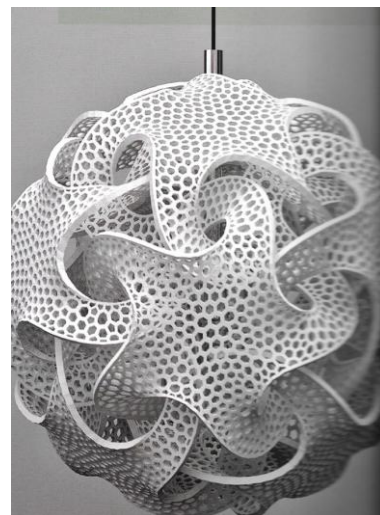


Fig. 4.53 – Candeeiro de teto Quin.mgx



O candeeiro de teto Quin.mgx de Bathsheba Grossman foi aparentemente gerado a partir de um dodecaedro, sólido de doze faces pentagonais. Depois cada polígono foi submetido a transformações geométricas da sua superfície por método provavelmente derivado da geometria topológica dando origem a uma configuração complexa que, por implicar superfícies contínuas intrincadas e interligadas umas nas outras, pode ter sido gerado por impressão 3D em material plástico. Outra hipótese seria partir de um icosaedro truncado em que cada triângulo equilátero das faces é dividido em três partes iguais gerando na zona central um hexágono regular em que cada lado, em conjunto com os lados dos hexágonos adjacentes, dá origem a pentágonos regulares, gerando a forma das antigas bolas de futebol.

Fig. 4.54 – Modelação de superfícies

Um outro exemplo da possibilidade de modelação de superfícies através do encaixe de materiais planos recortados gerando uma superfície topográfica é esta Escultura de Nicolas André na Boutique Isabel Marant New York.



Fig. 4.55 – Frankfurt Office

O Frankfurt Office do Team 3deluxe é um espaço modular de montagem expedita que pode ser utilizado, por exemplo, como pavilhão de divulgação em feiras. É constituído por superfícies curvas possivelmente geradas através de *splines*.



4.6. INTERSECÇÃO DE SUPERFÍCIES

A secção plana numa superfície é um caso particular de intersecção de superfícies. Em dupla projeção ortogonal, se o plano for projetante a secção é determinável diretamente através da intersecção do plano com a superfície. Se o plano de secção não for projetante segue-se o mesmo método da intersecção de duas superfícies quaisquer, ou seja, utiliza-se o método auxiliar, ou seja, uma superfície auxiliar, por facilidade um plano, intersesta o outro plano e a superfície e os pontos comuns às duas intersecções pertencem à linha de intersecção das duas superfícies. Tal implica a repetição do processo até à determinação dos pontos necessários à determinação da linha de intersecção.

Por outro lado, a intersecção de superfícies é um conjunto de problemas que na literatura matemática e computacional aparecem tratados como problemas em $\mathbb{P}R^3$ (espaço real projetivo 3D). O caso particular da determinação da curva de intersecção de quádricas é designado usualmente pela sigla QSIC (Quadric surfaces intersection curves). São diversas as referências na literatura científica à utilização de curvas planas na determinação da intersecção de superfícies, designadamente em recentes aplicações na computação gráfica. WANG, JOE e GOLDMAN (2003, 335–367), por exemplo, analisam curvas cúbicas planas que, tal como é descrito no ponto 5.7., derivam das cónicas, para determinar a intersecção de superfícies quádricas. Por outro lado, na resolução computacional de intersecções de superfícies parece existir uma tendência crescente para a criação de algoritmos cada vez mais complexos, mas em que parece evidente que o recurso a curvas planas como auxiliares é propiciador de melhores soluções. Cite-se como exemplo XU et al (2005, 515–530). Não obstante há uma aproximação cada vez mais consistente, que se socorre algebricamente de métodos oriundos da geometria projetiva, como por exemplo TU et al (2009, 317-335), que descreve um procedimento de busca da assinatura do tipo de intersecção de duas quádricas no conjunto de trinta e cinco soluções diferentes de curva não degenerada, sendo essa assinatura determinada sequência na equação da curva. O método rebuscado tem a ver com a dificuldade de tradução algébrica das inúmeras particularidades que ocorrem em cada caso particular.

Tal permite pôr como hipótese, pelo menos, se métodos derivados dos utilizados na geometria descritiva não poderiam ser mais eficazes, pois revelam consistência por si, e independentemente dos resultados concretos em cada caso. De facto, e se, como pudemos constatar, para além dos problemas decorrentes da expressão analítica, que inúmeras vezes implica o uso de condições, por exemplo $x \neq 0$, e que implicam que, a partir daquele passo, existem duas soluções diferentes em termos analíticos, o que nem sempre é simples de resolver, ou origina erros, e, por exemplo, descontinuidades em aplicações informáticas, a esmagadora maioria dos problemas detetados na computação gráfica não dizem respeito

a questões matemáticas, antes dizem respeito à determinação de visibilidades e da ocorrência de pontos especiais na curva de intersecção das superfícies, sendo que estes problemas são de resolução aparentemente mais simples através de métodos oriundos da geometria descritiva. Sobre a questão das visibilidades relembremos que um ponto para ser visível na intersecção de duas superfícies tem que ser visível cumulativamente em cada um dos sólidos e, por outro lado a deteção de visibilidades faz-se por contiguidade das geratrizes ou das curvas auxiliares a que o ponto pertence, até ao contorno de visibilidade. No ponto de inflexão da curva, no contorno real ou aparente, pode-se aplicar a regra de Helmholtz-Ratoosh, ou seja, segundo ARNHEIM (1986, 238), Helmholtz, no âmbito da psicologia da perceção visual, enuncia que quando a linha de contorno de um objeto continua na mesma direção ao intersestar a linha de contorno de outro objeto, o primeiro é visto à frente e o outro atrás, e, mais tarde, Philburn Ratoosh formula a mesma questão em termos matemáticos, chegando a conclusões similares. Ou seja, no caso da intersecção de superfícies, em geometria descritiva, é de considerar que a linha de intersecção continue visível nos pontos contíguos a um visível até a linha de intersecção tocar no contorno de visibilidade de uma das superfícies, onde se torna invisível, continuando o contorno de visibilidade na própria linha de contorno da superfície na mesma direção de determinação, sem inflexões. Não obstante, teremos que ter em conta a possibilidade de o próprio contorno da superfície apresentar concavidade na zona considerada, dando origem a inflexão da direção.

Referimos, neste contexto, que a modelação computacional 3D tem sido objeto de profusa literatura científica nas revistas de especialidade, tal como se referiu e do qual se cita como exemplo, TENG, C.; CHEN, Y.; HSU, W. (2007, 515-530) que analisa a criação de um modelo tridimensional a partir de duas imagens fixas, ou FIORAVANTI, M; GONZALEZ-VEJA, L.; NECULA, I. (2006, 1187-1205) que analisa a intersecção de duas superfícies regradas na computação gráfica tridimensional.

Se até ao final do século XX a esmagadora maioria das publicações de artigos científicos no âmbito da computação gráfica tiveram origem em universidades americanas, o facto de terem surgido numerosos autores naturais de países emergentes, designadamente da China, Taiwan, Índia e outros, notoriamente a partir da última década do século XX, em instituições de ensino superior dos EUA, e no séc. XXI, a partir de universidades do seu próprio país, a publicarem artigos científicos sobre as diversas aplicações na computação gráfica da geometria projetiva e, em particular, com os conhecimentos que decorrem das cónicas e das superfícies quádricas, pode ser lido como um forte investimento destes países nesta área de conhecimento. Por outro lado, se atendermos ao momento em que acontecem estas publicações e ao facto do surgimento de aplicações tecnológicas de âmbito comercial ou militar com data anterior, tal pode significar que uma parte importante



do conhecimento já não passa pelas publicações científicas, antes obedece a investigações cobertas por forte segredo estratégico. Tal implica que, nos países de menores recursos, tenha importância acrescida existir investimento no conhecimento e, em particular, nos avanços da computação gráfica e no seu principal suporte, a geometria projetiva e, em particular, no conhecimento das cónicas, nos vários níveis de ensino, e, aqui desempenha um papel igualmente a geometria descritiva.

Mas, voltando à intersecção de superfícies, refira-se com MILLER, J.; GOLDMAN, R. (1995, 55) que, de acordo com o teorema de Bezout, a intersecção de duas superfícies quádricas é sempre uma curva de quarto grau no espaço projetivo complexo. No entanto, refere que a intersecção destas superfícies em computação gráfica tem, em inúmeras situações, problemas de difícil resolução, tendo em conta os casos em que a curva de intersecção é composta de duas curvas cónicas e os casos que dão origem a curvas degeneradas, pelo que sugerem um método, com origem na geometria diferencial, que possibilita resolução de alguns casos, ou seja, comprova-se as considerações anteriormente produzidas sobre a geometria analítica.

4.6.1. INTERSECÇÃO DE SUPERFÍCIES UTILIZANDO AS CÓNICAS COMO CURVAS AUXILIARES

É no contexto das considerações precedentes que abordamos seguidamente a intersecção de superfícies recorrendo à utilização das cónicas como auxiliares, um método complementar ao mais usual na geometria descritiva, designadamente em dupla projeção ortogonal, e que já abordámos em COSTA (2005, 46-49).

O método geral de intersecção de duas superfícies consiste em intersectá-las com planos auxiliares que produzem em cada uma das superfícies uma secção, sendo que os pontos de intersecção das duas secções pertencem à linha, ou às linhas, da intersecção das duas superfícies. Os métodos correntes em geometria descritiva passam pela escolha adequada dos planos auxiliares, de forma que as secções resultem retas ou circunferências, como expressão da necessidade de rigor e de facilidade de execução. O problema é que, em inúmeros casos, tal é inviável, o que obriga a procedimentos complementares. Por exemplo ROUBAUDI (1961, 446-451) aborda genericamente a intersecção de duas superfícies quádricas ou de quádricas com superfícies de revolução com essa perspetiva, utilizando por exemplo as circunferências resultantes de secções perpendiculares ao eixo em superfícies de revolução. Em COSTA (2005, 46-49) partimos da hipótese de utilizar como secções auxiliares as curvas cónicas ou propriedades das quádricas, partindo da convicção de que um estudo mais aprofundado das cónicas e das quádricas permitiria

encontrar métodos expeditos para a construção das secções auxiliares e, sobretudo, com utilização de CAD, de qualquer forma eliminando os problemas de rigor resultantes da construção de curvas em papel e lápis. São exemplos desta metodologia os que passamos a descrever.

4.6.1.1. INTERSECÇÃO DE UM HIPERBOLOIDE DE REVOLUÇÃO COM UM PARABOLOIDE DE REVOLUÇÃO

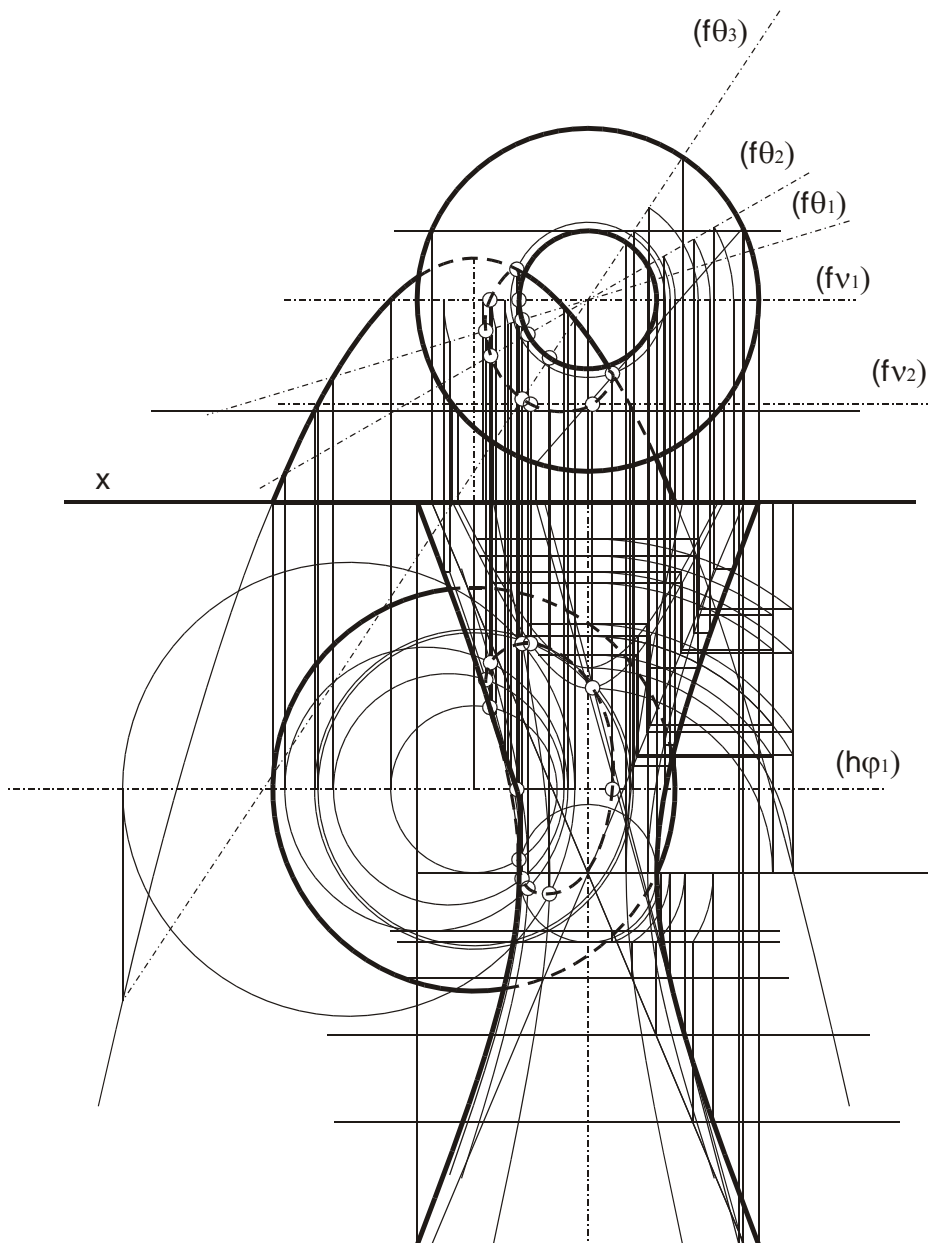


Fig. 4.56 – Intersecção de parabolóide e hiperbolóide ambos de revolução



Na resolução da intersecção da Fig. 4.56, de um hiperboloide de revolução e um parabolóide de revolução, foi utilizado um plano frontal φ_1 que seccionou o parabolóide segundo a parábola do contorno aparente e o hiperboloide segundo uma circunferência, dando origem a dois pontos da linha de intersecção. Também foi utilizado um plano horizontal ν_1 a passar no eixo do hiperbolóide, cuja secção neste é o contorno horizontal do hiperbolóide, e que interseta o parabolóide segundo uma circunferência, dando origem a mais dois pontos da intersecção. Seguidamente, utilizou-se planos projetantes frontais a passar no eixo do hiperboloide θ_1 , θ_2 e θ_3 que intersetam o hiperboloide segundo hipérbolas, construídas pelo método descrito no ponto 3.5.3., e de que agora nos socorremos como exemplo de utilização prática, e cujas secções no parabolóide são elipses, mas que na projeção perpendicular ao eixo do parabolóide, são circulares, como se descreve atrás, no estudo do parabolóide. A intersecção das circunferências com as hipérbolas dá origem aos pontos da linha de intersecção. Como se verifica, o terceiro plano implicou o prolongamento da superfície abaixo do plano horizontal de projeção. Como tal, e como forma de determinar mais pontos da linha de intersecção foi utilizado o plano ν_2 que produziu no hiperboloide uma secção hipérbole, com as mesmas assíntotas, mas eixo transverso perpendicular ao da hipérbole do contorno do hiperbolóide, por o plano se situar abaixo da gola, sendo que a intersecção da hipérbole descrita com a secção circular do parabolóide deu origem aos pontos do plano na linha de intersecção das duas superfícies.

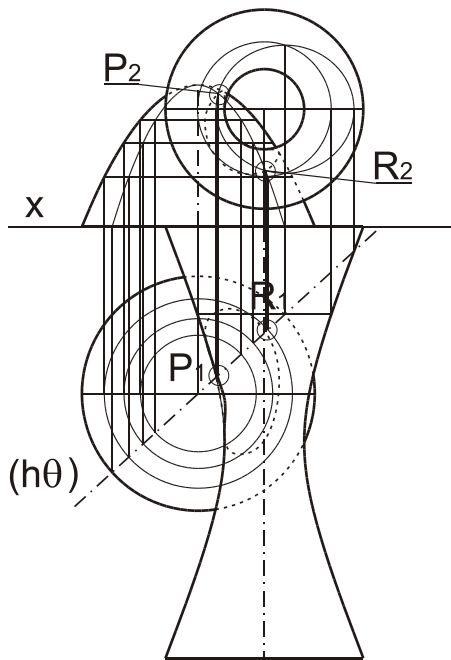


Fig. 4.57 – Método alternativo a)

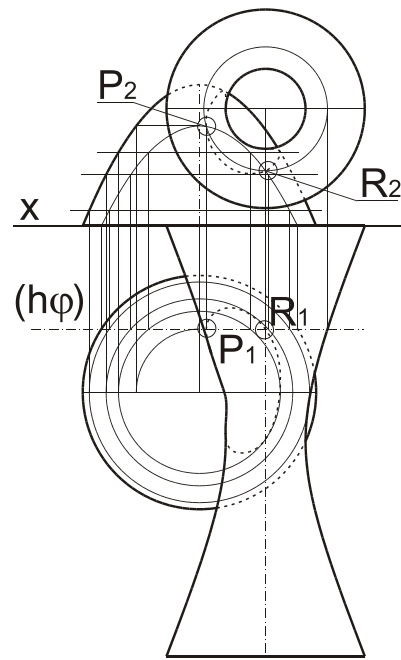


Fig. 4.58 – Método alternativo b)

Como se verifica pela Fig. 4.57 um procedimento alternativo poderia ter sido utilizar planos verticais a passar no eixo do paraboloide, produzindo neste secções parabólicas de vértice comum com o do paraboloide e no hiperboloide secções elípticas, do que resulta a relativa dificuldade de utilização de tais planos verticais.

Já na solução apresentada na Fig. 4.58 é utilizado um plano frontal como auxiliar o que parece ser mais útil, ao resultar em secção circular no hiperbolóide e em secção parabólica, mas de resolução menos complexa, no paraboloide, resolução igualmente apresentada no ponto respeitante aos traçados das curvas cónicas. De tudo o que fica dito sobre o caso em apreço, e em geral para todos os similares, conclui-se que existem diversas soluções e deve-se, portanto, em cada caso, utilizar a metodologia que permita chegar à solução de forma mais expedita e rigorosa. Realce-se que foram utilizados traçados construtivos da hipérbole e da parábola com recurso a métodos descritos no capítulo antecedente, exemplificando-se assim as suas potencialidades.

4.6.1.2. INTERSECÇÃO DE SUPERFÍCIE PARABÓLICA E SUPERFÍCIE CÓNICA

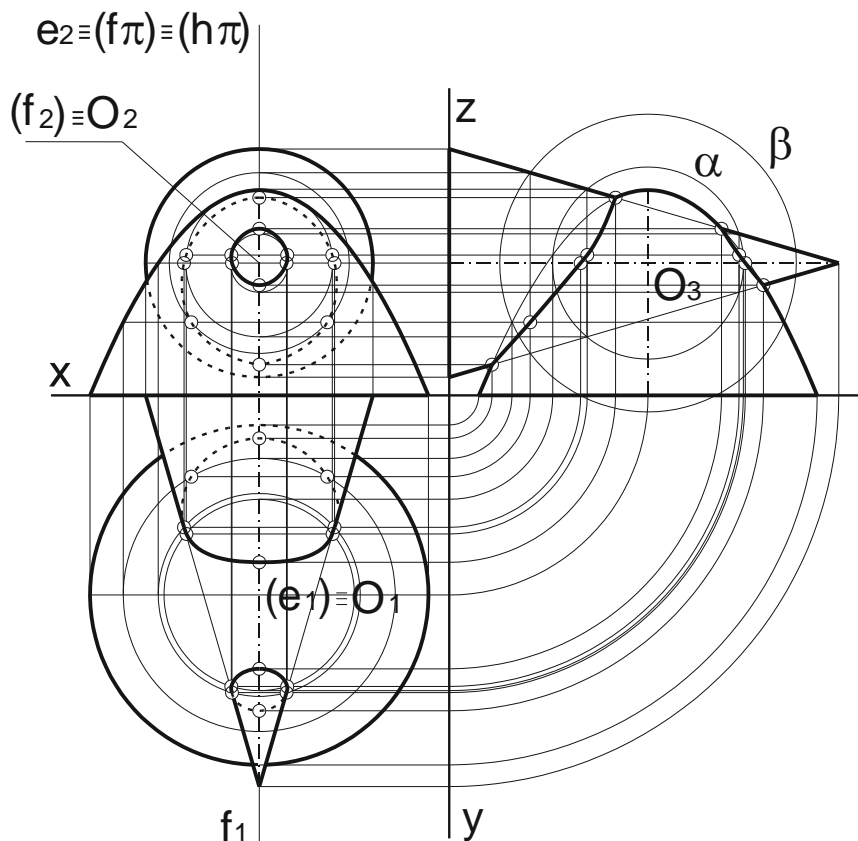


Fig. 4.59 – Intersecção de cone e paraboloide



Como exemplo de adaptação metodológica apresenta-se na Fig. 4.59 o caso particular de **duas superfícies de revolução com eixos perpendiculares e concorrentes**. Com a utilização do plano de perfil π como auxiliar foram determinados os quatro pontos correspondentes à intersecção dos contornos aparentes das duas superfícies na projeção lateral. Seguidamente utilizou-se como auxiliar a esfera α que produz secções circulares tanto no cone como no parabolóide as quais, ao intersetarem-se, dão origem a pontos da intersecção das superfícies. A esfera β auxiliar produz secções circulares tanto no cone como no parabolóide que dão origem a novos pontos. Por último foram determinados os pontos correspondentes à intersecção resultante de um plano horizontal que passa no eixo do cone, e, portanto, das geratrizes do contorno aparente horizontal com a circunferência produzida no parabolóide. Como é evidente, só é prático utilizar a esfera como superfície auxiliar, nesta circunstância de eixos perpendiculares e concorrentes.

Tal como se referiu anteriormente, na literatura científica encontram-se inúmeros exemplos de problemas envolvendo a intersecção de quádricas, com tratamento analítico e tendo em vista a utilização na computação gráfica, o que revela a relevância e atualidade do tema. Como exemplos citamos ainda DUPONT; LAZARD; PETITJEAN (2008) que descreve um algoritmo genérico para a determinação de intersecção de quádricas e WANG; JOE; GOLDMAN (2003) que analisa a intersecção de quádricas utilizando curvas cúbicas planas como auxiliares. Este é, portanto, um problema em aberto, e que não encontra resolução completa na computação gráfica atual, o que levanta a hipótese de os métodos gráficos poderem contribuir para o desenvolvimento de algoritmos mais expeditos e com mais potencialidades.

4.7. PLANIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES

A planificação de superfícies regradas, e até de algumas empenadas mas subdivididas em troços planificáveis por aproximação, é outra área em que se utilizam curvas derivadas das cónicas, as *splines* ou *NURBS*. Com forte desenvolvimento em áreas da metalo-mecânica ligadas à construção de máquinas, de tubagens condutas de fluídos, também são utilizadas planificações na construção naval, no projeto de aeronaves, construção automóvel e em muitas outras áreas. Para conhecer melhor o processo do design dos cascos de barcos, por exemplo, deve-se consultar FROMENT (2011).

No design, tal como em outras áreas, a utilização prática da planificação depende dos materiais e tecnologias envolvidos, designadamente a natureza plana dos materiais utilizados, como por exemplo, chapas metálicas, tecidos, peles e outros materiais planos,

mas em que se utilize processos construtivos dos objetos a produzir por dobragem ou enrolamento sequencial das diversas partes constituintes dos objetos a construir.

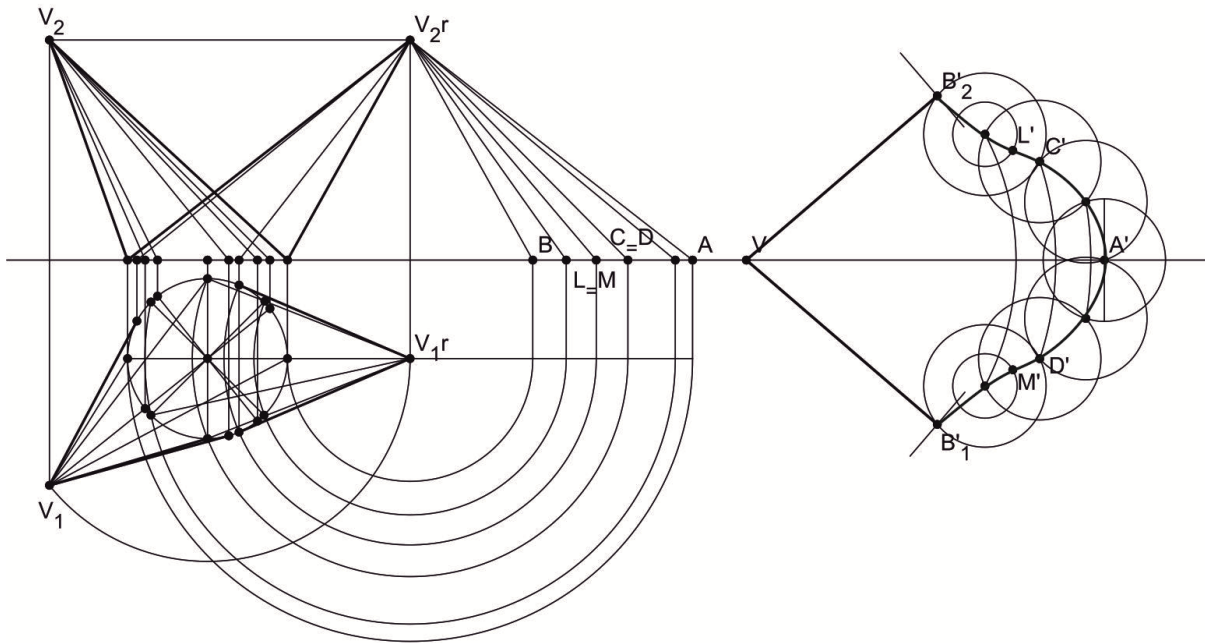


Fig. 4.60 – Planificação de um cone oblíquo

4.8. EXEMPLOS DE UTILIZAÇÃO DAS CURVAS CÓNICAS NO DESIGN DO PROJETO À REPRESENTAÇÃO TÉCNICA

4.8.1. DO DESENHO À GEOMETRIA E DESTA À GEOMETRIA PROJETIVA

Não existindo uma geometria aplicada ao design, antes se podendo considerar a existência de aplicações da geometria em áreas diversas, e igualmente aplicáveis no design, teremos, para além da citação de casos que temos vindo a fazer e que continuaremos a fazer, de introduzir problemas gerais de representação gráfica com intervenção no próprio projeto de design.

Por outro lado, a utilização de curvas cónicas é comum em todas as formas de representação gráfica desde o desenho com expressão não rigorosa às representações técnicas por vistas, axonometrias ou perspetiva. Por outro lado, a restituição perspética, normalmente como processo inverso da perspetiva cónica, é hoje uma das bases do



reconhecimento de imagem por meio digital. Aliás os processos utilizados em meio digital são adaptações dos analógicos. Tal, só por si, coloca as curvas cónicas no centro dos processos de representação, não só como formas geométricas intervenientes nas imagens resultantes do processo mas, igualmente, como formas geométricas mediadoras da produção de imagens digitais.

Utiliza-se como modelo exemplificativo das considerações precedentes um caso aparentemente simples mas que levanta problemas, sobretudo em meio digital. Como é sabido, a perspectiva cónica de uma circunferência pode originar qualquer das cónicas. Considerando-se o caso mais comum, em que uma circunferência e um seu quadrado envolvente dão origem a uma elipse e um quadrilátero envolvente, cujos lados inicialmente paralelos confluem para dois pontos de fuga.

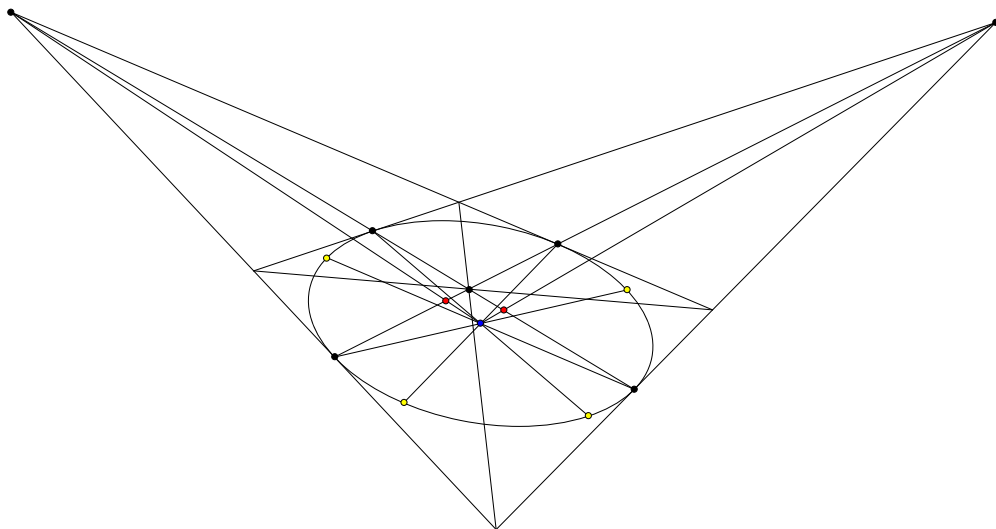


Fig. 4.61 – Centro da elipse como projeção cónica de uma circunferência

Traçando as diagonais do quadrilátero obtemos na intersecção a representação do centro da circunferência. Por outro lado, se traçarmos as retas que passam nos pontos de fuga e na representação do centro obtemos, na intersecção destas com o quadrilátero, os quatro pontos de tangência da elipse no quadrilátero. Como foi referido anteriormente é necessário pelo menos mais um ponto para definir a cónica. Opta-se por determinar primeiro o centro da elipse. Para tal, os pontos de tangência opostos definem uma corda da elipse, cujo ponto médio é assinalado a vermelho. As tangentes nos extremos são as retas que contêm os lados do quadrilátero. Utiliza-se seguidamente a propriedade descrita no ponto

2., e exemplificada graficamente na Fig. 2.63, que enuncia que a reta que passa na intersecção das tangentes, o ponto de fuga neste caso, e no ponto médio da corda é uma reta diametral, ou seja, uma reta que passa no centro da cónica. Assim, traçando as duas retas que unem os pontos de fuga com os respetivos pontos médios, a vermelho recorde-se, na sua intersecção temos o centro da elipse. Os pontos simétricos dos de tangência, relativamente ao centro da elipse, são igualmente pontos desta, ficando a elipse definida por oito pontos.

Por outro lado, e mais importante, utilizando o raciocínio inverso, ou seja, o da restituição perspética, podemos concluir que, se os pontos de tangência da elipse no quadrilátero forem outros, que não se situem na intersecção dos lados do quadrilátero com as retas que passam na projeção cónica do centro da circunferência e nos pontos de fuga, a elipse e o quadrilátero não podem ser uma representação cónica de uma circunferência e respetivo quadrado envolvente. Mas podem ser representações cónicas de uma elipse inscrita num retângulo. Utilizando uma propriedade que referimos mais à frente, relativa à inscrição de uma elipse num retângulo, e de acordo com método descrito no início do ponto 5. é possível obter um método para, a partir de quatro tangentes quaisquer de uma cónica e um dos pontos de tangência, obter de forma expedita os respetivos pontos de tangência.

Tal comprova igualmente que a expressão gráfica da geometria projetiva, a geometria descritiva, pode ter importância relevante nos avanços nesta área do conhecimento. Assim, a utilização do método perspético revelou-se, ao longo da investigação, muito útil na resolução de problemas de maior grau de complexidade, por exemplo alguns relativos à determinação das cónicas definidas por tangentes, questão que será aprofundada no ponto 5..

Na Fig. 4.62 apresenta-se um exemplo de utilização de cónicas na representação e aqui enuncia-se os problemas geométricos envolvidos na determinação do cilindro em perspetiva ou CAD 2D e 3D ou desenho vetorial: determinação dos centros M e N das elipses, determinação dos eixos das elipses, tangentes do contorno aparente, sendo que estes problemas são resolúveis com métodos anteriormente apresentados. Assim o centro M é o ponto médio do diâmetro da elipse que corresponde à projeção cónica da mediana da circunferência dirigida ao ponto de fuga. Os pontos de tangência dos contornos aparentes nas duas elipses podem ser obtidos traçando paralelas ao eixo do cilindro pelo método descrito em 3.3.2.2.. Considerando que cada elipse está definida por oito pontos é possível determinar os extremos do diâmetro a passar por M paralelo ao quadro pelo método descrito em 2.9. (Fig. 2.53) e, como este é o diâmetro conjugado do dirigido ao pontos de fuga, definimos a elipse por dois diâmetros conjugados. Depois por um dos métodos descritos em 3.4.2. é possível determinar os eixos da elipse, por exemplo para utilizar em CAD.

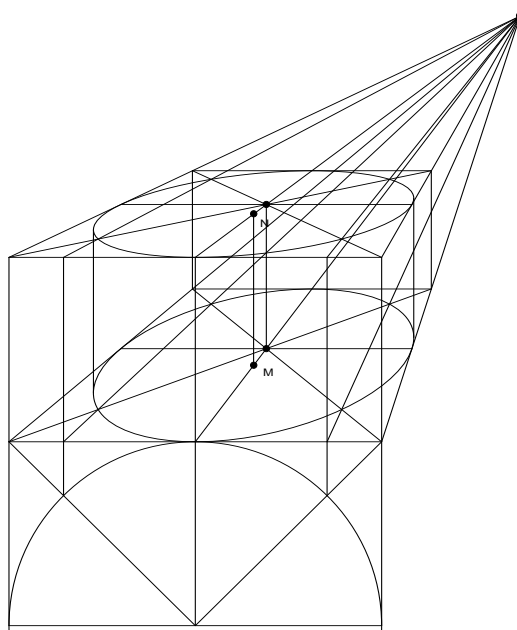


Fig. 4.62 – Perspetiva cónica de um cilindro

4.8.2. REPRESENTAÇÃO DE CURVAS CÓNICAS EM AXONOMETRIA E PERSPETIVA CÓNICA

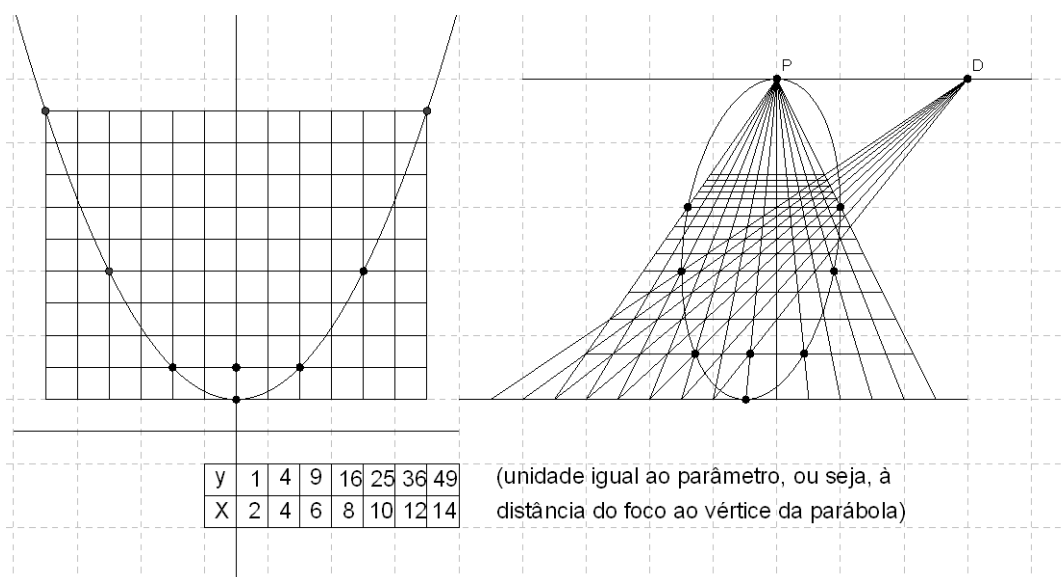


Fig. 4.63 – Perspetiva cónica de parábola resultando numa elipse

Para além da comprovação de que uma curva cônica em perspectiva cônica pode dar origem a qualquer das outras curvas a figura demonstra como uma parábola pode dar origem a uma elipse sendo que o outro extremo do eixo principal da elipse se situa no infinito. Assim, pode mostrar-se que a parábola tem um segundo vértice no infinito. Então, estamos igualmente a exemplificar como a dimensão gráfica pode contribuir para a divulgação científica, mesmo em geometria não euclidiana.

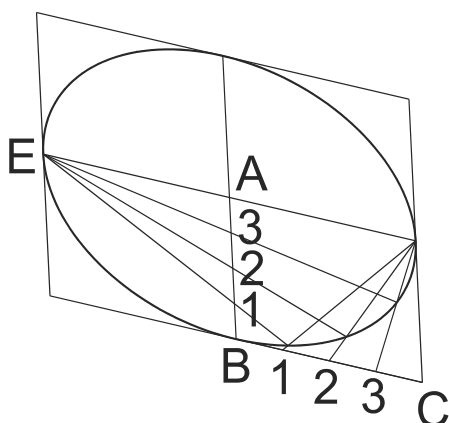


Fig. 4.64 – Axonometria de uma elipse

A confirmação da manutenção da validade de processos construtivos, desde que com manutenção do paralelismo na transformação geométrica, confirmando a teoria constante da consulta bibliográfica realizada, e apesar deste aspeto da questão não se encontrar descrito, permite concluir que, se a representação em perspectiva cônica de qualquer tipo de curva cônica, seja elipse, parábola ou hipérbole, pode originar uma curva cônica de outro tipo qualquer ou degenerar, já **nas representações axonométricas o tipo da cônica inicial e da cônica em axonometria mantem-se ou esta degenera**. Ou seja, por exemplo, a axonometria de uma elipse é outra elipse ou um segmento de reta, ou, por redução de escala, um ponto.

Tal pode concluir-se pelo processo construtivo da elipse desenvolvido na figura, e que apenas depende das relações dimensionais dos lados do quadrilátero envolvente e dos ângulos entre estes lados. Mantendo o paralelismo entre os lados opostos do quadrilátero, podemos modificar os ângulos entre cada par de lados e a relação dimensional entre estes, obtendo sempre como representação da curva uma elipse ou uma degenerada. O mesmo verifica-se na parábola e na hipérbole. Como o quadrilátero envolvente pode ser a representação axonométrica de um quadrado, retângulo ou até de um paralelogramo comprova-se a regra descrita relativa à axonometria de cónicas. Ou seja, um tipo concreto de cônica, submetido a uma transformação geométrica por afinidade, resulta numa curva do mesmo tipo ou degenera. Tal também é comprovável por modelo de geometria dinâmica.



4.9. OUTRAS APLICAÇÕES DAS CURVAS CÔNICAS E SUPERFÍCIES QUÁDRICAS NO DESIGN

Um exemplo de aplicação das curvas cónicas no design gráfico, designadamente no design tipográfico, é o que apresentámos em SILVA; MURTINHO; COSTA (2013) e que aqui descrevemos sinteticamente.

Trata-se da criação de uma fonte de letras com referência à forma elíptica da letra “o” inscrita num retângulo com a particularidade da elipse ser definida por um ponto de tangência que não se situa a meio do lado do retângulo. Depois da determinação geométrica da elipse é possível, num editor de fontes tipográficas, como o utilizado na figura seguinte, o FontLab Studio da FontLab, Lda, criar os diversos tipos da tipografia, por adaptação gráfica.

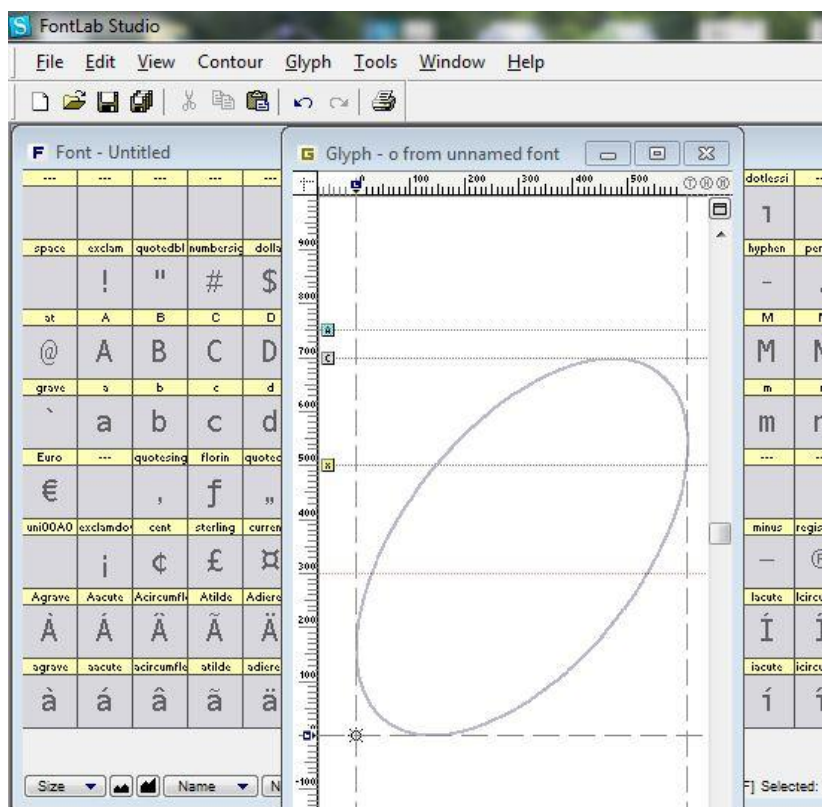


Fig. 4.65 – Exemplo de criação de tipografia

Resumindo o processo descrito no artigo referido, começa-se pela definição do ponto E de tangência e o seu simétrico relativamente ao centro E' . Obviamente apesar de os postos definirem um diâmetro este não é eixo da elipse.

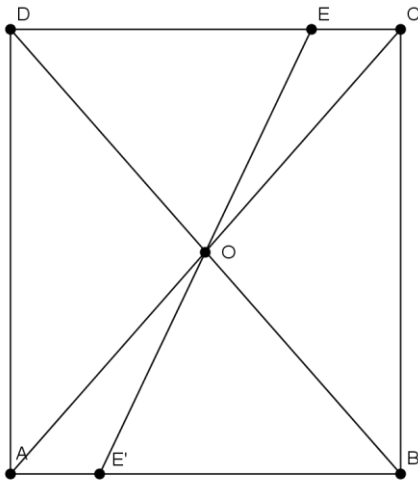


Fig. 4.66 a) – Definição do diâmetro

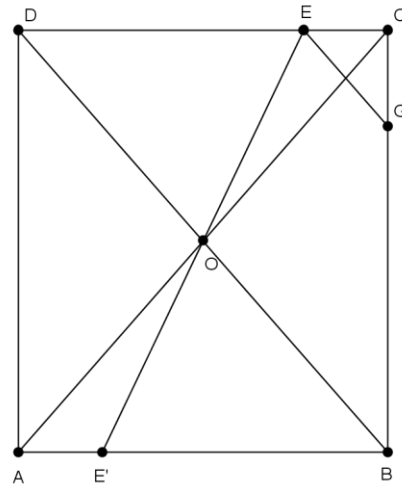


Fig. 4.66 b) – Definição de outra tangência

Seguidamente, pode-se determinar cada um dos restantes pontos de tangência através do método geral, sendo dadas quatro tangentes e um ponto de tangência, mas revela-se mais simples, como se exemplifica na Fig. 4.66 b), utilizar a propriedade descrita em (NAGORE, 1988, T. III, 154) relativa à elipse inscrita num quadrado e que comprovámos ser extensível ao retângulo, traçando pelo ponto de tangência E uma paralela à diagonal até intersectar o lado contíguo do retângulo no ponto de tangência G .

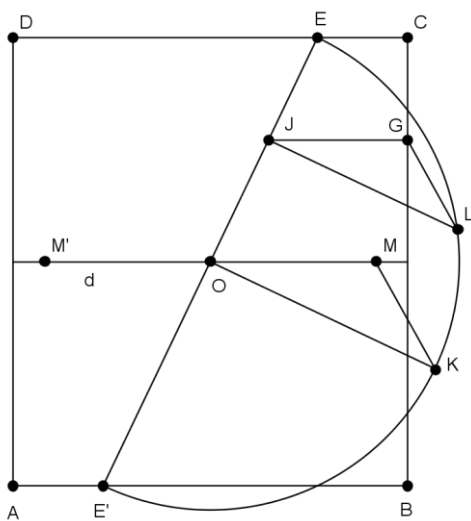


Fig. 4.66 c) – Diâmetros conjugados

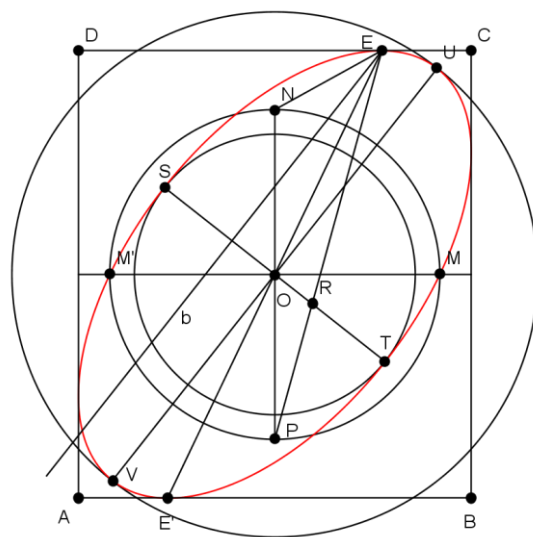


Fig. 4.66 d) – Eixos da elipse



O diâmetro EE' tem como diâmetro conjugado o situado na mediana do retângulo que é paralela a AB e CD por serem tangentes à elipse em E e E' . Como terceiro passo, e adotando o método descrito no ponto 3.5.1.4., na Fig. 4.66 c) exemplifica-se a determinação do ponto M e do seu simétrico, relativamente ao centro, M' . Por fim, a partir dos diâmetros conjugados é possível determinar os eixos da elipse e desenhá-la. Para isso foi utilizado o método descrito em (CUNHA, 1982, 158) e que citámos em 3.4.2.4.. Se o processo tiver sido desenvolvido em CAD, ou em programa de geometria dinâmica, obtida a elipse, copia-se e cola-se no programa de edição de fontes.



Fig. 4.67 – Caixas de plástico em elipse abatida

O conjunto de caixas de plástico em elipse abatida é um outro exemplo de utilização das cónicas no design. Utilizando a sua formação em engenharia aeroespacial Isao Hosoe transformou um objeto corrente num produto de alta tecnologia aumentando a resistência e, de forma aparentemente contraditória, diminuindo significativamente a espessura e, logo, a quantidade de material envolvido. A forma em elipse abatida no sentido do eixo maior contribuiu para isso, ao mesmo tempo que permitiu a criação de tampas com maior facilidade de encaixe e capacidade vedante.

Um outro exemplo de utilização das cónicas são os bancos de assentos e encostos com secção elíptica, no Metropolitano de Lisboa, com um grande intervalo entre as superfícies cilíndricas, assim desenhados para diminuir a possibilidade de utilização como cama.



Fig. 4.68 – Assentos e encostos de secção elíptica

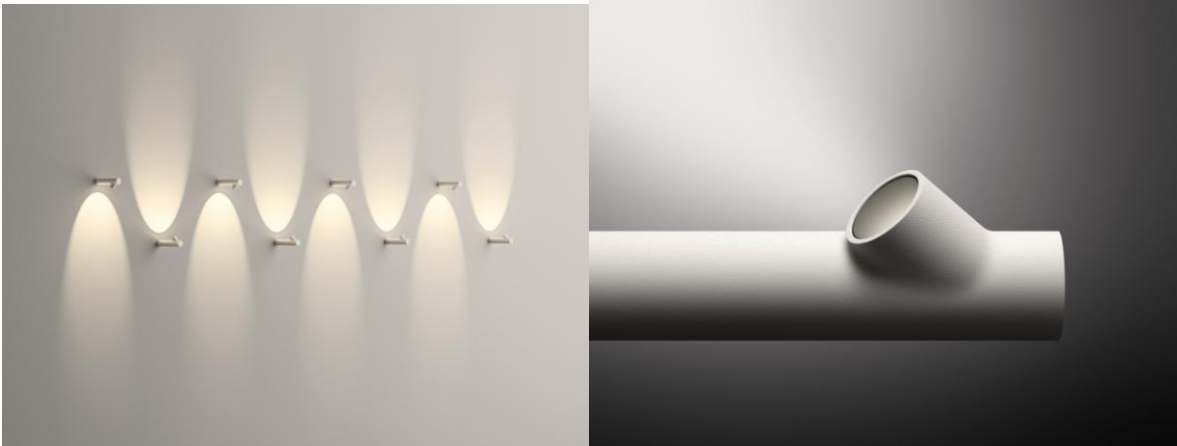


Fig. 4. 69 – Luminária de parede de metacrilato com luz direta e indireta
BAMBOO 4820 – Vibia



Fig. 4.70 – Candeeiro de chão LED
BAMBOO - Vibia

A utilização das curvas cónicas, se pode estar envolvida nas formas e no processo projetual do design de objetos pode contribuir igualmente para o design com luz. Utilizando as propriedades das superfícies podemos desenhar com luz elipses, como nos casos das Fig. 4.69 e Fig.4.70, parábolas, ou hipérbolas como no candeeiro de alumínio ONO da MACOVEX, que produz luz direta e indireta com reflexão na parede em ramo de hipérbole. Estas aplicações potenciam o efeito estético nas superfícies incidentes, paralelamente à sua função na iluminação.



Fig. 4.71 – Candeeiro applique de alumínio ONO

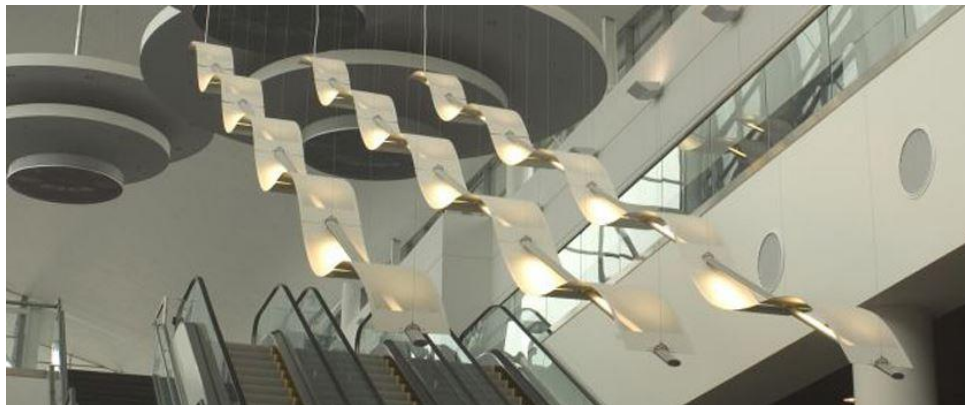


Fig. 4.72 – Luminária “Onda” de Isao Hosoe (LUXIT S.p.A.), no Colorado Convention Center

Esta luminária de Isao Hosoe está instalada no Colorado Convention Center. Tem uma estrutura de iluminação indireta difusa emitida por uma calha tubular que atravessa uma superfície difusora ondulada com forma estudada para permitir a distribuição equilibrada da luz. Ou seja, no design de iluminação, a geometria está envolvida no projeto, na configuração dos objetos mas também na obtenção de efeitos estéticos.

A geometria das cónicas está igualmente envolvida na modelagem de vestuário através da utilização de splines e de técnicas derivadas da planificação de superfícies. Outra área de aplicação similar é a área do design de calçado.

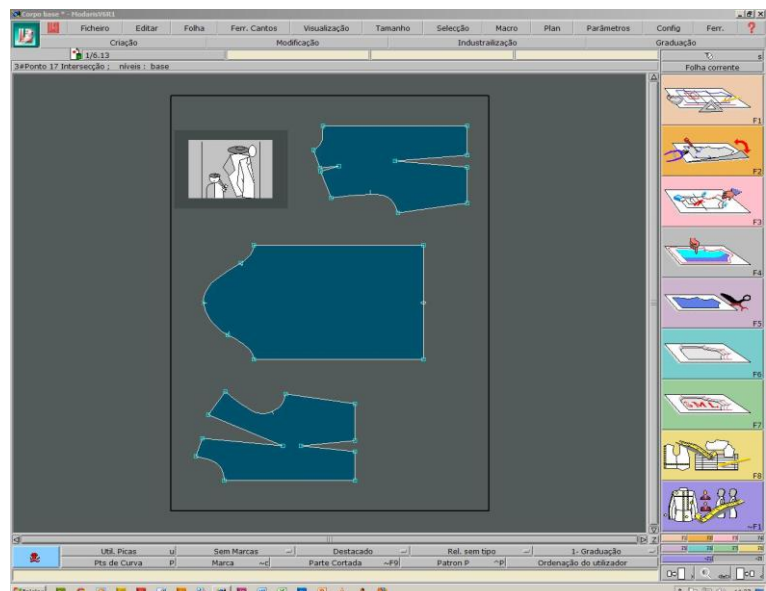


Fig. 4.73 – Modelagem de vestuário em software Modaris

Outro exemplo de utilização das curvas cónicas é a criação de imagens sintéticas, por exemplo em infografia científica. Esta imagem, tratada para informação, apresenta resultados da radiação cósmica de fundo pelo telescópio Planck, denotando-se campos de

forças e linhas de interação em feixes de *splines*. Ao ter divulgação por Teresa Firmino no jornal PÚBLICO de 6/2/2015, com título “As primeiras estrelas do Universo são mais novas do que se pensava”, destacou-se informação relevante.

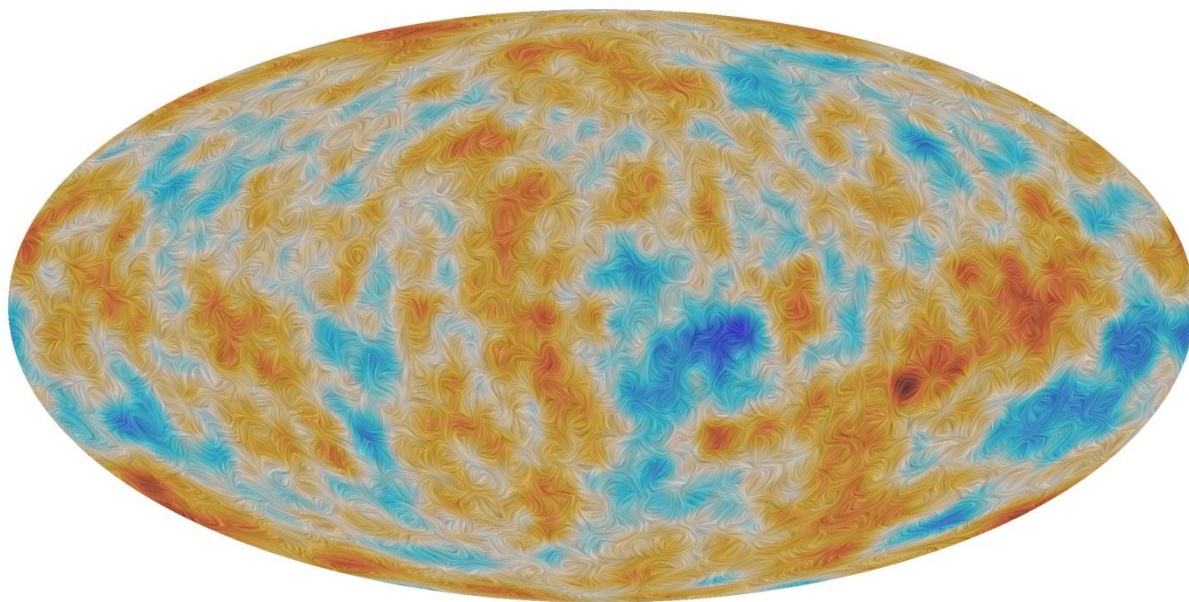


Fig. 4.74 – Polarização das microondas da radiação cósmica de fundo

A utilização das cónicas, de outras com elas relacionadas e das superfícies curvas resultantes destas, na criação de imagens é portanto extensa e diversificada. Por exemplo TENG; CHENG; HSU (2007, 515-530) faz uma descrição de um procedimento possível para, a partir de duas imagens fotográficas, construir um modelo 3D sendo o exemplo apresentado uma árvore. Estes procedimentos de criação de imagens digitais são utilizados por exemplo no cinema de animação digital. Foi igualmente identificada a existência de problemas de reconhecimento de imagens em inúmeras áreas sendo correntes as referências às curvas cónicas e às superfícies quádricas. Refira-se a propósito que um dos aspetos relevantes antecedentes mas complementares ao reconhecimento informático de imagem é a calibração de máquinas cujos procedimentos dependem em grande medida do estudo das curvas cónicas como se pode comprovar por exemplo em KIM; GORDJUS; KWEON (2010, 803-812).

Tendo em conta o conjunto de exemplos antecedentes, que fomos citando ao longo do capítulo, e o que fomos concluindo da pesquisa efetuada, expressas no capítulo introdutório, conduzem à conclusão de que, existindo a geometria aplicada,

designadamente, no contexto da formação de geometria em cursos de matemática, apesar de inexistente em Portugal atualmente, não existem aplicações de geometria ou metodologias de abordagem específicas de cada área profissional. A mesma conclusão é válida relativamente às cónicas e às superfícies quádricas. Assim, se diversos autores têm dedicado obras de referência, com empenho, rigor e qualidade formal, à divulgação e aprofundamento do estudo das relações da geometria com as artes visuais e a arquitetura, sendo diminutas as referências ao design, quase nunca coincidem nos conteúdos abordados. Tal influenciou o desenvolvimento deste capítulo que pode ser lido como uma aparentemente desconexa coleção de exemplos. Contrariamente foi objetivo demonstrar que a geometria, e a geometria das cónicas e superfícies quádricas tem aplicação no design e para além dos exemplos enunciados, numa diversidade de casos diferentes e a diferentes níveis.

CÓNICAS ENQUANTO FORMAS GRÁFICAS

No plano - 2D

Contributo teórico dos traçados gráficos.
Cónicas propriamente ditas.
Curvas graficamente similares
- catenária e ovais, curvas paralelas às cónicas.
Curvas obtidas a partir das cónicas e/ou através de procedimentos geométricos semelhantes - splines, Bézier, cúbicas, quárticas, paramétricas e outras.
Famílias de cónicas - confocais, coaxiais, de curvatura definida.
Feixes de cónicas - a passar por 4, 3 e 2 pontos.

No espaço - 3D

Superfícies geradas por curvas cónicas - quádricas e outras.
Intersecção de superfícies
- determinação de secções;
- como traçados auxiliares.
Planificação de superfícies
- como traçados auxiliares
- utilização de splines, Bézier, paramétricas e outras.



outros contributos possíveis:
- identificar correlação entre o nível de interação com tecnologia industrial e a utilização das curvas cónicas;
- diminuir custos de software e hardware;
- sensibilizar matemáticos e programadores informáticos para as potencialidades de aproximação a diferentes utilizadores pelo recurso à geometria do ponto de vista gráfico.

NÍVEL DE INTERAÇÃO COM TECNOLOGIA INDUSTRIAL

Desenvolvimento de software.

Computação gráfica.

Aplicação dos conhecimentos teóricos na criação de patches para software vetorial.

Aplicação dos conhecimentos teóricos na utilização de forma inovadora de software vetorial.

Desenho técnico vetorial.
Desenho técnico analógico.

Esboços e representação não técnica.

Fig. 4.75 – Quadro Resumo

Por outro lado, e decorrente da pesquisa efetuada, de que se recolheu referências e aplicações das cónicas e superfícies quádricas nas mais diversas áreas, tendo em conta as palavras-chave envolvidas, foi possível construir este quadro resumo. Neste procurou-se

resumir numa leitura possível os contextos das referências às cónicas na literatura científica e nas divulgações quotidianas. No triângulo central listámos o conjunto de áreas com referências diretas ou indiretas à utilização das cónicas, sendo que da base para o topo procurámos representar o número e complexidade destas, ou seja uma apreciação simultaneamente quantitativa como qualitativa, designando na base a inexistência de referências ou o seu nível de referência ser o do conhecimento básico e no topo a utilização de conhecimento de elevada complexidade. No lado esquerdo, foram listados os contextos das referências às cónicas do ponto de vista gráfico mais usuais apenas subdivididos pela sua expressão em duas dimensões ou em três dimensões. Do lado direito lista-se, da base para o topo, um conjunto de contextos enquadradores de acordo com o nível de complexidade da interação com tecnologia industrial. Procurou-se representar a tendência para a utilização das cónicas, e o seu nível de complexidade, com aumento das exigências da tecnologia industrial de cada área. Nos maiores níveis de complexidade essa correlação tende a voltar a diminuir, o que é lógico pois corresponde à investigação fundamental.

Resta salientar a convicção de que a elevação do nível qualitativo de cada contexto social implica a elevação do nível dos conhecimentos e, assim sendo, tornam-se particularmente relevantes os conhecimentos sobre as cónicas. Por último, faz-se referência no topo direito do quadro a que, para além dos resultados que estudos da natureza deste, no âmbito das relações entre a geometria das cónicas e o design, podem ter para o esclarecimento das relações entre ciência e tecnologia, também podem ter impacto no aperfeiçoamento tecnológico, designadamente alterando qualitativamente os meios digitais pela integração de conhecimentos de geometria gráfica e assim, facilitando a integração com o design e as outras áreas profissionais que se expressam por imagens, e contribuindo para uma mudança de uma atitude dos matemáticos e dos informáticos, com valorização da imagem não só como forma de expressão mas, igualmente como fonte de conhecimento.

4.10. CONCLUSÕES DO CAPÍTULO

Neste capítulo procede-se à descrição das superfícies quádricas e de algumas das suas propriedades apresentando exemplos da sua utilização. Em seguida descrevem-se outras superfícies construíveis a partir de curvas cónicas e outras curvas resultantes destas ou em que, na sua definição existam processos que as incluam, incluindo igualmente alguns exemplos. Comprovou-se a reduzida existência de referências ao tema no design, tanto ao nível conceptual como no desenvolvimento de projetos. Faz-se assim referência a algumas aplicações no design mas, igualmente, a diversos exemplos na arquitetura, uma das áreas mais próximas do design e onde já existe um conjunto de conhecimentos e experiências na área das cónicas e quádricas. Neste contexto, realçou-se a ligação entre a hipérbole e o



hiperboloide de revolução, cujas propriedades influenciaram a definição de métodos construtivos gráficos da hipérbole, descritos no capítulo terceiro, e não constantes da bibliografia consultada.

Abordou-se seguidamente o tema das intersecções das superfícies abordando alguns aspetos do tema, tanto do ponto de vista da geometria descritiva, como na geometria analítica, estes com implicação na computação gráfica, do que resulta a conclusão de que não é um tema fechado, e em que a geometria descritiva poder gerar contributos. Nesse sentido, e apesar de se poder concluir da teoria conhecida, mas não constar da literatura consultada, salienta-se que as secções planas paralelas em superfícies quádricas dão origem a cónicas do mesmo tipo. Ainda relativamente ao tema da intersecção de superfícies apresentaram-se casos práticos de exemplificação da análise à utilização de secções auxiliares em curva cónica para a determinação de intersecções de superfícies em dupla projeção ortogonal, metodologia que abordámos em COSTA (2005, 46-49) com viabilidade, estando garantida a exatidão nos traçados em programas informáticos que permitam o traçado das curvas, mas sem prejuízo desta abordagem nos traçados pelos meios convencionais, ou seja a reta e compasso. Neste contexto aborda-se, ainda de forma sucinta, a planificação de superfícies enunciando intervenções das curvas cónicas ou outras relacionadas com estas, no processo de planificação de superfícies, para além de se referirem ao longo do capítulo diversas aplicações da planificação de superfícies. Depois de, no ponto 2., termos desenvolvido o tema das propriedades das cónicas e, no ponto 3., os seus traçados gráficos, neste capítulo aborda-se alguns exemplos de aplicações das cónicas no design, iniciando a exemplificação com consequências da teoria no desenvolvimento do projeto, no desenho e na representação técnica.

Por último, e como resultado da pesquisa realizada na literatura científica dirigida ao tema das cónicas e superfícies quádricas construiu-se um quadro de resumo que reflete que são inúmeras as áreas do conhecimento que utilizam as curvas cónicas e que a interação entre essas áreas e o tema das curvas cónicas aumenta com o aumento da exigência tecnológica. Tal conclusão possibilita ainda, conjuntamente com as potencialidades anteriormente enunciadas, enunciar que a geometria das cónicas e das superfícies quádricas, tratada graficamente, pode ser útil em inúmeras áreas.

4.11. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DO CAPÍTULO

AGNEW et al – Tzitzeica curves and surfaces. The Mathematica Journal 12. WolframMedia, Inc, 2010. [<http://www.wolfram-media.com/>].



ARNHEIM, Rudolf – **Arte & percepção visual: Uma psicologia da visão criadora**. São Paulo: Livraria Pioneira Editora, 1986.

COSTA, Joaquim M. C. Bonifácio – Intersecção de superfícies não planas em dupla projecção ortogonal. Castelo Branco: Instituto Politécnico de Castelo Branco, Escola Superior de Artes Aplicadas, 2005. [Estudo para Concurso de Provas Públicas para Professor-Adjunto].

CUNHA, Luís Veiga da – **Desenho técnico**. 5ª ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1982.

DUPONT, L.; LAZARD, D.; PETITJEAN, S. - Near-optimal parameterization of the intersection of quadrics: I. The generic algorithm. Journal of Symbolic Computation 43 (2008) 168–191. www.elsevier.com/locate/jsc. [www.sciencedirect.com].

ENGEL, Heino – **Sistemas de estruturas**. Barcelona: Editorial Gustavo Gili SA, 1967.

FIORAVANTI, M; GONZALEZ-VEJA, L.; NECULA, I. – Computing the intersection of two ruled surfaces by using a new algebraic approach. Journal of Symbolic Computation 41 (2006) 1187-1205. [Elsevier, www.sciencedirect.com].

FROMENT, Michel – **Cascos de aço & de alumínio**. Lisboa: Dinalivro, 2011.

HILBERT, David; COHN-VOSSEN, S. – **Geometry and the imagination**. U.S.A.: American Mathematical Society, 1999. [Reedição da tradução para inglês do alemão Anschauliche Geometrie, 1932 ?]. ISBN 0-8218-1998-4.

IZQUIERDO ASENSI, Fernando – **Geometría descriptiva superior y aplicada**. 3d ed. Madrid: Ed. Dossat, 1985. ISBN 84-237-0441-6.

IZQUIERDO ASENSI, Fernando – **Geometría descriptiva**. 18d ed. Madrid: Ed. Dossat, 1988. ISBN 84-237-0151-4.

KIM, J.; GORDJUS, P.; KWEON, S. – Euclidian structure from confocal conics: Theory and applications to camera calibration. Computer vision and image understanding Vol 114, Issue 7, July 2010, 803-812. Consultado em www.elsevier.com/.

MILLER, J.; GOLDMAN, R. – Geometric algorithms for detecting and calculating all conic sections in the intersection of any two natural quadric surfaces. Graphical models and image processing. Vol. 57 No. 1, January, 55-66, 1995.

MORRIS, R. – **The fundamentals of Product Design**. Lausanne and London: AVA Publishing SA, 2009.

NAGORE, Fernando – **Geometría Métrica y Descriptiva para Arquitectos**. Tomos I, II y III. Pamplona: EUNSA, Ediciones Universidad de Navarra, S.A., 1986, 1987 e 1988. ISBN 84-313-0961-X (obra completa).



RICCA, Guilherme – **Geometria Descritiva: método de Monge**. 2d ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2000.

ROUBAUDI, C. – **Traité de géometrie descriptive**. 10d ed. Paris: Masson et C.^a, Éditeurs, 1961.

SILVA, F. Moreira da; MURTINHO, V.; [COSTA], J. BONIFÁCIO – Uma tipografia de base elíptica e outros cruzamentos do design com a geometria das curvas cónicas. Convergências. Castelo Branco: ESART – IPCB, nº12, (2013) art. 148. [<http://convergencias.esart.ipcb.pt/artigo/148>]. ISSN 1646-9054.

TENG, C. CHENG, Y.; HSU, W - Constructing a 3D trunk model from two images. Graphical Models 69 (2007) 33–56. www.elsevier.com/locate/gmod [www.sciencedirect.com].

TU, C.; WANG, W.; MOURRAIN, B.; WANG, J. – Using signature sequences to classify intersection curves of two quadrics. Computer Aided Geometric Design 26 (2009) 317-335. [Elsevier, www.sciencedirect.com].

VARELA, Pedro de A. – Informar a curvatura de Gauss. Encontro Internacional Geometrias 13. Boletim da APROGED nº 30, 51-58. Portugal: APROGED, 2013.

WANG, W.; JOE, B.; GOLDMAN, R. - Computing quadric surface intersections based on an analysis of plane cubic curves. Graphical Models 64 (2003) 335–367. www.elsevier.com/locate/gmod [www.sciencedirect.com].

XU, Z. et al - A robust algorithm for finding the real intersections of three quadric surfaces. Computer Aided Geometric Design 22 (2005) 515–530. www.elsevier.com/locate/cagd [www.sciencedirect.com].

ZU, Z.; WANG, X.; CHEN, X.; SUN, J. – A robust algorithm for finding the real intersections of three quadric surfaces. Computer Aided Geometric Design 22 (2005) 515-530. [Elsevier, www.sciencedirect.com].

4.7. FONTE DAS IMAGENS

Fig. 4.10 – http://www.architonic.com/pmsht/nido-thony-collection_promnv/1050196

Fig. 4.16 – Folheto de divulgação da CEPT University, Ahmedabad, Gujarat, Índia, Set 2014

Fig. 4.18 – <http://www.fosterandpartners.com/> consultado em 13/2/2011

Fig. 4.23 – <http://omniflow.pt/pt/>

Fig. 4.24 – <http://scienceblogs.com.br/100nexus/2008/09/estruturas-hiperbolides/> consultado em 23/4/2015

Fig. 4.48 – <http://www.arccan.com/>

Fig. 4.49 – http://www.auramotorsports.com/index.php?cPath=3_22



Fig. 4.50 – AGNEW et al – Tzitzeica curves and surfaces. The Mathematica Journal 12. WolframMedia, Inc, 2010. [<http://www.wolfram-media.com/>].

Fig. 4.51 – <http://www.e-architect.co.uk/moscow/crystal-island-tower> consultado em 13/7/2008

Fig. 4.53 – MORRIS (2009, 126)

Fig. 4.54 – FRAME, May/June 2012 Nº 122, p. 038

Fig. 4.55 – FRAME, May/June 2012 Nº 122, p. 079

Fig. 4.67 – <http://www.ihd.it/isao/welcome.html> [acedida em 25/5/2013]

Fig. 4.69 – <http://www.archiproducts.com>

Fig. 4.70 – <http://www.archiproducts.com>

Fig. 4.71 – <http://www.macovex.pt>

Fig. 4.72 – http://www.fdvgroup.com/LUXIT/COLORADO_CONVENTION_CENTER_%28USA%29
[acedida em 20/5/2013]

Fig. 4.74 – ESA – European Space Agency

http://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Planck/Planck_reveals_first_stars_were_born_late
acedido em 06/02/2015



5. DA TEORIA ÀS APLICAÇÕES PRÁTICAS, DA PRÁTICA À TEORIA DAS CÔNICAS

5.1. PROBLEMAS E TEMAS DE ESTUDO COMPLEMENTAR

Tendo-se constatado ao longo deste trabalho a impossibilidade do tratamento exaustivo de todo o tema, dada a diversidade da informação recolhida, decidiu-se antes abordar, de forma sintética, os aspetos mais relevantes relativos às cónicas e os de mais evidente interesse prático na resolução de problemas concretos do design. No decurso da investigação, foi surgindo um conjunto de problemas concretos, normalmente com resolução não imediata, e que foram sendo analisados. Destes, escolhemos alguns que referimos seguidamente, que são aqueles em que foi possível um avanço mais significativo.

5.1.1. DEFINIR AS CÔNICAS DADAS QUATRO TANGENTES E UM PONTO QUE NÃO PERTENCE ÀS TANGENTES

Vamos iniciar este tema com a consideração de que o ponto dado pertence a uma das tangentes, tendo em conta o caso descrito em NAGORE (1988, T. III, 154) ou seja, a determinação dos pontos de tangência de uma **elipse inscrita num quadrado** dado um dos pontos de tangência, tendo Nagore concluído que **cada par de pontos de tangência define uma paralela às diagonais do quadrado**. Depois de uma análise para o caso de termos uma **elipse inscrita num retângulo**, que abordámos num exemplo prático de utilização no desenho de uma fonte tipográfica em SILVA; MURTINHO; COSTA (2013, Fig. 3), concluímos que o mesmo se verifica, ou seja, **cada par de pontos de tangência define uma paralela a uma das diagonais do retângulo**. Os resultados foram testados em geometria dinâmica.

Definimos portanto um quadrado e um retângulo e num dos seus lados definimos o ponto de tangência *A* da elipse. Traçando as diagonais e, a partir de *A*, retas paralelas às diagonais, obtêm-se na intersecção com os lados dos quadriláteros os restantes pontos de

tangência B , C e D . Conclui-se ainda que **os pontos de tangência em lados opostos do quadrilátero definem um diâmetro**.

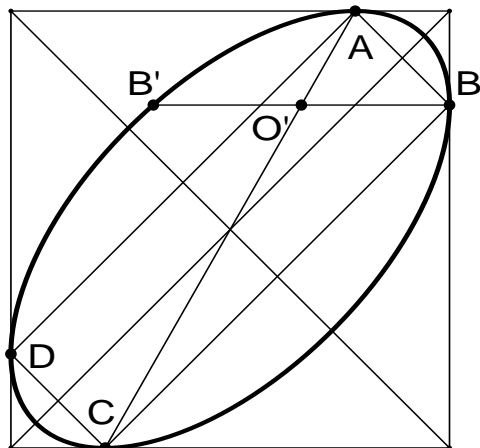


Fig. 5.1 – Propriedade de Nagore

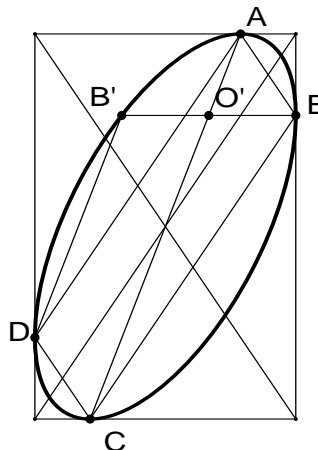


Fig. 5.2 – Generalização ao retângulo

Como para definir a cônica são necessários pelo menos cinco pontos vamos determinar um quinto ponto. AC é um diâmetro sendo tangentes em A e C dois lados do quadrilátero. Então se fizermos passar por B uma paralela às tangentes esta tem a direção do diâmetro conjugado, pelo que a corda respetiva é bisetada pelo diâmetro AC . Então determinando O' , intersecção da paralela às tangentes com o diâmetro AC , é possível determinar B' , simétrico de B relativamente a O' . Por outro lado, traçando DB' conclui-se que é paralelo ao diâmetro AC . Dito de outra forma, **se por um extremo, B' , de uma corda, $B'B$, fizermos passar uma corda DB' paralela ao seu diâmetro conjugado, AC , os outros extremos das duas cordas definem um diâmetro, ou seja, são simétricos relativamente ao centro da cônica**.

Passemos agora à consideração dos mesmos dados em projeção cónica, ou seja, em perspetiva. A perspetiva do quadrilátero é definida pelos pontos de fuga E e F de cada par de lados paralelos, que definem a reta de fuga do plano dos quadriláteros em causa, sejam quadrados ou retângulos. A reta de fuga é em projeção cónica uma paralela no infinito à reta de intersecção do plano das figuras geométricas planas em causa com o plano de representação. Assim, se por exemplo o plano das figuras fosse horizontal a reta de fuga seria a própria linha do horizonte. Como pretendemos tirar conclusões a partir de um caso geral, EF é uma reta qualquer.

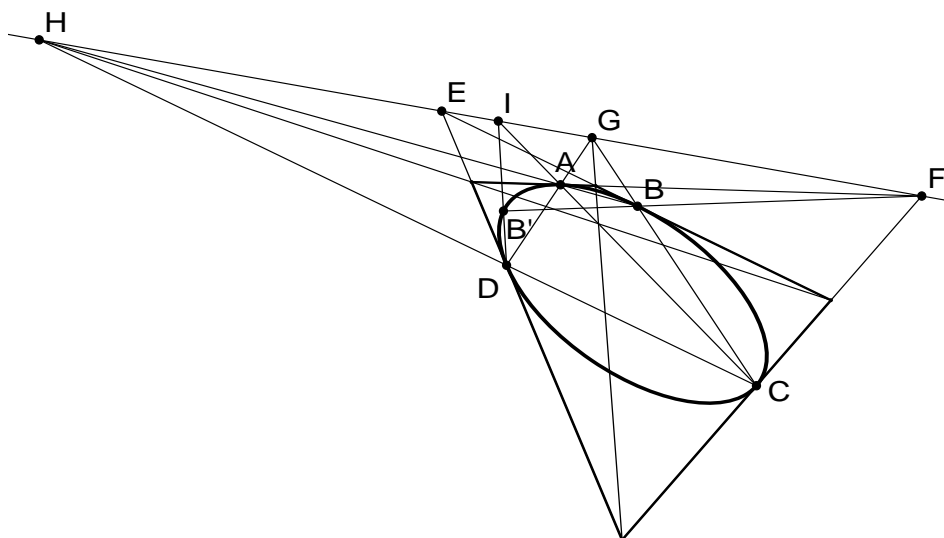


Fig. 5.3 – Perspetiva dos quadriláteros

Neste contexto, BC e AD , por serem paralelos à diagonal do quadrilátero, têm fuga em G intersecção desta diagonal com a reta de fuga EF . O mesmo se passa com CD e AB , que, por serem paralelos à diagonal do quadrilátero que intersesta a reta de fuga EF em H , têm o mesmo ponto de fuga. Por outro lado, BB' por ser paralelo aos lados do quadrilátero tem como ponto de fuga F e, sendo DB' paralelo a AC , tem o mesmo ponto de fuga I que AC , sendo I a intersecção de AC com a reta de fuga EF . Novamente os resultados foram testados em geometria dinâmica.

Tal método corresponde a lembrar as origens da geometria projetiva de Poncelet, como definição de princípios gerais de projeção em geometria euclidiana, e permite a ligação da geometria projetiva com as suas origens na perspetiva e, principalmente, nos teoremas de Pascal e Brianchon, e de Desargues.

Então pode concluir-se que, com o surgimento da perspetiva, estavam lançadas as bases para ser posta em causa a própria geometria euclidiana, pois as paralelas deixam de ser retas paralelas para passarem a ser retas concorrentes num ponto de fuga. Por outro lado, a análise realizada permite concluir processos práticos para a abordagem de problemas concretos.



O quadrilátero considerado e os seus pontos de fuga definem um quadrilátero completo. Tal, permite, só por si, as demonstrações dos teoremas de Pascal e de Brianchon, se tivermos em conta o quadrilátero completo e respetivas diagonais.

Então, podemos concluir que, sendo o quadrilátero em perspetiva um quadrilátero qualquer em geometria plana, estão lançadas bases de procedimentos práticos para trabalhar com as cónicas, e para o estabelecimento de métodos gerais para o trabalho com as cónicas.

5.1.1.1. O PONTO DADO PERTENCE A UMA DAS TANGENTES

Vamos começar esta fase de estudo analisando o caso de o ponto dado pertencer a uma das tangentes. Os dados são as tangentes t_1 , t_2 , t_3 e t_4 , respetivas intersecções em quadrilátero completo $ABCD$, e o ponto E em t_4 .

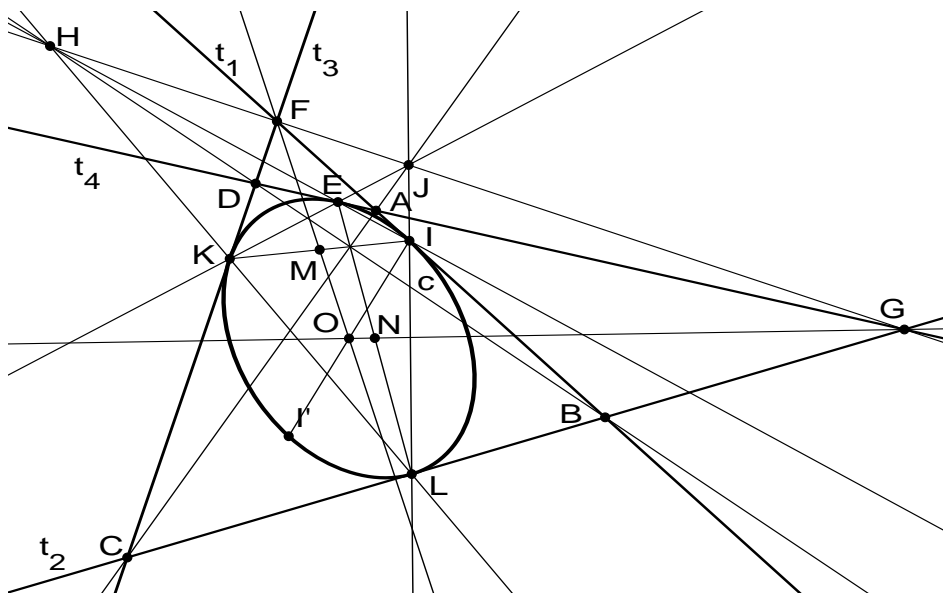


Fig. 5.4 – Cónica por quatro tangentes e ponto incidente

Decidimos não utilizar o procedimento desenvolvido por NAGORE (1988, T. III, 145) e já citado anteriormente em 3.6.3.1.. Vamos utilizar o procedimento auxiliar derivado da perspetiva, que desenvolveremos mais adiante nas aplicações práticas, e que permite determinar pontos de tangência através de paralelas às diagonais de um quadrilátero. Assim F , intersecção de dois lados opostos do quadrilátero é um ponto de fuga, e G , intersecção





dos outros dois lados, é o outro ponto de fuga, sendo FG a reta de fuga. Então J é a fuga da diagonal AC e H é da diagonal DB . Sabendo que os pontos de tangência de uma cónica num quadrilátero, quadrado, retângulo ou paralelogramo, definem paralelas às diagonais, em perspectiva cónica traçamos EH , que intersesta t_1 em I , ponto de tangência, e JE que intersesta t_3 em K , respetivo ponto de tangência. Depois HK intersesta t_2 em L e JL igualmente. Passámos a dispor de quatro pontos da cónica. Para obter um quinto ponto determinamos o centro utilizando o procedimento de intersestar dois diâmetros. Para tal determinou-se M , ponto médio de KI , e uniu-se por uma reta a F , intersecção das tangentes respetivas, e com o ponto N , médio de EL , procede-se da mesma forma, com o ponto G . Os diâmetros FM e GN intersestam-se no centro O . O quinto ponto da cónica é o ponto I' , simétrico de I relativamente a O . O mesmo procedimento pode ser utilizado para obter mais três pontos da curva, ou seja, E' , K' e L' .

De notar a particularidade de se ter comprovado que EL e IK se intersestam no ponto de intersecção das diagonais AC e DB . Tal particularidade pode permitir procedimentos mais expeditos de soluções noutros problemas.

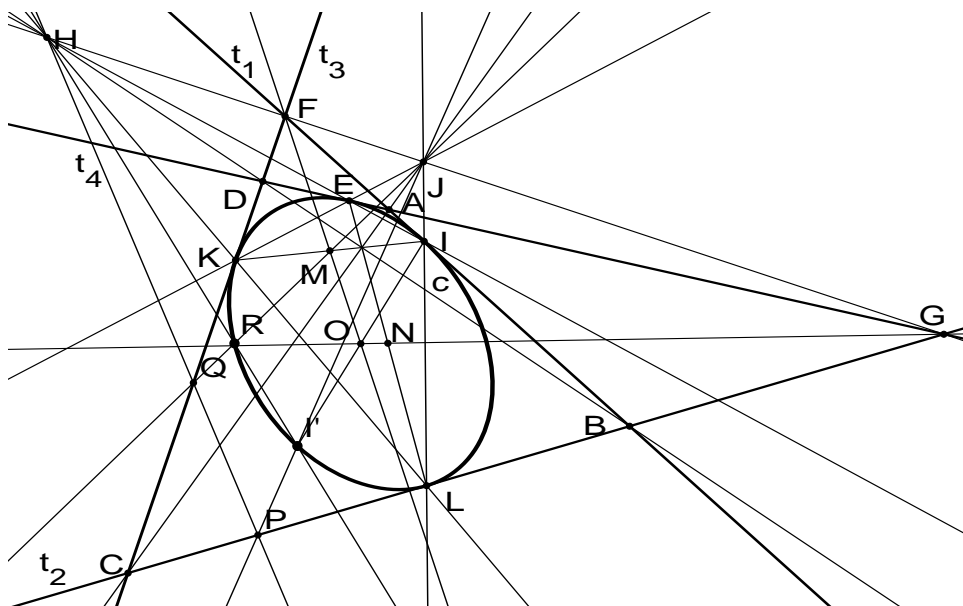


Fig. 5.5 – Paralelas às diagonais

Por outro, a utilização de paralelas às diagonais, em perspectiva cónica, permite igualmente a determinação de outros pontos da curva. Por exemplo, na figura acima, fizemos passar por I' a reta de fuga JI' , paralela perspética da diagonal AC , que intersesta o

lado do quadrilátero CB em P . Traçando a paralela perspética PH à diagonal BD esta intersesta o lado CD do quadrilátero em Q . Intersectando QJ com $I'H$ obtemos R que é outro ponto da curva.

A curva é uma elipse, pois o ponto dado é um ponto dos lados do quadrilátero que o circunscreve. Se o ponto de tangência se situasse numa das retas, no prolongamento dos lados do quadrilátero, a solução poderia ser uma hipérbole ou até uma parábola, mas sempre uma única cónica.

5.1.1.2. O PONTO A DADO É INTERIOR AO QUADRILÁTERO

Dadas 4 tangentes a uma cónica, t_1, t_2, t_3 e t_4 , e um ponto qualquer A desta, determinar a cónica.

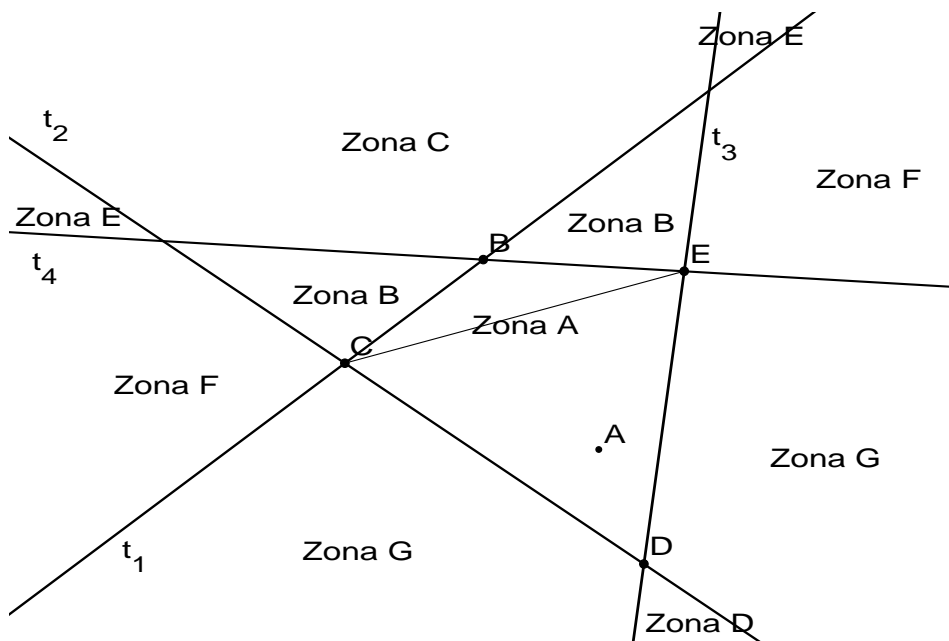


Fig. 5.6 – Zonas no quadrilátero completo

Voltemos ao problema principal, ou seja, o de o ponto dado não pertencer às tangentes. As quatro tangentes definem um quadrilátero completo. Tal define uma zona que designamos por zona A , a do quadrilátero, duas zonas B , as dos triângulos adjacentes, a zona C , adjacente aos dois triângulos, a zona D , na direção oposta à C relativamente ao



quadrilátero, duas zonas E , na direção dos triângulos oposta ao quadrilátero, duas zonas F , laterais a cada um dos triângulos, e duas zonas G , as restantes laterais ao quadrilátero.

Vamos iniciar este estudo com o ponto A na zona A interior ao quadrilátero definido pelas quatro tangentes. O método é uma adaptação do descrito em 3.6.3.11.. Num primeiro passo vai-se determinar t_5 , a tangente à cónica a passar em A . Para tal utilizamos como auxiliar o procedimento de determinação do ponto de tangência numa de cinco tangentes conhecidas. Assim, se designarmos por B, C, D e E os pontos de intersecção das tangentes t_1t_4, t_1t_2, t_2t_3 e t_3t_4 , e fizermos passar a tangente t_5 no ponto A esta intersetará t_2 em P e t_3 em R . CR e EP intersetam-se em S que tem que ser um ponto da reta AB . Como não é conhecida t_5 fez-se passar por cada um dos pontos P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 de t_2 retas que, definidas com A , intersetam t_3 em R_1, R_2, R_3, R_4 e R_5 . A reta R_1C interseta P_1E em S_1, R_2C interseta P_2E em S_2 , e assim sucessivamente para determinar S_1, S_2, S_3, S_4 e S_5 .

Traçando a curva que os pontos definem comprova-se que esta é, neste caso, uma hipérbole cujos ramos passam igualmente por C, D e E . Ou seja, tendo em conta que para definir uma cónica são necessários apenas cinco pontos, era suficiente ter determinado apenas S_1 e S_2 . Depois de definida a hipérbole a sua intersecção com o segmento AB é o ponto S . Conhecido S é possível determinar P na intersecção de t_2 com ES e R na intersecção de t_3 com CS . PR define a tangente t_5 em A .

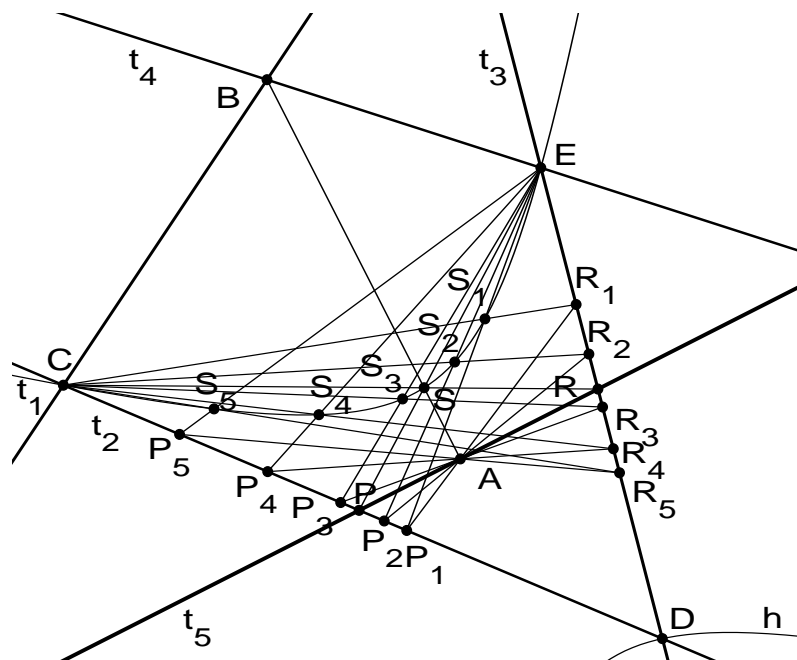


Fig. 5.7 – Determinação da quinta tangente

É de salientar a utilização da hipérbole auxiliar. Se por um lado é a comprovação de que as cónicas são úteis na resolução de diversos problemas geométricos, tal não faz esquecer como objetivo a obtenção de procedimentos mais simples, pelo que o problema deve tornar a ser analisado.

Tendo definido a quinta tangente, e conhecendo o seu ponto de tangência, para determinar os restantes pontos de tangência utilizaremos o procedimento já referido, e que aplica o princípio de Brianchon ao pentalátero. Assim, constrói-se o polígono estrelado *PREBC* e traça-se a reta que une cada um dos vértices exteriores com o vértice interior oposto e intersesta-se com a tangente oposta. Por exemplo, a reta *PH* intersesta *t₄* no ponto de tangência *T₄*.

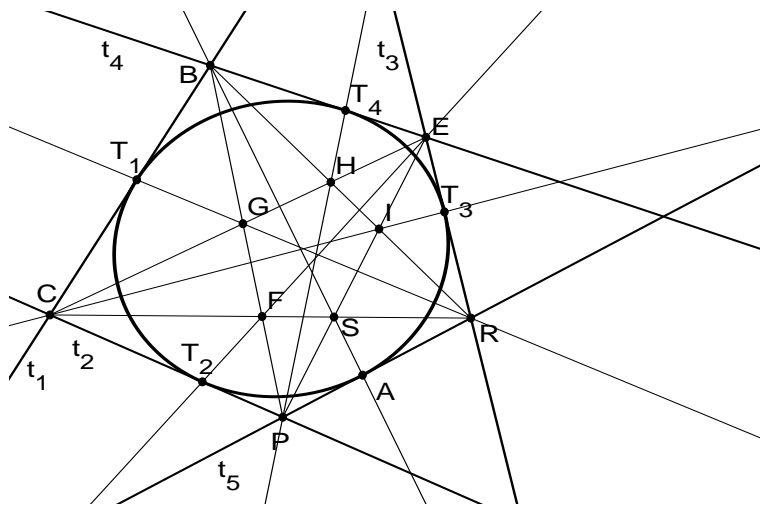


Fig. 5.8 – Determinação dos pontos de tangência

Ou seja, para o ponto de tangência em *t₁* traça-se *BP* e *EC* que se intersestam em *G*. *RG* intersesta *t₁* no ponto de tangência *T₁*. Depois procede-se de forma idêntica para determinar *T₂*, *T₃* e *T₄*. Incluindo *A*, ponto de tangência em *t₅*, estes cinco pontos definem a cónica, que no caso presente é uma elipse. Se *A* pertencer à diagonal *CE* a elipse degenera em segmento de reta entre *C* e *E*.

De notar que a cónica solução do problema, por estar inscrita num pentágono, tem que ser uma elipse. Mas há outra solução para a posição da tangente em *A* que daria igualmente um pentágono envolvente à elipse, que seria considerar *A* compreendido entre as intersecções de *t₅* com *t₁* e *t₂*. Repetindo o processo, considerando então *E* como vértice oposto, determina-se *S'*, pelo processo anteriormente descrito e, conseqüentemente, *P'* e



R' , definindo t'_5 . Então aplicando o teorema de Brianchon define-se os restantes pontos de tangência que definem a cónica.

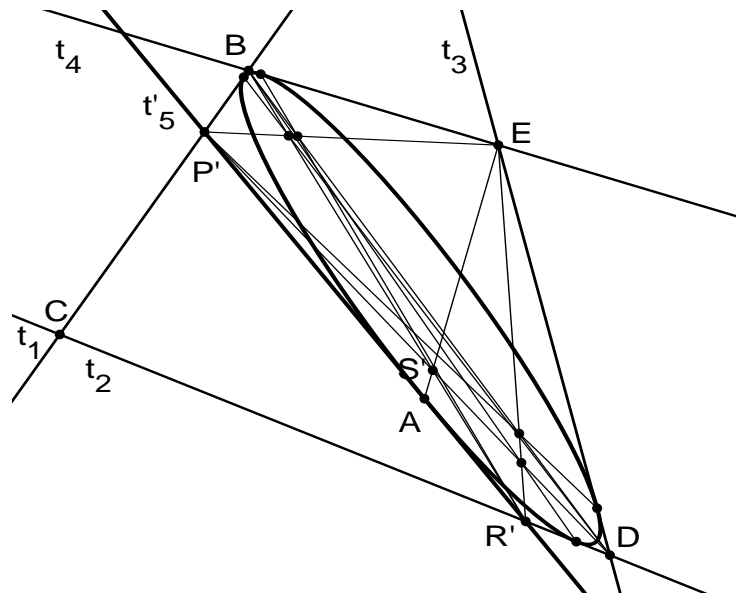


Fig. 5.9 – 4 tangentes e ponto não incidente – Segunda solução

Então há apenas duas soluções, pois qualquer outra posição de t_5 não daria origem a um pentágono envolvente.

5.1.1.3. PONTO A NAS ZONAS B, C, D, E, FE G

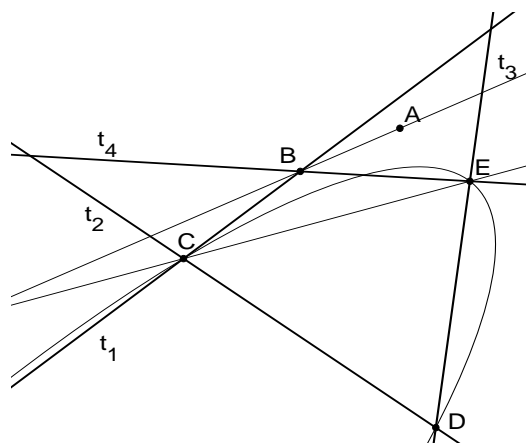


Fig. 5.10 – Ponto na Zona B



Vamos utilizar como suporte geometria dinâmica, equivalendo à repetição dos procedimentos geométricos já anteriormente descritos para a primeira solução, aplicando-os a cada diferente posição do ponto A . Tendo em conta que se comprovou existir no caso anterior duas soluções para a posição da tangente, então a cada solução apresentada corresponderão duas soluções.

Zona B – Como se comprovou e a imagem revela a curva auxiliar é elíptica e não existe qualquer solução.

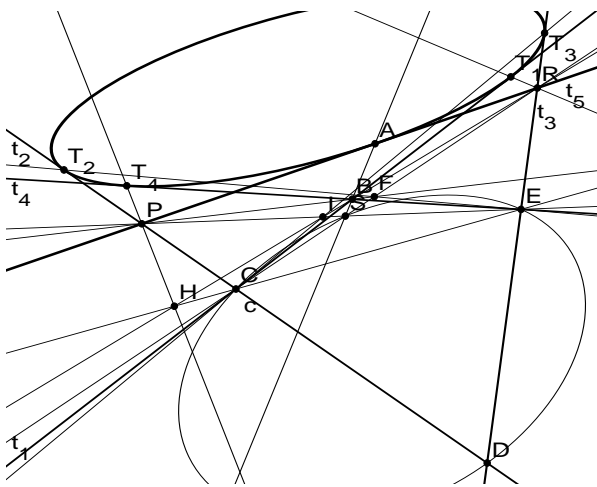


Fig. 5.11 – Ponto na Zona C

Zona C – A curva auxiliar é uma elipse e a curva solução apresentada é uma elipse. Então, com a outra tangente em A , há duas soluções.

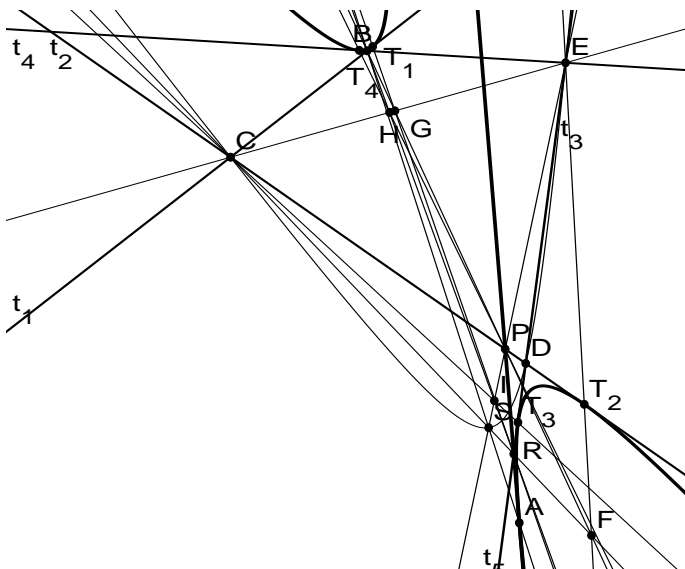


Fig. 5.12 – Ponto na Zona D



Zona *D* – A curva auxiliar é uma hipérbole e a solução é igualmente hiperbólica, degenerando em reta quando *A* pertence à diagonal *BD*. Considerando a tangente t'_5 há outra solução num total de duas.

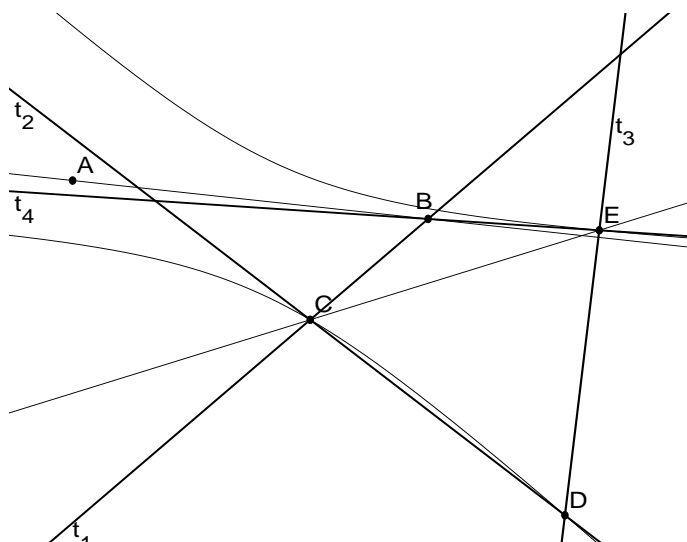


Fig. 5.13 – Ponto na Zona E

Zona *E* – A curva auxiliar é hipérbole e não há solução.

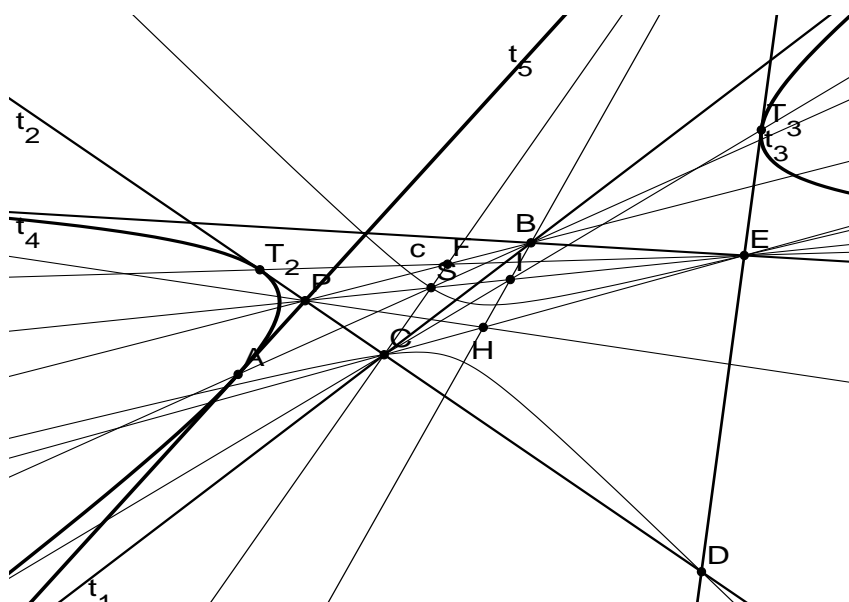


Fig. 5.14 – Ponto na Zona F

Zona *F* – A curva auxiliar é hipérbole e a solução é igualmente hipérbole, degenerando em reta se o ponto *A* pertencer à diagonal *CE*. Então há duas soluções, tendo em conta t'_5 .

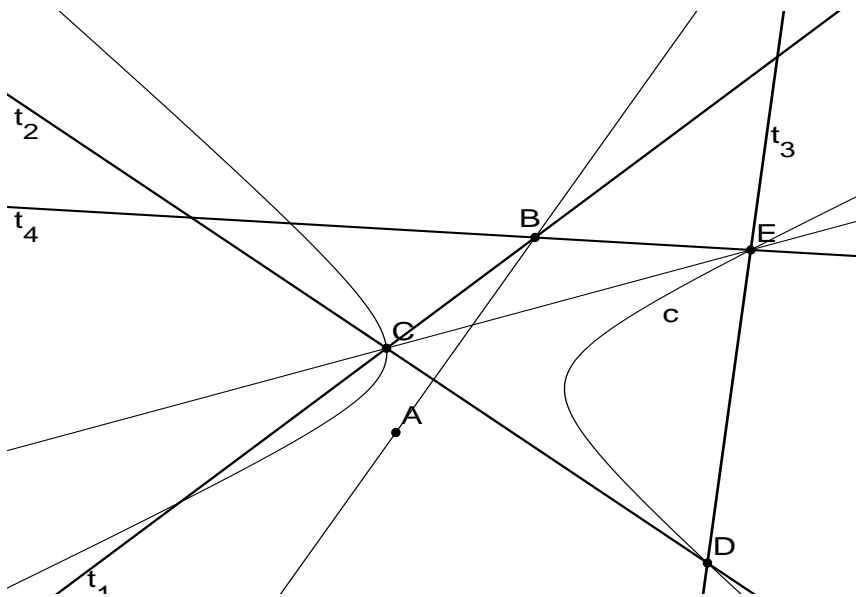


Fig. 5.15 – Ponto na Zona G

Zona G – A curva auxiliar é hipérbole e não existe qualquer solução.

Em resumo, deste ponto pode concluir-se que, consoante a posição do ponto *A* dado relativamente ao quadrilátero completo há zero ou duas soluções, o que é consistente com o quadro de IZQUIERDO ASENSI (1985, 201). Por outro lado construiu-se um método que permite resolver qualquer problema relativo à determinação das cónicas definidas por quatro tangentes e um ponto qualquer. Considerando simultaneamente as duas tangentes possíveis para o ponto dado, foi igualmente possível construir um modelo de geometria dinâmica que permite a definição imediata de qualquer solução, sendo apenas necessário introduzir os parâmetros dos dados. Tal corresponde à resolução gráfica de um problema sem solução na literatura consultada.

5.1.2. DETERMINAÇÃO DAS CÓNICAS DEFINIDAS PELAS TANGENTES t_1 , t_2 E t_3 E POR DOIS PONTOS *A* e *B* SENDO QUE OS PONTOS NÃO PERTENCEM A QUALQUER DAS RETAS.

Este ponto é desenvolvido neste momento para verificar quais as conclusões que se podem alcançar, pois, igualmente, não o encontramos resolvido na literatura. Relembre-se que o quadro de IZQUIERDO ASENSI (1985, 201) apresenta uma solução, quando os pontos dados pertencem às tangentes e zero ou quatro soluções para cada um dos outros casos possíveis.



5.1.2.1. A E B SÃO INTERIORES AO TRIÂNGULO DEFINIDO PELAS TRÊS TANGENTES

Designou-se por C , D e E os pontos de intersecção das três tangentes e, na situação presente, A e B situam-se dentro do triângulo $[CDE]$, pelo que as soluções serão elipses. Consideremos em primeiro lugar o conjunto das curvas definidas pelas três tangentes e pelo ponto A . Tracemos uma reta r qualquer a passar em A que interseja t_1 em F , t_3 em G e t_2 em H . Fica definido o quadrilátero completo $DEGF$, com diagonais DG e EF . Procedemos de seguida à determinação dos pontos de tangência em t_1 , t_2 e t_3 da curva inscrita no quadrilátero. Para tal utilizamos o procedimento descrito na parte deste texto respeitante às cónicas em perspetiva, por ser mais expedito. Consideremos a elipse a obter como a representação perspética de uma elipse inscrita num quadrado ou retângulo. O quadrilátero $DEGF$ será a representação perspética do quadrado. Os vértices C e H do quadrilátero completo são, neste contexto, os pontos de fuga das retas que definem o quadrilátero, logo a reta CH é a reta de fuga do plano do quadrilátero. Intersectamos agora a diagonal EF com a reta de fuga, obtendo I , ponto de fuga da diagonal e das retas de direção paralela a esta no quadrado. Estas, passando num ponto de tangência, passam também, no ponto de tangência da tangente contígua, como é descrito na parte do texto respeitante às cónicas em axonometria e perspetiva. Assim, intersectamos AI com t_3 , obtendo J , que é o ponto de tangência em t_3 . Depois procedemos da mesma forma para determinar os outros pontos de tangência. Assim, intersectamos a diagonal DG com a reta de fuga CH em K que, neste caso, se situa fora da representação, e traça-se AK que interseja t_1 em L , ponto de tangência. Pelo mesmo processo, a reta IL interseja t_2 em P que será o quarto ponto de tangência.

Vamos agora determinar o centro da elipse com estas quatro tangentes e respetivos quatro pontos de tangência. Para tal, parte-se do procedimento já descrito anteriormente, relativo à determinação de um diâmetro da cónica, conhecidas duas tangentes e respetivos pontos de tangência. Assim, determina-se o ponto M , ponto médio de AJ , e traça-se a reta GM que é um diâmetro da cónica. Repete-se o procedimento traçando o diâmetro que passa em F e em N , ponto médio de AL . O ponto O , de intersecção dos diâmetros GM e FN , é o centro da cónica, da qual se conhecem quatro pontos. Se definirmos um ponto simétrico, relativamente ao centro, de um dos já conhecidos, por exemplo L' , simétrico de L , obtemos cinco pontos, e logo podemos construir a elipse que passa em A , J , L' , P e L e que tem centro O . Como é óbvio, só por mero acaso a curva descrita passaria no ponto B pois traçámos uma reta t_4 qualquer a passar em A .

Em seguida podemos determinar o lugar geométrico dos centros das cónicas que passam em A e são tangentes a t_1 , t_2 e t_3 e que é a elipse auxiliar descrita por O . Para tal, ou utilizamos um programa de geometria dinâmica que nos defina o lugar geométrico de O , com diferentes posições de t_4 , obtendo a elipse descrita por O , ou repetimos todo o



processo para, pelo menos, cinco posições diferentes da reta t_4 , o que nos permite obter, pelo menos, cinco posições diferentes de O e, logo, construir a curva.

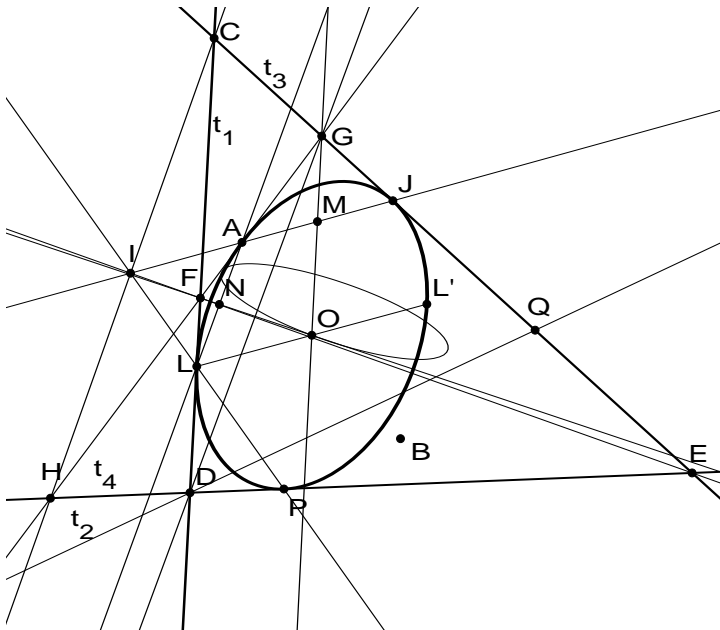


Fig. 5.16 – Cónicas a passar em A

Notemos a singularidade de a curva auxiliar descrita por O ser igualmente uma curva cónica.

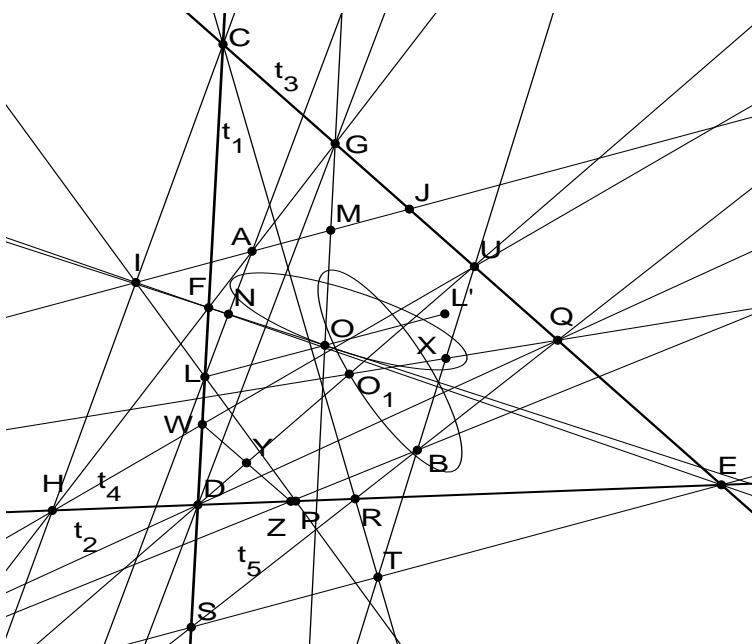


Fig. 5.17 – Centros das cónicas a passar em A e B





Relembremos que definimos a tangente t_4 como uma reta qualquer a passar em A . Logo, a curva solução não passa em B , em regra. Se modificarmos a posição de t_4 obtemos diferentes pontos de tangência e as diferentes posições que o centro O pode assumir, pois o problema está indefinido porque, não estando a considerar o ponto B , temos apenas quatro condições, ou seja, três tangentes e um ponto.

Repetimos seguidamente, para o ponto B , todo o processo anteriormente descrito para o ponto A e respetiva reta tangente t_4 , fazendo passar em B uma reta qualquer t_5 que intersesta t_2 em R e t_3 em Q . Fica definido o quadrilátero completo $CDRQ$ cujos pontos de fuga são E e S que é intersecção de t_5 com t_1 . O ponto T , intersecção da diagonal CR com a reta de fuga ES , é a fuga das retas com a direção da diagonal. Como B é o ponto de tangência de t_5 , o ponto U , intersecção de TB com t_3 , é o ponto de tangência em t_3 . V , intersecção da diagonal DU com a reta de fuga ES , é o ponto de fuga das retas com a mesma direção. A intersecção de UV com t_1 define W , ponto de tangência em t_1 . BV intersesta t_2 no ponto de tangência Z . DY , sendo Y ponto médio de WZ , e QX , em que X é o ponto médio de BU , intersestam-se em O_1 , centro da cónica que passa em B e é tangente a t_1 , t_2 e t_3 . Depois, definimos a elipse auxiliar descrita pelo ponto O_1 , sabendo que é o lugar geométrico dos centros de todas as curvas cónicas que passam em B e são tangentes a t_1 , t_2 e t_3 . Dispondo dos quatro pontos de tangência em t_1 , t_2 , t_3 e t_5 na curva que passa em B e tem tais tangentes, utilizamos um quinto ponto para definir a curva, por exemplo, o simétrico de qualquer dos pontos B, U, W ou Z , relativamente a O_1 . Optou-se por não apresentar, nesta fase, a elipse resultante dada a complexidade de interpretação gráfica.

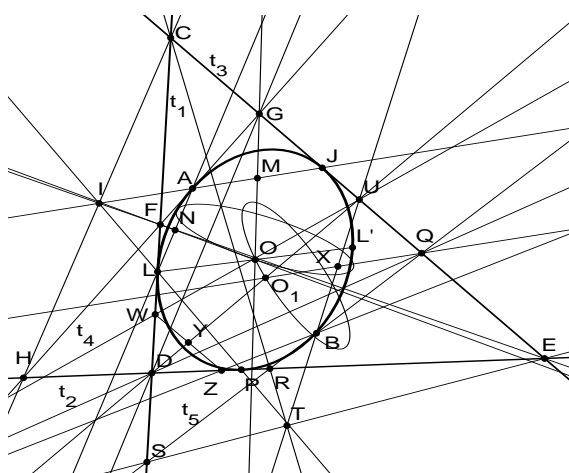


Fig. 5.17 a) – 1ª Solução

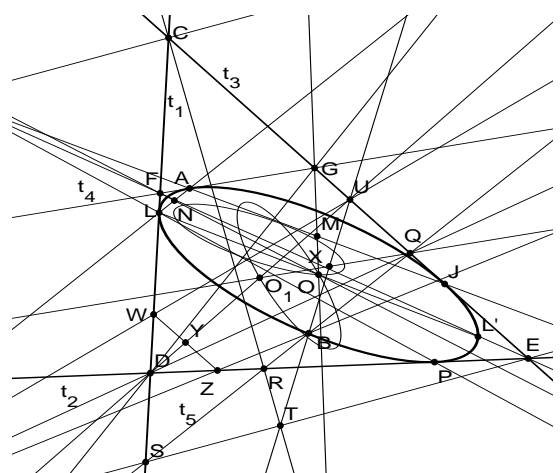


Fig.5.17 b) – 2ª Solução

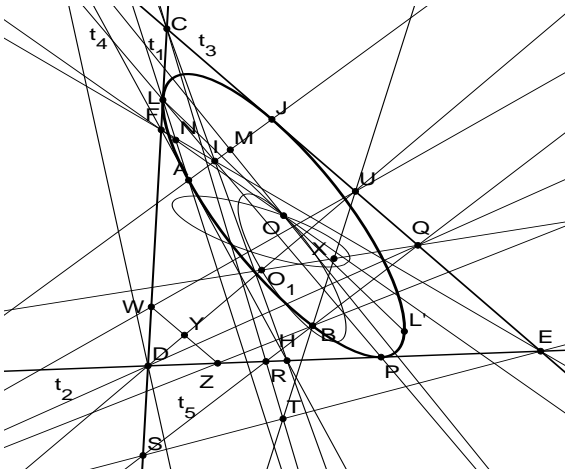


Fig. 5.17 c) – 3ª Solução

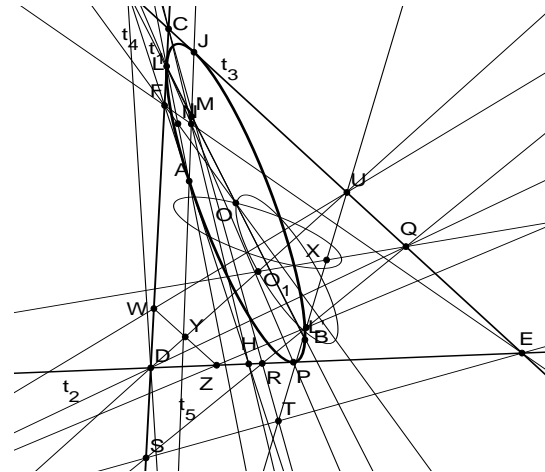


Fig. 5.17 d) – 4ª Solução

Dado que as elipses auxiliares descritas, respetivamente, por O e O_1 se interseçam em quatro pontos, tal significa que o problema que estamos a abordar, o da determinação das curvas que passam em A e B e são tangentes a t_1 , t_2 e t_3 , e, nestas condições, ou seja, sendo A e B pontos interiores ao triângulo definido pelas três tangentes, as curvas solução são quatro elipses com centros em cada um dos pontos de intersecção das duas elipses auxiliares. Para as obter é suficiente, para cada uma delas, fazer coincidir qualquer dos centros O ou O_1 com cada um dos quatro pontos de intersecção das elipses auxiliares. Nas figuras utilizámos O , obtendo as quatro elipses solução.

Conclui-se portanto que há, neste caso, quatro soluções, todas elipses. Utilizaram-se, simultaneamente, procedimentos consolidados no conhecimento genérico das cónicas com procedimentos derivados da perspetiva, com vantagem de simplificação na obtenção do resultado. Não se teve em consideração, nesta fase, circunstâncias particulares como, por exemplo, a dos pontos A e B poderem estar alinhados em reta com um dos vértices do triângulo, ou paralelos a um dos lados deste, ou ainda um dos pontos dados pertencer a uma tangente.

5.1.2.2. A E B SITUAM-SE EM QUALQUER ZONA DO PLANO DE REPRESENTAÇÃO FORA DO TRIÂNGULO

Passa-se agora à análise detalhada dos casos possíveis de diferentes posições para os pontos A e B relativamente ao triângulo definido pelas três tangentes.

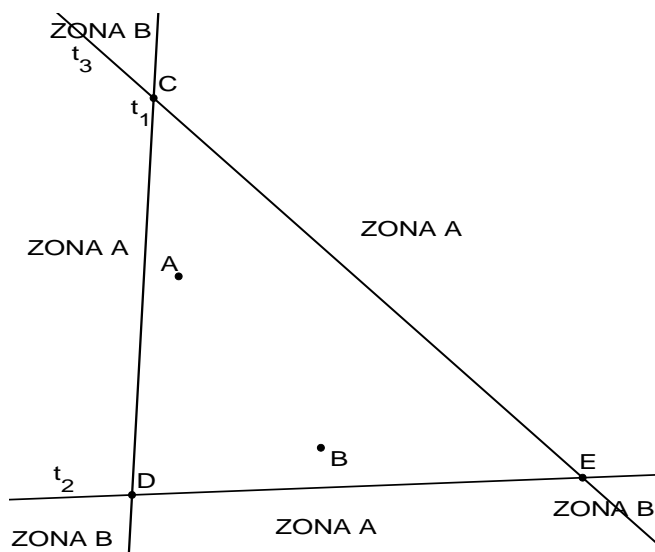


Fig. 5.18 – Zonas relativamente ao triângulo

Para sistematizar esta análise subdividiu-se o espaço em zonas, a interior ao triângulo definido pelas três retas, as zonas *A*, adjacentes aos lados do triângulo, e as zonas *B*, na adjacência aos vértices do triângulo, discriminando, quando necessário, se as zonas em que se situam os pontos *A* e *B* são zonas adjacentes ou opostas, ou são a mesma zona ou diferentes.

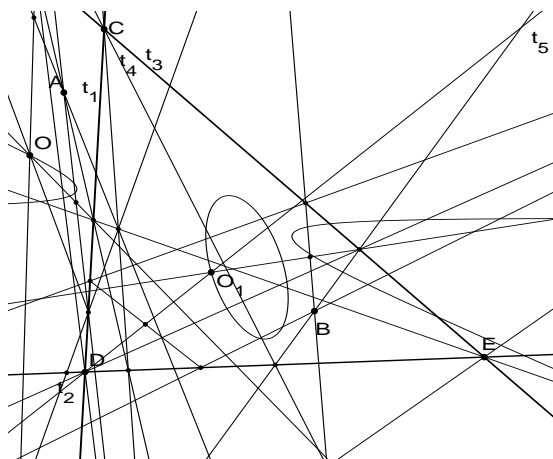


Fig. 5.18 a) – 2º Caso

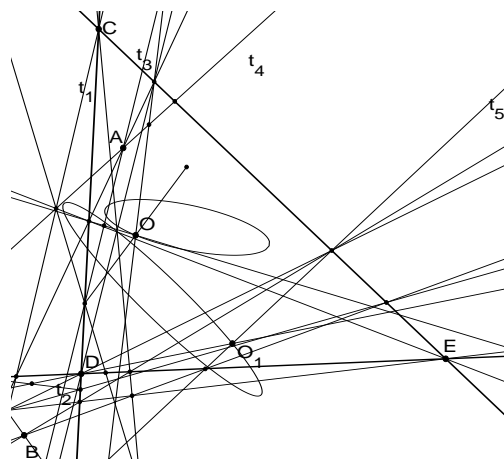


Fig. 5.18 b) – 3º Caso

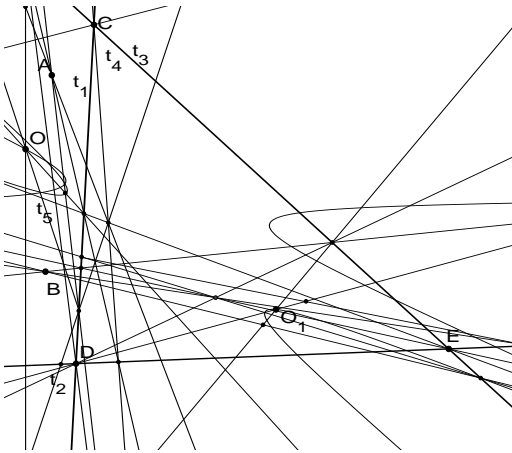


Fig. 5.18 c) – 4º Caso

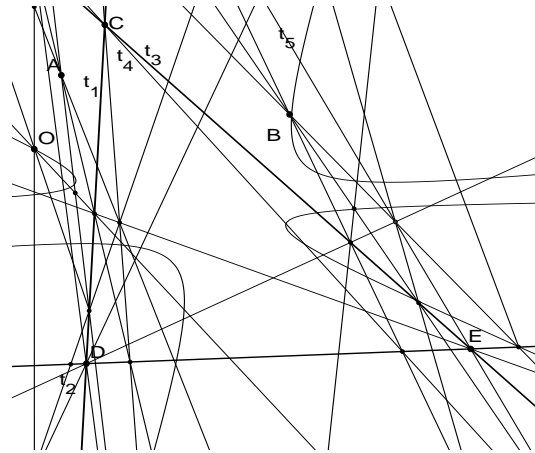


Fig. 5.18 d) – 5º Caso

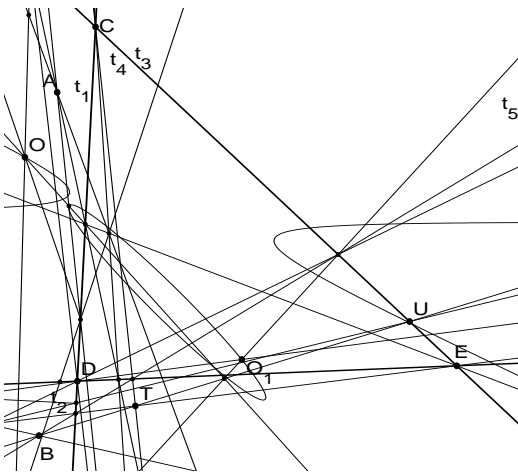


Fig. 5.18 e) – 6º Caso

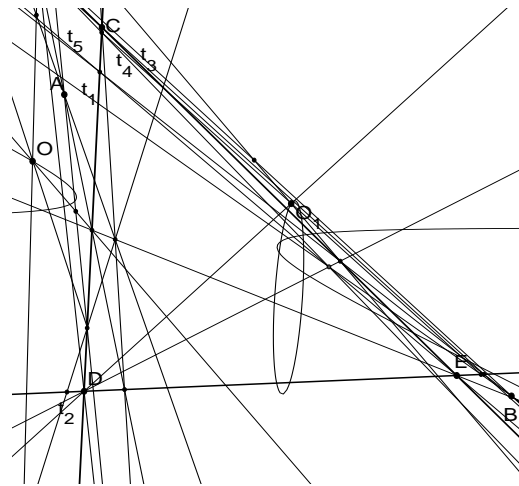


Fig. 5.18 f) – 7º Caso

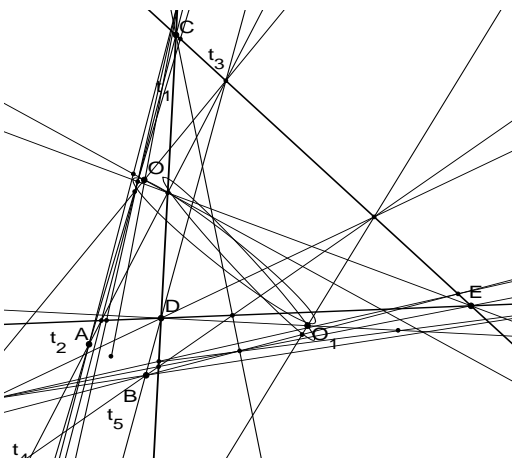


Fig. 5.18 g) – 8º Caso

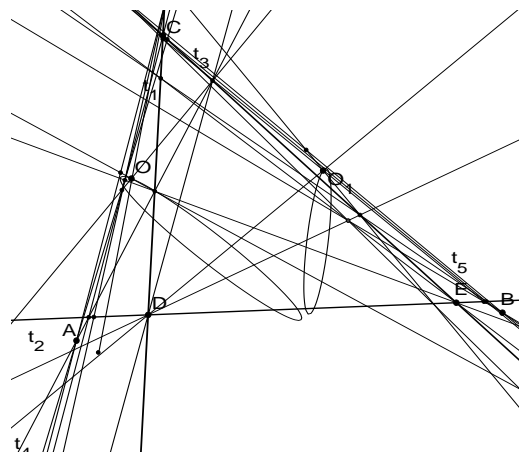


Fig. 5.18 h) – 9º Caso





As curvas auxiliares, lugar geométrico dos centros das cónicas que passam em cada um dos pontos dados, A ou B , e que são tangentes às três retas, são elipses, quando o ponto dado se situa dentro do triângulo ou nas zonas B , e são hipérbolas, quando o ponto se situa em zonas A .

Nos 2º, 3º, 5º, 6º e 9º casos não há soluções possíveis, porque as curvas auxiliares não se interseçam.

No 1º caso, as soluções são, como vimos, quatro elipses ou degeneram.

No 4º caso, as soluções são quatro cónicas, quatro elipses ou hipérbolas, ou três elipses ou hipérbolas e uma parábola, ou degeneram. As elipses correspondem a pontos de intersecção das curvas auxiliares que se encontram na mesma zona que A e B e as hipérbolas têm centro no ponto de intersecção das curvas auxiliares que se situa numa zona diferente.

A parábola resulta da possibilidade das hipérbolas auxiliares terem em comum uma das assíntotas, pois tal significaria a existência de uma das intersecções das curvas auxiliares, as duas hipérbolas, no infinito. Está excluída a possibilidade das duas assíntotas de cada uma das hipérbolas serem coincidentes pois, de tal facto, resultaria as hipérbolas só se intersetarem no infinito o que daria origem a retas, as próprias tangentes.

Surge igualmente, como hipótese de trabalho, uma das assíntotas, de uma das hipérbolas, ser paralela a uma das assíntotas da outra hipérbole.

Tenhamos igualmente em conta que uma parábola fica definida por dois pontos e duas tangentes, sendo que, no caso em estudo, só se a terceira reta dada for tangente à parábola é possível uma solução parábola.

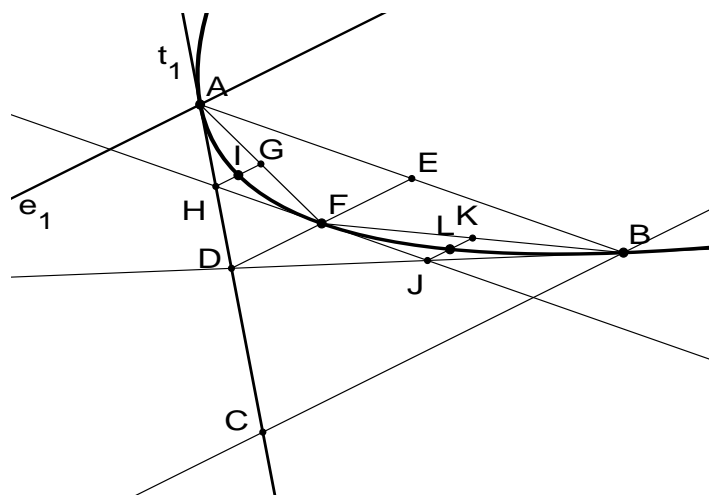
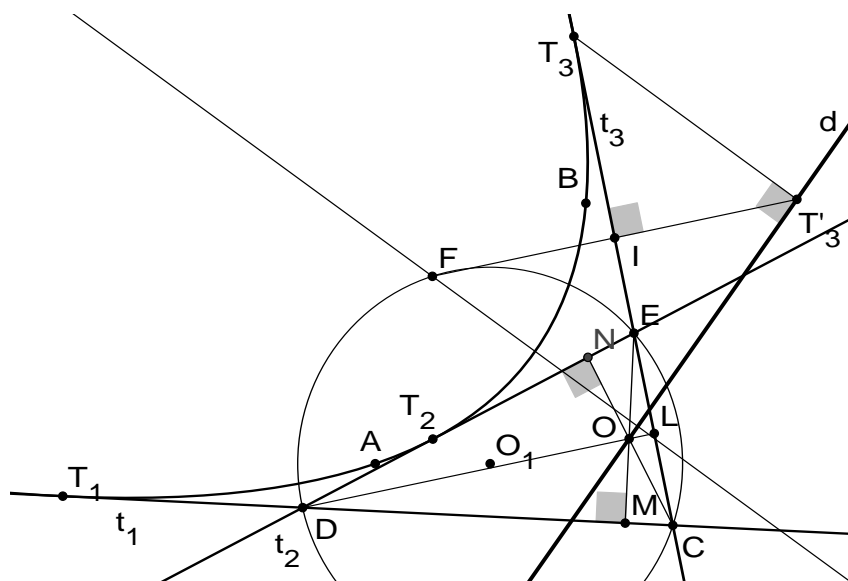


Fig. 5.19 – Parábola definida por dois pontos e respetivas tangentes e determinação da direção do eixo

Consideremos, como na figura acima, uma parábola que passe nos pontos A e B . O diâmetro conjugado da corda AB tem, sempre, a direção do eixo da parábola, ou seja, o centro da curva, intersecção dos diâmetros, é um ponto no infinito na direção do eixo. Tal seria a direção das assíntotas das hipérboles auxiliares.

Representamos igualmente na figura seguinte duas propriedades da parábola, pela relevância que podem vir a desempenhar em desenvolvimentos futuros da investigação. A propriedade descrita por AKOPYAN (2007, 25, Figure 1.35) enuncia que **a diretriz d da parábola passa no ortocentro, O , do triângulo definido por três tangentes.**

Fig. 5.20 – Propriedades da parábola descritas por Akopyan



Por outro lado, a propriedade descrita em AKOPYAN; ZASLAVSKY (2007, 23, Figure 1.32) concluindo a partir de um teorema de Simson, enuncia que, **se traçarmos a circunferência circunscrita ao triângulo, com centro no baricentro O_1 do triângulo, a circunferência passa igualmente no foco F da parábola, e se por F traçarmos a perpendicular a uma tangente, no caso t_3 , esta perpendicular interseca a diretriz num ponto T'_3 que é a projeção ortogonal do ponto T_3 de tangência, sobre a diretriz d .**

Na figura seguinte exemplificamos como duas hipérboles com uma das assíntotas com a mesma direção se interseçam em três pontos no espaço euclidiano e o quarto ponto de intersecção se situa no infinito. Resta esclarecer se, no caso concreto presente, as duas assíntotas têm que ser coincidentes ou podem ser quaisquer paralelas, o que deixamos para investigação futura.

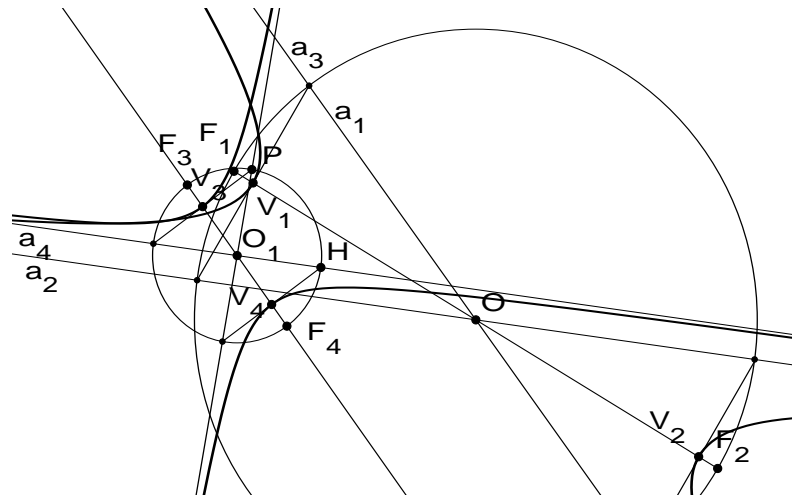


Fig.5.21 – Duas hipérboles com uma das assíptotas com a mesma direção

Nos 7º e 8º casos as quatro soluções são hipérboles ou degeneram.

Foi possível ainda constatar que, em inúmeras situações analisadas, quando a reta definida por A e B contem um dos vértices do triângulo tendem a surgir soluções degeneradas. Fica para estudo posterior a comprovação da universalidade da regra, a sua compreensão pela teoria, e as condições em que ocorre a degenerescência, ou seja, se diz respeito às quatro soluções de cada caso ou apenas a uma das soluções, como parece ser, nos casos detetados.

Por outro lado, quando a reta AB é paralela a uma das tangentes tendem a ocorrer, igualmente, casos particulares que necessitam melhor análise. O mesmo ocorre quando aproximámos um dos pontos, A ou B , de uma das tangentes, o que faz supor que a análise da incidência de apenas um dos pontos numa das tangências é determinante para a completa resolução do problema. Optámos por não representar as curvas solução, em cada caso, porque implicaria quadruplicar o número de figuras necessárias.

A análise dos casos ilustrados pelas figuras anteriores permite elaborar o seguinte quadro resumo:



	Nº de pontos em cada zona				Curvas auxiliares. Intersectam-se?	Nº e Tipo de soluções
	No Δ	Zonas A	Zonas B	Observações		
1º caso	2				2 elipses. Sim em 4 pontos.	4 elipses
2º caso	1	1			Elipse e hipérbole. Não se intersectam.	0
3º caso	1		1		2 elipses. Não se intersectam.	0
4º caso		2		mesma zona	2 hipérbolos. Sim em 4 pontos.	4 cónicas
5º caso		2		zonas diferentes	2 hipérbolos. Não se intersectam.	0
6º caso		1	1	zonas adjacentes	Elipse e hipérbole. Não se intersectam.	0
7º caso		1	1	zonas opostas	Elipse e hipérbole. Sim em 4 pontos.	4 hipérbolos
8º caso			2	mesma zona	2 elipses. Sim em 4 pontos.	4 hipérbolos
9º caso			2	zonas diferentes	2 elipses. Não se intersectam.	0

Fig.5.22 – Quadro resumo das cónicas definidas por três tangentes e dois pontos não incidentes

Como conclusão deste ponto refere-se que:

- para análise deste tema, foi igualmente e, paralelamente, desenvolvido, em geometria dinâmica, um modelo de análise que difere do algoritmo anteriormente descrito como método de investigação apenas por a partir de cada um dos pontos dados, *A* e *B*, se ter definido um ponto *P* qualquer que defina a respetiva reta de tangência provisória. Tal tem a ver com a eliminação da possibilidade de não serem consideradas, no modelo utilizado, todas as soluções possíveis, por dependerem da intersecção de duas retas para a determinação de pontos, sendo que os programas de geometria dinâmica que utilizámos, porventura pela sua origem na análise matemática, tendem a diferenciar o mais infinito ou menos infinito de uma reta na apresentação dos resultados, com reflexos nos resultados finais em algumas circunstâncias. Não obstante, foi possível concluir que os resultados foram consistentes com os anteriormente referidos;

- devemos igualmente ressaltar que não estamos a analisar a hipótese de serem dadas três tangentes, um ponto de tangência numa delas e outro qualquer. Tal assunto



deve merecer investigação futura, sobretudo tendo em conta que tal tem reflexos noutros problemas concretos;

- o desenvolvimento deste ponto de investigação, que reflete as conclusões que foi possível apurar, permite, ao mesmo tempo, enunciar pontos de investigação futura, designadamente a necessidade de criação de um algoritmo teórico de análise mais simples, mais elegante, eventualmente através da utilização simultânea dos pontos A e B , assim como a análise detalhada das situações concretas em que ocorre, como solução, cada uma das curvas cónicas ou estas degeneram, sobretudo tendo em conta que tal assunto pode ter reflexos no estudo dos feixes de cónicas. Tenha-se igualmente em conta que se reserva para investigação futura a possibilidade de existirem parábolas como solução, tendo em conta que não se comprova se as assíntotas das hipérbolas auxiliares têm que ser coincidentes ou podem ser meramente paralelas;

- por outro lado, fica consistente o nosso quadro resumo, com o quadro de IZQUIERDO ASENSI (1985, 201), sendo que o que apresentamos se refere à análise dos casos em que os dados, pontos e retas tangentes a uma cónica, em que os pontos dados não pertencem às tangentes dadas. Tal significa que o quadro de Izquierdo Asensi não tem em conta circunstâncias particulares, como um dos dois pontos dados poder pertencer às tangentes dadas, ou seja, ser o próprio ponto de tangência. Tal conclusão resulta de já se ter demonstrado com NAGORE (1988, 141-151), e que aliás reflete o teorema das cinco condições, ou seja que, quando os pontos dados pertencem a uma tangente, as cinco condições, pontos ou tangentes, definem uma única cónica e não zero ou quatro soluções. O teorema ocupa-se apenas com o caso dos pontos dados serem pontos de tangência. Não esqueçamos que não se analisou neste trabalho a possibilidade intermédia de um dos pontos pertencer a uma das tangentes e o outro não;

- por último, ganha consistência a hipótese de um problema geométrico com pontos, retas e curvas cónicas é resolúvel com outras curvas cónicas como auxiliares, o que aliás parece gerar um sistema geométrico consistente em si próprio, e comprova, de um ponto de vista gráfico, os desenvolvimentos atuais da geometria projetiva, e permite enunciar a possibilidade do seu desenvolvimento por métodos exclusivamente geométricos, como tem sido defendido por alguns académicos como, por exemplo, "...The book demonstrates the advantage of purely geometric methods of studying conics." (AKOPYAN; ZASLAVSKY, 2007, contracapa), e dizemos nós, como utilizadores no âmbito gráfico, por linguagem gráfica.

5.1.3. A PARÁBOLA COMO DISCRIMINANTE DE ELIPSES E HIPÉRBOLES

Independentemente da relevância do problema em si, resulta dos problemas analisados anteriormente que, em inúmeras situações, nos confrontamos com o surgimento de soluções em elipses e hipérbolas para o mesmo caso considerado. Então existem, como discriminantes entre umas e outras, parábolas. Como o processo de determinação dessas parábolas tem de decorrer de um ponto específico de transição numa reta que intersecte um feixe de cónicas, em que, para um lado desse ponto, são intersecadas elipses, e para o outro, hipérbolas, então o problema é, em regra, resolúvel por método diferente e específico das parábolas, por estas não serem cónicas centrais. Complementando os traçados anteriormente desenvolvidos é o que nos propomos aprofundar seguidamente.

5.1.3.1. PARÁBOLA DEFINIDA POR TRÊS PONTOS A , B E C E DIREÇÃO d DO EIXO

Da utilização da propriedade de que uma axonometria de uma curva cónica de um tipo determinado, elipse, parábola ou hipérbole, é uma curva do mesmo tipo ou degenera, pode-se concluir um método indireto para resolver outros problemas que não são resolúveis pelos métodos tradicionais. É este o caso.

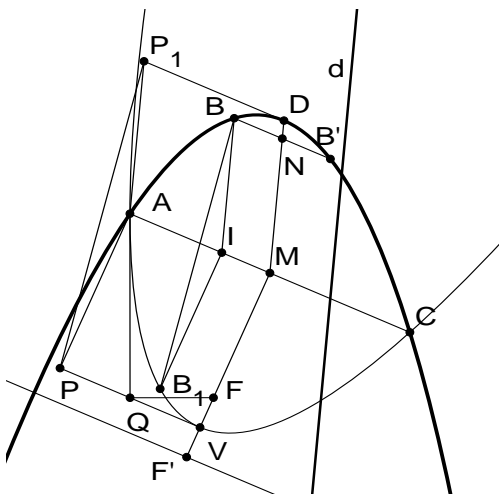


Fig. 5.23 – Parábola por três pontos e direção do eixo

Tenhamos em conta que os pontos dados A , B e C se situam numa sequência que define um sentido da curva relativamente à direção dada. Vamos estabelecer uma relação por afinidade entre a parábola pretendida como sendo uma representação em axonometria e outra parábola em representação ortogonal.

Nestas condições, o ponto M , ponto médio de AC , vai ser assumido como um ponto do eixo da nova parábola. Assim traçamos uma perpendicular a AC a passar por M , que é o



eixo da nova parábola, e sobre ela marcamos um vértice V qualquer. Traçando por V uma paralela a AC e por A uma paralela ao eixo da nova parábola, na intersecção das duas retas obtemos o ponto P . Para definir esta parábola vamos determinar o seu foco utilizando a propriedade que definimos no ponto 3.5.2.6., ou seja, determinando o ponto Q , ponto médio de VP , traçando o segmento AQ e a sua perpendicular em Q determina-se o foco F , na intersecção com o eixo MV . Determinado o foco, pelo mesmo método, é possível determinar qualquer ponto da parábola auxiliar. O procedimento mais expedito seria resolver este problema num programa informático de geometria dinâmica obtendo graficamente a parábola de foco F e diretriz a passar em F' , ponto simétrico do foco F relativamente ao vértice V , sendo a diretriz paralela a AC .

De qualquer forma, pode-se estabelecer uma relação entre o ponto B e um ponto B_1 da parábola auxiliar traçando por B uma paralela à direção do eixo d . Pelo método descrito é possível determinar B_1 , ponto da parábola auxiliar que estabelece a relação de afinidade entre as duas parábolas. Assim traçando o segmento BB_1 estabelecemos a direção de afinidade, definindo o triângulo $[BIB_1]$. Por P e A construímos um triângulo de lados paralelos ao anterior determinando P_1 . Por ele traçamos uma paralela a AC e por M uma paralela a d . Na intersecção das duas retas obtemos o ponto D da parábola, sendo PD a sua tangente. Se por B traçarmos uma reta paralela a AC esta interseca DM em N e determinando B' , simétrico de B relativamente a N , temos cinco pontos que definem a parábola pretendida, ou seja, A, B, D, B' e C .

5.1.3.2. PARÁBOLA DEFINIDA POR TRÊS PONTOS A, B E C E t_1 , TANGENTE EM A

LIMING (1979, 181) abordando o problema em geometria analítica conclui pela existência de duas parábolas nas condições descritas. Lembre-se que cinco condições, pontos ou tangentes, definem uma cónica qualquer, e que, por quatro pontos em quadrilátero convexo passam igualmente duas parábolas, tratando-se portanto de uma situação similar em que são dadas quatro condições e a quinta é a da figura ser parábola.

Liming limita a existência das duas parábolas ao facto de os dois pontos B e C se situarem do mesmo lado relativamente à tangente e à verificação de algumas condições nas equações. Tal pode significar que estamos perante uma situação similar à das parábolas por quatro pontos, o que será analisada posteriormente. Não obstante, desde já interessa referir que dados três pontos da curva e a tangente num deles, se os outros dois se situarem em diferentes lados da tangente não existe qualquer parábola ou elipse que satisfaçam essa condição mas apenas hipérbolas. Se os dois pontos se situarem do mesmo lado da tangente, e distarem igualmente desta, apenas uma parábola é possível, pois estaremos



perante o caso de a corda definida pelos dois pontos ser paralela à tangente no terceiro ponto.

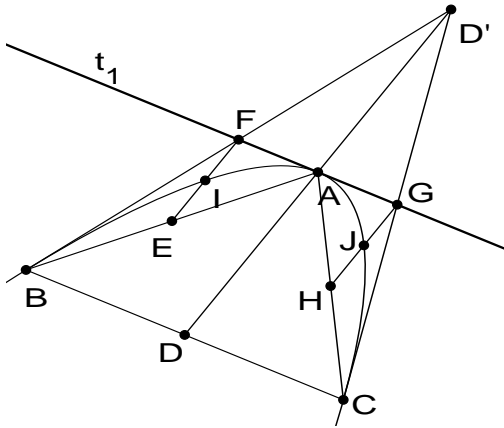


Fig. 5.24 – Parábola por A, B, C e t_1 com B e C a igual distância de t_1

Como referido atrás existem duas parábolas definidas pelos três pontos e tangente t_1 num deles, A , se os outros dois pontos, B e C , se situarem no mesmo lado da tangente e a distâncias diferentes desta. Designámos por e_1 e e_2 os eixos das duas parábolas.

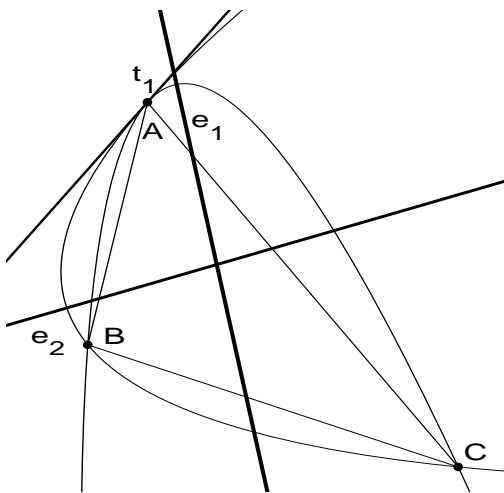


Fig. 5.25 – 2 parábolas definidas por 3 pontos e uma tangente

Descreve-se seguidamente o procedimento para determinar uma das parábolas, a que tem A de um dos lados da parábola relativamente a B e C . Tal como se demonstra seguidamente é possível obter a mesma parábola partindo do segmento AC ou AB com as adaptações correspondentes. Escolhe-se O' qualquer em t_1 . Determina-se o ponto M médio de AC . Define-se D' ponto médio de $O'M$. Traça-se t'_2 paralela a AC a passar em D' . Unindo O' a C definimos t'_3 que é, com t'_2 e t_1 , o conjunto de tangentes em A, D' e C à parábola





auxiliar. Constrói-se a parábola auxiliar $AD'C$, por exemplo, pelo processo da tangente paralela a uma corda, como em 3.5.2.5. na Fig. 3.53 ou por outro dos métodos descritos.

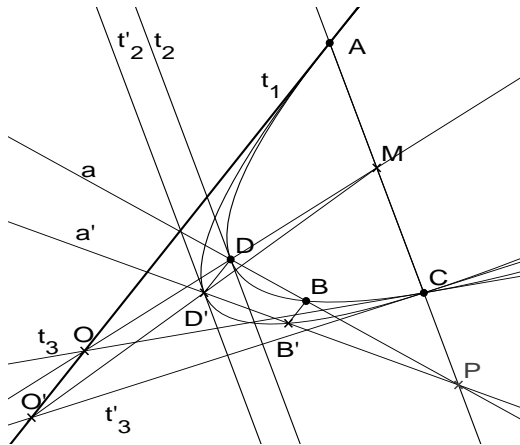


Fig. 5.26 – Determinação da primeira parábola

Por B traça-se uma paralela a t_1 até interseção com a parábola auxiliar em B' . Traçar $D'B'$ e interseção com AC em P . Traça-se BP até interseção com D a paralela a t_1 que passa em D' . Por D que é um ponto da parábola pretendida traçamos t_2 paralela a t'_2 . Traça-se MD e interseção com t_1 em O . OC define a tangente t_3 . Com as três tangentes, e pelo processo referido atrás, constrói-se a parábola pretendida $ADBC$, cuja direção do eixo é MO .

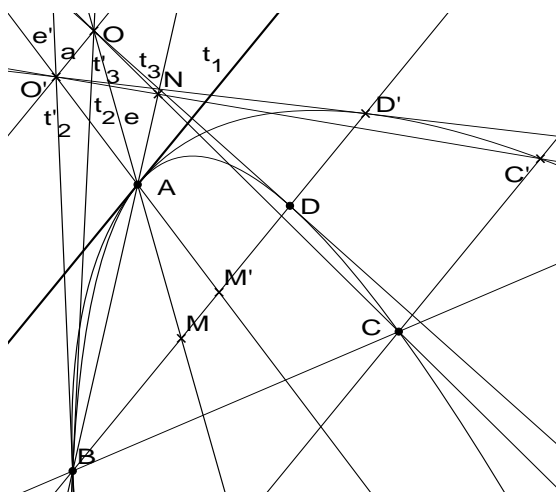


Fig. 5.27 – Determinação da segunda parábola

Para determinar a parábola BAC , ou seja, a curva em que A é um ponto entre B e C . Por B traça-se uma paralela a t_1 e marcar sobre ela M' qualquer e depois D' sendo M' o ponto médio de BD' . Passa-se por M' e A a reta e' e sobre esta O' equidistante de A como M' . $O'B$ define t'_2 e $O'D'$ define t'_3 . Constrói-se seguidamente a parábola auxiliar BAD' pelo

processo anteriormente referido das três tangentes t_1 , t_2 e t_3 . Traça-se por C uma paralela a t_1 que intersesta a parábola auxiliar em C' . Ao intersestar a reta $O'C'$ com a reta AB obtemos o ponto N . Por O' traçamos a reta a paralela a t_1 e intersestamos esta com a reta que passa em N e C obtendo o ponto O . OA define a direção e do eixo da parábola pretendida, direção que intersesta a paralela a t_1 que passa em B no ponto M . Define-se seguidamente MD igual a BM para o lado oposto de M . OB define t_2 . OD define t_3 . Por último, pelo método já referido, constrói-se a parábola $BADC$ com as tangentes t_1 , t_2 e t_3 .

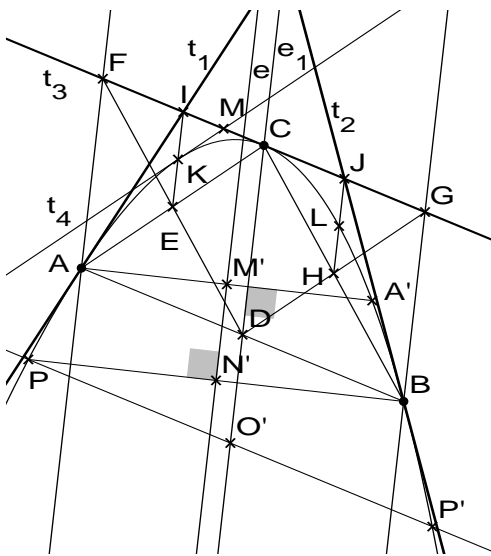


Fig. 5.28 – Determinação do eixo da parábola e de outros pontos da curva

Conhecidas as três tangentes e os pontos de tangência é possível determinar outros pontos da parábola a partir de métodos já descritos anteriormente. Assim, K e L são pontos da parábola entre A , B e C . Determinando A' numa perpendicular à direção ao eixo e_1 o seu ponto médio M' define-se o eixo e paralelo a e_1 . Para determinar pontos da parábola para além do trecho ACB , se por B traçarmos uma paralela a AA' esta intersesta o eixo em N' . O ponto P , simétrico de B relativamente a N' , e P' , simétrico de P relativamente a O' numa paralela a AB são pontos da parábola.

Obviamente que não estamos a responder ao caso de serem dados três pontos e uma tangente qualquer das parábolas.

5.1.4. PARÁBOLA DEFINIDA POR QUATRO PONTOS A , B , C E D

Para determinar as parábolas que passam por quatro pontos é necessário que, destes, três não sejam colineares. Podemos definir parábolas por quatro dos seus pontos sempre que estes definam um quadrilátero convexo, de lados todos diferentes ou se não



existirem dois lados paralelos iguais. Não há qualquer parábola por quatro pontos em quadrilátero côncavo ou em quadrado ou retângulo ou paralelogramo.

Entre outras utilizações, por quatro pontos podemos definir feixes de cónicas, os quais podem ter diversas aplicações, designadamente no reconhecimento de imagens, e que as parábolas serão, nesses feixes, fronteiras discriminantes entre as elipses e as hipérbolas, com propriedades que podem facilitar o uso destes feixes.

5.1.4.1. PARÁBOLA DEFINIDA PELOS QUATRO VÉRTICES DE UM QUADRILÁTERO COM DOIS LADOS IGUAIS NÃO PARALELOS E OS OUTROS DOIS PARALELOS

Os quatro pontos vão definir um trapézio isósceles, simétrico relativamente a um eixo perpendicular ao meio dos dois lados paralelos e que é simultaneamente o eixo da parábola. Tal problema é o mesmo de construir uma parábola conhecidos dois pontos desta a diferentes distâncias do vértice e o seu eixo. Para tal vamos utilizar o traçado indicado no ponto 3.5.2.13..

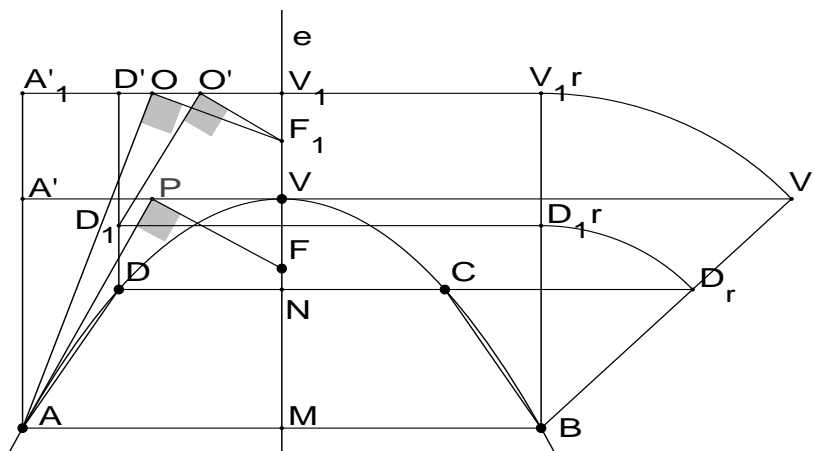


Fig. 5.29 – Parábola por 4 pontos em trapézio isósceles

Definimos um vértice V_1 , de uma parábola qualquer que passe em A e B , sobre o eixo e definido pelos pontos médios de AB e CD . Essa parábola conterá um ponto D_1 à mesma distância do eixo que D . Para tal, determina-se O ponto médio de $A'V_1$ e a perpendicular a AO em O intersesta o eixo no foco F_1 da parábola auxiliar. Então determinando O' ponto médio de $D'V_1$ e traçando F_1O' e a sua perpendicular, esta intersesta DD' em D_1 . Vamos agora por rotação estabelecer a relação entre as duas parábolas. Projeta-se D_1 ortogonalmente sobre a perpendicular em B a AB definindo D_1r e traça-se o arco de centro B que intersesta a projeção de D em direção paralela à anterior em D_r . Em seguida traça-se a reta BD_r que define o ângulo da rotação necessário. Rodando V_1r em

ângulo igual determina-se Vr e traçando a paralela a AB obtém-se o vértice V da parábola pretendida sobre o eixo. Para determinar o foco da parábola traça-se AP , sendo P ponto médio de $A'V$, e a sua perpendicular em P que intersecta o eixo no foco F .

5.1.4.2. PARÁBOLA DEFINIDA POR QUATRO VÉRTICES DE UM QUADRILÁTERO COM DOIS LADOS NÃO PARALELOS E OS OUTROS DOIS PARALELOS E DE DIFERENTE DIMENSÃO

Vamos conjugar o traçado anterior com a propriedade da parábola descrita em LIMING (1979, 120, Fig. 24), e que é a expressão de um alargamento das propriedades das cónicas, que já nos é dado por Apolónio, ou seja, que as propriedades das cónicas são generalizáveis aos cones retos e oblíquos, e, logo, às cónicas de diâmetros conjugados, ou, no caso da parábola, às cordas com extremos equidistantes relativamente a uma paralela ao eixo, mas a que a corda não é perpendicular.

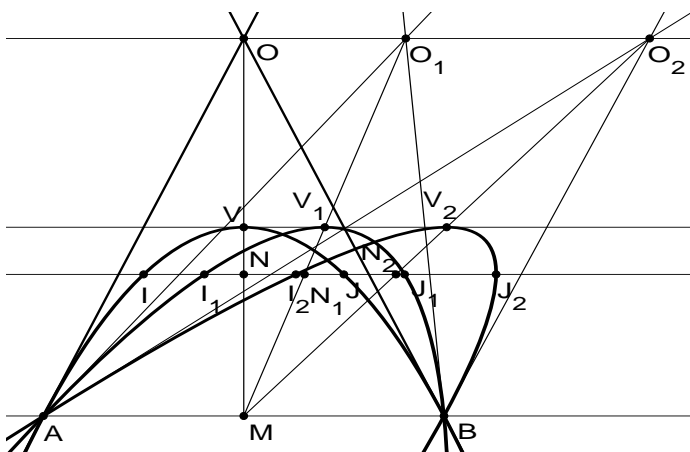


Fig. 5.30 – Propriedade da parábola

Vamos utilizar como auxiliar uma parábola qualquer que passe igualmente nos vértices do maior lado paralelo do quadrilátero e cujo eixo seja perpendicular a esse segmento. Considerando que pela propriedade atrás referida os outros dois pontos distam da reta que une os pontos médios das duas paralelas o mesmo que os pontos de uma terceira parábola que passe nos mesmos dois pontos atrás referidos, com eixo perpendicular, e cujo vértice se situaria na intersecção com a tangente à parábola pretendida paralela aos dois lados paralelos, resta-nos rodar os pontos da parábola auxiliar, à mesma distância, até coincidirem com os pontos respetivos da terceira parábola. Com igual rotação do vértice obtém-se a tangente pretendida e o quinto ponto da parábola, o que permite a sua determinação.

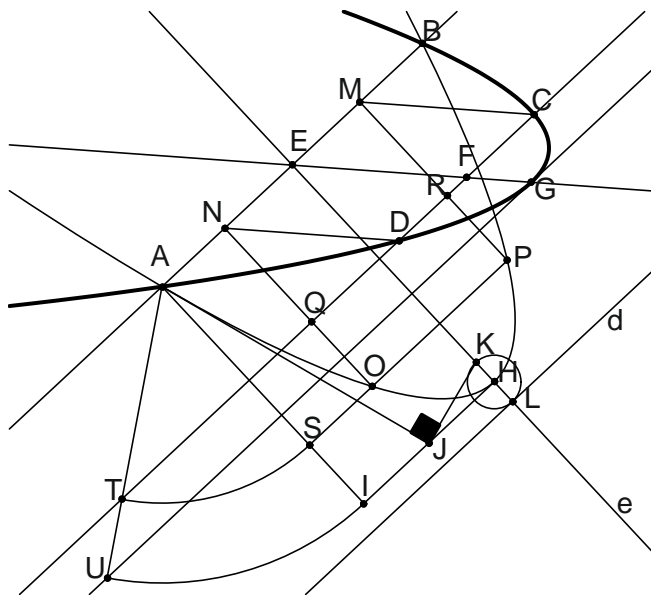


Fig. 5.31 – Parábola por quatro pontos em trapézio escaleno

5.1.4.3. PARÁBOLAS DEFINIDAS POR QUATRO PONTOS QUE DEFINEM UM QUADRILÁTERO CONVEXO SEM LADOS PARALELOS

Este problema não se encontra resolvido na literatura, do ponto de vista dos traçados em geometria plana embora, pelo seu interesse prático, seja abordado através da geometria analítica em LIMING (1979, 182 e 277). Neste caso **há duas parábolas que passam nos quatro pontos**. Relativamente ao ponto de intersecção das diagonais do quadrilátero, os vértices das duas parábolas situam-se nas mesmas direções e sentidos que as intersecções das retas que contêm cada dois lados opostos do quadrilátero.

Assume neste contexto particular relevância a determinação das direções dos eixos das duas parábolas. Para tal, procedeu-se a um método de investigação que descreveremos detalhadamente, pois dele decorreu a resolução do problema, mas também porque permitiu conclusões importantes relativas aos feixes de cónicas como veremos.

Vamos utilizar como fundamento auxiliar uma propriedade da parábola descrita em RICHTER-GEBERT (2011, 22, fig. 1.15), por responder a um problema concreto detetado na investigação e que resulta de uma versão degenerada do teorema de Pascal.

A propriedade descrita consiste em, se considerarmos quatro pontos sequenciais numa parábola A, B, C e D e se por B e C fizermos passar paralelas ao eixo da parábola e as intersetarmos com as diagonais do quadrilátero, a reta que passa nos dois pontos de intersecção E e G é paralela a AD .

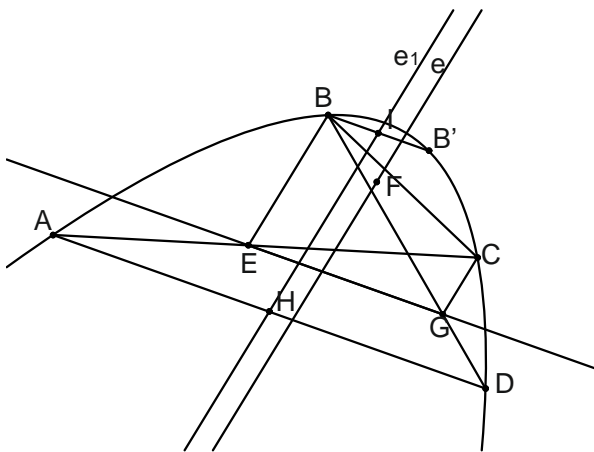


Fig. 5.32 – Propriedade da parábola enunciação por Richter-Gebert

Inversamente, se só conhecermos os quatro pontos das parábolas e traçarmos uma paralela a um dos lados maiores do quadrilátero, de tal forma que sejam paralelos os segmentos que unem os outros dois pontos das parábolas com as intersecções desta paralela com as diagonais do quadrilátero, obtém-se a direção do eixo de uma das parábolas. Se traçarmos uma reta com esta direção, a passar no ponto médio da corda à qual fizemos passar a paralela podemos através de cordas paralelas a passar pelos pontos conhecidos encontrar outros pontos da parábola nessas cordas. Estes pontos são os simétricos dos pontos dados relativamente à intersecção do diâmetro paralelo ao eixo com cada corda respetiva. Recorde-se que é suficiente um quinto ponto para se definir a parábola.

O problema, de facto, é que não se conhece as direções dos eixos pelo que se tem de proceder indiretamente. Dito de outra forma, se fizermos uma paralela qualquer a AD esta intersesta as diagonais em pontos que, em regra, não definem retas BE e GC paralelas entre si, logo, não são paralelas ao eixo. Então vamos determinar o lugar geométrico dos pontos de intersecção das duas retas e tirar conclusões.

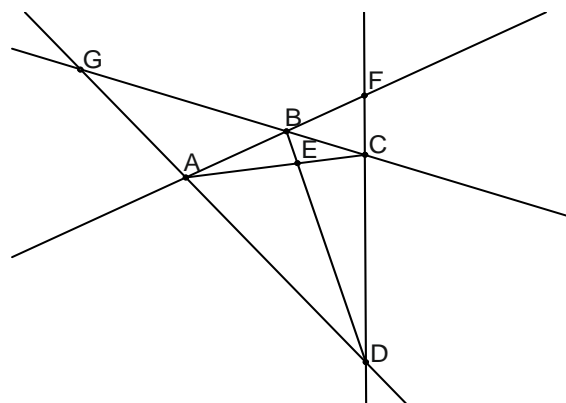


Fig. 5.33 a) – Parábola por 4 pontos em quadrilátero convexo (1ª fase)



Então vamos iniciar o processo de resolução estabelecendo o quadrilátero completo definido pelos pontos A, B, C e D designando por E, F e G os pontos de intersecção das retas respetivas.

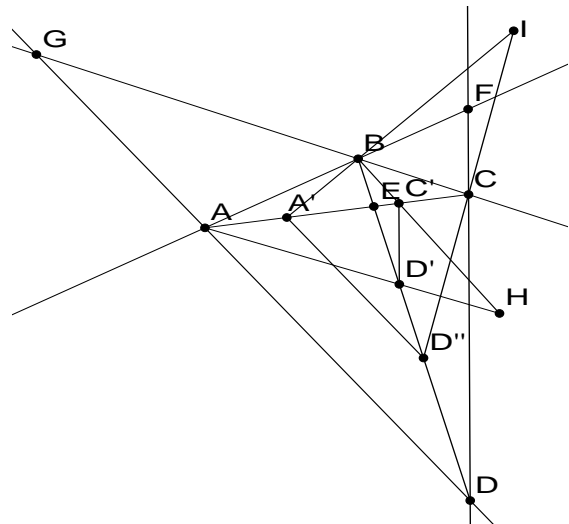


Fig. 5.33 b) – Parábola por 4 pontos em quadrilátero convexo (2ª fase)

Traçou-se $C'D'$ paralela a CD e a intersecar as diagonais AC e BD . BC' e AD' não são paralelas, logo não têm a direção do eixo, antes se intersecam em H . Depois traçou-se $A'D''$ paralela a AD e a intersecar as mesmas diagonais. Novamente BA' e CD'' não são paralelas antes se intersecam em I . Se utilizarmos traçados a lápis e papel pode-se repetir o processo para diferentes paralelas a CD e AD para tentar obter, através das diferentes posições de H e I conclusões sobre a direção do eixo.

Por geometria dinâmica foi possível concluir que H e I descrevem hipérbolas sendo que a descrita por H passa em E, B, G e A . A descrita por I passa por F, C, B e E .

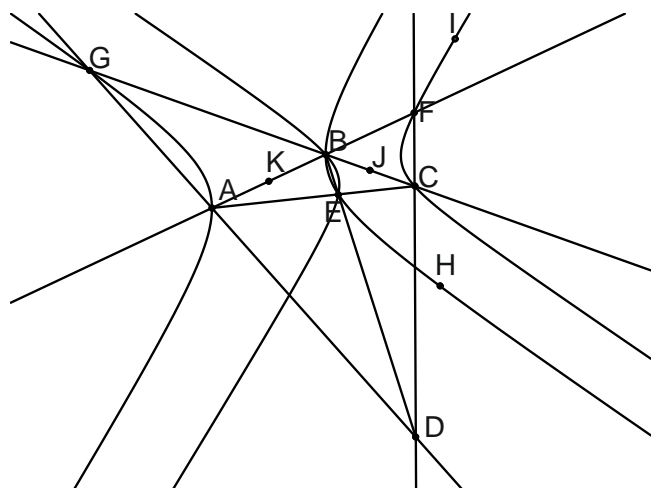


Fig. 5.33 c) – Parábola por 4 pontos em quadrilátero convexo (3ª fase)

Recordemos que cinco pontos definem uma cónica, logo, cada uma das hipérboles está definida. Por outro lado, pela configuração das duas hipérboles surgiu a hipótese de as assíntotas delas serem paralelas, o que se tornou o objetivo de investigação seguinte.

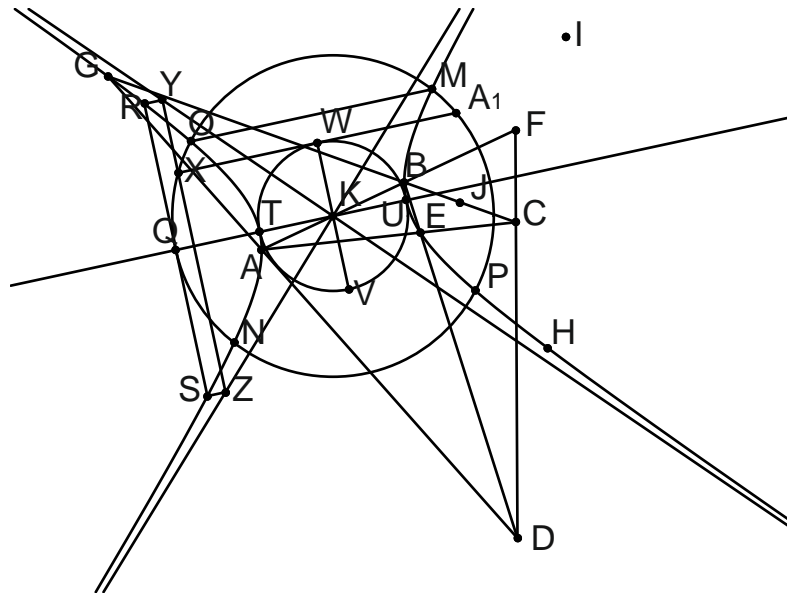


Fig. 5.33 d) – Parábola por 4 pontos em quadrilátero convexo (4ª fase)

Definidas as hipérboles é possível pelos métodos descritos no terceiro capítulo determinar o centro, eixos e assíntotas de cada uma delas. Na figura apresentamos o procedimento relativo à hipérbole descrita pelo ponto H em geometria dinâmica. Sendo AB um diâmetro da hipérbole, o seu ponto médio K é o centro. Traçou-se seguidamente a circunferência de raio qualquer que intersesta a hipérbole em M, N, O e P . OM define uma paralela ao eixo transverso. Traça-se por K a reta que contem o eixo transverso, a qual intersesta a hipérbole em T e U , vértices da hipérbole, o que permite traçar a circunferência de gola TU e a perpendicular a TU em K que intersesta a circunferência em V e W . Por outro lado, a circunferência de raio KM intersesta a direção do eixo transverso em Q . Traçando em Q a perpendicular à direção do eixo obtém-se na intersecção com a hipérbole P e S . Traçando por W uma paralela ao eixo transverso esta intersesta a circunferência de raio KM em X . Agora por X fazemos passar uma perpendicular ao eixo transverso e projetando ortogonalmente sobre ela P e S temos Y e Z que são pontos das assíntotas.

Então as assíntotas são ZK e YK . Repete-se o processo para a hipérbole descrita pelo ponto I .

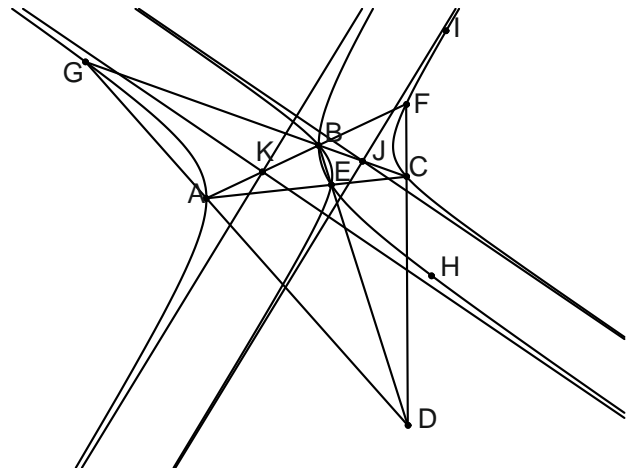


Fig. 5.33 e) – Parábola por 4 pontos em quadrilátero convexo (5ª fase)

Conclui-se que as assíntotas das duas hipérboles são paralelas. Então está encontrada a direção dos eixos das duas parábolas, que são as mesmas das assíntotas.

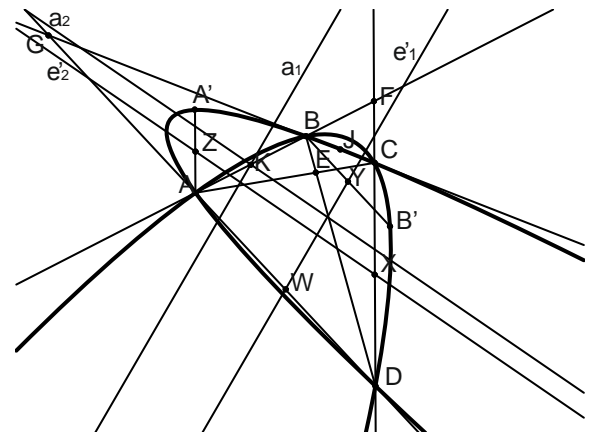


Fig. 5.33 f) – Parábola por 4 pontos em quadrilátero convexo (6ª fase)

Determinada a direção dos eixos é possível, pelo processo descrito, determinar as duas parábolas pretendidas e, indiretamente os próprios eixos. Assim por W , ponto médio de AD , faz-se passar $e'1$ paralela a $a1$ e por B uma paralela a AD , determinando-se sobre ela B' , simétrico de B relativamente a Y que é a intersecção da paralela com $e'1$. B' é o quinto ponto para definir a parábola. Para determinar A' procede-se de forma similar o que permite definir a segunda parábola.

Por outro lado, dada a existência de duas hipérboles cujas assíntotas são paralelas e paralelas aos eixos das parábolas fez levantar a hipótese de se encontrar um procedimento expedito para determinar os próprios eixos das parábolas. Foram testadas várias hipóteses para ponto de intersecção destas tendo surgido uma terceira hipérbole.

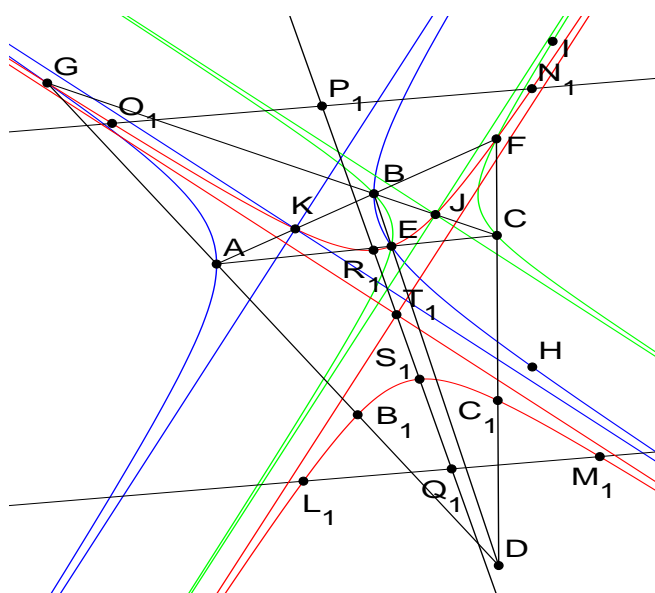


Fig. 5.34 – A terceira hipérbole

De todas as hipóteses testadas a que se aproximou mais do resultado pretendido, não definindo, no entanto, os eixos das parábolas é a que apresentamos a vermelho, sendo as hipérboles a azul e a verde as duas iniciais. De notar que esta hipérbole fica definida pelos pontos G, K, E, J e F , todos pertencentes ao mesmo ramo. Paralelamente, por geometria dinâmica, comprovou-se que o outro ramo da hipérbole passa igualmente pelos pontos B_1 e C_1 , pontos médios de AD e CD . Ou seja, **a hipérbole é definida pelos pontos médios dos lados do quadrilátero e pelas intersecções de cada par de lados opostos do quadrilátero completo.**

Para determinar T_1 , o centro da hipérbole, traçou-se duas retas paralelas que definiram as cordas L_1M_1 e N_1O_1 , cujos pontos médios são P_1 e Q_1 que definem a reta que contem o diâmetro conjugado R_1S_1 , sendo o seu ponto médio o centro da hipérbole T_1 . Esta terceira hipérbole é particularmente relevante.

Considerando cada ponto da terceira hipérbole como centro da cónica não parábola, foi possível concluir que os quatro pontos dados definiam uma cónica, sendo que os pontos de um ramo da hipérbole são centros das elipses que passam nos quatro pontos e que o outro ramo é centro das hipérboles que passam igualmente nos quatro pontos.

Sendo as parábolas discriminantes projetivos das cónicas, e considerando que existem duas, tal significa que o feixe de cónicas a passar pelos quatro pontos é constituído por duas sequências diferentes de elipses e hipérboles, cada uma com as direções dos dois eixos das parábolas. Assim, vamos seguidamente abordar o tema dos feixes de cónicas e procurar um processo de determinação expedita dos eixos das parábolas.



5.2. FEIXE DE CÓNICAS POR QUATRO CONDIÇÕES

Lembre-se que os gregos já tinham provado que cinco pontos definem uma cónica. A propósito confirme-se com APOLLONIUS; HEATH (1896, cli-clvi). Posteriormente foi demonstrado que por cinco condições, pontos ou tangentes nesses pontos, igualmente se define uma cónica.

LIMING (1979, 181-182) demonstra, a partir da geometria analítica, que por quatro pontos podem passar no máximo duas parábolas e que por três pontos e a tangente num deles podem igualmente passar duas parábolas desde que os dois pontos se situem no mesmo lado relativamente à tangente.

De facto, o estudo que conduzimos até à data, do ponto de vista gráfico, já permitiu concluir que, em diferentes circunstâncias, por quatro pontos podem passar zero, uma ou duas parábolas e que nessas diferentes circunstâncias, sendo as parábolas discriminantes podem existir feixes de elipses e ou hipérbolas ou ainda cónicas degeneradas.

Por outro lado, no caso dos quatro pontos dados para definir a parábola definirem um quadrilátero convexo sem lados paralelos, constatou-se uma evidente relação de pontos específicos do quadrilátero descrito designadamente os de intersecção dos pontos significativos do quadrilátero completo e dos pontos médios dos lados do quadrilátero. Para verificar se tal é constante noutras posições relativas dos quatro pontos, por geometria dinâmica, foi possível constatar que existia coincidência com o caso dos pontos descreverem um quadrilátero côncavo.

Paralelamente comprovou-se que tal corresponde a um conjunto de propriedades da relação de um triângulo e um ponto interior a este com uma elipse, descritos em RICHTER-GEBERT (2011, 368-373) e que desenvolve em geometria projetiva, com contexto tanto de geometria euclidiana como não euclidiana, o teorema do círculo por nove pontos. Este enuncia que, se determinarmos o ortocentro de um triângulo, ou seja, o ponto de intersecção das perpendiculares aos lados passando nos vértices opostos, há uma circunferência que passa nos três pés das perpendiculares, nos três pontos médios dos lados do triângulo e nos três pontos médios entre o ortocentro e cada vértice do triângulo. Aplicando uma transformação em geometria projetiva baseada nos teoremas de Desargues e Pascal e no princípio da transferência de Hesse, e com recurso à geometria dinâmica, Richter-Gebert concluiu que, se o ponto não for o ortocentro a curva descrita é uma “cónica”. Salientamos que Richter-Gebert designa genericamente por cónica, apesar de a curva apresentada ser uma elipse. Salientamos igualmente que, se o ponto já não é o ortocentro então pode ser um ponto qualquer. Foi o que tentámos confirmar a partir do teorema de Richter-Gebert considerando como pontos dados A , B , C e D .

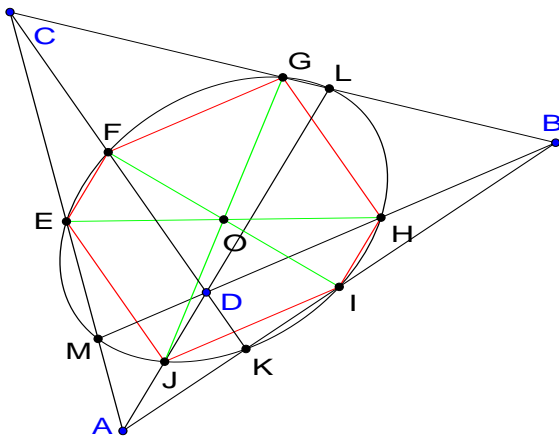


Fig. 5.35 – Teorema descrito por Richter-Gebert

De notar que os nove pontos de Richter-Gebert que descrevem a elipse, ou seja, os três de intersecção das retas que passam em D com os lados do triângulo e os seis pontos médios dos lados do triângulo e dos segmentos que unem D aos vértices, confirmam o que obtivemos, por geometria dinâmica, relativos aos quatro pontos por quadrilátero convexo, e depois, mudando os quatro pontos dados da que designámos por terceira hipérbole para um quadrilátero côncavo, ou seja, um triângulo com um ponto interior.

Continuando a exposição do teorema exposto por Richter-Gebert dele conclui-se que os seis pontos médios descrevem um hexágono, a vermelho na figura, cujos lados opostos são paralelos pelo que os segmentos que unem os vértices opostos do hexágono definem o centro da elipse, apesar de tal não ser expressamente referido por Richter-Gebert, dado o contexto, antes o designando como centro da perspetividade entre os dois triângulos definidos um, pelos pontos médios do triângulo $[ABC]$, e o outro, pelos pontos médios de DA , DB e DC . Esta propriedade permite um método expedito para determinar o centro da cónica tanto neste caso como no caso de os quatro pontos dados descreverem um quadrilátero convexo sem lados paralelos.

Ora tais propriedades são inteiramente compatíveis com as que detetamos no problema da parábola. Por outro lado, a parábola não é uma cónica central. Como foi comprovado por geometria dinâmica, ao modificar a posição de D para fora do triângulo a cónica tornou-se uma hipérbole.



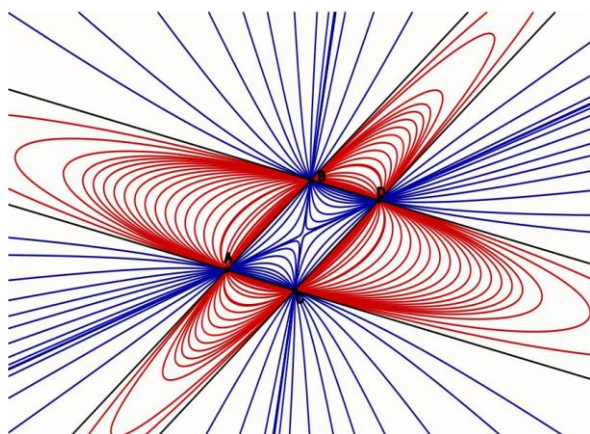


Fig. 5.36 a) – Feixe por paralelogramo

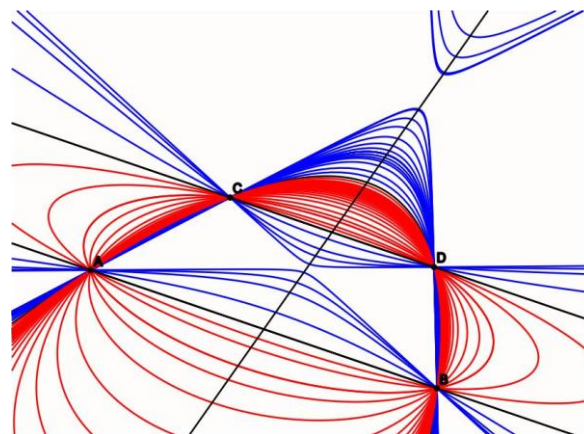


Fig. 5.36 b) – Feixe por trapézio

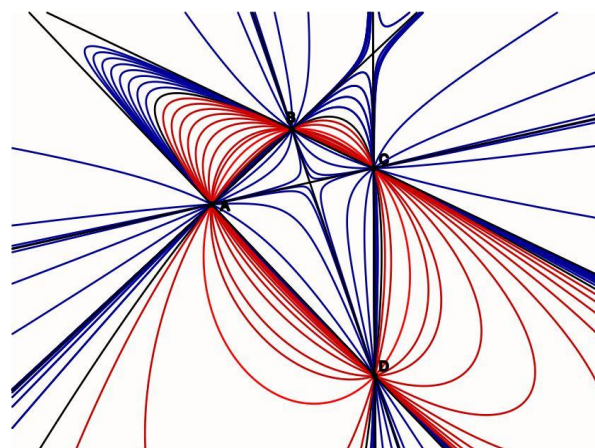
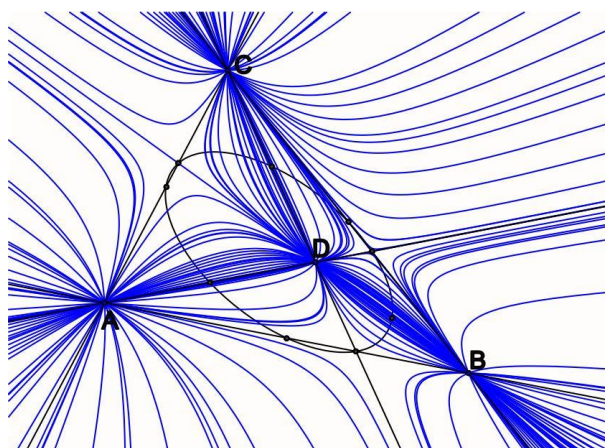


Fig. 5.36 c) – Feixe por quadrilátero côncavo Fig. 5.36 d) – Feixe por quadrilátero convexo

Conclui-se, do conjunto das propriedades descritas agora e das relativas à parábola por quatro pontos, que **os pontos da cónica que passa pelos seis pontos médios entre quaisquer quatro pontos dados e pelas intersecções de cada par de retas opostas no quadrilátero completo definido pelos quatro pontos são centros das cónicas que passam nos quatro pontos.** Ou seja, as cónicas de um feixe que passa por quatro pontos têm centro numa cónica, real ou degenerada, que passa nos pontos médios de todos os segmentos entre os quatro pontos e também pelas intersecções dos lados opostos do quadrilátero completo definido pelos quatro pontos.

Por outro lado, o centro da cónica descrita pelo feixe das cónicas que passam nos quatro pontos dados é definido pela intersecção das retas que passam nos

pontos médios dos lados opostos do quadrilátero completo descrito pelos quatro pontos.

Tal permitiu-nos construir todas as hipóteses de constituição de feixes de cónicas por quatro pontos.

Quando os quatro pontos dados são vértices de um quadrado, um retângulo ou paralelogramo, a cónica que define os centros degenera no ponto de intersecção das diagonais do quadrilátero. Dentro do quadrilátero só existem pontos de hipérbolés. Fora do quadrilátero, mas entre cada par de retas paralelas que contêm os lados do quadrilátero só existem pontos de elipses e fora dos dois pares de paralelas só existem pontos das hipérbolés. Constituem-se assim como discriminantes os dois pares de retas paralelas como degeneradas.

Quando os quatro pontos dados são vértices de um trapézio, a cónica que define os centros degenera igualmente no ponto de intersecção das diagonais e na reta que passa nesse ponto e pelo ponto de intersecção dos lados do trapézio. São discriminantes a parábola e as retas que contêm os lados do trapézio.

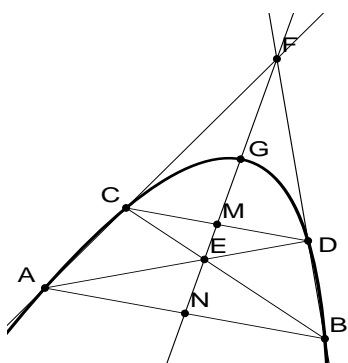


Fig. 5.37 – Propriedade da parábola que passa nos quatro vértices de um trapézio

Por outro lado, neste caso, foi comprovado que **a parábola passa no ponto G médio da distância entre o ponto E de intersecção das diagonais e o ponto F de intersecção das retas que contêm os lados do trapézio**, o que é uma propriedade derivada do Teorema de Fermat relativo à parábola e que igualmente não encontramos descrita na literatura.

Quando os quatro pontos dados definem um quadrilátero côncavo então só existem hipérbolés a passar nos quatro pontos e a elipse que define os centros passa, como se demonstrou, nos pontos médios dos segmentos entre os quatro pontos. Quando os quatro pontos descrevem um quadrilátero convexo sem lados paralelos são discriminantes as duas parábolas e os dois pares de retas definidos pelos lados opostos do quadrilátero. A cónica



que define os centros é uma hipérbole sendo que o ramo da hipérbole que contém os centros das elipses é o que passa nos pontos médios dos dois lados maiores do quadrilátero e os pontos do ramo da hipérbole que passa nos pontos médios dos dois lados menores do quadrilátero são centros de hipérbolés.

Quando os quatro pontos definem um quadrilátero convexo existem, como se viu duas soluções em parábola, cujos eixos têm a direção das assíntotas da hipérbole que é descrita pelos centros das outras cónicas solução. Por outro lado, os pontos de um dos ramos da hipérbole são centros das elipses que passam nos quatro centros dados e os pontos do outro ramo são centros das hipérbolés que passam nos quatro pontos.

QUADRO RESUMO

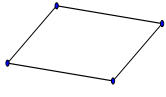
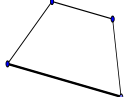
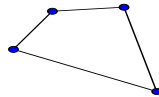
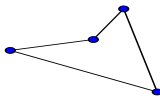
FEIXE DE CÓNICAS QUE PASSA				
POR QUATRO PONTOS	4 pontos em paralelogramo	4 pontos em trapézio	4 pontos em quadrilátero convexo sem lados paralelos	4 pontos em quadrilátero côncavo
Cónicas reais a passar nos quatro pontos	Elipses. Hipérbolés.	Uma parábola. Elipses. Hipérbolés.	Duas parábolas. Elipses. Hipérbolés.	Hipérbolés.
Cónicas degeneradas	Dois pares de retas paralelas e um par de retas concorrentes.	Um par de retas paralelas e dois pares de retas concorrentes.	Três pares de retas concorrentes.	Três pares de retas concorrentes.
Locus dos centros das cónicas centrais	Um ponto.	A reta que passa nos pontos médios das bases do trapézio e o ponto de intersecção das diagonais	Uma hipérbole. O seu ramo que contém os pontos de intersecção dos 3 pares de retas é o Locus dos centros das hipérbolés e o outro é o Locus dos centros das elipses.	Uma elipse.
Pontos que definem o Locus dos centros	Não se aplica.	Pontos médios das bases do trapézio.	Seis pontos médios das distâncias entre os quatro pontos, e os três pontos de intersecção dos pares de retas concorrentes.	Seis pontos médios das distâncias entre os quatro pontos, e os três pontos de intersecção dos pares de retas concorrentes.
Direção do eixo da(s) parábola(s) discriminantes	Não se aplica.	A reta que passa nos pontos médios das bases do trapézio.	As assíntotas da hipérbole Locus dos centros.	Não se aplica.
Centro da cónica Locus dos centros			Intersecção dos segmentos que unem os seis pontos médios dos lados opostos.	Intersecção dos segmentos que unem os seis pontos médios dos lados opostos.

Fig. 5.38 – Feixes de cónicas a passar por quatro pontos – Quadro resumo

Os problemas relativos aos feixes de cónicas e à intersecção de cónicas têm sido abordados na literatura científica recente com abordagem por geometria projetiva. É o caso de PAMFILOS (2009, 229-257) que se refere ao estabelecimento de feixes bitangentes, ou de ALPERIN (2010, 15-20) sobre o feixe de Poncelet de hipérbolas retangulares ou ainda DERGIADES (2010, 41-53) sobre um problema específico de cónicas tangentes a dois dos lados de um triângulo, de entre diversos outros.

Não obstante o tema dos feixes de cónicas ultrapassar o âmbito deste trabalho, a sua relevância foi comprovada para a resolução de problemas concretos de determinação de cónicas em condições específicas, designadamente no que tem a ver com reconhecimento de imagem, pelo que o referimos e apontamos igualmente como caminho de exploração futura.

De notar que a literatura referente aos feixes de cónicas por quatro pontos, com utilização nos algoritmos informáticos de reconhecimento de imagem plana refere-se a uma equação do sexto grau pelo que é de admitir que as propriedades descritas permitam agilizar tais procedimentos com impacto em tão diferentes aplicações como a imagiologia médica ou os programas informáticos de reconhecimento de imagens em bases de dados.

5.3. FAMÍLIAS DE CÓNICAS

Designam-se por famílias de cónicas os conjuntos de cónicas que partilham propriedades comuns. O mais estudado, pelas aplicações práticas que permitiu, é o caso das **cónicas confocais ou homofocais**, designações que encontrámos indistintamente usadas na literatura, e que são as cónicas que partilham os mesmos focos.

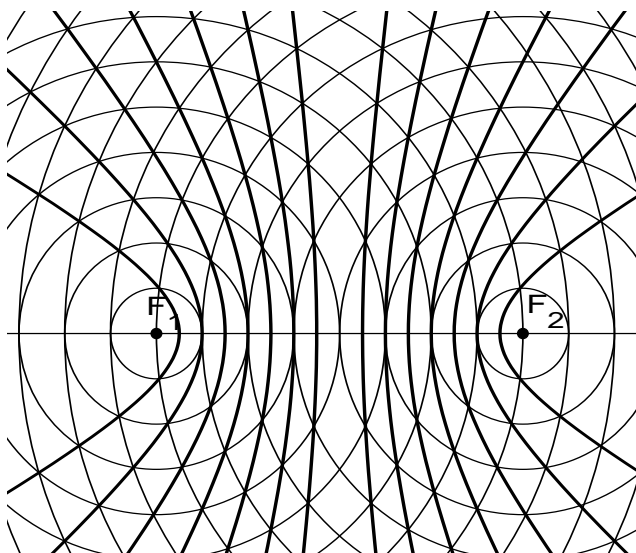


Fig. 5.39 – Hipérbolas homofocais e localização por radar



A figura refere-se a um processo de desenhar hipérbolas de que se conhecem os focos e o eixo transversal. Por outro lado serve como ilustração de um sistema de interferência de ondas. Já na Segunda Guerra Mundial os primeiros sistemas de radares utilizavam a triangulação para obter posições exatas de aviões socorrendo-se destas famílias de hipérbolas homofocais. Medindo o tempo de resposta a duas antenas de radar era possível determinar qual a hipérbole que estava em causa. Medindo o tempo de resposta a uma terceira antena obtinham uma circunferência. A intersecção da hipérbole com a circunferência permitia saber qual a posição exata do objeto no espaço.

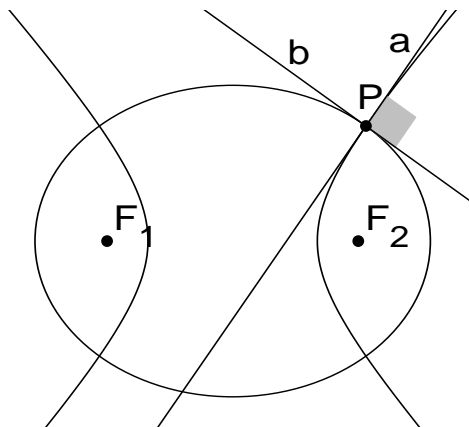


Fig. 5.40 – Propriedade das elipses e hipérbolas confocais

Em HILBERT; COHN-VOSSSEN (1999, 5) encontra-se a propriedade de, perante uma elipse e uma hipérbole homofocais, nos pontos de intersecção destas a tangente de uma curva é a normal da outra e vice-versa.

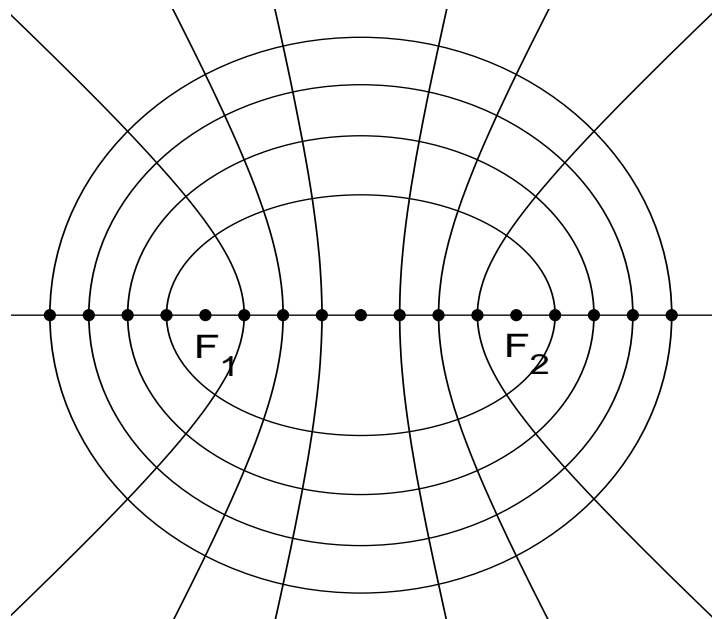


Fig. 5.41 – Elipses e hipérbolas homofocais

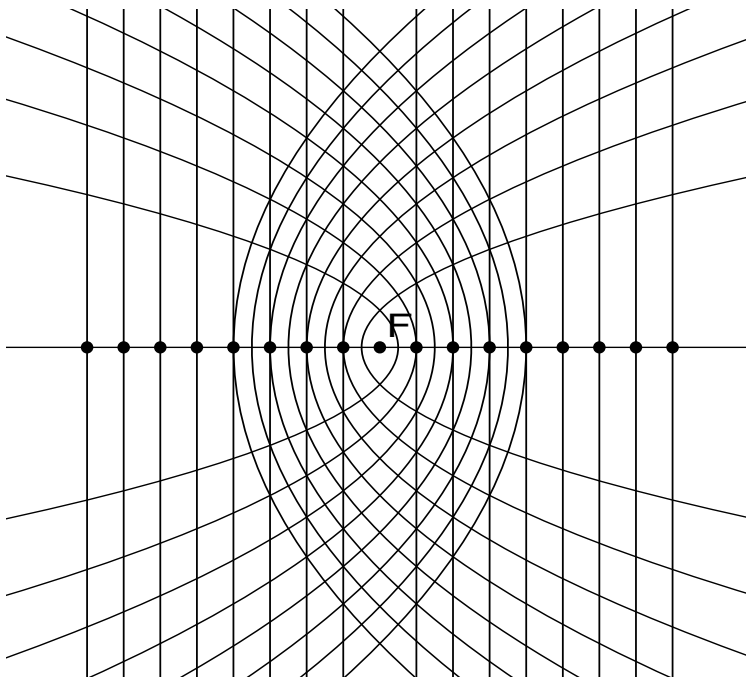


Fig. 5.42 – Parábolas confocais

As cónicas centrais, elipses e hipérbolas, pertencem a uma mesma família de confocais. Se considerarmos pontos das cónicas na reta que passa nos dois focos os pontos entre estes pertencem a hipérbolas e os pontos para cada um dos lados destes pertencem a elipses.

As parábolas confocais constituem dois feixes de direções opostas definidos pelos pontos de intersecção das diretrizes com o eixo das parábolas. Aqui estão apenas representadas parábolas com eixo comum a todas elas, sendo que qualquer direção do eixo é possível.

As cónicas confocais têm inúmeras utilizações práticas, existindo na literatura científica referências, por exemplo, no reconhecimento de imagem e calibração de câmaras, como é o caso de KIM; GURDJOS; KWEON (2010, 803-812).

Outros tipos de famílias de cónicas, para além das confocais, são por exemplo as geradas por secções em superfícies de revolução, ou de diretriz elíptica, com geratriz em curva cónica.



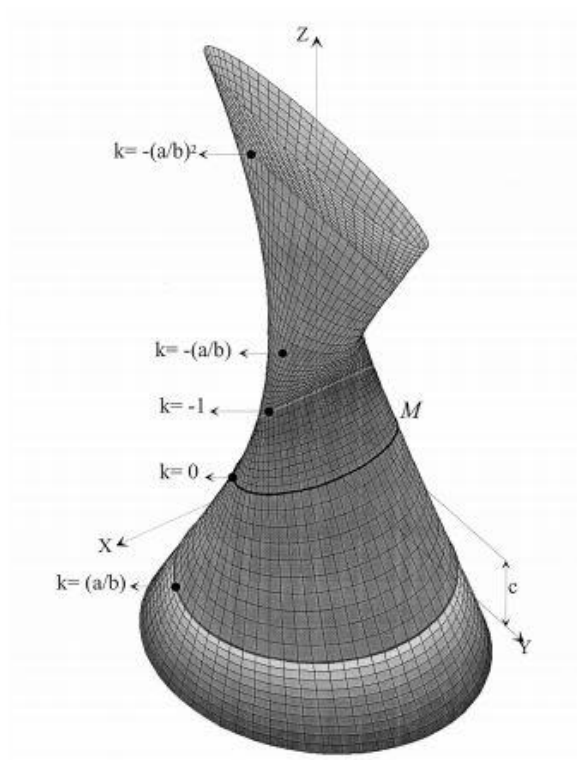


Figure 4

Fig. 5.43 – Família de elipses

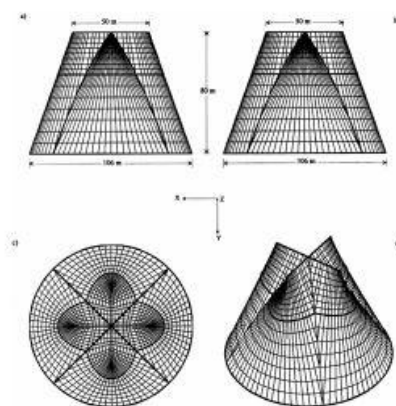


Figure 15

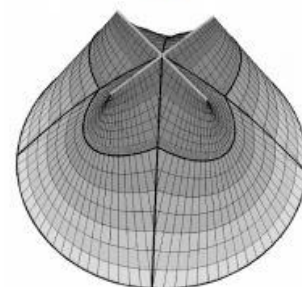


Figure 16

Fig. 5.44 – Projeto de Catedral

Em ZORRAQUINO; RODRÍGUEZ; MARTÍN (2001) apresenta-se uma família de cónicas cuja descoberta teve origem anos antes no estudo de um problema de tubagens em dinâmica de fluídos. Como resultado, foram geradas superfícies que permitem obter, por exemplo, elipses em planos sucessivos, paralelos ou não, e que admitem rotações transversais e longitudinais sendo apresentada uma solução alternativa para o projeto da Catedral Metropolitana do Rio de Janeiro.

5.4. CURVAS PARALELAS ÀS CÓNICAS

Outro tema recorrente na literatura científica, tanto do ponto de vista das abordagens teóricas como nas aplicações práticas, é o das curvas paralelas às cónicas, ou seja, o que na literatura de língua inglesa se designa por offset.

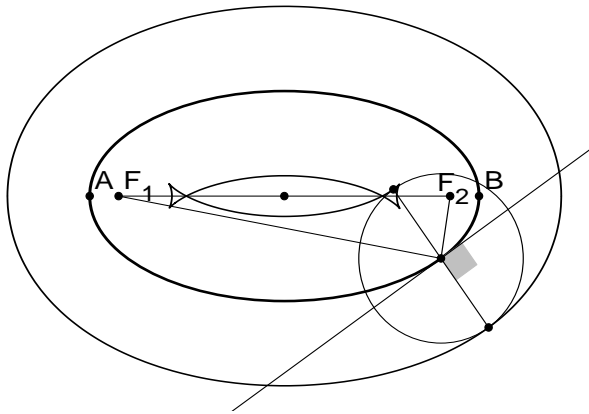


Fig. 5.45 – Curvas paralelas às elipses

São representadas duas paralelas a uma elipse, a curva central da figura, descritas por dois pontos equidistantes de cada ponto da cónica, descrevendo os contornos aparentes de um toro em projeção oblíqua da sua circunferência diretora.

De notar que a paralela interior tem uma configuração em dupla cauda de peixe que denuncia que não é uma cónica. Como demonstraremos seguidamente também a curva exterior não o é.

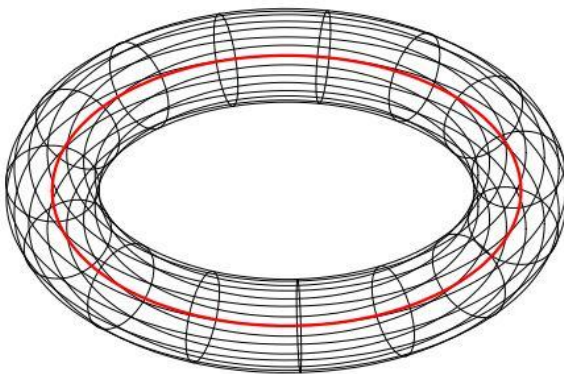


Fig. 5.44 – Toro gerado em CAD 3D

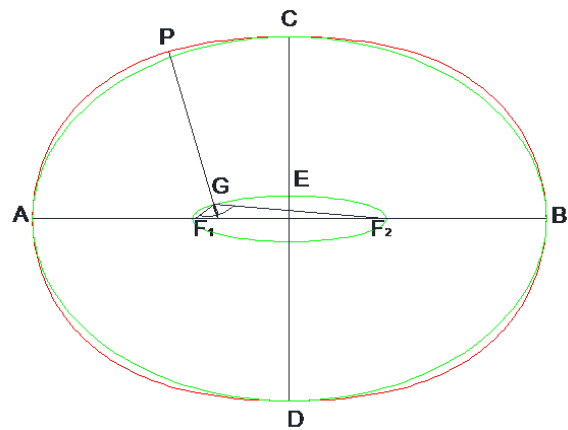


Fig. 5.45 – Elipse ACBD e curva de P

Na Fig. 5.45 a elipse menor, de cor verde, gera a paralela a vermelho. Traça-se uma elipse, a verde, com eixos iguais aos da curva paralela e comprova-se que as duas não coincidem, ou seja, as paralelas às cónicas não são cónicas, são **curvas toroidais**, designação que TEIXEIRA (1908, Tomo I, 359) atribui a Breton de Champ, relativamente às





paralelas às elipses e, aparentemente, atribui a si próprio a generalização às paralelas a todas as cónicas.

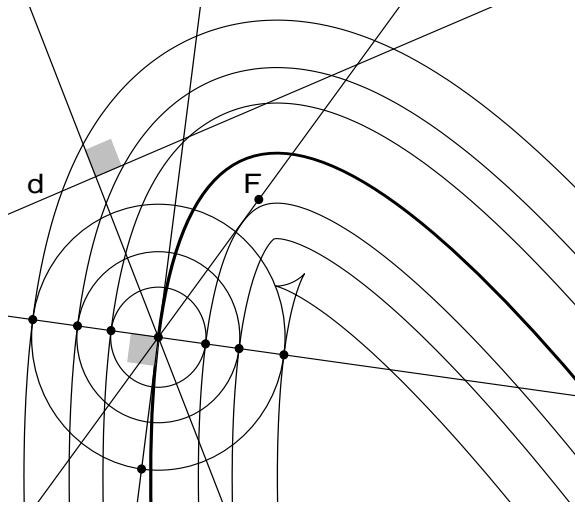


Fig. 5.46 – Curvas toroidais paralelas à parábola

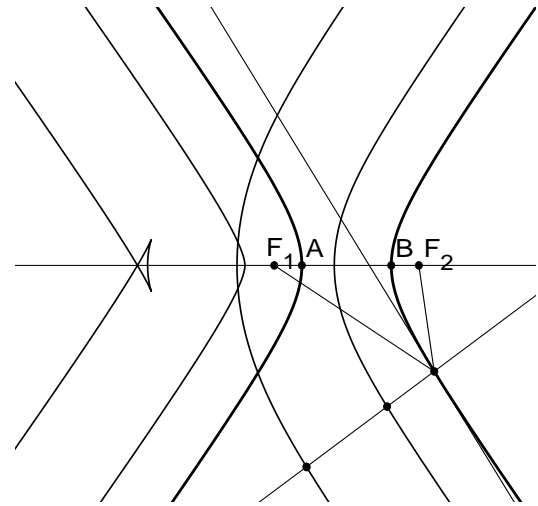


Fig. 5.47 – Curvas toroidais paralelas à hipérbole

As paralelas às parábolas e hipérbolos são igualmente curvas toroidais. De notar que a forma em cauda de peixe surge em todos os casos.

O tema das paralelas às curvas cónicas tem tido diversas abordagens teóricas e é o objeto de diferentes aplicações práticas. Um exemplo de análise teórica, com aplicação na determinação de offsets na computação gráfica é FAROUKI (1997, 301-313). Em FAROUKI; SEDERBERG (1995, 639-645) é estudado por geometria analítica o tema das paralelas a parábolas com vista à aplicação na computação gráfica. Nas aplicações práticas cita-se por exemplo VALENCIA; BEDOYA (2008, 31-43) que trata da utilização das paralelas às cónicas no torneado CNC de lentes e espelhos.

As questões de natureza geométrica também interagem com outras áreas do saber. Por exemplo, na discussão histórica sobre a construção dos circos romanos, com especial ênfase para o Coliseu de Roma, prevaleceu até agora a opinião maioritária de que têm forma oval com múltiplos centros. Não obstante, já foi provado, pelo menos em relação a alguns, que têm origem elíptica. O problema reside em que, sendo traçada a elipse inicial, as diversas paralelas que configuram o espaço deixam de ser elipses, mas se fosse demonstrada a origem elíptica, indo procurar a elipse original, estaríamos nos pontos iniciais da construção o que ajudaria a descrever o próprio processo construtivo.



5.5. CURVAS SIMILARES ÀS CÔNICAS

Com origem nas similitudes gráficas, as cónicas são, por vezes, confundidas com curvas similares. Um caso de semelhança gráfica é o das elipses e das ovais, em que, apesar de estas serem formadas por diversos arcos de circunferência com tangente comum nos pontos de tangência, sendo comum encontrar-se confusão entre estes diversos tipos de curva e a designação *oval* para designar indistintamente elipses e ovais.

Por outro lado, na matemática, sendo que as equações que representam analiticamente uma curva sejam do mesmo tipo das cónicas ou com expressão similar também se encontram designações que podem originar confusão. É o caso das *curvas parabólicas*, que não são, em regra, parábolas, mas a designação é genérica por a equação da parábola ser entendida como um caso particular das equações do tipo parabólico.

5.5.1. AS OVAIS

As **ovais** são construídas com quatro centros ou com qualquer número de centros, desde que em número par, traçando-se arcos sucessivos concordantes entre si. A concordância entre os arcos contíguos depende de terem a mesma tangente no ponto de junção. Para tal os dois centros dos dois arcos contíguos e o ponto de contacto pertencem à mesma reta. Apesar da sua semelhança gráfica com a elipse são curvas completamente distintas.

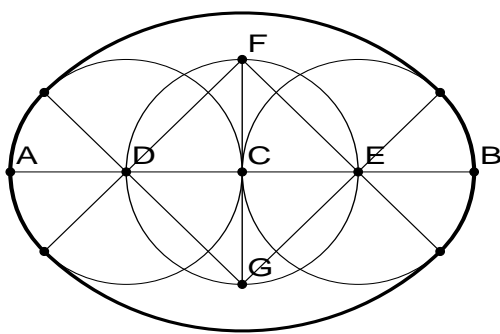


Fig. 5.48 – Oval de quatro centros

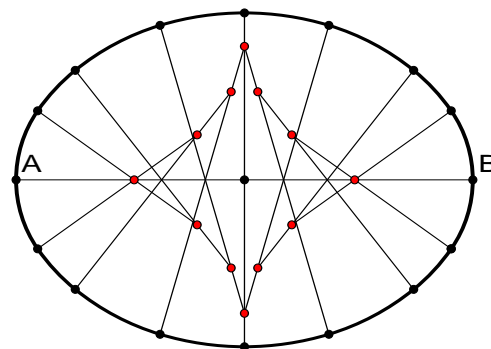


Fig. 5.49 – Oval de doze centros

5.5.2. PARÁBOLA E CATENÁRIA

A parábola e a catenária são curvas diferentes com forma gráfica muito similar o que levou a serem confundidas. Se suspendermos um cabo qualquer entre dois pontos este





toma a forma de uma **catenária** pelo seu peso próprio. Se nele suspendermos uma sobrecarga uniformemente distribuída o cabo assume a forma da parábola.

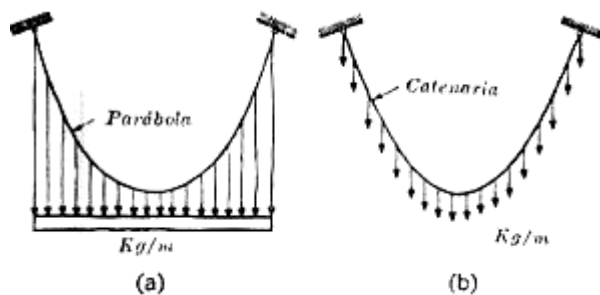


Fig. 5.50 – Cabo com e sem sobrecarga

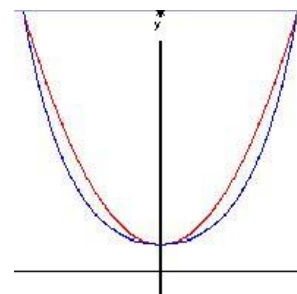


Fig. 5.51 – Parábola (vermelho) e catenária (azul)

A equação da parábola é $y^2=2px$ para $p>0$ e a da catenária é $y=(e^x+e^{-x})/2$.



Fig. 5.52 – Pavilhão Rheinstahl



Fig. 5.53 – Logo da ThyssenKrupp

O Pavilhão Rheinstahl, com projeto de Geert Köster e Dieter Stübing, e representante da indústria alemã na Feira de Hanover de 1955, presumivelmente em superfície cilíndrica gerada por uma catenária, esteve na origem do logotipo do grupo ThyssenKrupp.



5.5.3. CURVAS PARABÓLICAS

A equação da parábola é $y^2=2px$, para $p>0$.

Em matemática designam-se genericamente como **curvas parabólicas**, ou simplesmente **parábolas** todas as do tipo $y^{qp}=ax$, não obstante apenas algumas destas curvas, as com a equação acima referida, tenham as mesmas propriedades da parábola e só essas sejam graficamente parábolas.

São exemplos das curvas parabólicas as representadas a seguir:

$$Y^3=x \quad p=1 \quad q=3 \quad a=1$$

$$Y^{34}=x \quad p=4 \quad q=3 \quad a=1$$

$$Y^{45}=x \quad p=5 \quad q=4 \quad a=1$$

$$Y^{57}=x \quad p=7 \quad q=5 \quad a=1$$

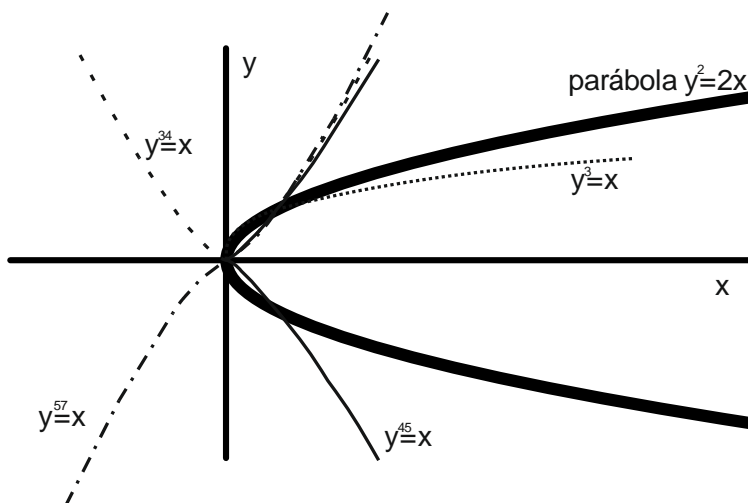


Fig. 5.52 – Curvas parabólicas

As definições e gráfico tiveram como referência TEIXEIRA (1909, Tomo II, 115-127) e foram adaptados de SHIKIN (1995, 274-277, fig. 330-334).

5.6. ANAMORFOSES DAS CURVAS CÓNICAS

Nestas anamorfoses considerámos do lado direito uma secção numa superfície cilíndrica de diretriz na elipse central e geratrizes paralelas ao plano frontal dando origem a uma outra elipse. Do lado esquerdo considerámos a secção num conoide definido pela





elipse central e por uma reta de topo e podemos constatar a transformação de uma elipse numa outra curva da qual muito dificilmente seria reconhecível a origem.

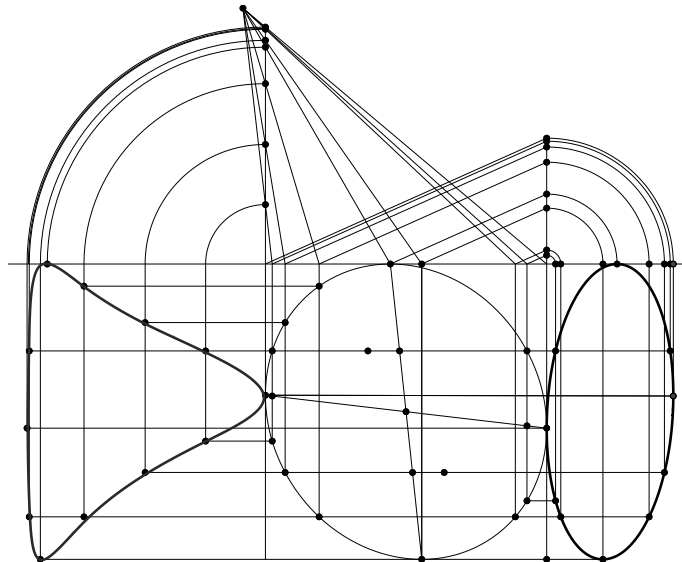


Fig. 5.53 – Anamorfoses de curvas cónicas

Por outro lado, a projeção de formas tridimensionais sobre um plano de representação transforma-as em planas. Logo, pode admitir-se como hipótese a explorar o estudo das transformações geométricas necessárias para transformar uma curva plana qualquer numa outra, com evidente vantagem, por exemplo, na restituição perspética, com aplicação hoje mais difundida no reconhecimento de imagem, e que hipoteticamente se pode transformar num tema de resolução mais expedita e de aprendizagem mais intuitiva.

Tal significa que as possibilidades de transformações geométricas das cónicas são inúmeras, com a conseqüente possibilidade de geração de novos tipos de curvas. Destaque-se que vulgarmente as anamorfoses de figuras planas foram entendidas como transformações geométricas planas das figuras. Não obstante, a geometria descritiva permite considerar que duas transformações planas, em diferentes planos, ortogonais entre si ou não, podem dar origem a novas figuras geométricas planas, ou dito de outra forma, em outros sistemas de projeção há uma infinidade de curvas derivadas das cónicas à espera de serem reconhecidas. Num universo complexo, e não necessariamente apenas tridimensional, esta abordagem das curvas pode ser útil.

Por outro lado, STINY (2006) é reflexo da investigação que é desenvolvida no MIT para, no âmbito da computação gráfica, se desenvolver um método de construção de imagens partindo das transformações geométricas básicas aplicadas a elementos básicos como pontos e linhas retas para geração de imagens complexas. Trata-se de uma abordagem que tem um ponto de partida, de certa forma, oposto ao da geometria fractal pois se nesta se parte da divisão e reprodução a uma escala inferior de uma entidade de partida, aqui parte-se de elementos o mais básicos possíveis para, por transformações geométricas sucessivas acrescentar novos elementos até chegar a uma realidade complexa.



Fig. 5.54 – Escultura do construtivista russo Naum Gabo

Nesta perspetiva, pode considerar-se que qualquer curva pode ser obtida por transformações geométricas das cónicas. Por outro lado, na criação estética o interesse desta abordagem é evidente. Recorde-se, a propósito, as abordagens estéticas dos construtivistas russos no início do século XX a partir das conceptualizações de novas formas com o desenvolvimento da geometria projetiva e surgimento da geometria não euclidiana. Confrontando-as com os modelos conceptuais recentes gerados por impressão 3D de modelos matemáticos encontramos, por um lado, uma evidente continuidade do suporte teórico mas, ao mesmo tempo, um imenso campo de exploração futura.

No exemplo, apresentamos um caso em que há uma evidente continuidade formal entre uma escultura de Naum Gabo e um modelo matemático que serve de suporte para a impressão 3D de uma forma que dá origem a uma lamparina de azeite em cerâmica e que encontramos em <http://www.instructables.com/id/3D-Printed-Ceramic-Oil-Lamp/>.



Fig. 5.55 – Lamparina de pavio por impressão 3D em cerâmica

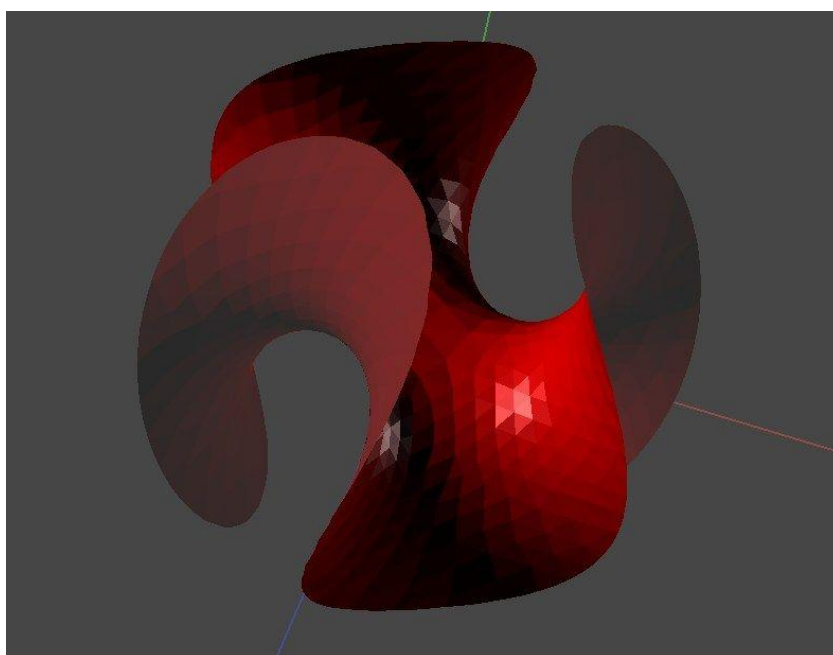


Fig. 5.56 – Modelo matemático de estudo para a lamparina

De LANGLOIS; DENAIN (1997) citamos, como outro exemplo, a utilização indireta da anamorfose de curvas desenvolvidas a partir das curvas cónicas, e aplicada à infografia.

O gráfico indica as transformações que a introdução do transporte ferroviário induziu no sul do Reino Unido e norte de França no inverno de 1992-93. Tal como é usual em diversos modelos de planeamento urbano e regional, foram determinados os centróides de cada região através de uma matriz em quadrícula e, depois, às linhas de quadrícula foi

aplicada a anamorfose resultante da diminuição do tempo de transporte entre cada dois centróides obtendo-se nova quadrícula formada por splines, curvas que, como se verá, se constroem a partir das cónicas, o que permitiu obter as transformações da fronteira da região considerada.

CARTOGRAPHIE EN ANAMORPHOSE

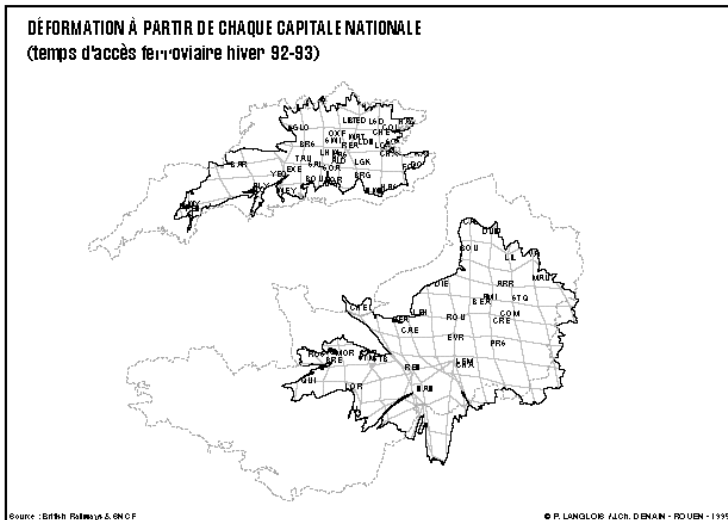


Fig. 5.57 – Anamorfose em infografia científica

5.7. NURBS, BÉZIER E SPLINES

Não obstante este tipo de curvas já ser conhecido e utilizado em diversas aplicações anteriormente, teve um exponencial crescimento de aplicação com a computação gráfica. Há no entanto alguma confusão de designações destas curvas, com origem em divergências de patentes de propriedade intelectual e industrial e com reflexos no próprio meio académico.

Assim, as curvas de Bézier são curvas polinomiais construídas por interpolação linear entre alguns pontos representativos, os pontos de controle. Em 1962, como engenheiro da Renault, Bézier criou um modelo de traçado de curvas suavizadas de transição com outras linhas tornando-se um dos pioneiros, especialmente em sistemas CAD/CAM, da representação de curvas e da modelagem sólida, geométrica e física. Para tal utilizou um algoritmo apresentado em 1957 por Casteljau, engenheiro da Citroen.

De notar, que o surgimento deste tipo de curvas corresponde ao início das preocupações, na indústria automóvel europeia, de utilização de linhas mais aerodinâmicas tanto por razões estéticas como por eficiência, o que veio a ser acompanhado mais tarde,



nos anos 70, pela indústria automóvel americana, depois do choque petrolífero criado a partir do encerramento do canal do Suez e acontecimentos posteriores. No entanto, foi argumentado na altura que a essência do processo já era conhecida, pois assentava na construção projetiva das curvas cónicas, método muito em voga na indústria aeronáutica americana, sobretudo a partir das aplicações militares, mas que teria portanto características, em diversos aspetos, de segredo militar e industrial, o que contribuiu para a referida guerra de patentes.

Não obstante, hoje parece haver consenso em considerar genericamente este tipo de curvas como **NURBS** que é o acrónimo de Non-Uniform Rational Based Splines. No entanto FARIN (1991, 153) considera como infeliz esta designação, desde logo, porque as B-splines são todas “não uniformes” e o “racional” dizer respeito à projeção no espaço afim.

De qualquer forma, as **B-splines** são curvas constituídas por diversos **segmentos** polinomiais justapostos topo a topo e com tangente comum nos pontos de junção dos segmentos. Quando as curvas segmento são usualmente de segundo, terceiro ou quarto grau, com a única restrição de todos os segmentos serem do mesmo grau, designam-se por B-splines. As curvas de segundo grau são designadas quádricas, as do terceiro grau são as cúbicas e as de quarto grau as quárticas. Então as B-splines são definidas pelo grau dos segmentos e pelo número destes.

Hoje são curvas utilizadas em diversas aplicações gráficas e em diversos formatos de imagem vetorial, tanto bi como tridimensionais. Este tipo de curvas pode originar superfícies, bastante utilizadas em modelagem tridimensional, animações, design de produtos, engenharia, arquitetura entre outras aplicações.

O que descreveremos seguidamente é conhecido como algoritmo de Boor, normalmente formulado algebricamente mas que aqui desenvolvemos graficamente. Por outro lado, este tópico foi aqui introduzido por na sua origem estarem, como veremos, as curvas cónicas.

Considere-se como pontos dados A , B e C de uma parábola em que a tangente t_3 em C é paralela a AB . Então M , ponto médio de AB , define com C uma reta com a direção do eixo da parábola. Se sobre ela definirmos I , sendo CM igual a CI , então I é o ponto de intersecção das tangentes em A e B . Para traçar o arco parabólico define-se sobre AI um determinado número de partes, no caso oito, e sobre IB define-se o mesmo número de partes na mesma direção do arco a traçar, ou seja, ACB .

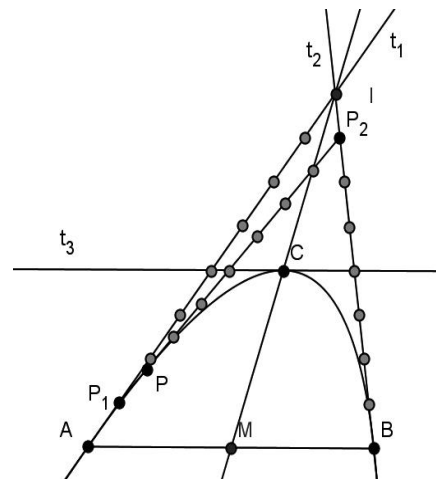


Fig. 5.58 – Determinação da quádrlica parabólica

Se traçarmos um segmento de reta do primeiro ponto em AI ao primeiro ponto de IB e o dividirmos no mesmo número de partes o segmento é tangente à curva e o seu primeiro ponto é o ponto da curva. Para obter os restantes pontos repetimos o processo para os segundos pontos e assim sucessivamente. Como veremos é possível criar em geometria dinâmica um modelo que permite obter todos os pontos da curva, sendo que no caso apresentado depende do número de frações utilizado.

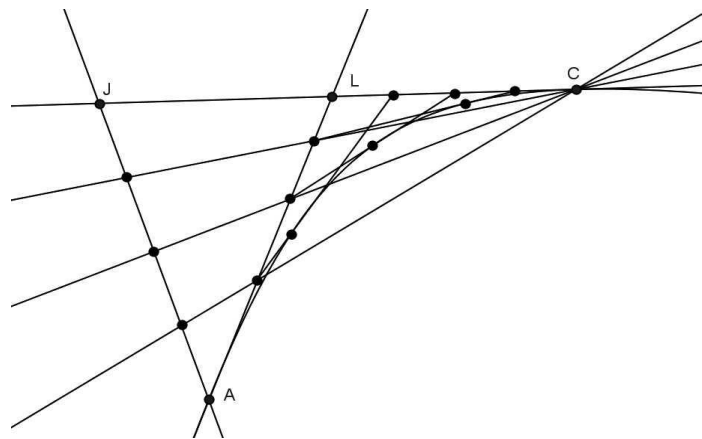


Fig. 5.59 – Determinação de quádrlica hiperbólica

Como variante da curva parabólica pode-se construir um arco hiperbólico, no caso de A a C , considerando AL a tangente em A e LC a tangente em C . Sobre a reta LC define-se um ponto qualquer J que define com A uma reta de controle. Se J coincidissem com L estaríamos perante um arco parabólico. Se J se situar para o lado oposto de C





relativamente a L estaremos perante um arco hiperbólico. Evidentemente com diferentes posições de J , do mesmo lado, obtêm-se os diferentes arcos hiperbólicos possíveis. Agora divide-se JA num determinado número de partes, no caso quatro, e LC no mesmo número de partes. Traçando as retas que unem cada parte de JA a C estas interseam LA em partes não iguais mas proporcionais. Depois procede-se da mesma forma que para a parábola, ou seja, o primeiro ponto de LA define com o primeiro ponto de LC um segmento que é a tangente, e este segmento dividido no mesmo número de partes tem como primeiro ponto um ponto da curva, repetindo-se o processo para obter os outros pontos.

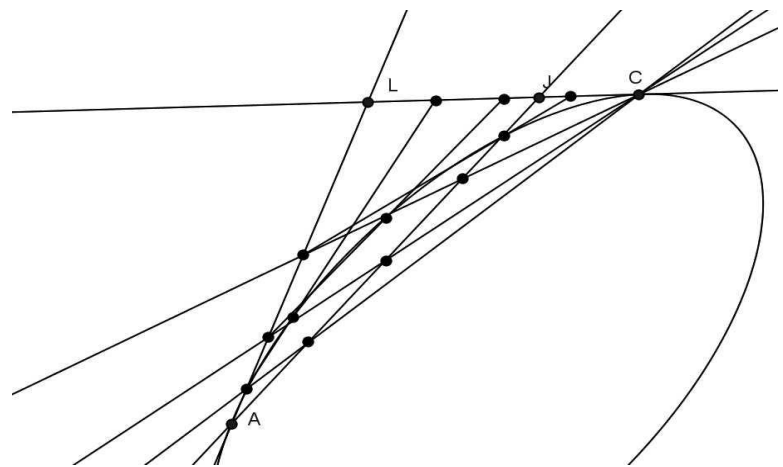


Fig. 5.60 – Determinação de
quádrica elíptica

Para obter curvas elípticas procede-se da mesma forma definindo J entre L e C e depois repetindo todo o processo descrito anteriormente.

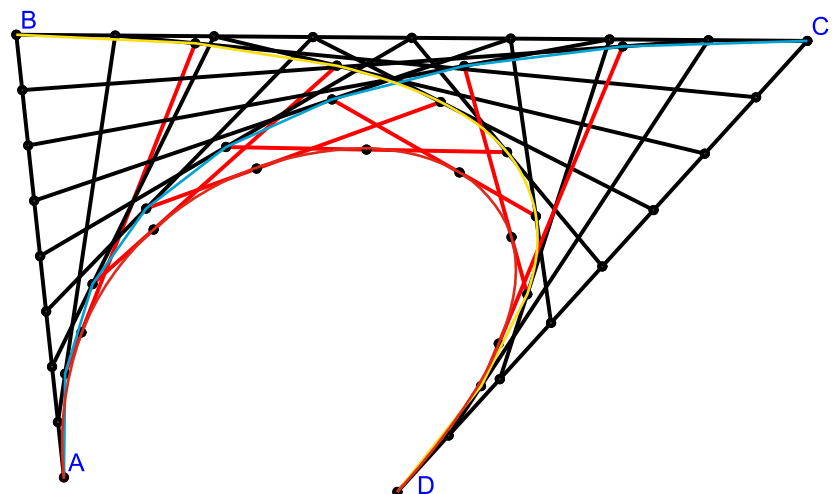


Fig. 5.61 –
Determinação de
cúbica

Para obter uma cúbica, pelo algoritmo de Casteljau, estabelece-se a curva parabólica AC auxiliar, sendo que B é a intersecção das tangentes em A e C acrescenta-se um outro ponto D . Nas mesmas condições BCD define uma outra curva parabólica. Para determinar a cúbica procede-se a uma elevação de grau. Para tal, divide-se os segmentos de controle AB , BC e CD sempre num determinado número de partes iguais. Depois define-se os dois segmentos que unem o primeiro ponto de AB , o primeiro de BC e o primeiro de CD . A elevação de grau corresponde a tornar a dividir os dois segmentos no mesmo número de partes e proceder como para o arco parabólico. Para obter os outros pontos repete-se o processo para todos os parcelares dos segmentos.

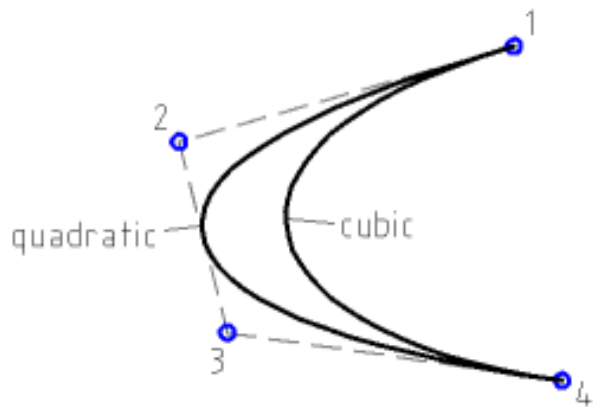


Fig. 5.62 – Relação entre quádrlica parabólica e cúbica

Na quádrlica correspondente à cúbica os pontos de controlo desta são as intersecções das tangentes à quádrlica.

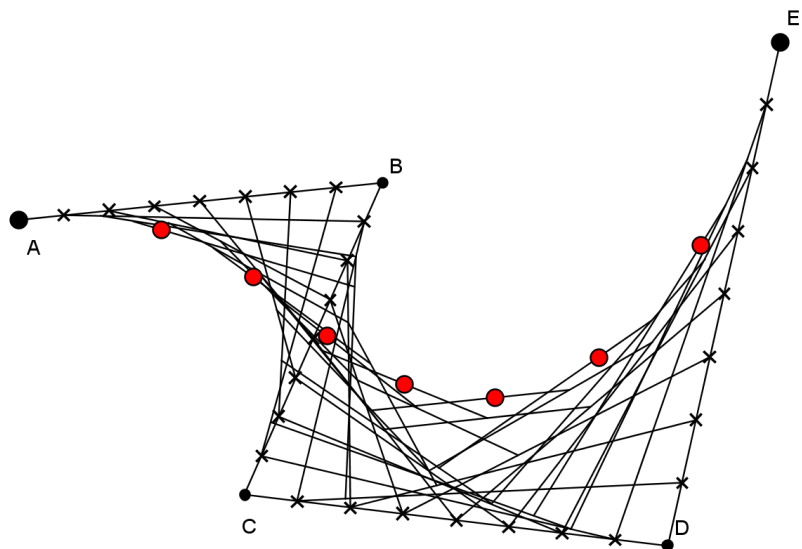


Fig. 5.63 – Determinação de Quártica



Para determinar a quártica utilizam-se cinco pontos de controlo e procede-se a duas elevações de grau sucessivas, com repetição dos processos atrás descritos relativos à cúbica.

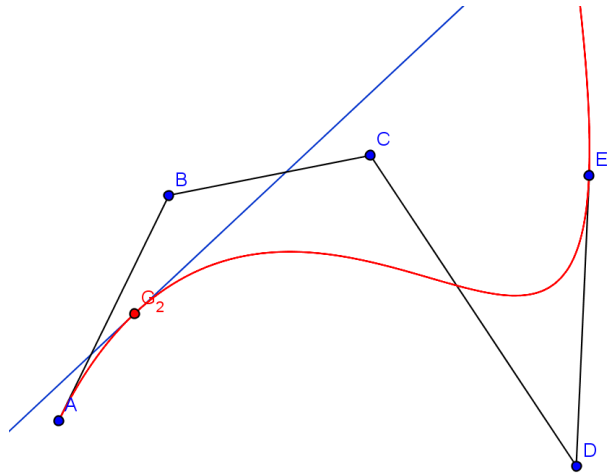


Fig. 5.64 – Quártica dinâmica

Qualquer das curvas referidas pode ser objeto da construção de modelos de geometria dinâmica que permitam ajustar os pontos de controlo a qualquer posição e a partir daí obter cada ponto da curva e respetiva tangente.

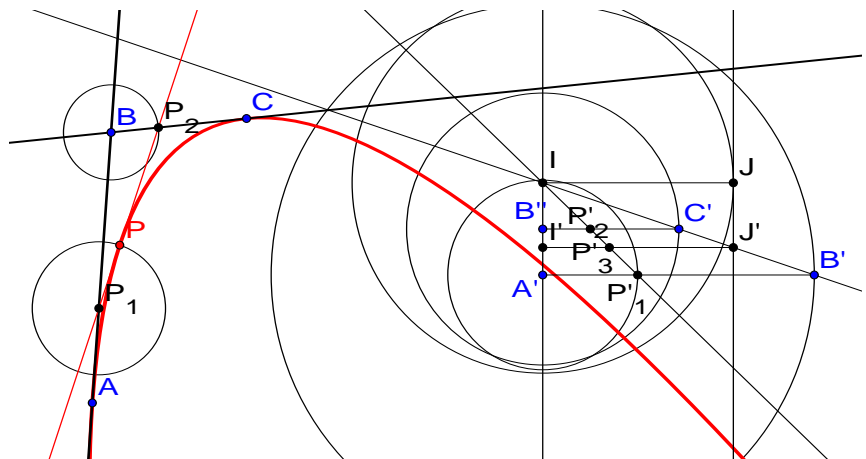


Fig. 5.65 – Modelo construtivo de quádrlica em geometria dinâmica

Descreve-se seguidamente um dos métodos possíveis para construir um modelo em geometria dinâmica para determinar um arco parabólico, sendo que o modelo para definir cúbicas e quárticas é similar acrescentando os elementos necessários às elevações de grau. Assim é necessário estabelecer uma proporção constante para pontos em AB e BC . Para tal criou-se, à direita, com a ferramenta de compasso uma circunferência de raio AB ,

sendo o raio designado por $A'B'$. Esta ferramenta permite que qualquer que seja a posição e distância entre AB a mesma variação dimensional se reflita em $A'B'$. Depois apenas por maior legibilidade gráfica traçou-se uma perpendicular em A' ao raio $A'B'$, podendo ser utilizada uma reta com uma direção qualquer. Sobre esta definiu-se um ponto B' e a paralela $B''C'$, raio da circunferência da ferramenta de compasso de medida igual a BC . Traçando a reta $B'C'$ e intersetando com a perpendicular obtém-se I estabelecendo a proporção entre AB e BC por Teorema de Tales. Definiu-se seguidamente um ponto livre P_1 qualquer que corresponde a uma parte qualquer de AB . Novamente com a ferramenta compasso mediu-se a distância AP_1 e com centro em A' estabeleceu-se a circunferência que interseta $A'B'$ em P'_1 . A reta P'_1I permite determinar P'_2 na intersecção com $B''C'$, e distância $B''P'_2$ é transferida com a mesma ferramenta traçando a circunferência que interseta BC em P_2 . BP_2 passa portanto a ser uma parte de BC igual à que AP_1 é de AB . Traça-se a reta P_1P_2 que é a tangente e mede-se com a ferramenta de compasso a distância entre os dois pontos e transfere-se a medida para uma circunferência de centro I . Por I traça-se a paralela a $A'B'$ que interseta a circunferência em J . Com uma paralela em J a $A'I$ transfere-se a medida IJ até intersetar $B'I$ em J' . O segmento paralelo a $A'B'$ que passa em J' corresponde à medida de P_1P_2 na mesma proporção entre segmentos. O ponto P'_3 de intersecção deste segmento com P'_1I define na distância a $A'I$ a distância de P_1 a P que é o ponto da curva depois da medida transferida novamente com o compasso.

Relembre-se que os pontos A , B e C são pontos quaisquer pelo que ficam livres para serem movimentados. Também P_1 foi definido como um ponto qualquer de AB pelo que pode ser movimentado sobre essa reta. Qualquer modificação dos dados implica que o modelo procede aos respetivos ajustes dimensionais permitindo obter qualquer ponto da curva e respetivas tangentes.

Procurou-se assim desenvolver por processo gráfico a teoria relativa à passagem das cónicas para as splines, designadamente as linhas Bézier, tema que, no entanto, não aprofundaremos, dado ultrapassar o âmbito deste trabalho. Não obstante, não se deixa de referir que para o aprofundamento do tema se torna indispensável consultar o já referido FARIN (1991) que analisa o tema de forma detalhada tanto em geometria euclidiana como em não euclidiana, mas igualmente LIMING (1981) obra precursora da computação gráfica na engenharia aeronáutica e já referida anteriormente, YAMAGUCHI (1988) e FARIN (2002) que correspondem a aprofundamentos na geração das curvas mas sobretudo das superfícies obtidas a partir delas, SHIKIN; PLIS (1995) que é um trabalho de divulgação e consulta para os vários tipos de curvas, PENNA; PATTERSON (1986) que é um trabalho que permite identificar a passagem da geometria projetiva para os fundamentos da computação gráfica e para a linguagem de programação, ou ainda BIX (2006) que aborda tanto o contexto teórico como alguns aspetos concretos da relação entre cónicas e cúbicas.



O tema das splines e das superfícies gerada a partir delas continua na atualidade a ser objeto de artigos nas revistas científicas sobretudo nas suas aplicações práticas, ou na divulgação de métodos, apesar de maioria dos casos exclusivamente por tratamento algébrico. Exemplos disso são SÁNCHEZ-REYES (2011) sobre particularidades das cónicas de Bézier ou AGNEW et al (2010) sobre as curvas e superfícies Tzitzeica.

5.8. CONCLUSÕES DO CAPÍTULO

Abordámos no início do capítulo alguns problemas de aprofundamento de temas tratados anteriormente e que, em regra, não têm tido tratamento na literatura essencialmente por métodos geométricos e especificamente por método gráfico. Assim iniciámos a abordagem de um estudo mais detalhado das cinco condições para definir uma cónica considerando a hipótese de os pontos dados não pertencerem a tangentes dadas, analisando os casos das cónicas definidas por quatro tangentes e um pontos não pertencente a qualquer delas, tendo-se concluído existirem, consoante os dados, zero ou duas soluções, e os casos em que são dadas três tangentes e dois pontos não pertencentes a qualquer das retas, em que foi detetada a existência de zero ou quatro soluções, o que confirma o quadro de IZQUIERDO ASENSI (1985, 201) referido no capítulo 3. Paralelamente desenvolveu-se metodologias específicas para abordagem dos problemas com recurso a curvas cónicas como traçados auxiliares. Ganhou assim consistência a hipótese de qualquer problema relativo às cónicas ser resolúvel com recurso a cónicas como curvas auxiliares.

Seguidamente foram abordados problemas concretos relativos à parábola, o desta ser definida por três pontos e direção do eixo, com uma solução, e os da parábola ser definida por três pontos e a tangente num deles e da parábola definida por quatro pontos tendo-se concluído a possibilidade de existência de duas soluções para ambos os casos.

Da análise destes casos concluiu-se ainda que há um imenso campo de investigação futura, tanto nos casos não analisados, como de diversas circunstâncias particulares como por exemplo a análise das situações em que as cónicas degeneram.

A análise do caso das parábolas definidas por quatro pontos permitiu enunciar uma propriedade relativa aos feixes de cónicas por quatro pontos, a de que os centros das cónicas do feixe descrevem uma cónica e desenvolver um processo expedito para as obter. Tal pode ter relevância significativa, dado que é um tema utilizado nos programas informáticos de reconhecimento de imagens, e pode permitir construir um algoritmo mais expedito para tal fim.

Por outro lado, concluiu-se, como foi referido, que por três pontos e uma tangente num deles, ou por quatro pontos, podem passar no máximo duas parábolas. Para responder em investigação futura ficam duas questões:

– pode-se generalizar dizendo que as circunstâncias para a definição do tipo de feixe de cónicas por três pontos e uma tangente são as mesmas ou similares às da definição de cónicas por quatro pontos?

– e pode igualmente generalizar-se dizendo que as circunstâncias para a definição do tipo de feixe de cónicas por quatro pontos são idênticas ou similares às da definição do feixe com quaisquer quatro condições, pontos ou tangentes?

De seguida foram abordados temas complementares relativos às cónicas apresentando-se algumas questões relativas às famílias de cónicas e sua aplicação prática, as curvas toroidais como curvas paralelas às cónicas e o seu papel na resolução de alguns problemas concretos e as curvas similares às cónicas como precaução a ter com o seu reconhecimento. Procedeu-se em seguida a uma análise sintética das possibilidades de utilização das anamorfoses como método para a partir das cónicas obter outras curvas e à explanação de um método gráfico para construir *splines* a partir das cónicas.

Da análise detalhada de métodos para resolver alguns problemas concretos relativos às cónicas concluiu-se que há notória vantagem em aliar os conhecimentos teóricos genéricos sobre as cónicas com os conhecimentos perspéticos, com origem na representação gráfica. Tal conjugação foi ganhando forma com o desenvolvimento dos métodos perspéticos, tendo atingido o seu apogeu com a criação da Geometria Projetiva por Poncelet no século XIX. Não obstante, na atualidade, e tendo em conta a cada vez maior raridade de trabalhos científicos utilizando exclusivamente métodos geométricos e a cada vez maior penetração dos métodos analíticos na geometria, tende a fazer esquecer os fundamentos teóricos dos processos e, logo, a não valorizar as complementaridades necessárias ao avanço do conhecimento.

A utilização de regras perspéticas, designadamente no problema relativo às paralelas às diagonais do retângulo, possibilitou a criação de um procedimento, que desenvolvemos, para permitir solucionar problemas cuja resolução não encontramos na literatura.

Por outro lado, a própria utilização da perspectiva no contexto deste trabalho parte do pressuposto de que a formação dos profissionais de diversos campos na área do design, mas também em todas áreas que trabalham com imagens, é fundamental. Mas é igualmente fundamental na formação de professores do ensino básico e secundário nestas áreas e, por motivos óbvios, na formação de professores de matemática destes níveis de ensino.



O método das paralelas às diagonais do retângulo para determinar os pontos de tangência de uma elipse é válido tanto em vista como em axonometria como em perspectiva cónica com as devidas adaptações. Ou seja, em qualquer projectividade, mantém-se a mesma propriedade. Também a mesma propriedade é aplicável para determinar outros pontos da curva que não os de tangência. Igualmente é aplicável para a determinação de pontos das restantes curvas cónicas e não apenas da elipse.

O aprofundamento de diversos problemas abordados e que incluem pontos, retas e curvas cónicas parece permitir concluir que muitos deles podem já ser resolvidos com recurso a outras curvas cónicas, como traçados auxiliares, o que parece levantar a hipótese de se gerar um sistema geométrico consistente por si e capaz de ser utilizado na resolução de qualquer problema geométrico relacionado com as cónicas, o que pode conduzir a uma reapreciação do caminho atual da geometria projetiva.

Tendo-se constatado que as retas paralelas às assíntotas da hipérbole auxiliar no problema da parábola por quatro pontos, não são os eixos da parábola que passa nos quatro pontos leva-nos a questionar o problema da simetria. No mundo das imagens físicas e mentais esta tem uma importância reforçada pela geometria cartesiana. Mas na natureza, em regra, não há simetria. Esta é caracteristicamente uma construção humana. Então, isto faz-nos retornar à geometria de Apolónio, dos diâmetros conjugados. Ou seja, o equilíbrio estético não é a simetria mas a simetria direcional, a que não depende da ortogonalidade do eixo de simetria relativamente à direção de simetria. Ou até, atendendo ao contexto da geometria projetiva, à relação estabelecida perspetivamente entre quaisquer duas direções. Estamos no mundo estático a três dimensões. Então se considerarmos o tempo, a quarta dimensão, as retas tornam-se curvas e estaremos a falar de segmentos de curvas cónicas. Ou seja, a simetria e a correspondente ortogonalidade são meras construções mentais da humanidade.

Sobre o tema das limitações da ortogonalidade no trabalho com as cónicas na computação de imagens 3D deve conferir-se, por exemplo, KANATANI; LIU (1993, 286-301).

Por outro lado constatou-se que há uma surpreendente coerência, na manutenção de regras e interação entre as formulações teóricas e aplicações práticas pois, se da teoria se extraem conclusões para aplicação na prática, também desta aplicação se alimenta a teoria.

5.9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DO CAPÍTULO

AGNEW, A. et al – Tzitzeica Curves and Surfaces. The Mathematica Journal 12 (2010) Wolfram Media, Inc. [<http://www.mathematica-journal.com/>].

AKOPYAN, A. V.; ZASLAVSKY, A.A. – **Geometry of conics**. Rhode Island: American Mathematical Society, 2007. [Trad. da edição russa de 2000 do Moscow Center for Continuous Mathematical Education.] ISBN 978-08218-4323-9.

ALPERIN, R. – The Poncelet Pencil of Rectangular Hyperbolas. Forum Geometricorum Volume 10 (2010) 15–20. Boca Raton: Florida Atlantic University, 2010. ISSN 1534-1178.

APOLLONIUS OF PERGA; HEATH, T. L. – **Treatise on conic sections: edited in modern notation with introductions including an essay on the earlier history of the subject by T. L. HEATH, M. A.**. Cambridge: The University Press, 1896.

BIX, Robert – **Conics and cubics: a concrete introduction to algebraic curves**. New York [etc.]: Springer Science+Business Media, 2006. ISBN 0-387-31802-x.

DERGIADES, N. – Conics Tangent at the Vertices to Two Sides of a Triangle. Forum Geometricorum Volume 10 (2010) 41-53. Boca Raton: Florida Atlantic University, 2010. ISSN 1534-1178.

FARIN, Gerald – **NURBS for curve and surface design**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1991. ISBN 0-89871-286-6.

FARIN, Gerald – **Curves and surfaces for CAGD: A practical guide**. Fifth ed. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2002.

FAROUKI, R. – Conic Approximation of Conic Offsets. Journal of Symbolic Computation (1997) 23, 301-313. ScienceDirect. [<http://www.journals.elsevier.com/journal-of-symbolic-computation/>]. ISSN: 0747-7171.

FAROUKI, R.; SEDERBERG, T. – Analysis of the offset to a parabola. Computer Aided Geometric Design 12 (1995) 639-645. North-Holland: 1995. Science Direct. [<http://www.journals.elsevier.com/computer-aided-geometric-design/>]. ISSN: 0167-8396.

HILBERT, David; COHN-VOSSSEN, S. – **Geometry and the imagination**. U.S.A.: American Mathematical Society, 1999. [Reedição da tradução para inglês do alemão Anschauliche Geometrie 1932?]. ISBN 0-8218-1998-4.

IZQUIERDO ASENSI, Fernando – **Geometría descriptiva superior y aplicada**. 3d ed. Madrid: Ed. Dossat, 1985. ISBN 84-237-0441-6.

KANATANI, K.; LIU, W. – 3D interpretation of conics and orthogonality. Computer Vision CVGIP: Image Understanding Vol. 58, Nº 3, November, 286-301, 1993. Orlando: Academic Press, Inc, 1993. Science Direct. [<http://www.sciencedirect.com/science/journal/10499660>]. ISSN:1049-9660.



KIM, J.; GURDJOS, P; KWEON, S. – Euclidean structure from confocal conics: Theory and application to camera calibration. Computer Vision and Image Understanding 114 (2010) 803-812. [www.elsevier.com/locate/cviu]. ISSN: 1077-3142.

LANGLOIS, Patrice; DENAIN, Jean-Charles – Cartographie en anamorphose, Cybergeo : European Journal of Geography [En ligne], Cartographie, Imagerie, SIG, document 1, mis en ligne le 14 avril 1996, consulté le 05 mai 2015. [URL : <http://cybergeo.revues.org/129> ; DOI : 10.4000/cybergeo.129].

LIMING, Roy A. – **Mathematics for computer graphics**. Fallbrook [California]: Aero Publishers, Inc., 1981. ISBN 0-8168-6751-8.

NAGORE, Fernando – **Geometría Métrica y Descriptiva para Arquitectos**. Tomos I, II y III. Pamplona: EUNSA, Ediciones Universidad de Navarra, S.A., 1986, 1987 e 1988. ISBN 84-313-0961-X (obra completa).

PAMFILOS, P. – Conic Homographies and Bitangent Pencils. Forum Geometricorum Volume 9 (2009) 229–257. Boca Raton: Florida Atlantic University, 2009. ISSN 1534-1178.

PENNA, Michael N.; PATTERSON, Richard R. – **Projective Geometry and its applications to computer graphics**. London [etc.]: Prentice-Hall International, Inc., 1986. ISBN 0-13-730649-0 025.

RICHTER-GEBERT, Jürgen – **Perspectives on projective geometry: a guided tour through real and complex geometry**. Berlin [etc]: Springer-Verlag, 2011. ISBN 978-3-642-17285-4.

SÁNCHEZ-REYES, J. – Simple determination via complex arithmetic of geometric characteristics of Bézier conics. Computer Aided Geometric Design 28 (2011) 345-348. s.l.: North-Holland, 2011. [http://www.journals.elsevier.com/computer-aided-geometric-design/]. ISSN: 0167-8396.

SHIKIN, Eugene V. – **Handbook and atlas of curves**. New York: CRC Press, 1995. ISBN 0-8493-8963-1.

SHIKIN, Eugene V.; PLIS, Alexander I. – **Handbook on Splines for the user**. New York: CRC Press, 1995. ISBN 0-8493-9404-X.

SILVA, F. Moreira da; MURTINHO, V.; [COSTA], J. BONIFÁCIO – Uma tipografia de base elíptica e outros cruzamentos do design com a geometria das curvas cónicas. Convergências. Castelo Branco: ESART – IPCB, nº12, (2013) art. 148. [http://convergencias.esart.ipcb.pt/artigo/148]. ISSN 1646-9054.

STINY, G. – **Shape: Talking about seeing and doing**. Cambridge, Massachusetts (USA): MIT The Massachusetts Institute of Technology Press, 2006. ISBN 0-262-19531-3.

TEIXEIRA, Francisco Gomes – **Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches**. I, II e III Tomos. Coimbra: Imprimerie de l'Université, 1908. [Re-edição fac-símile Paris: Éditions Jacques Gabay, 1995. ISBN 2-87647-162-0].



VALENCIA, J.; BEDOYA, A. – Curvas paralelas explícitas de las curvas cónicas no degeneradas para el torneado CNC de lentes y espejos esférico-cónicos. Revista EIA, Número 10, p. 31-43. Diciembre 2008. Medellín (Colombia): Escuela de Ingeniería de Antioquia, 2008. ISSN 1794-1237.

YAMAGUCHI, Fujio – **Curves and surfaces in computer aided geometric design**. Berlin: Springer-Verlag, 1988. ISBN 3-540-17449-4.

ZORRAQUINO, J; RODRÍGUEZ, F.; MARTÍN, J. – Applications of a New Property of Conics to Architecture: An Alternative Design Project for Rio de Janeiro Metropolitan Cathedral. Nexus Network Journal Vol. 3, Nº 1, 2001, 43-72. Basileia: Springer Birkhäuser, 2001. Print ISSN 1590-5896. Online ISSN 1522-4600.

5.10. FONTE DAS IMAGENS

Fig. 5.50 – <http://www.artifexbalear.org/arco2.htm>

Fig. 5.51 –
http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/PUEMAC_2008/rincon/curvas/html/caten.html

Fig. 5.52 – https://www.thyssenkrupp.com/en/konzern/geschichte_logo.html

Fig. 5.53 – https://www.thyssenkrupp.com/en/konzern/geschichte_logo.html

Fig. 5.54 – <http://www.naum-gabo.com/work/>

Fig. 5.55 – <http://www.instructables.com/id/3D-Printed-Ceramic-Oil-Lamp/>

Fig. 5.56 – <http://www.instructables.com/id/3D-Printed-Ceramic-Oil-Lamp/>

Fig. 5.57 – <http://cybergegeo.revues.org/docannexe/image/129/img-1.png>





6. CONCLUSÕES

A geometria das cónicas acompanha as criações humanas desde a sua descoberta pelos gregos na Antiguidade Clássica e está hoje presente em inúmeras áreas de atividade, de forma direta em alguns casos e indireta em diversos outros. Também quanto ao nível da profundidade com que este se revela em cada área há diferenças notórias, sem prejuízo da necessidade do aprofundamento do seu estudo, genericamente, e de forma adequada à área em causa e o nível de exigência de cada nível de formação.

Não obstante, paradoxalmente, o estudo das cónicas e das superfícies construíveis com elas tem em diversos países um estudo restrito e genericamente uma presença escassa na divulgação científica e quase exclusivamente com expressão algébrica.

Por outro lado, existindo exemplos concretos de aplicações na área do design, as referências da literatura científica na área são praticamente inexistentes, tal como aliás nas revistas e outras formas de divulgação onde raramente se destaca a geometria envolvida nas formas criadas, no projeto e no seu processo de desenvolvimento.

Na atualidade, com os avanços na computação gráfica, sobretudo expressos através do processo de projeto e produção assistidos por computador, cada vez mais se exige aos designers o aprofundamento de conhecimentos de diversas áreas, libertando-os de constrangimentos tecnológicos do equipamento utilizado. Se é próprio da atividade profissional a busca da solução técnica para cada projeto concreto e, sobretudo, para a execução em produção, o projeto não deve ficar manietado pelos meios tecnológicos disponíveis, antes deve impelir à sua utilização criativa e transformadora, no contexto de inovação tecnológica da própria produção.

Outro nível de enquadramento dos avanços tecnológicos na imagem digital no projeto e na produção em design é a necessidade de linguagens comuns em equipas multidisciplinares, possibilitando que o designer seja não apenas um utilizador de programas informáticos, mas possa intervir na conceção e na adaptação destes, adequando-os a cada projeto concreto e até na inovação ao nível de programas e equipamento. Tal pode constituir

um salto qualitativo permitindo chegar a áreas de produção emergentes como resultante da inovação tecnológica.

Neste contexto a geometria, e as cónicas em particular, desempenham uma função acrescida.



Fig. 6.1 – Jato BELL X – 1

F. Standardization of Wing and Empennage
F.1. Analytic Technique
Aerodynamic parameters defining airfoil itself) are the effective tip station accompanying figure) which defines the side.

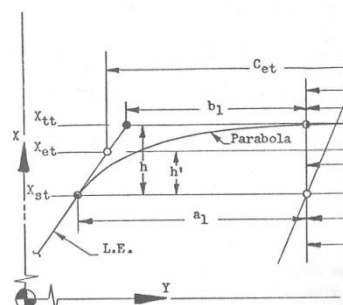


Fig. 6.2 – Projeto aeronáutico

O jato BELL X-1 de Lawrence Bell (1894-1956) foi o primeiro jato a ultrapassar a velocidade do som. O piloto Chuck Yeager dá uma entrevista.

Com LIMING (1981, 262) fica patente a implicação de cónicas e splines no projeto aeronáutico assim como o recurso à geometria analítica e ao desenho técnico.

Modelação 3D e utilização de splines no projeto de Ana Oliveira para a Farmácia Cellula em 2012. O mobiliário e equipamento têm formas inspiradas na dupla hélice do DNA.



Fig. 6.3 – Projeto de farmácia *cellula*

Não existindo conhecimentos de geometria específicos de cada área profissional existem conteúdos e metodologias que, em cada caso concreto e momento histórico, se consideram adequados, de acordo com a formação pretendida e o nível dela.



Esta tese enquadra-se portanto na área da geometria aplicada ao Design, com laços às áreas mais próximas, a Arquitetura e as Artes Visuais ou até as engenharias, numa linha de investigação e desenvolvimento à semelhança de outras já seguidas anteriormente na geometria, designadamente em áreas da engenharia mecânica, ou da física teórica, ou na dinâmica de fluídos, ou na resistência de materiais e outras, com utilizações diferentes em inúmeras áreas das engenharias, e, de facto, em todas as áreas de criação de formas e coisas, na criação do nosso quotidiano futuro.

No capítulo 2. foram abordados os conceitos e propriedades que fundamentam os traçados gráficos do capítulo seguinte e com potencialidades mais evidentes de exploração futura. Foram detetados hiatos no conhecimento de conceitos e propriedades na literatura científica consultada, porventura pela origem diversa, pelos momentos e contextos históricos em que foram produzidos. Assim procurou-se suprir tal insuficiência ao longo do texto, enunciando as metodologias práticas utilizadas em cada situação.

Identificou-se igualmente potencialidades da geometria descritiva, como método, e da geometria dinâmica, como instrumento de análise dos problemas relativos às cónicas.

Constatando-se a quase exclusiva referência na literatura científica aos cones retos introduziu-se o tema dos cones oblíquos e, conseqüentemente, das cónicas não definidas pelos seus eixos na sequência do método de Apolónio de Pérgamo, o que se revelou determinante, pois a geometria analítica das cónicas é, ainda hoje, fortemente determinada pela visão cartesiana dos eixos ortogonais, quando na realidade se a forma geométrica é a mesma e as utilizações práticas determinam a sua usabilidade em qualquer circunstância, tal deveria ser tido em conta. Por outro lado, se o foco é, como demonstrámos, um ponto especial dos cones retos, então o seu estudo pode conduzir a novas conclusões em geometria analítica. Tal reforça a importância e necessidade da geometria do ponto de vista gráfico e, paralelamente, leva ao questionamento da ortogonalidade como critério geométrico pois é fortemente limitativo e não corresponde à análise do real, sendo apenas referente à relação resultante da força da gravidade sobre o plano médio da terra em cada ponto específico.

Comprovou-se que a utilização na literatura científica de uma exclusiva referência às cónicas como secções em cones retos, e de diretriz circular, ao mesmo tempo que desvaloriza o contributo de Apolónio de Pérgamo, limita fortemente as possibilidades do aprofundamento teórico e aplicação prática.

Concluiu-se igualmente da existência na literatura de uma infinidade de propriedades das cónicas, que, depois de detetadas, nunca mereceram uma reanálise sobre as suas conseqüências e potencialidades, tendo em conta, sobretudo, que o conhecimento atual

permite confirmar o não esgotamento do tema e antes exigir uma reanálise do que alguns consideram verdades adquiridas.

No capítulo 2. enuncia-se ainda uma propriedade que não encontramos descrita na literatura, relativa à projeção do eixo do cone reto e da secção no plano da base, com potencialidades de aplicação prática. É igualmente apresentada uma propriedade da parábola com raras referências na literatura, e por vezes incompletas, mas de grande utilidade prática. De uma propriedade de Hatton muito pouco divulgada, por se referir a outro contexto, o do tratamento algébrico das cónicas, concluiu-se da sua aplicabilidade para, a partir do traçado da elipse, se obter o traçado da hipérbole com igual *figura*. Desta relação resultou ainda o enunciado de uma propriedade, que não encontramos descrita na literatura, relativa à circunferência de Monge de uma das cónicas centrais passar nos focos da outra cónica central que tem a mesma figura.

No contexto da investigação sobre as propriedades das curvas cónicas comprovou-se que há potencialidades a explorar, a partir do cruzamento de conhecimentos de épocas diferentes e, igualmente de contextos teóricos e de aplicação diferentes, sendo errada a visão de que o tema está esgotado ou não é atual.

No capítulo 3. desenvolveu-se traçados de aplicação em diversos problemas concretos mas, que, em paralelo, são construções geométricas, ou seja, construções mentais com expressão gráfica, permitindo a criação de pensamento geométrico estruturado e suportado na teoria. Tal dimensão e o seu impacto na teoria comprova-se pelo desenvolvimento posterior, no capítulo 5.. Ainda no capítulo 3., na organização da exposição relativa aos traçados, ao contrário da compartimentação estrita e sequencial, própria da maioria dos manuais na área da geometria, antes se deixou transparecer a complexidade, pois de facto há interligações entre questões de áreas e níveis de aprofundamento diferentes.

A pesquisa sobre os traçados comprovou a existência contemporânea de trabalhos, sobre, ou contendo temas da geometria das cónicas e sua aplicação, e no caso em estudo, de tradução gráfica, desde textos de investigação teórica na área da matemática, até às aplicações em áreas tão diversas como a informática, sobretudo na computação gráfica, ou a medicina, na construção de equipamentos de imagiologia, até áreas mais próximas do design como as artes visuais, a arquitetura ou, até, as engenharias. Em Portugal tal não se verifica pois na literatura, depois dos anos sessenta do século passado, quase só se encontraram textos ou de divulgação ou raras publicações em revistas científicas de língua inglesa e de geometria não euclidiana.



Tendo em conta que no capítulo 2. se detetou que a apresentação da curva cónica pode resultar numa definição de eixos, ou de outra de diâmetros conjugados, no capítulo 3., relativo aos traçados, esse tema foi aprofundado, por exemplo, pela determinação dos eixos das cónicas conhecidos os diâmetros. Por outro lado, introduz-se em 3.4.4. o problema inverso o da determinação dos diâmetros conjugados conhecidos os eixos da elipse, com método que desenvolvemos a partir de uma propriedade conhecida.

Em alguns dos traçados utilizou-se rotações em torno dos eixos das curvas, que é uma abordagem menos usual na literatura, mas que mostrou ser muito útil na resolução de alguns problemas concretos. Por outro lado, sendo que a parábola é discriminante projetivo entre as elipses e hipérbolas representa um lugar de destaque no estudo das cónicas. Do estudo que realizámos resultou soluções diferentes para os traçados mas sobretudo a deteção de propriedades menos conhecidas da literatura e até de outras que não encontrámos descritas ou descritas apenas de forma incompleta.

Assim, dos traçados relativos à parábola resultou a deteção de uma propriedade não descrita na literatura, e apresentada em 3.5.2.1., que permite o traçado da parábola, conhecidos um diâmetro perpendicular ao eixo e o vértice, e que, por permitir um procedimento repetitivo sistemático, permite a criação de um algoritmo de produção expedita do traçado da curva com suporte informático.

Ainda quanto à parábola, em 3.5.2.6. foi igualmente detetada a relevância da utilização conjunta de uma propriedade de Fermat com outras, configurando uma relação que permite que, a partir de um ponto da parábola e conhecendo o vértice e a sua tangente, determinar o foco, processo que se revelou de grande utilidade prática.

Através de resolução de problemas concretos estabeleceu-se relação entre uma parábola solução e outra parábola dada. Tendo em conta que, em regra, os programas de CAD não permitem traçados expeditos da parábola, tal método pode ser útil por ser suficiente ter uma parábola desenhada para podemos obter qualquer outra. Independentemente do processo de construção a solução com recurso a parábolas auxiliares, ilustra, por si só, as potencialidades da utilização do computador para aos traçados geométricos permitindo novos procedimentos, mais expeditos.

Nos traçados relativos à hipérbole foi utilizado um método decorrente do próprio processo construtivo e propriedades do hiperboloide de revolução de uma folha, tendo-se detetado que as suas assíptotas da hipérbole geradora são representações de geratrizes particulares do hiperboloide, método que se revelou eficaz. Já anteriormente tínhamos referido esta questão em COSTA (2005, 68-71) e agora é desenvolvida, apesar de não se ter encontrado referências na literatura.

Da análise dos traçados descritos anteriormente concluiu-se da vantagem de introduzir temas da geometria projetiva o que implicou a referência aos seus fundamentos. Tal resultou da comprovação da necessidade que surge no trabalho prático de determinação de pontos e tangentes com condições particulares, ou até de determinação de troços destas curvas, quando só se conhece parte dela graficamente.

Em decorrência comprovou-se que os métodos decorrentes das cinco condições, pontos ou respetivas tangentes, para definir uma cónica, e dos Teoremas de Pascal e Brianchon, são úteis mesmo que não se verifique a relação de incidência dos pontos dados nas tangentes, tema abordado no ponto 3.6. e aprofundado mais à frente, no capítulo 5.. Daqui decorre ainda um problema diferente, o de se conhecerem apenas de quatro das condições para definição de uma cónica, tema com implicações no dos feixes de cónicas e a intersecção destas.

Da análise das cinco condições resultou ainda a verificação em 3.6.3.1. de que a partir do método de NAGORE (1985, T. III, 145) se pode criar um modelo, com origem gráfica, para representar qualquer curva cónica a partir de cinco dos seus pontos, ou até uma rotina para programação com a mesma finalidade, questão relevante dado que só foi resolvido analiticamente anteriormente, designadamente nos programas de geometria dinâmica, e que não tem solução nos programas de CAD de uso corrente.

No ponto 3.6.5 introduz-se o tema da intersecção de uma reta com uma cónica, tema raramente referido na literatura, que, sendo um caso particular da intersecção de duas cónicas, é igualmente o tema da determinação de dois pontos da cónica, os da intersecção, em qualquer direção, mesmo não sendo dados qualquer deles. Assim, propuseram-se métodos diferentes dos que encontrámos na literatura, sendo que um deles é de utilização genérica sempre que sejam dados, ou seja possível determinar, três pontos e duas tangentes nesses pontos, estabelecendo-se como método auxiliar, uma relação projetiva entre duas cónicas, que se pode descrever como a projeção, a curva cónica pretendida, em perspectiva cónica de uma circunferência, a cónica auxiliar. Em decorrência, voltou-se à questão da determinação de tangentes pelas cinco condições, tendo-se concluído da importância de um método genérico para, sendo dado quatro tangentes e um ponto da curva não pertencente a qualquer das tangentes definir a curva. Esta questão foi posteriormente resolvida em 5.1.1., novamente com recurso à perspectiva cónica.

No ponto 3.7. aborda-se o método dos feixes projetivos, outro tema de referência escassa na literatura, apesar de se ter concluído da sua evidente utilidade, por exemplo, sempre que se pretenda obter pontos sucessivos numa sequência da curva.



No ponto 3.8. é feita uma referência breve a uma outra área da geometria projetiva, a das proporções métricas, tema já aflorado anteriormente no capítulo 2., e de que se desenvolve sugestões de abordagem. Não obstante, o tema não é aprofundado, porque implica um conhecimento teórico aprofundado do tema, designadamente das proporcionalidades possíveis de estabelecer em cada circunstância. Considera-se, como tal, de difícil utilização no âmbito de uma utilização expedita, não obstante o seu evidente interesse para a investigação sobre as cónicas.

É de referir ainda que inúmeras propriedades constantes da revisão de literatura não foram analisadas, ou foram analisadas mas não detetámos relações na resolução de problemas com aplicação prática neste trabalho. Tal facto, impõe a conclusão da necessidade de prosseguimento da investigação nesta área. Novamente, se o tema das cónicas não está esgotado igualmente estão a surgir sempre novas aplicações e ângulos de abordagem.

O desenvolvimento do capítulo 3. não é uma mera listagem de problemas e soluções, antes se procurou apresentar soluções adequadas para uma utilização expedita das cónicas, podendo concluir-se a resolução dos principais problemas envolvidos, tendo sido apontados métodos de possível resolução de inúmeros outros. Não obstante, designadamente com outras estratégias, métodos ou propriedades das cónicas como suporte, é possível chegar a soluções mais eficazes, pelo que o tema merece investigação futura. Nesse sentido, realça-se que o tema das intersecções de cónicas foi apenas aflorado, pelo que é um dos temas a estudar futuramente.

Concluiu-se ainda que para diversos problemas há várias soluções, sendo uma por vezes mais elegante, mais simples, dependendo das condições dadas. Procurámos, por isso, evidenciar vantagens e inconvenientes de cada. Conclui-se ainda, neste contexto, que se ficam criadas condições para uma utilização prática mais expedita, no entanto, tal não exclui que o aprofundamento do conhecimento das propriedades e métodos aplicáveis, e o cruzamento de conhecimentos de contextos diferentes, possa contribuir para a elevação do grau de eficácia na resolução de problemas práticos.

No capítulo 4. abordam-se as superfícies quádricas e outras superfícies construíveis com curvas cónicas ou com outras curvas com elas relacionadas e ainda algumas das propriedades destas superfícies e exemplos da sua utilização. Comprovou-se a reduzida existência de referências ao tema no design, tanto ao nível conceptual como no desenvolvimento de projetos. Faz-se assim referência a algumas aplicações no design mas, igualmente, a diversos exemplos na arquitetura, uma das áreas próximas do design e onde já existe um conjunto de conhecimentos e experiências na área das cónicas e quádricas. Neste contexto, realçou-se a ligação entre a hipérbole e o hiperboloide de revolução de uma

folha, cujas propriedades influenciaram a definição de métodos construtivos gráficos da hipérbole, descritos no capítulo terceiro, e não constantes da bibliografia consultada.

Refere-se seguidamente o tema das intersecções das superfícies, abordando alguns aspetos do tema, tanto do ponto de vista da geometria descritiva, como na geometria analítica, do que resulta a conclusão de que não é um tema fechado, e em que a geometria descritiva pode gerar contributos. Nesse sentido, e apesar de ter suporte na teoria, mas não constar da literatura consultada, salienta-se que as secções planas paralelas em superfícies quádricas dão origem a cónicas do mesmo tipo. Tal propriedade, agregada com o que fomos demonstrando no capítulo 3. relativamente às possibilidades de a partir de uma cónica obter outra, cria outra área de exploração futura na criação de processos expeditos de construção das cónicas.

Na intersecção de superfícies exemplificou-se a utilização de secções auxiliares em curva cónica para a determinação de intersecções de superfícies em dupla projeção ortogonal, metodologia que abordámos em COSTA (2005, 46-49) com viabilidade, desde que garantida a exatidão nos traçados, o que é possível com programas informáticos que permitam o traçado das curvas, questão que igualmente não encontramos descrita na literatura. Sem prejuízo do interesse teórico desta abordagem nos traçados pelos meios convencionais, ou seja a reta e compasso, é de utilização complexa. No capítulo 4. abordamos ainda sucintamente a planificação de superfícies, para além de se referirem, ao longo deste, diversas aplicações da planificação de superfícies.

Seguidamente são apresentados alguns exemplos de aplicações das cónicas e das superfícies no design, iniciando a exemplificação com considerações sobre as consequências da teoria no desenvolvimento do projeto, no desenho e na representação técnica. Como tema exploratório, sem referências bibliográficas na área do design, necessita de posterior desenvolvimento, por exemplo, pelo estudo de casos já existentes ou acompanhamento de projetos em desenvolvimento.

Ainda no capítulo 4. refere-se que a pesquisa realizada, dirigida ao tema das cónicas e superfícies quádricas, permitiu a identificação do tema em inúmeras diferentes áreas, o que se refere em resumo das áreas do conhecimento que utilizam as curvas cónicas, e se conclui que a interação entre essas áreas e o tema das curvas cónicas aumenta com o aumento da exigência tecnológica. Tal potencia a utilização da geometria das cónicas e das superfícies quádricas tratadas graficamente, como elemento da inovação tecnológica.

No decurso do estudo das cónicas e das superfícies nos capítulos 3. e 4. constatou-se existirem diversos problemas não referidos na literatura. Por outro lado, detetando-se dificuldades de abordagem, foi-se encontrando potencialidades no uso de metodologias



decorrentes das experiências práticas anteriores. Assim, no início do capítulo 5. abordam-se alguns problemas que, em regra, não têm tido tratamento na literatura, analiticamente, mas também, por métodos gráficos. Assim iniciámos com um estudo mais detalhado das cinco condições para definir uma cónica, analisando os casos das cónicas definidas por quatro tangentes e um pontos não pertencente a qualquer delas, e os casos em que são dadas três tangentes e dois pontos não pertencentes a qualquer das retas, tendo-se confirmado o quadro de IZQUIERDO ASENSI (1985, 201) referido no capítulo 3.

Paralelamente desenvolveu-se metodologias específicas com recurso a curvas cónicas como traçados auxiliares. Ganhou assim consistência a hipótese de qualquer problema relativo às cónicas ser resolúvel com recurso a cónicas como curvas auxiliares, no fundo uma possível consequência prática da dualidade de Chasles (CHASLES, 1837).

Seguidamente, e ainda no capítulo 5. foram resolvidos problemas relativos à parábola, designadamente o desta ser definida por três pontos e direção do eixo e os da parábola ser definida por três pontos e a tangente num deles e da parábola definida por quatro pontos.

Da análise destes casos concluiu-se ainda que há um imenso campo de investigação futura, tanto nos casos não analisados, como de diversas circunstâncias particulares como, por exemplo, a análise das situações em que as cónicas degeneram.

O caso das parábolas definidas por quatro pontos conduziu ao enunciar de uma propriedade relativa aos feixes de cónicas por quatro pontos, a de que os centros das cónicas do feixe descrevem uma cónica e desenvolver um processo expedito para as obter. Tal pode ter relevância significativa, sendo um tema utilizado nos programas informáticos de reconhecimento de imagens, e pode permitir construir um algoritmo mais expedito para tal fim.

Concluiu-se ainda que por três pontos e uma tangente num deles, ou por quatro pontos, podem passar no máximo duas parábolas. Em resultado enunciaram-se hipóteses para a generalização do resultado aos feixes de cónicas de qualquer tipo.

No desenvolvimento de temas complementares relativos às cónicas apresentam-se algumas questões relativas às famílias de cónicas e sua aplicação prática, às curvas toroidais como curvas paralelas às cónicas, e a sua ligação a problemas concretos, e as curvas similares às cónicas. Procedeu-se em seguida a uma análise sintética das possibilidades de utilização das anamorfoses como método para, a partir das cónicas, obter outras curvas e à explanação de um método gráfico para construir *splines* a partir das cónicas.

No desenvolvimento de alguns problemas concretos relativos às cónicas concluiu-se da vantagem em aliar os conhecimentos teóricos genéricos sobre as cónicas com os conhecimentos perspéticos, com origem na representação gráfica. Na atualidade, tendo em conta que a cada vez maior raridade de trabalhos científicos utilizando exclusivamente métodos geométricos gráficos, e a cada vez maior penetração dos métodos algébricos na geometria, tende a fazer esquecer os fundamentos teóricos e, logo, a não valorizar as complementaridades necessárias ao avanço do conhecimento.

A utilização de regras perspéticas, por exemplo no caso das paralelas às diagonais, permitiu a criação de um procedimento para encontrar soluções para problemas cuja resolução não encontrámos na literatura, e é por si uma abordagem que igualmente não se encontrou na literatura.

Comprovou-se que o método das paralelas às diagonais do retângulo para determinar os pontos de tangência de uma elipse é generalizável a todos os métodos de representação linear.

Tal reforça a questão da importância da geometria projetiva, e em particular dos métodos perspéticos, na formação de profissionais em diferentes áreas, designadamente em alguns dos campos do design, e na formação de professores de artes visuais do básico e secundário e de professores de matemática do ensino secundário.

Os problemas abordados no capítulo 5. reforçaram a hipótese de todos os problemas das cónicas poderem ser resolvidos com recurso a cónicas como auxiliares. A confirmação de tal hipótese permitiria abrir um novo ângulo de abordagem no desenvolvimento atual da geometria projetiva.

Igualmente a partir de uma questão concreta surgida no problema da parábola por quatro pontos levam-nos a contestar a importância dada na geometria à simetria ortogonal, com origem porventura na física, pela nossa relação com a gravidade da terra, e depois fortemente marcada pelo cartesianismo. Tal reforça a importância do método de Apolónio de Pérgamo, e é um dos ângulos de abordagem deste, o da simetria oblíqua, e que tem a ver com o que hoje designamos por axonometria, mas que está presente nos fundamentos posteriores da geometria projetiva. Tanto as abordagens perspéticas como as axonométricas se revelaram muito mais úteis na resolução de problemas concretos, sobretudo pela capacidade de generalização. De notar ainda que aquilo que separa as duas áreas é o teorema das paralelas da geometria euclidiana. A abordagem atual em geometria projetiva linear é considerar a geometria euclidiana como caso particular, ou seja, as axonometrias são casos particulares das perspetivas. Por outro lado é de referir que este



problema relativo às limitações da ortogonalidade tem sido referido na literatura relativa à computação gráfica, ou seja, é um problema de forte impacto nas atuais aplicações práticas.

As construções geométricas são muitas vezes encaradas como mera aplicação prática. Não obstante, como se pode concluir do texto, verificou-se que estes traçados, pela sua íntima ligação com o suporte teórico, constituem também construções mentais, propiciadoras da elaboração de raciocínios logico-dedutivos, com desenvolvimento do processo cognitivo e na construção da imaginação criadora, sempre que sejam objeto de uma correta aprendizagem, que não se resuma aos próprios traçados como instrumento para resolução de problemas caso a caso.

Por outro lado se o conhecimento das cónicas tem avançado imenso no universo algébrico, tanto na geometria analítica, na topologia e outras áreas, também com origem gráfica têm surgido inovações teóricas e aplicações, embora de forma muito menos extensa e profícua.

Tendo em conta a detetada diversidade de áreas científicas e tecnológicas em que se utiliza as curvas cónicas, e apesar de os conhecimentos adquiridos sobre as cónicas em cada área de atividade poder ser útil para outras áreas, há uma evidente falha de comunicação transversal de área para área. A informação científica parece ficar confinada à área em que é produzida. Por outro lado, parece ser evidente que tal conhecimento deve ser transmitido pela geometria do ponto de vista gráfico, pois a alternativa implica conhecimentos avançados de geometria analítica, cujo domínio é apenas extensível a um número limitado de áreas científicas e técnicas e quase integralmente no ensino superior. Assim, parece útil recomendar que o estudo das cónicas, do ponto de vista gráfico, seja realizado no ensino básico e secundário de forma adequada a cada estágio de desenvolvimento dos alunos e com diversos níveis de abordagem.

Concluiu-se da utilidade de, no estudo das secções cónicas, consultar tanto os textos teóricos como os de aplicação prática, pois estes levam a contributos para a teoria, conclusão que se considera poder ser generalizável quando abordamos a geometria com métodos essencialmente geométricos. O mesmo foi confirmado pelos problemas resolvidos ao longo do texto pois está patente que se detetou coerência, na manutenção de regras e interação entre as formulações teóricas e aplicações práticas pois, se da teoria se extraem conclusões para aplicação na prática, também desta aplicação se alimenta a teoria.

O trabalho de investigação realizado permite concluir que quanto mais profundo for o conhecimento das propriedades das cónicas mais a resolução de problemas concretos se torna ágil e simples, elegante, se preferirmos. Ou seja, no projeto de design tal é igualmente verdade.

É muito produtivo revisitar a geometria das cónicas com o conhecimento atual e com os meios atuais, designadamente a geometria das cónicas do ponto de vista gráfico e os suportes informáticos. Por um lado, ao contrário do que muitos pensam no meio académico, a geometria euclidiana e, dentro dela, e no seu centro, a geometria das cónicas, são ainda um campo fértil de investigação, como procurámos demonstrar. Por outro lado, as potencialidades da informática e, designadamente, da geometria dinâmica, é, neste contexto de investigação, uma ferramenta insubstituível para acelerar processos.

Igualmente se comprovou ao longo deste trabalho que questões teóricas, aparentemente sem ligação, tornam-se instrumento para resolução de problemas numa outra área. Tal perpassa igualmente de inúmeros estudos no âmbito da geometria e implica que, sobretudo na formação avançada de quadros docentes, a formação não deva ser apenas especializada, mas implique uma visão mais alargada dos campos de interação com a geometria.

Ficou evidente ao longo do estudo efetuado que as cónicas, se exigem um forte suporte teórico escrito e documentado algebricamente, não dispensam a sua componente gráfica, pois a explanação escrita não é suficiente para a exposição de todos os aspetos da questão e, muito menos, para evidenciar novas propriedades. Por outro lado, como ficou documentado, há conhecimento com origem nas aplicações práticas e na representação por imagem, pelo que ignorá-lo é cercear o conhecimento.

Tal comprovação, aliada a todas as conclusões anteriormente expressas, coloca igualmente a geometria descritiva enquanto expressão gráfica da geometria projetiva no centro do conhecimento atual.

Ao longo do trabalho deixámos transparecer o próprio processo de construção da investigação, ou seja, fazendo uma recolha e reflexão crítica e expositiva de métodos, processos e aplicações, embora sintética e por isso incompleta dada a vastidão do conhecimento nesta área. Procurámos ultrapassar a mera enunciação casuística de problemas e aplicações práticas pois, tal como enunciámos nos objetivos da investigação, tentou-se atuar tanto na investigação fundamental sobre o tema, na busca da criação de conhecimento teórico enquadrador mas, paralelamente, analisar consequências e potencialidades de aplicação prática na resolução de problemas concretos.

Algumas convicções da nossa experiência docente no âmbito da geometria nas artes e no design foram confirmadas, designadamente nos processos expositivos ao longo de um texto e também na importância comunicativa da imagem. Algumas delas são relativas à importância comunicativa da própria imagem, área com inúmeros estudos mas que necessita aprofundamento quanto à utilização da imagem em contexto académico. Outras



dizem respeito à importância da imagem ser concebida tendo em conta o contexto em que é inserida.

Em resumo procurámos corresponder ao longo do texto ao tema e às questões de investigação, no âmbito da metodologia definida. Assim tendo-se enunciado conclusões de carácter geral mas muitas igualmente de detalhe, há que concluir que se demonstrou a importância e atualidade da geometria das cónicas e da geometria projetiva na sua dimensão gráfica, e das potencialidades da sua utilização no design, sem prejuízo da necessidade de novos estudos, designadamente os dirigidos a estudos de caso, possam aprofundar as questões. Não obstante, reconhece-se a reduzida utilização, divulgação e estudo no design. De facto, se há relevância do tema para o design, ela não é igual em todos os campos de atuação no design e, como se concluiu genericamente para diversas áreas de atividade, está fortemente ligada ao nível de exigência tecnológica de cada projeto concreto. Também se pode concluir portanto que o conhecimento da geometria das cónicas e da geometria projetiva em geral potencia o aprofundamento tecnológico e, assim, potencia a inovação.

De tudo o que fica expresso pode sintetizar-se possíveis contributos desta investigação para o conhecimento, designadamente:

- identificando vantagens do cruzamento de informação proveniente de diferentes áreas;
- apresentando e sistematizando os conhecimentos das cónicas por forma a torná-los mais facilmente utilizáveis;
- traduzindo conhecimentos da geometria projetiva de origem analítica para as aplicações gráficas práticas;
- apresentando soluções que tornem mais fáceis e/ou mais rápidos os traçados tanto em suporte de papel como em suporte digital;
- explanando sobre os métodos utilizados nos traçados potencia novos ângulos de abordagem em investigações futuras;
- ao propor bases de uma estratégia conducente a uma possível futura utilização sistemática das curvas cónicas como traçados auxiliares na computação gráfica, aumentando as capacidades dos programas e equipamento e acelerando o trabalho prático;

- concluindo que a geometria plana pode beneficiar com o estudo da geometria descritiva pois a utilização de conhecimentos da geometria tridimensional permite encontrar novas soluções para os problemas bidimensionais;
- concluindo que a geometria descritiva permite igualmente a criação de contributos para o conhecimento noutras áreas;
- confirmando as vantagens da utilização da geometria dinâmica genericamente no estudo de problemas geométricos mas particularmente nas questões relativas ao estudo das cónicas;
- o método utilizado permitiu enunciar propriedades que não se encontrou descritas na literatura.

Para além das recomendações para investigação futura que constam deste texto interessa acentuar algumas, sobretudo as de carácter mais geral.

Assim, tendo em conta a dimensão exploratória deste texto em inúmeros aspetos, parece ser uma evidência elementar recomendar que esta investigação seja prosseguida tanto no âmbito geral como no detalhe.

Devem ser exploradas em maior profundidade as potencialidades dos programas de geometria dinâmica especialmente em relação aos feixes de cónicas e às cónicas de cada tipo. Em particular considera-se ser de aprofundar, utilizando metodologia gráfica, as potencialidades de exploração gráfica das superfícies referidas e outras e ainda, em geometria plana, aprofundar a definição de cónicas por cinco condições e a intersecção de cónicas, tema com implicações em inúmeras áreas e com potencialidades de aplicação prática evidente, tendo em conta que tal tema se cruza com o dos feixes de cónicas. Concluindo-se que a utilização das curvas cónicas agiliza e simplifica processos de resolução de problemas gráficos, e tendo em conta que a utilização destas curvas alarga o próprio campo das primitivas gráficas, da régua e compasso para o uso das cónicas como linhas auxiliares, tendo igualmente em conta que a computação gráfica e a própria geometria analítica que usualmente lhe serve de suporte seguem procedimentos paralelos aos que são utilizados na resolução de problemas graficamente, pode enunciar-se a hipótese de que a utilização mais generalizada das curvas cónicas possa igualmente ser útil na simplificação e aceleração de procedimentos de computação gráfica.

A geometria, e a geometria das cónicas em particular, têm sido fonte ininterrupta de contributos para o avanço do nosso conhecimento. Hoje, no mundo em que a ciência pôs a nu a complexidade, contra a visão hierarquizada do estruturalismo, realça cada vez mais o



papel da geometria das cónicas e da sua dimensão gráfica neste contexto de complexidade não hierarquizada. E, por isso, todos os atores na área da imagem devem um agradecimento a Christopher Alexander pelo seu texto “A city is not a tree” (ALEXANDER, 1965). Embora dirigida ao contexto do urbanismo chamou a atenção para a complexidade, propondo que em vez do modelo em árvore se recorresse à semitreliça. A pronta resposta generalizada foi a busca de inúmeras soluções alternativas, mas cuja matriz comum foi o reconhecimento da complexidade dos fenómenos humanos. De um modelo determinista passou-se a um modelo probabilístico. Depois, a geometria do caos deu o embate final na crença num mundo regulável por regras científicas. Da certeza passou-se à probabilidade. O nosso mundo atual é portanto um mundo probabilístico, em que a geometria das cónicas está no centro da maioria das decisões, e a geometria é a ferramenta para ir modelando as nossas incertezas. É neste contexto que nos movemos.

6. 1. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DO CAPÍTULO

ALEXANDER, C. – A City is Not a Tree. Architectural forum, April-May, 1965, Vol. 122, pp. 58-62. Also in Design, February, 1966, pp. 46-55; Hefti birtingur 13, 1967, pp. 50-72; TVAI, Israel, Spring 1967, Vol. 1, No. 3, pp. 64-69; Architecture mouvement continuite 1, November 1967, No. 161, pp. 3-11; Stichting werkgemeenschappen bergeijk, No. 2, pp. 77-108; Approach, Spring, 1968, pp.26-27; Cuadernos summa-nueva vision, No. 9, September, 1968, pp. 20-30; Ekistics, Vol. 23, pp. 344-348; Architecture anthology, Arizona State University, 1969, pp. 580-590; Actualidades tecnico cientificas arquitectura, July 1969, No. 2, pp. 54-82; Tres aspectod de matematica y deseno, Barcelona, '1969, pp. 19-60; La estructura del medio ambiente, Barcelona, 1971, pp. 17-55; Architecture anthology, May 1986, Vol. 1/2, p. 129-149; Architecture culture 1943-1968: A documentary anthology, Joan Ockman, ed., Columbia Books of Architecture and Rizzoli, New York, 1993, pp.379-388. [in <https://www.patternlanguage.com/leveltwo/caframe.htm?/leveltwo/./bios/vitae.htm#book>]

CHASLES, Michel – **Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie suivi d'un Mémoire de géométrie aux deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie**. Tome I. Paris : Éditions Jacques Gabay, 1989 (Tome I) e 1993 (Tome II). [ed. facsimile da de Bruxelles: M. Hayez, 1837]. Tome I ISBN 2-87647-057-8, Tome II 2-87647-058-6.

COSTA, Joaquim M. C. Bonifácio – Intersecção de superfícies não planas em dupla projecção ortogonal. Castelo Branco: Instituto Politécnico de Castelo Branco, Escola Superior de Artes Aplicadas, 2005. [Estudo para Concurso de Provas Públicas para Professor-Adjunto].

IZQUIERDO ASENSI, Fernando – **Geometría descriptiva superior y aplicada**. 3d ed. Madrid: Ed. Dossat, 1985. ISBN 84-237-0441-6.



NAGORE, Fernando – **Geometría Métrica y Descriptiva para Arquitectos**. Tomos I, II y III.
Pamplona: EUNSA, Ediciones Universidad de Navarra, S.A., 1986, 1987 e 1988. ISBN 84-313-0961-X
(obra completa).

6.2. FONTE DAS IMAGENS

Fig. 6.1 – <http://www.travis.af.mil/photos/mediagallery.asp?galleryID=2&page=489>

Fig. 6.2 – LIMING (1981, 262)

Fig. 6.3 – OLIVEIRA, Ana – Relatório de projeto/estágio de Mestrado em Design de Interiores.
Castelo Branco; Escola Superior de Artes Aplicadas do Instituto Politécnico de Castelo Branco, 2012.



7. BIBLIOGRAFIA

ADAMS, J. Alan; BILLOW, Leon M. – **Descriptive geometry and geometric modelling: A basis for design**. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1988. ISBN 0-03-009514-X.

AGNEW et al – Tzitzeica curves and surfaces. The Mathematica Journal 12. WolframMedia, Inc, 2010. [<http://www.wolfram-media.com/>].

AGUDO, F. R. Dias – **Complementos ao curso de geometria descritiva : homologia e sua aplicação ao estudo de secções planas**. Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 1952.

AGUDO, F. R. Dias. – From geometry of quadrics and linear algebra to self-adjoint and non self-adjoint differential operators: a personal testimony. II Centenário da Academia das Ciências de Lisboa -1977, Sep. de Estudos de Álgebra, Geometria e Análise. Lisboa. (1978) 221-240.

AGUDO, F. R. Dias. – On metric properties of quadrics. Sep. da Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa. Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. 2ª Série -A- v.9, fasc. 1º, (1962) 87-110.

AGUDO, F. R. Dias. – Quádricas em coordenadas cartesianas não ortogonais. Técnica. Lisboa. nº 313 (1961) 515-518.

AGUDO, F. R. Dias. – Sobre a determinação analítica das direcções principais das secções planas de uma quádrlica. Gazeta da Matemática. Lisboa, nº 81 (1960) 1-8.

AGUDO, F. R. Dias. – Sobre alguns teoremas da geometria das quádrlicas. Ciência. Lisboa. 1948. A. 4, nº 9/10 (Set. 1954) 59-67.

AGUDO, F. R. Dias. – Sobre uma propriedade do hiperbolóide de uma folha. Ciência. Lisboa. 1948-... A. 4, nº 7/8 (Jan. 1953) 5-7.

AGUDO, F. R. Dias. – Um novo método para o estudo de secções planas de superfícies de 2ª ordem. Revista da Faculdade de Ciências A : ciências matemáticas. Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Vol. 2 (1952) 289-296.

AIRES, Luís M. – **Uma história da matemática**. Lisboa: Edições Sílabo, 2010. 978-972-618-570-3.

AKOPYAN, A. V.; ZASLAVSKY, A.A. – **Geometry of conics**. Rhode Island: American Mathematical Society, 2007. [Trad. da edição russa de 2000 do Moscow Center for Continuous Mathematical Education.] ISBN 978-08218-4323-9.

ALBUQUERQUE, Luís – **Elementos de geometria projectiva e geometria descritiva**. Coimbra: Livraria Almedina, 1969.

ALBUQUERQUE, Luís de - **Geometria descritiva**. Coimbra : AAC-Secção de textos, 1946.

ALBUQUERQUE, Luís de – **Geometria descritiva**. Reedição. Coimbra : AAC-Secção de textos, 1968.

ALEXANDER, C. – A City is Not a Tree. Architectural forum, April-May, 1965, Vol. 122, pp. 58-62. Also in Design, February, 1966, pp. 46-55; Hefti birtingur 13, 1967, pp. 50-72; TVAI, Israel, Spring 1967, Vol. 1, No. 3, pp. 64-69; Architecture mouvement continue 1, November 1967, No. 161, pp. 3-11; Stichting werkgemeenschappen bergeijk, No. 2, pp. 77-108; Approach, Spring, 1968, pp.26-27; Cuadernos summa-nueva vision, No. 9, September, 1968, pp. 20-30; Ekistics, Vol. 23, pp. 344-348; Architecture anthology, Arizona State University, 1969, pp. 580-590; Actualidades tecnico cientificas arquitectura, July 1969, No. 2, pp. 54-82; Tres aspectod de matematica y deseno, Barcelona, '1969, pp. 19-60; La estructura del medio ambiente, Barcelona, 1971, pp. 17-55; Architecture anthology, May 1986, Vol. 1/2, p. 129-149; Architecture culture 1943-1968: A documentary anthology, Joan Ockman, ed., Columbia Books of Architecture and Rizzoli, New York, 1993, pp.379-388. [in <https://www.patternlanguage.com/leveltwo/caframe.htm?/leveltwo/./bios/vitae.htm#book>]

ALIBERT, Daniel – **Géométrie plane: courbes paramétrées, conique, réseaux**. Paris: Ellipses Édition Marketing S.A., 2001. ISBN 2-7298-0697-0.

ALPERIN, R. – The Poncelet Pencil of Rectangular Hyperbolas. Forum Geometricorum Volume 10 (2010) 15–20. Boca Raton: Florida Atlantic University, 2010. ISSN 1534-1178.

ALSINA CATALÁ, Claudi; BURGUÉS FLAMERICH, Carme; FORTUNY AYMEMI, Josep M.a – **Materiales para construir la geometria**. Madrid: Editorial Sintesis, S. A., 1991. ISBN 84-7738-011-2.

ALSINA CATALÁ, Claudi; JACAS MORAL, Joan; TOMÀS BELENGUER, M. Santos – **Geometria a l'arquitectura**. Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya, Ediciones UPC, 2007. ISBN 978-84-8301-923-8.

ALSINA, C.; TRILLAS, E. – **Lecciones de algebra y geometria: curso para estudiantes de arquitectura**. 7d ed. Barcelona: Ed. Gustavo Gili, 1995. ISBN 84-252-1187-5.

APOLLONIUS OF PERGA; HEATH, T. L. – **Treatise on conic sections: edited in modern notation with introductions including an essay on the earlier history of the subject by T. L. HEATH, M. A.** Cambridge: The University Press, 1896.

ARAÚJO, Etevaldo – **Curso técnico de caldeiraria**. Curitiba: Hemus SA, 2002.

ARCOS ÁLVAREZ, Antonio [et al.] – **Dibuja un triángulo**. Madrid: Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, s. d.. ISBN 978-84-7493-425-0.

ARNHEIM, Rudolf – **Arte & percepção visual: Uma psicologia da visão criadora**. São Paulo: Livraria Pioneira Editora, 1986.

AROCA HERNÁNDEZ-ROS, J. M.; FERNÁNDEZ BERMEJO, M. J.; PÉREZ BLANCO, J. – **Problemas de geometría afín y geometría métrica**. Valladolid: Universidad de Valladolid, 2004. ISBN 84-8448-302-9.

ASKWITH, Edward Harrison – **A course of pure geometry: containing a complete geometrical treatment of the properties of the conic sections**. Cambridge: University Press, 1917.

ATCHISON, Clyde Shepard – **Curves with a directrix**. Baltimore: The Lord Baltimore Press, 1908. [Dissertation for the Degree of Doctor of Philosophy.]

AYME, Jean-Louis – **Méthodes et techniques en géométrie: à propos de la droite de Newton**. Paris: Ellipses Édition Marketing S. A., 2003. ISBN 2-7298-1585-6.

BAGLIVO, Jenny A.; GRAVER, Jack E. – **Incidence and symmetry in design and architecture**. Cambridge: Cambridge University Press, 1983. ISBN 0 521 23043 8.

BAKER, H.F. – **Principles of geometry**. 2 vol.. Cambridge: The University Press, 1922. [Volume I – Foundations, Volume II – Plane geometry: conics, circles, non-euclidian geometry.]

BALL, W. W. Rouse – **Histoire des mathématiques**. Tome I e II. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann, 1906.

BALLESTER, Julio Albert; QUEROL ROMERO, Vicent; SINTAS MARTINEZ, Antonio – **Geometría para la arquitectura: Ejercicios de sistemas de representacion**. Valencia: Editorial Universitat Politècnica de València, 2010. ISBN 978-84-8363-620-6.

BALMOND, Cecil – Complejidad. Tectónica. Madrid: ATC Ediciones, S. L.. ISSN 1136-0062. 17 [Número Temático – Geometrías complejas] (2004) 1.

BALMOND, Cecil – Desafío. Tectónica. Madrid: ATC Ediciones, S. L.. ISSN 1136-0062. 17 [Número Temático – Geometrías complejas] (2004) 2.

BARRAT, Krome – **Logic and design: in art, science & mathematics**. New York: Design Books, 1989. ISBN 1-55821-268-X.

BARRE, Andre; FLOCON, Albert – **La perspectiva curvilinea**. Barcelona: Ed. Paidós, 1985.

BARTOLOMÉ RAMIREZ, Ricardo – **Planos acotados: Expresión gráfica**. Logroño: Universidad de la Rioja, Servicio de Publicaciones, 2003. ISBN 84-95301-74-1.

BELL, A. – **Solid and spherical geometry, and conic sections: Being a treatise on the higher branches of synthetical geometry, containing the solid and spherical geometry of Playfair; The projections of the sphere and conic sections of west; With perpendicular projection and perspective, and various improvements and additions**. Edinburgh: William and Robert Chambers, 1837.

BERGER, Marcel; GOSTIAUX, Bernard – **Géométrie différentielle: Variétés, courbes et surfaces**. Paris: Presses Universitaires de France, 2005. ISBN 2 13 044708 2.

BERTHOMIER, T.; BONAFÉ, F. – **Géométrie pour l'élève architecte**. Montpellier: Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 1995. ISBN 2-909916-11-1.

BESANT, William Henry – **Conic sections, treated geometrically**. Cambridge: Deighton, Bell and Co., 1890.

BIX, Robert – **Conics and cubics: a concrete introduction to algebraic curves**. New York [etc.]: Springer Science+Business Media, 2006. ISBN 0-387-31802-x.

BLACKWELL, William – **Geometry in architecture**. New York [etc.]: Wiley-Interscience Publication, 1984. ISBN 0-471-09683-0.

BLUMENTHAL, Leonard M. – **A modern view of geometry**. New York: Dover Publications, Inc., 1980. ISBN 0-486-63962-2.

BONSIEPE, Gui – **Teoria e Prática do Design Industrial**. Lisboa: Centro Português do Design, 1992. ISBN 972-9445-02-8.

BOSSE, A. – **La manière universelle de M. Desargues, Lyonnnois, pour poser l’esseiev & placer les heures & autres choses aux cadrans au soleil.** Paris: Pierre Des-Hayes, 1643.

BOYER, Carl B. – **História da Matemática.** São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 2005. [Trad. de A History of Mathematics. John Wiley & Sons, Inc, 1991]. ISBN 85-212-0023-4.

BRIDGE, Bowic – **A treatise on the construction, properties and analogies of the three conic sections.** New Haven: Hezekian Howe & Co., 1836.

BROCARD, H. ; LEMOYNE, T. – **Courbes géométriques remarquables (Courbes spéciales) planes & gauches.** Tome I. Paris: Librairie Vuibert, 1919.

BUSSI, Maria G. Bartolini; Maschietto, Michela – **Macchine matematiche: dalla storia alla scuola.** Milano: Springer-Verlag Italia, 2006. ISBN 978-88-470-0402-3.

CABEZAS, Lino [et al.] – **Dibujo y construcción de la realidad: arquitectura, proyecto, diseño, ingeniería, dibujo técnico.** Madrid : Ediciones Cátedra, 2011. ISBN 978-84-376-2752-6.

CALTER, Paul A. – **Squaring the circle: Geometry in art and architecture.** Hoboken, New Jersey; John Wiley and Sons, Inc., 2008. ISBN 978-0-470-41212-1.

CAMPOS, Manoel de – **Elementos de geometria plana, e solida, segundo a ordem de Euclides, Principe dos geometras.** Lisboa Ocidental: Officina Rita-Cassiana, 1735.

CARLOMAN, Antonio Gonzalez – **Estructura lógica de la geometria clasica del plano.** Oviedo: Universidad de Oviedo - Servicio de publicaciones, 1986.

CARNOT, Lazare – **De la corrélation des figures de géométrie.** Paris : Crapelet, 1801.

CASAS-ALVERO, Eduardo; XAMBÓ-DESCAMPS, Sebastian – **The enumerative theory of conics after Halphen.** Berlin [etc.]: Springer-Verlag, 1986. ISBN 3-540-16495-2.

CASSE, Rey – **Projective geometry: an introduction.** Oxford : University Press, 2006. ISBN 0-19-929885-8.

CHASLES, Michel – **Aperçu historique sur l’origine et le développement des méthodes en géométrie suivi d’un Mémoire de géométrie aux deux principes généraux de la science, la dualité et l’homographie.** Tome I. Paris : Éditions Jacques Gabay, 1989 (Tome I) e 1993 (Tome II). [ed. facsimile da de Bruxelles: M. Hayez, 1837]. Tome I ISBN 2-87647-057-8 e Tome II 2-87647-058-6.

CHASLES, Michel – **Traité de géométrie supérieure.** Paris : Bachelier, 1852.

- CHASLES, Michel – **Traité des sections coniques**. Paris: Gauthier-Villars, 1865.
- CHASLES, Michel – **Two geometrical memoirs on the general properties of cones of the second degree and on the spherical conics**. Dublin: University Press, 1841.
- CHASLES, Michel (CHASLES, A.) – **Mémoire de géométrie sur les propriétés générales de coniques sphériques**. Bruxelles: M. Hayez, 1831.
- COCKSHOTT, Arthur; WALTERS, F. B. – **A treatise on geometrical conics: In accordance with the Syllabus of the Association for the Improvement of Geometrical Teaching**. London: MacMillan and Co., 1889.
- COFFIN, Jamesh – **Elements of conic sections and analytical geometry**. New York: Robert B. Collins, 1851.
- CONTADOR, Paulo Roberto Martins – **A matemática na arte e na vida**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008. ISBN 978-85-88325-920.
- CONTADOR, Paulo Roberto Martins – **Matemática: Uma breve história** (3 vol.). São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008. ISBN 978-85-88325-62-4.
- COOLIDGE, Julien Lowell – **A history of the conic sections and quadric surfaces**. Oxford: The Clarendon Press, 1945.
- COOLIDGE, Julien Lowell – **A treatise on algebraic plane curves**. New York: Dover Publications, Inc., 2004. [Re-ed. da ed. Oxford University Press, 1931.] ISBN 0-486-49576-0.
- COOLIDGE, Julien Lowell – **A history of geometrical methods**. New York: Dover Publications, Inc., 2003. Ed. original Oxford University Press, 1940. ISBN 0-486-49524-8.
- COOLIDGE, Julien Lowell – **The mathematics of great amateurs**. 2nd ed.. Oxford: Oxford University Press, 1990. Ed. original 1949. ISBN 0-19-853939-8.
- CORBELLA BARRIOS, D. – **Técnicas de representación geométrica: con Fundamentos de concepción espacial**. Madrid: D. Corbella Barrios, 1993. ISBN 84-604-7495-X.
- CORDEIRO, Manuel do Nascimento do Rosário. – Um estudo sobre as cónicas de Apolónio de Perga da sua invenção até às primeiras aplicações práticas. Porto: Universidade Portucalense Infante D. Henrique, 2005. [Tese de Mestrado em Matemática / Educação sob orientação da Professora Doutora Maria Fernanda Estrada.]
- [COSTA], Joaquim BONIFÁCIO – Desenho cotado e axonometrias. Castelo Branco: Escola Superior de Educação do I.P.C.B., 1989. [Documento policopiado].

[COSTA], Joaquim BONIFÁCIO – Geometria Aplicada. Castelo Branco: Escola Superior de Educação do I.P.C.B., 1989. [Documento policopiado].

[COSTA], Joaquim BONIFÁCIO – Geometria Descritiva. Castelo Branco: Escola Superior de Educação do I.P.C.B., 1989. [Documento policopiado].

[COSTA], Joaquim BONIFÁCIO – Intersecção de Superfícies. Castelo Branco: Escola Superior de Educação do I.P.C.B., 1990. [Documento policopiado].

[COSTA], Joaquim BONIFÁCIO – Perspectiva Prática. Castelo Branco: Escola Superior de Educação do I.P.C.B., 1990. [Documento policopiado].

[COSTA], Joaquim BONIFÁCIO – Planificação de Sólidos. Castelo Branco: Escola Superior de Educação do I.P.C.B., 1990. [Documento policopiado].

[COSTA], Joaquim BONIFÁCIO – Determinação gráfica da parábola conhecidos dois pontos da curva e a tangente no vértice (exemplo prático de geometria aplicada ao design). Convergências. Castelo Branco: ESART – IPCB, nº2, Jan. (2009) art. 32. [<http://convergencias.esart.ipcb.pt/artigo/32> acedido em 20/12/2009]. ISSN 1646-9054.

COSTA, Joaquim M. C. Bonifácio – Intersecção de superfícies não planas em dupla projecção ortogonal. Castelo Branco: Instituto Politécnico de Castelo Branco, Escola Superior de Artes Aplicadas, 2005. [Estudo para Concurso de Provas Públicas para Professor-Adjunto].

COSTA, Manuel J. R. Couceiro da – Perspectiva e arquitectura : uma expressão da inteligência no trabalho de concepção. Lisboa: Universidade Técnica de Lisboa – Faculdade de Arquitectura, 1992. [Tese de Doutoramento em Arquitectura].

COXETER, H. S. M. – **Projective geometry**. Toronto: University of Toronto Press, 1974.

COXETER, H. S. M. – **The real projective plane**. Cambridge: Cambridge University Press, 1961.

CREMONA, Luigi – **Elements of projective geometry**. Oxford: The Clarendon Press, 1885. [translated by Charles Leudesdorf.]

CROMWELL, Peter R. – **Polyhedra**. Cambridge : Cambridge University Press, 1997. ISBN 978-0-521-55432-9.

CROMWELL, Peter R. – **Polyhedra**. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. ISBN 978-0-521-66405-9.

CUNHA, Luís Veiga da – **Desenho técnico**. 5ª ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1982.

CURABELLE, Jacques – **Examen des œuvres du S.r Desargues**. Paris : M. & I. Henault, 1644.

DAY, H. G. – **Properties of conic sections proved geometrically**. London and Cambridge: MacMillan and Co. [University Press], 1868.

DERGIADES, N. – Conics Tangent at the Vertices to Two Sides of a Triangle. Forum Geometricorum Volume 10 (2010) 41-53. Boca Raton: Florida Atlantic University, 2010. ISSN 1534-1178.

DESCARTES, René – **A geometria**. Lisboa: Prometeu Edições, 2001. Tradução da edição francesa de 1637.

DINGELDEY, F.; FABRY, E. – Coniques et systèmes de coniques. Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliqués. Tome IV volume 3 article III-17 et III-18. Paris: Gauthier-Villars, 1904-1916.

DOCZI, György – **O poder dos limites: Harmonias e proporções na natureza, arte e arquitetura**. São Paulo: Editora Mercuryo Ltda., 1990. ISBN 85-7272-021-9.

DOWNS, J. W. – **Practical conic sections**. Palo Alto, California: Dover Publications, Inc., 2003.

DRAGOVIĆ, Vladimir; RADNOVIĆ – **Poncelet porisms and beyond: Integrable billiards, hyperelliptic Jacobians and pencils of quadrics**. Basel: Birkhauser, 2011. ISBN 978-3-0348-0014-3.

DREW, William Henry – **A geometrical treatise on conic sections**. Cambridge: MacMillan and Co., 1857.

DUBBEL, Heinrich et al – **Manual de construção de máquinas**. Tomos I e II. Curitiba: Hemus, 1974. ISBN 85-289-0270-6. [Tradução para português da 13ª ed. rev. e ampliada em língua alemã].

DUPONT, L.; LAZARD, D.; PETITJEAN, S. - Near-optimal parameterization of the intersection of quadrics: I. The generic algorithm. Journal of Symbolic Computation 43 (2008) 168–191. www.elsevier.com/locate/jsc. [www.sciencedirect.com].

EAGLES, T. H. – **Constructive geometry of plane curves: with numerous examples**. London: MacMillan and Co., 1885.

EISENHART, Luther Pfahler – **Coordinate geometry**. New York: Dover Publications, Inc., 1960.

ELAM, Kimberly – **Geometry of design: studies in proportion and composition**. New York: Princeton Architectural Press, 2001. ISBN 1-56898-249-6.

ENGEL, Heino – **Sistemas de estruturas**. Barcelona: Editorial Gustavo Gili SA, 1967.

ENRIQUES, Federigo – **Leçons de géométrie projective**. Paris : Gauthier-Villars et C^{ie}, Éditeurs, 1930.

Enriques, Federigo – **Lezioni di geometria descrittiva**. Bolonha: Nicola Zanichelli, 1901. [ristampa della seconda edizioni - 1920.]

Enriques, Federigo – **Lezioni di geometria proiettiva**. Bolonha: Nicola Zanichelli, 1898.

Estereotomia – Geometria Descritiva. Lisboa, E.S.B.A.L., Unidade Estudantil, s.d.. Texto manuscrito e poli copiado, autor colectivo.

ESTRADA, Maria Fernanda [et. al.] – **História da Matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 2000. ISBN 972-674-315-X.

EVANS, Robin – **The projective cast: architecture and its three geometries**. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 2000. ISBN 0-262-55038-5.

FARIN, Gerald – **Curves and surfaces for CAGD: A practical guide**. Fifth ed. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2002.

FARIN, Gerald – **NURBS for curve and surface design**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1991. ISBN 0-89871-286-6.

FARIN, Gerald – **NURBS from projective geometry to practical use**. Natick, Massachusetts: A K Peters, 1995.

FAROUKI, R. – Conic Approximation of Conic Offsets. Journal of Symbolic Computation (1997) 23, 301-313. ScienceDirect. [<http://www.journals.elsevier.com/journal-of-symbolic-computation/>]. ISSN: 0747-7171.

FAROUKI, R.; SEDERBERG, T. – Analysis of the offset to a parabola. Computer Aided Geometric Design 12 (1995) 639-645. North-Holland: 1995. Science Direct. <http://www.journals.elsevier.com/computer-aided-geometric-design/>. ISSN: 0167-8396.

FAUGERAS, Olivier – **Three-dimensional computer vision: A geometric viewpoint**. 3^a ed. Cambridge, Massachusetts: The Massachusetts Institute of Technology Press, 1999.

FAUGERAS, Olivier; LUONG, Quang-Tuan; PAPADOPOULOU, Théo – **The geometry of multiple images: The laws that govern the formation of multiple images of a scene and some of their applications.** Cambridge, Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, 2001. ISBN 0-262-06220-8.

FAUVEL, John; FLOOD, Raymond; WILSON, Robin – **Music and mathematics: From Pythagoras to fractals.** Oxford e New York: Oxford University Press, 2003. ISBN 978-0-19-929893-8.

FETISOV, A. I.; DUBNOV, Ya. S. – **Proof in geometry: With “mistakes in geometric proofs”.** New York: Dover Publications, Inc., 2006. ISBN-13: 978-0-486-45354-5.

FIELD, David A. (ed.); KOMKOV, Vadim (ed.) – **Geometric aspects of industrial design.** Philadelphia: Society for industrial and applied mathematics, 1992. ISBN 0-89871-290-4.

FIELD, J. V.; GRAY, J.J. – **The geometrical work of Girard Desargues.** New York: Springer-Verlag, 1987. ISBN 0-387-96403-7.

FIELD, Peter – **Projective geometry: with applications to engineering.** New York: D. Van Nostrand Company, 1923.

FIORAVANTI, M; GONZALEZ-VEJA, L.; NECULA, I. – Computing the intersection of two ruled surfaces by using a new algebraic approach. Journal of Symbolic Computation 41 (2006) 1187-1205. [Elsevier, www.sciencedirect.com].

FLATTO, Leopold – **Poncelet’s Theorem.** Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2009. ISBN 978-0-8218-4375-8.

FOURCY, A. – **Histoire de l’école polytechnique.** Paris : École Polytechnique, 1828.

FREDE – ALTENIDINER – **El dibujo en proyección diédrica.** Barcelona: Gustavo Gili, 1970.

FRIED, Michael N. – **Edmond Halley’s reconstruction of the lost book of Apollonius’s Conics: Translation and commentary.** New York [etc.]: Springer, 2011. ISBN 978-1-4614-0145-2.

FRIED, Michael N.; UNGURU, Sabetai – **Apollonius of Perga’s Conica: text, context, subtext.** Leiden [etc.]: Brill, 2001. ISBN 90-04-11977-9.

FROMENT, Michel – **Cascos de aço & de alumínio.** Lisboa: Dinalivro, 2011. ISBN 978-972-576-580-7.

GABRIEL-MARIE, Frère – **Géometrie descriptive**. Tome I e II. Paris: Éditions Jacques Gabay, 1996. [re-ed. Facsimile da edição Tours: Alfred Mame et Fils e Paris: Charles Poussiègue de 1893]. ISBN 2-87647-170-1.

GASKIN, Thomas – **The solutions of geometrical problems, consisting chiefly of examples in plane co-ordinate geometry**. Cambridge: J. & J. J. Deighton, 1847.

GAUSS; DAVIS, Charles Henry (Trad. e Ed.) – **Theory of the motion of the heavenly bodies moving about the sun in conic sections**. Boston: Little, Brown and Company, 1857.

GAZALÉ, Midhat J. – **Gnomon: From pharaohs to fractals**. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999. ISBN 0-691-00514-1.

GHYKA, Matila – **The geometry of art and life**. New York: Sheed and Ward, 1946. [re-edição fac-símile USA: Kessinger Publishing, 2010. ISBN 1-4179-7832-5].

GHYKA, Matila C. – **Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes**. Barcelona: Editorial Poseidon, 1983. ISBN 84-85083-06-7.

GIBSON, C. G. – **Elementary euclidean geometry: an undergraduate introduction**. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. ISBN 0 52183448 1.

GÓMES, G. R., Flores, J.G.; JIMÉNEZ, E. G.– **Metodología de la investigación cualitativa**. (2nd ed.). Málaga: Ediciones Aljibe, S.L.,1999.

GÓMEZ HERMOSO, Jesús [et al.] – **Puentes atirantados españoles: 2005-2010; Procesos construtivos**. Madrid: Universidad Politécnica de Madrid - Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, 2010. ISBN 978-84-7493-429-8.

GÓMEZ JIMÉNEZ, Francisco; FERNÁNDEZ GONZÁLEZ, Mario – **Geometría descriptive: Sistema diédrico y acotado, Problemas**. Barcelona: Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL, 2005. ISBN 978-84-8301-886-6.

GOMIS MARTÍ, José María – **Curvas y superficies en diseño de ingeniería**. Valencia: Universidad Politecnica de Valencia, Serv. de Publicaciones, 1996. ISBN 84-7721-368-2.

GONZALEZ CARLOMAN, Antonio – **Estructura lógica de la geometria clasica del plano**. Oviedo: Universidad de Oviedo, Servicio de Publicaciones, 1986. ISBN 84-7468-118-9.

GORDON, V. O.; SEMENSOV-OGUIYEVSKY – **Curso de geometria descritiva**. 2nd ed.. Moscovo: Ed. MIR, 1980. [Editado em castelhano].

GORDON, V. O.; IVANOV, B.; SOLNTSEVA; T. E. – **Problemas de geometria descritiva**. Moscovo: Ed. MIR, 1974. [Editado em castelhano].

GORINI, Catherine A. (Editor) – **Geometry at work: Papers in applied geometry**. Washington: The Mathematical Association of America, 2000. ISBN 0-88385-164-4.

GOUVEIA, Gonçalo Nuno Ramos Ferreira – A existência do geómetra: epistemologia, fundamentação e pedagogia de uma geometria descritiva para o ensino artístico universitário. Funchal: Universidade da Madeira, 2006. [Tese de Doutoramento].

HAMILTON, Hugh – **A geometrical treatise of the conic sections**. London: J. Nurse, 1773.

HATTON, John Leigh Smeathman – **The principles of projective geometry applied to the straight line and conic**. Cambridge: University Press, 1913.

HATTON, John Leigh Smeathman – **The theory of the imaginary in geometry: together with the trigonometry of the imaginary**. Cambridge: University Press, 1920.

HAUSSNER, Robert – **Geometría descriptiva**. Barcelona: Editorial Labor, S. A., 1928. [Trad. de alemão para castelhano por Carlos Mendizábal Brunet].

HEARN, George Whitehead – **Researches on curves of the second order, also on cones and spherical conics treated analytically**. London: George Bell, 1846.

HEATH, Thomas – **A history of greek mathematics**. Vol. I. Oxford: Clarendon Press, 1921. [Publicação fac-símile Bibliolife].

HEATH, Thomas – **A history of greek mathematics**. Vol. II. Oxford: Clarendon Press, 1921. [Publicação fac-símile New York: Dover Publications, Inc., 1981. ISBN 0-486-24074-6.]

HEMENWAY, Priya – **O código secreto: A formula misteriosa que governa a arte, a natureza e a ciência**. Köln [Colónia]: Evergreen, 2010. ISBN 978-3-8365-2518-3.

HERMAN, Ivan – **The use of projective geometry in computer graphics**. Berlin [etc.]: Springer-Verlag, 1992. ISBN 3-5405-5075-5.

HERNÁNDEZ PARICIO, Luis Javier – **Sobre los principios fundamentales de la geometria**. Logroño: Universidad de la Rioja, Servicio de Publicaciones, 2001. ISBN 84-95301-55-5.

HILBERT, David – **Fundamentos da geometria**. Lisboa: Gradiva, 2003.

HILBERT, David – **The foundations of geometry**. Chicago: The Open Court Publishing Company, 1902.

HILBERT, David; COHN-VOSSEN, S. – **Geometry and the imagination**. U.S.A.: American Mathematical Society, 1999. [Reedição da tradução para inglês do alemão Anschauliche Geometrie, 1932 ?]. ISBN 0-8218-1998-4.

HOLDEN, Alan – **Shapes, space and symmetry**. New York: Dover Publications, Inc, 1991. [Republicação de New York: Columbia University Press, 1971.] ISBN 0-486-26851-9.

HOLME, Audun – **Geometry: Our cultural heritage**. New York: Springer, 2010. ISBN 978-3-642-14440-7.

HOSPITAL, Marquis de L' – **Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la resolution des equations dans les problêmes tant déterminéz qu'indeterminéz**. Paris: Montalant, 1720.

HUERTA FERNÁNDEZ, Santiago – **Arcos, bóvedas y cúpulas: Geometria y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica**. Madrid: Instituto Juan de Herrera – Escuela Técnica Superior de Arquitectura, 2004. ISBN 84-9728-129-2.

HUSTLER, James Devereux – **The elements of the conic sections with the sections of the conoids**. Cambridge: University Press, 1845.

HYMERS, J. – **A treatise on conic sections and the application of algebra to geometry**. (3rd ed). Cambridge: University Press, 1845.

IVINS Jr., William M. – **Art & geometry: A study in space intuitions**. New York: Dover Publications, Inc., 1964. [Harvard University Press, 1946.] ISBN 0-486-20941-5.

IZQUIERDO ASENSI, Fernando – **Construcciones geométricas**. Madrid: Ed. autor, 2002.

IZQUIERDO ASENSI, Fernando – **Ejercicios de geometria descriptiva I: sistema diédrico**. 14d ed. Madrid: Ed. Dossat, 2001.

IZQUIERDO ASENSI, Fernando – **Ejercicios de geometria descriptiva II: acotado y axonométrico**. 13d ed. Madrid: Ed. Dossat, 1994.

IZQUIERDO ASENSI, Fernando – **Geometría descriptiva superior y aplicada**. 3d ed. Madrid: Ed. Dossat, 1985. ISBN 84-237-0441-6.

IZQUIERDO ASENSI, Fernando – **Geometría descriptiva**. 18d ed. Madrid: Ed. Dossat, 1988. ISBN 84-237-0151-4.

- JACKSON, I. W. – **Elements of conic sections**. Albany: Gray and Sprague, 1850.
- KANATANI, K.; LIU, W. – 3D interpretation of conics and orthogonality. Computer Vision CVGIP: Image Understanding Vol. 58, Nº 3, November, 286-301, 1993. Orlando: Academic Press, Inc, 1993. Science Direct. [<http://www.sciencedirect.com/science/journal/10499660>]. ISSN:1049-9660.
- KAPPRAFF, Jay – **Connections: the geometric bridge between art and science**. U.S.A.: McGraw-Hill, Inc., 1990. ISBN 0-07-034250-4.
- KATZ, Victor J. – **História da Matemática**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010. ISBN 978-972-31-1360-0.
- KENDIG, Keith – **Conics: The Dolciani mathematical expositions #29**. USA: The Mathematical Association of America (Incorporated), 2005. ISBN 0883853353.
- KENNER, Hugh – **Geodesic math and how to use it**. Berkeley: University of California Press, 2003. ISBN 978-0-520-23931-9.
- KIM, J.; GURDJOS, P; KWEON, S. – Euclidean structure from confocal conics: Theory and application to camera calibration. Computer Vision and Image Understanding 114 (2010) 803-812. ScienceDirect. [www.elsevier.com/locate/cviu]. ISSN: 1077-3142.
- KINSEY, L. Christine; MOORE, Teresa E.; PRASSIDIS, Efstratios – **Geometry & symmetry**. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2010. ISBN 978-0-470-49949-8.
- KISELEV, A. P. – **Kiselev's geometry: Book I Planimetry**. Berkeley: University of California, 2006. ISBN 0-9779852-2.
- KISELEV, A. P. – **Kiselev's geometry: Book II Stereometry**. Berkeley: University of California, 2008. ISBN 978-0-9779852-1-0.
- KLEIN, Félix – **Development of mathematics in the 19th century**. Brookline, Massachusetts: MATH SCI PRESS, 1979. Tradução da edição alemã de 1928.
- KLETE, Reinhard; ROSENFELD, Azriel – **Digital Geometry: Geometric methods for digital picture analysis**. San Francisco: Elsevier, Inc., 2004. ISBN 1-55860-861-3.
- LA HIRE, Philippe de – **Sections coniques: distribuées en neuf livres, dans lesquelles a été rapport jusqu'ici tout ce qui est digne d'observation d'une part par les anciens d'autre part par de plus récents Géomètres, et est expliqué par de nouvelles demonstrations resserrées; est encore illustré par de nombreuses et exquises**

Propositions récemment inventées. Paris: Librairie A. Blanchard, 1995. [Tradução da edição em latim de Paris: Etienne Michallet, 1685 para francês de Jean Peyroux.].

LACHLAN, Robert – **An elementary treatise on modern pure geometry.** London: MacMillan and Co., 1893.

LACROIX, S. F. – **Essais de géométrie sur les plans et les surfaces courbes: éléments de géométrie descriptive.** Seconde Édition. Paris: Duprat, 1802.

LADEGAILLERIE, Yves – **Géométrie: affine, projective, euclidienne et anallagmatique.** [License, Capès, Agrégation.] Paris: Ellipses Édition Marketing, S.A., 2003. ISBN 2-7298-1416-7.

LAVERTY, Wallis Hay – Examples of conics and curves. London: Rivingtons, 1872.

LE CORBUSIER – **O Modulor – Modulor 2.** 2 vol. Lisboa: Orfeu Negro, 2010. ISBN 978-989-95565-7-7.

LEBESGUE, Henri – **Leçons sur les constructions géométriques: professes au college de France en 1940-1941.** Paris: Gauthier-Villars, 1950.

LEBESGUE, Henri – **Les coniques.** Paris: Gauthier-Villars, 1942.

LEVY, Harry – **Projective and related geometries.** New York: The Macmillan Company, 1961.

LIMA, António Pedro de Assunção Nobre. – Referenciais geométricos na arquitectura e no design: Para além da geometria euclidiana. Lisboa: Universidade Técnica de Lisboa – Faculdade de Arquitectura, 2007. [Tese para Doutoramento em Arquitectura – Especialidade de Comunicação Visual sob a orientação do Professor Doutor Manuel Jorge Rodrigues Couceiro da Costa].

LIMING, Roy A. – **Mathematics for computer graphics.** Fallbrook [California]: Aero Publishers, Inc., 1981. ISBN 0-8168-6751-8.

LING, George Herbert; WENTWORTH, George; SMITH, David Eugene – **Elements of projective geometry.** Boston: Ginn and Company, 1922.

LOBJOIS, Charles – **Desenvolvimento de chapas.** Curitiba: Hemus SA, 2002.

LOBJOIS, Charles – **Transformación de la chapa: Trazado, corte, curvado y plegado.** Col. técnico - mecánica Barcelona: Ediciones Ceac, 2004. ISBN 84-329-3417-8.

LOBJOIS, Charles – **Trazado de planchistería y calderería 1: Desarrollo de formas poliédricas, cilíndricas y cónicas**. Col. técnico - mecánica Barcelona: Ediciones Ceac, 2004. ISBN 84-329-3415-1.

LOBJOIS, Charles – **Trazado de planchistería y calderería 2: Desarrollo de piezas complejas e intersecciones**. Col. técnico - mecánica Barcelona: Ediciones Ceac, 2004. ISBN 84-329-3416-X.

LOBJOIS, Charles – **Uniones y soldaduras: Provisionales y permanentes**. Col. técnico - mecánica Barcelona: Ediciones Ceac, 2004. ISBN 84-329-3418-6.

LOOMIS, Elias – **Elements of geometry and conic sections**. New York: Harper and Brothers, Publishers, 1858.

LUCAS, Adriano; MAYER, D. Lima – **Elementos de geometria descritiva e teoria de sombras**. Lisboa: Escola Superior de Belas Artes, 1974.

MALDONADO, Tomás – **Design industrial**. Lisboa: Edições 70, 1999. Coleção Arte e Comunicação. ISBN 972-44-1006-4.

MARCOLLI, Attilio – **Teoria del campo**. Fiorenza: Sansoni, 1971 .

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. – **Fundamentos de metodologia científica**. (5ª ed.), São Paulo: Editora Atlas S.A., 2003.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. – **Metodologia científica**. São Paulo: Editora Atlas S.A., 2000.

MASCHERONI – **Géométrie du compas**. Paris: Bachelier, 1828.

MASSIRONI, Manfredo – **Ver pelo Desenho**. Lisboa: Ed. 70, 1983.

Mathematical Subjects Classifications. Editorial staffs of Mathematical Reviews (MR) and Zentralblatt fur Mathematik (Zbl) in consultation with the mathematical community, 2010. [consultado através de AMS American Mathematical Society em <http://www.ams.org/msc/msc2010.html> em 5/9/2015].

MCLELLAND, William J. – **A treatise on the geometry of the circle and some extensions to conic sections by the method of reciprocation**. London: Macmillan and Co., 1891.

MEYER, Walter – **Geometry and its applications**. San Diego: Harcourt Academic Press, 1999. ISBN 0-12- 493270-3.

MICHETTI, A. – Possibili costruzioni delle ellissi del Colosseo. In DOCCI, M. - **Il colosseo: Studi e ricerche**. Roma: Gangemi Editore, 1998. ISBN 88-492-0055-2. p. 89-97. Numero monográfico de disegnare Anno X, n. 18/19 ISSN IT 1123-9247.

MILLER, J.; GOLDMAN, R. – Geometric algorithms for detecting and calculating all conic sections in the intersection of any two natural quadric surfaces. Graphical models and image processing. Vol. 57 No. 1, January, 55-66, 1995.

MINIFIE, WM. – **A text book of geometrical drawing, for the use of mechanics and schools**. Baltimore: WM. MINIFIE & CO., 1851.

MIRA LLOSÁ, José Ramón; GOMIS MARTÍ, José María – **Ejercicios de dibujo tecnico: «Sistemas de representacion»**. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia, Servicio de Publicaciones, 1993. ISBN 84-7721-204 – X.

MLODINOV, Leonard – **Euclid's window: The story of geometry from parallel lines to hyperspace**. New York: Touchstone, 2002. ISBN 978-0-684-86524-9.

MONGE, Gaspard – **Geometría descriptiva**. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, 1996. [“edición facsimilar” da tradução a castelhana de 1803]. ISBN 84-380-0121-1.

MONGE, Gaspard; BRISSON, M. (Ed.) – **Géométrie Descriptive : cinquième édition augmentée d'une théorie des ombres et de la perspective extradite des papiers de l'auteur par m. Brisson**. Paris: Bachelier, 1827.

MONTOYA MORENO, Felipe – Fundamentos de la geometria de los engranajes. Valladolid: Secretariado de Publicaciones, Universidad de Valladolid, 1993. ISBN 84-7762-367-8.

MONTUCLA, Jean-Étienne – **Histoire dès mathématiques**. Tome I, II, III e IV. Paris: Henri Agasse, An VII a X (1799 a 1802).

MORRIS, R. – **The fundamentals of Product Design**. Lausanne and London: AVA Publishing SA, 2009.

MUHKOPADHYAY, Asutosh - **An Elementary Treatise On The Geometry Of Conics**. Calcutta: s. ed., 1893.

MURTINHO, Vítor Manuel Bairrada – “La Piú Grassa Minerva”: a representação do lugar. Coimbra: Universidade de Coimbra – Faculdade de Ciências e Tecnologia, 2001. [Tese de doutoramento sob a orientação do Professor Doutor Domingos Tavares.]

NAGORE, Fernando – **Geometría Métrica y Descriptiva para Arquitectos**. Tomos I, II y III. Pamplona: EUNSA, Ediciones Universidad de Navarra, S.A., 1986, 1987 e 1988. ISBN 84-313-0961-X (obra completa).

NAVARRO de ZUVILLAGA, Javier – **Forma y representación: un análisis geométrico**. Madrid: Ediciones Akal, S. A., 2008. ISBN 978-84-460-2018-9.

NEWTON, Isaac – **Newton's principia: The mathematical principles of natural philosophy, to which is added Newton's system of the world**. New York: Daniel Adee, 1848.

NIETO OÑATE, M.; ARRIBAS GONZÁLEZ, J.; REBOTO RODRÍGUEZ, E. – **Representación de superficies: Aplicación al dibujo técnico**. Valladolid: Universidad de Valladolid, Secretariado de Publicaciones e Intercambio Editorial, 1999. ISBN 84-7762-983-8.

O'ROURKE, Joseph – **How to fold it: The mathematics of linkages, origami and polyhedra**. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. ISBN 978-0-521-14547-3.

OTTO, Frei; SONGEL, Juan María – **Frei Otto: Conversación con Juan María Songel**. Barcelona: Editorial Gustavo Gili, SL, 2008. ISBN 978-84-252-2205-4.

PAMFILOS, P. – Conic Homographies and Bitangent Pencils. Forum Geometricorum Volume 9 (2009) 229–257. Boca Raton: Florida Atlantic University, 2009. ISSN 1534-1178.

PARES, Jean – La gnomonique de Desargues a Pardies: Essai sur l'évolution d'un art scientifique. Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences - Nouvelle série. Paris: Société Française d' Histoire des Sciences et des Techniques. ISSN 0221-3664. Nº 17 (1988).

PARKINSON, A. C. – **Intermediate engineering drawing: Including a course in plane and solid geometry, and an introduction to design**. London: Sir Isaac Pitman & Sons, Ltd., 1947.

PEARCE, G. F. – **Engineering graphics and descriptive geometry in 3D**. Toronto: McGraw-Hill Ryerson Limited, 1985. ISBN 0-07-548998-8.

PEDOE, Dan – **Geometry and the visual arts**. New York: Dover Publications, Inc., 1983. ISBN 0-486-24458-X.

PEGADO, Luiz Porfirio da Motta – O lugar geometrico dos pontos que distam igualmente de duas rectas dadas é um "paraboloide hiperbolico isosceles". Jornal de Ciencias

Mathematicas, Physicas e Naturaes. 1867, I (3): 188-197. Lisboa: Academia Real das Sciencias de Lisboa.

PEGADO, Luiz Porfirio da Motta – Dedução da fórmula que dá o volume limitado pelo "intradorso" d'uma abobada de "aresta", por o plano das impostas e por os planos verticaes que conteem os quatro arcos de testa da mesma abobada. Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes. 1869, II (6): 89-94. Lisboa: Academia Real das Sciencias de Lisboa.

PEGADO, Luiz Porfirio da Motta – Dedução da fórmula que dá o volume limitado pelo "intradorso" d'uma "abobada de barrete", por o plano das impostas e por os quatro planos verticaes correspondentes aos pés direitos da "abobada". Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes. 1869, II (6): 95-97. Lisboa: Academia Real das Sciencias de Lisboa.

PEGADO, Luiz Porfirio da Motta – Secções conicas do conoide circumscripto a uma conica. Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes. 1875, V (18): 65-72. Lisboa: Academia Real das Sciencias de Lisboa.

PEGADO, Luiz Porfirio da Motta – Determinação dos eixos da sombra ou projecção obliqua de um circulo. Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes. 1878, VI (24): 217-228. Lisboa: Academia Real das Sciencias de Lisboa.

PEGADO, L.P. da Motta – Theoria geral das combinações com repetição. Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes. 1880, VIII (29): 1-20. Lisboa: Academia Real das Sciencias de Lisboa,.

PEGADO, L.P. da Motta – A proposito de uma nota (pag. 268) do Curso de geometria descriptiva da Escola Polytechnica. Jornal de Sciências Mathematicas. Physicas e Naturaes. 1902, Segunda Série, VI (24): 193-197. Lisboa: Academia Real das Sciencias de Lisboa.

PEGADO, L.P. da Motta – **Curso de geometria descriptiva da Escola Polytechnica**. Lisboa: Academia Real das Ciências, 1899. [2 volumes].

PENNA, Michael N.; PATTERSON, Richard R. – **Projective Geometry and its applications to computer graphics**. London [etc.]: Prentice-Hall International, Inc., 1986. ISBN 0-13-730649-0 025.

PINHEIRO, Carlos da Silva; SOUSA, Pedro Fialho de – **Desenho – II volume**. Textos Pré-Universitários 39. Instituto Português de Ensino à Distância. Lisboa, M. Educ., 1979.

PINHEIRO, Carlos da Silva; SOUSA, Pedro Fialho de – **Desenho – III volume**. Textos Pré-Universitários 55. Instituto Português de Ensino à Distância. Lisboa, M. Educ., 1980.

POLSTER, Burkard; STEINKE, Günther F. – **Geometries on surfaces**. Cambridge: University Press, 2001.

PONCELET, J. V. – **Applications d'analyse et de géométrie: qui ont servi, en 1822, de principal fondement au Traité des propriétés projectives des figures**. Tome I e II. Paris: Mallet-Bachelier, 1862.

PONCELET, J. V. – **Traité des propriétés projectives des figures**. Paris: Bachelier, 1822.

POUDRA, Noël-Germinal – **Oeuvres de Desargues**. Tome I e II. Paris: Leiber, Éditeur, 1864.

POZO, José Manuel – **Geometría para la arquitectura: Concepto y práctica**. Pamplona: T6 Ediciones S. L., 2006. ISBN 978-84-89713-22-7.

PRITCHARD, Chris – **The changing shape of geometry: Celebrating a century of geometry and geometry teaching**. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. ISBN 0-521-53162-4.

PUCKLE, G. Hale – **An elementary treatise on conic sections and algebraic geometry**. (2d ed.). Cambridge: MacMillan and Co., 1856.

QUIVY, R. & CAMPENHOUDT, L. V. – **Manual de investigação em ciências sociais** (2ª ed.), Lisboa: Gradiva, 1998.

RAMÓN ARAUJO – Geometría, técnica y arquitectura. Tectónica. Madrid: ATC Ediciones, S. L.. ISSN 1136-0062. 17 [Número Temático – Geometrías complejas] (2004) 4-17.

RANGEL, Alcyr Pinheiro – **Curvas**. Rio de Janeiro: UFRJ, 1974.

RIBEIRO, Carlos Tavares – **Geometria projectiva: Conceitos, metodologias, aplicações**. Lisboa: Europress, 1991.

RICCA, Guilherme – **Geometria Descritiva: método de Monge**. 2d ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2000.

RICHTER-GEBERT, Jürgen – **Perspectives on projective geometry: a guided tour through real and complex geometry**. Berlin [etc]: Springer-Verlag, 2011. ISBN 978-3-642-17285-4.

ROBERTSON, A. – **Elements of conic sections deduced from the cone and designed of an introduction of newtonian philosophy.** Oxford: Clarendon Press, 1818.

ROBERTSON, R. G. – **Descriptive geometry.** Londres: Isaac Pitman & Sons, 1966.

ROBINSON, Horatio N. – **Conic sections and analytical geometry.** New York: Ivison, Phinney & Co., 1862.

RODRIGUES, Eugénio – Sobre as cónicas nas suas valências perceptiva e científica, na Antiguidade Clássica Grega. Boletim da APROGED. s. l.. 25 (2006) 15-21.

RODRIGUEZ DE ABAJO, F. Javier – **Geometria Descritiva: Tomo 1 - Sistema Diédrico.** 24d ed.. San Sebastian: Ed. Donostiarra, 1992.

RODRIGUEZ DE ABAJO, F. Javier – **Geometria Descritiva: Tomo 2 - Sistema de Planos Acotados.** 11d ed.. San Sebastian: Ed. Donostiarra, 1992a.

RODRIGUEZ DE ABAJO, F. Javier; ALVAREZ BENGEOA, Victor – **Curso de dibujo geométrico y de croquizacion.** 15 ed.. San Sebastian: Ed. Donostiarra, S.A., 2005. ISBN 84-7063-173-X.

RODRIGUEZ DE ABAJO, F. Javier; ALVAREZ BENGEOA, Victor – **Geometria Descritiva: Tomo 3 - Sistema Axonométrico.** 7d ed.. San Sebastian: Ed. Donostiarra, 1991.

RODRIGUEZ DE ABAJO, F. Javier; REVILLA BLANCO, Alberto – **Geometria Descritiva: Tomo 4 - Sistema de Perspectiva Caballera.** 5d ed.San Sebastian: Ed. Donostiarra, 1982.

RODRIGUEZ DE ABAJO, F. Javier; REVILLA BLANCO, Alberto – **Geometria Descritiva: Tomo 5 - Sistema de Perspectiva Cónica.** 6d ed. San Sebastian: Ed. Donostiarra, 1990.

RODRÍGUEZ-SANJURJO, José Manuel; RUIZ SANCHO, Jesús M. – **Geometría proyectiva.** Harlow, Inglaterra [etc.]: Addison-Wesley, 1998. ISBN 84-7829-016-8.

ROUBAUDI, C. – **Cours de géometrie descriptive.** 18 ed. Paris: Masson et C.^a, Éditeurs,1947.

ROUBAUDI, C. – **Traité de géometrie descriptive.** 10d ed. Paris: Masson et C.^a, Éditeurs,1961.

RUZINOV, L. D. – **Design of mechanisms by geometric transformations.** London: Iliffe Books, 1968. Tradução para inglês do original russo.

SALMON, George – **A Treatise on conic sections.** London: Longman, Brown, Green, Longman and Roberts, 1863.

SAMUELI, Jean-Jacques ; BOUDENOT, Jean-Claude – **Trente livres de mathématiques qui ont changé le monde**. Paris: Ellipses Édition Marketing S. A., 2006.

SÁNCHEZ GALLEGO, Juan Antonio – **Geometría descriptiva: Sistemas de proyección cilíndrica**. Barcelona: Edicions UPC [Universitat Politècnica de Catalunya, SL], 1997. ISBN 978-84-9880-381-5.

SÁNCHEZ-REYES, J. – Simple determination via complex arithmetic of geometric characteristics of Bézier conics. Computer Aided Geometric Design 28 (2011) 345-348. s.l.: North-Holland, 2011. [<http://www.journals.elsevier.com/computer-aided-geometric-design/>]. ISSN: 0167-8396.

SANTA-RITA, José Fernando de – **Geometria descritiva: A 12º ano**. Lisboa: Texto Editora, 2001.

SARFRAZ, Muhammad – **Advances in geometric modeling**. Southern Gate, Chichester, West Sussex: John Wiley & Sons, 2003. ISBN 0-470-859377.

SAURÍ, Miguel Angel Gil – **Geometría aplicada a la técnica**. Madrid: Editorial CIENCIA 3, 2009. ISBN 978-84-95391-15-5.

SERRES, Michel – **As origens da geometria**. Lisboa: TERRAMAR – Editores, Distribuidores e Livreiros, Lda, 1997. Coleção Ciência e ISBN 972-710-160-7.

SHIKIN, Eugene V. – **Handbook and atlas of curves**. New York: CRC Press, 1995. . ISBN 0-8493-8963-1.

SHIKIN, Eugene V.; PLIS, Alexander I. – **Handbook on Splines for the user**. New York: CRC Press, 1995. ISBN 0-8493-9404-X.

SILVA, Ana Cristina [et al.] – Hipérbole: Preenchendo uma lacuna. Santander, Espanha: XIV Congresso Internacional de Ingeniería Gráfica (INGEGRAF), 5 - 7 Junho 2002.

SILVA, F. Moreira da; MURTINHO, V.; [COSTA], J. BONIFÁCIO – Uma tipografia de base elíptica e outros cruzamentos do design com a geometria das curvas cónicas. Convergências. Castelo Branco: ESART – IPCB, nº12, (2013) art. 148. [<http://convergencias.esart.ipcb.pt/artigo/148>]. ISSN 1646-9054.

SOBREVIELA VIÑUALES, Manuel – **La geometria en el proyecto de aparcamientos**. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales e Puertos, 1995. Coleccion SEINOR Nº 16. ISBN 84-380-0096-7.

SOUSA, Pedro Fialho de (1980) – **Desenho**. Textos Pré-Universitários 13. Instituto Português de Ensino à Distância. Lisboa: M. Educ., 1980.

STANDIFORD, Kevin; STANDIFORD, Debbie – **Descriptive geometry: an integrated approach using AutoCAD**. Clifton Park, NY : Thomson Delmar Learning, 2000. ISBN 9781418021153.

STEVENS, Roger T. – **Creating fractals**. Hingham, Massachusetts: Charles River Media, Inc., 2005. ISBN 1-58450-423-4.

STEWART, Ian – **Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años**. Barcelona: Crítica, S.L., 2009. ISBN 978-84-8432-369-3.

STINY, George – **Shape: Talking about seeing and doing**. Cambridge, Massachusetts (USA): MIT The Massachusetts Institute of Technology Press, 2006. ISBN 0-262-19531-3.

SUTTON, Andrew – **Ruler & compass: practical geometrical constructions**. New York: Walker & Company, 2009. ISBN 978-0-8720-1776-4.

TAIBO FERNÁNDEZ, Angel – **Geometría Descriptiva y sus aplicaciones**. Tomos I e II. Madrid: Editorial Tebar Flores, 1983. ISBN 84-7360-040-1.

TANNERY, Paul – *La géométrie grecque*. Paris: Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire, 1887.

TAYLOR, Charles – **An introduction to the ancient and modern geometry of conics : Being a geometrical treatise on the conic sections with a collection of problems and historical notes and prolegomena**. Cambridge: Deighton Bell and Co, 1881.

TAYLOR, Charles – **Geometrical conics including anharmonic ratio and projection**. Cambridge : Macmillan and Co., 1863.

TAYLOR, Charles – **The elementary geometry of conics**. Cambridge: Deighton Bell and Co., 1883.

TEIXEIRA, Francisco Gomes – **Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches**. I, II e III Tomos. Coimbra: Imprimerie de l'Université, 1908. [Re-edição fac-símile Paris: Éditions Jacques Gabay, 1995. ISBN 2-87647-162-0].

TENG, C. CHENG, Y.; HSU, W - Constructing a 3D trunk model from two images. Graphical Models 69 (2007) 33–56. www.elsevier.com/locate/gmod [www.sciencedirect.com].

TODD, Philip – **101 conic sections examples using geometry expressions**. Saltire Software Inc., 2009. ISBN 1-882564-13-8.

TOMÁS ESPÍN, Antonio – **Diseño óptimo de forma y armado de láminas de hormigón.** Murcia: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, 2007. ISBN 978-84-380-0395-4.

TRINDADE, António de Oriol Pena Vazão – Um olhar sobre a perspectiva linear em Portugal nas pinturas de cavalete, tectos e abóbadas: 1470-1816. Lisboa: Universidade de Lisboa – Faculdade de Belas Artes, 2008. [Tese de Doutoramento].

TU, C.; WANG, W.; MOURRAIN, B.; WANG, J. – Using signature sequences to classify intersection curves of two quadrics. Computer Aided Geometric Design 26 (2009) 317-335. [Elsevier, www.sciencedirect.com].

VALENCIA, J.; BEDOYA, A. – Curvas paralelas explícitas de las curvas cónicas no degeneradas para el torneado CNC de lentes y espejos esférico-cónicas. Revista EIA, Número 10, p. 31-43. Diciembre 2008. Medellín (Colombia): Escuela de Ingeniería de Antioquia, 2008. ISSN 1794-1237.

VARELA, Pedro de A. – Informar a curvatura de Gauss. Encontro Internacional Geometrias 13. Boletim da APROGED nº 30, 51-58. Portugal: APROGED, 2013.

VARHEGYI, Tamas – **Applied conics.** Centerville MA [Massachusetts]: TMV Publishing, 2006. ISBN 978-0-9792506-0-6.

VICENTE SARRABLO – Desafío. Tectónica 17 (2004) 18-29. Madrid: ATC Ediciones, S. L.. ISSN 1136-0062. [Número Temático – Geometrías complejas]

VITRÚVIO – **Tratado de arquitectura.** Lisboa: IST Press, 2006. Tradução do latim.

WELLMAN, Leighton B. – **Geometría descriptiva: Compendio de geometria descriptiva para técnicos.** Barcelona: Editorial Reverté, S. A., 1987. ISBN 978-84-291-5090-2.

WENNINGER, Magnus J. – **Spherical models.** New York: Dover Publications, Inc., 1999. [Cambridge: Cambridge University Press, 1979.] ISBN 0-486-40921-X.

WHEWELL, William – **Conic sections: their principal properties proved geometrically.** Cambridge: J. and J. J. Deighton, 1846.

WHITE, Gwen – **Perspectiva.** Lisboa: Ed. Presença, 1981.

WHITEHEAD, Alfred North – **Modes of thought.** New York: The Free Press, 1968. ISBN 0-0293-5210-X.

WHITEHEAD, Alfred North – **The axioms of descriptive geometry**. Cambridge: Cambridge University Press, 1907. [Nº 5 of the Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, edited by J. G. Leathem and E. T. Whittaker].

WILSON, James Maurice – **Solid geometry and conic sections: with appendices on transversals, and harmonic division, for the use of schools**. London: Macmillan and Co., 1872.

WILSON, Robin – **4000 anos de geometria**. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2010. ISBN 978-989-8243-02-7.

WANG, W.; JOE, B.; GOLDMAN, R. - Computing quadric surface intersections based on an analysis of plane cubic curves. Graphical Models 64 (2003) 335–367. www.elsevier.com/locate/gmod [www.sciencedirect.com].

WONG, Wucius – **Fundamentos del diseño**. Barcelona: Editorial Gustavo Gili, S.A., 1995. ISBN 84-252-1643-5. [Versão castelhana de Principles of form and design. U.S.A., s.l.: John Wiley & Sons, 1993.]

WRIGHT, Lawrence – **Tratado de perspectiva**. Barcelona: Ed. Stylos, 1985.

XAVIER, João Pedro – "António Rodrigues, a Portuguese architect with a scientific inclination", pp. 253-268 in *Nexus IV: Architecture and Mathematics*, eds. Kim Williams and Jose Francisco Rodrigues, Fucecchio (Florence): Kim Williams Books, 2002.

XAVIER, João Pedro Sampaio – Sobre as origens da perspectiva em Portugal: O Livro de Prespectiua do Códice 3675 da Biblioteca Nacional, um tratado de arquitectura do século XVI. Porto: Universidade do Porto – Faculdade de Arquitectura, 2004. [Tese de Doutoramento em Arquitectura].

XU, Z. et al - A robust algorithm for finding the real intersections of three quadric surfaces. *Computer Aided Geometric Design* 22 (2005) 515–530. www.elsevier.com/locate/cagd [www.sciencedirect.com].

YAGLOM, I. M. – **Geometric Transformations**. Tomos I, II e III. Washington: The Mathematical Association of America, 1962. Tradução da edição russa de 1955 e 1956.

YAMAGUCHI, Fujio – **Curves and surfaces in computer aided geometric design**. Berlin: Springer-Verlag, 1988. ISBN 3-540-17449-4.

ZEUTEN, H. G. – **Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen age**. Paris: Gauthier-Villars, 1902.

ZHU, Q.; PENG, L. – A new approach to conic section approximation of object boundaries. Elsevier. Image and Vision Computing. 17 (1999) 645–658.

ZORRAQUINO, J; RODRÍGUEZ, F.; MARTÍN, J. – Applications of a New Property of Conics to Architecture: An Alternative Design Project for Rio de Janeiro Metropolitan Cathedral. Nexus Network Journal Vol. 3, Nº 1, 2001, 43-72. Basileia: Springer Birkhäuser, 2001. Print ISSN 1590-5896. Online ISSN 1522-4600.

ZU, Z.; WANG, X.; CHEN, X.; SUN, J. – A robust algorithm for finding the real intersections of three quadric surfaces. Computer Aided Geometric Design 22 (2005) 515-530. [Elsevier, www.sciencedirect.com].