



UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO NÃO LINEAR
DE MATERIAIS DE ESTRUTURA PERIÓDICA**

ARMANDO LOPES RAMALHO
(Licenciado)

Dissertação para obtenção do grau de
mestre em Engenharia Mecânica

Dezembro
1993

ERRATA

Pág.	Local	Onde se lê	Deve-se ler
2	11ª linha	á	à
8	Figura 2.4-2	n(Vm/s)=número do anel ...	n(Vm/s)=número de anéis ...
9	Figura 2.4-3	n(Vm/s)=número do anel ...	n(Vm/s)=número de anéis ...
10	Figura 2.4-4	Sistemas com placas 19)	Sistema com placas (19)
12	6ª linha	ás	às
17	9ª e 10ª linha	não linear. Dependendo	não linear, dependendo
19	4ª linha	tempo, das	tempo, das
19	4ª linha	equilíbrio	equilíbrio
19	9ª linha	á	à
19	19ª linha	f	f
20	9ª linha	ás	às
27	14ª linha	ás	às
27	15ª linha	ΔD , definida	ΔD , definida
31	13ª linha	sobre posição	sobreposição
35	4ª linha	superfície	superfície
42	11ª linha	Hemite	Hermite
43	11ª linha	Hemite	Hermite
45	4ª linha	analisar	analisar
56	Figura 4.1.2-3	F/L	F/L (N/m)
58	27ª linha	estes	destes
58	28ª linha	analisar	analisar
62	10ª linha	alternância	alternância

Dissertação elaborada sob orientação do
Prof. Dr. Luís Manuel Varejão de Oliveira Faria

À Lúcia,
à Filipa e à Cláudia

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Luís Manuel Varejão de Oliveira Faria, a quem coube a iniciativa e orientação do presente trabalho, desejo exprimir o meu profundo agradecimento pelo incentivo, apoio e atenção que me dedicou durante a execução desta dissertação.

Agradeço ao Presidente da C.I. do Instituto Politécnico da Guarda, as facilidades concedidas na disponibilização de equipamento que possibilitou a execução do presente trabalho.

Desejo ainda agradecer a todos aqueles, que de uma ou outra forma, incentivaram e contribuíram para a elaboração deste trabalho.

TÍTULO: Análise do comportamento dinâmico não linear de materiais de estrutura periódica

RESUMO:

Na dissipação de energia de impacto, são frequentemente utilizados sistemas compostos por tubos de paredes finas.

No processo de deformação destes dissipadores de energia submetidos a impacto na direcção radial, ocorrem dois fenómenos geralmente associados— "wrap-around" e alternância da deformação dos tubos.

As características dos sistemas envolvidos dificultam a análise dos fenómenos que ocorrem no processo de deformação. Note-se que o sistema de tubos forma uma estrutura periódica, constituída por material com comportamento elasto-plástico, sujeita a grandes deformações dinâmicas e envolvendo múltiplos contactos.

O estudo experimental destes sistemas submetidos a impacto radial, foi realizado por diversos autores. Da análise dos resultados obtidos, não foi adiantada qualquer explicação analítica para os fenómenos em estudo.

Não se conhece qualquer tentativa de simular numericamente estes ensaios.

No presente trabalho efectua-se uma simulação numérica dos ensaios atrás descritos, utilizando um modelo construído sobre o código de elementos finitos ABAQUS. Esta análise facilita o estudo dos fenómenos que surgem no processo de deformação.

Baseada nos resultados obtidos, sugere-se uma explicação para os fenómenos de "wrap-around" e de alternância que ocorrem na deformação destes dissipadores estruturais de energia de impacto.

TITLE: Analysis of the nonlinear dynamical behaviour of materials with periodic structure

ABSTRACT:

At the impact energy absorbing, devices formed by thin walled tubes are frequently used.

In the deformation process of these devices, undergoing impact in the radial direction, occurs two associated phenomena—wrap-around and alternation of the tubes deformation.

Involved systems characteristics difficult the analysis of these phenomena. The tubes system forms a periodic structure, made of elastic-plastic material, subjected to strong dynamic deformation and involving multiple contacts.

The analysis of these systems through experimental work, was made by several authors. From that study wasn't advanced any analytical explanation to the involved phenomena.

We are not aware of any numerical simulation from these experiments.

The present work simulates these experiments, using a numerical model based in the finite element code ABAQUS. This model prove to be a usefull tool in the observation and analysis of the deformation process.

By using numerical model, we suggest an explanation to the wrap-around and alternation phenomena, that occurs in the deformation process.

Título: Análise do Comportamento Dinâmico Não Linear de Materiais de Estrutura Periódica.

Palavras chave

Estruturas tubulares
Dissipadores estruturais de energia
Análise dinâmica
"Wrap-around"
Alternância
Contacto
Impacto
Simulação numérica
Método dos elementos finitos

Keywords

Tubular structure
Energy absorbing components
Dynamic analysis
Wrap-around
Alternation
Contact
Impact
Numerical simulation
Finite element method

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS	i
RESUMO	ii
PALAVRAS CHAVE	iv
ÍNDICE	v
LISTA DE TABELAS	vii
LISTA DE FIGURAS	viii
NOMENCLATURA	x
1.INTRODUÇÃO	1
2.MOTIVAÇÃO DA ANÁLISE	5
2.1.Introdução	5
2.2.Sistemas ensaiados	5
2.3.Equipamento utilizado	6
2.4.Resultados experimentais	7
2.5.Conclusão	8
3.MODELO NUMÉRICO	12
3.1.Introdução	12
3.2.Princípio dos trabalhos virtuais	12
3.3.Método dos elementos finitos	16
3.4.Análise estática	17
3.5.Análise dinâmica	19
3.5.1.Contacto / impacto intermitente	23
3.6.Elementos utilizados no modelo	26
3.6.1.Elementos sólidos (elementos isoparamétricos, planos de tensão)	26
3.6.1.1.Introdução	26
3.6.1.2.Modelização das extensões	26
3.6.1.3.Interpolação do campo de deslocamentos	28
3.6.1.4.Integração	29
3.6.2.Elementos de modelização da interacção entre um corpo deformável, e uma superfície rígida	30
3.6.2.1.Introdução	30
3.6.2.2.Cinemática	31
3.6.2.3.Equilíbrio	36
3.6.3.Elementos de modelização da interacção entre corpos deformáveis	38

3.7.Modelização experimental	44
3.7.1.Análise estática	44
3.7.2.Análise dinâmica	45
3.7.3.Afinação do modelo numérico	45
3.7.4.Programação	46
4.APRESENTAÇÃO E INTERPRETAÇÃO DE RESULTADOS	53
4.1.Análise estática	53
4.1.1.Descrição do processo de deformação do anel	54
4.1.2.Apresentação de resultados	55
4.2.Análise dinâmica	57
4.2.1.Descrição do processo de deformação de aneis	57
4.2.2.Apresentação de resultados	58
4.2.3.Análise qualitativa dos fenómenos envolvidos no processo de deformação	59
5.CONCLUSÃO	62
REFERÊNCIAS	63
ANEXOS	65
Anexo I - Listagem do programa de computador efectuado	66
Anexo II . Resultados da análise estática	76
Anexo III - Sequência da deformação do modelo dinâmico	84
Anexo IV - Distribuição de tensões equivalentes para cada anel do modelo dinâmico	100
Anexo V - Variação da pressão de contacto entre aneis	112

LISTA DE TABELAS

TABELA 1-Características dos sistemas ensaiados

TABELA 2-Características dos sistemas onde são mais evidentes os fenómenos a estudar

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1-1- Comparação entre as curvas de carga-deflexão para os sistemas 3,4,7 e 8. Influência dinâmica.

FIGURA 1-2- Deformação usual de um sistema carregado dinamicamente com velocidade de impacto elevada.

FIGURA 2.3-1- Aparelho de compressão a velocidade elevada de sistemas de anéis.

FIGURA 2.4-1- Estados deformados de sistemas com e sem placas.

FIGURA 2.4-2- Distribuição da deformação nos sistemas 12 -16 (sem placas).

FIGURA 2.4-3- Distribuição da deformação nos sistemas 17 - 21 (sistemas com placas).

FIGURA 2.4-4- Comparação entre os resultados da teoria de choque apresentadas em [6] e os experimentais com e sem placas.

FIGURA 2.5-1- Deformação final dos sistemas onde são mais evidentes os fenómenos de "wrap-around" e de alternância.

FIGURA 3.6.1-1- Representação do elemento CPS8.

FIGURA 3.6.2.2-1- Interação entre uma superfície rígida e uma deformável.

FIGURA 3.6.3-1- Interação entre um nó da superfície secundária com um segmento da superfície primária.

FIGURA 3.6.3-2- Junção entre dois segmentos da superfície primária.

FIGURA 3.7.1-1a- Modelo utilizado na análise estática.

FIGURA 3.7.1-1b- Modelo utilizado na análise estática.

FIGURA 3.7.1-1c- Modelo utilizado na análise estática.

FIGURA 3.7.2-1a- Modelo utilizado na análise dinâmica.

FIGURA 3.7.2-1b- Modelo utilizado na análise dinâmica.

FIGURA 3.7.2-1c- Modelo utilizado na análise dinâmica.

FIGURA 4.1-1- Sistema sujeito a um carregamento estático, ensaiado no modelo numérico.

FIGURA 4.1.2-1- Comparação entre as curvas de carga em função da deflexão obtidas analiticamente e experimentalmente.

FIGURA 4.1.2-2- Curva de carga em função da deflexão do sistema 3 da tabela 1 do capítulo 1.

FIGURA 4.1.2-3- Curva de carga em função da deflexão obtida no modelo numérico.

FIGURA 4.2-1- Sistema ensaiado dinamicamente no modelo numérico.

FIGURA 4.2.3-1- Posição das rótulas plásticas no anel que sofre deformação em "wrap-around".

FIGURA 4.2.3-2- Posição das rótulas plásticas no anel sujeito ao enrolamento do anterior.

FIGURA 4.2.3-3- Configuração deformada do anel número dois do modelo ensaiado.

NOMENCLATURA

Os símbolos utilizados têm o significado usual da literatura da especialidade. O significado da maior parte dos símbolos é referido a quando da sua utilização. Grandezas vectoriais ou tensoriais serão representadas a **cheio**.

Excepções à nomenclatura usual, utilizadas neste trabalho são as seguintes:

Sim. (A)	Representa a parte simétrica do tensor A ;
Asim. (A)	Representa a parte anti-simétrica do tensor A ;
trac. (B)	Representa o traço da matriz B .

1. INTRODUÇÃO

No domínio da Engenharia Mecânica, são frequentes as situações, em que se pretende controlar a paragem de corpos. Para o efeito normalmente utilizam-se freios e amortecedores de choque. Por uma questão de segurança, e sempre que se considere necessário, poderão utilizar-se sistemas complementares como sejam dissipadores estruturais de energia de impacto, que absorvem a energia cinética sob a forma de deformação plástica. Norman Jones [1] descreve o comportamento de vários sistemas deste tipo.

Atendendo ao seu bom desempenho, e à boa relação energia absorvida / peso, dissipadores estruturais bastante utilizados são os tubos de paredes finas. Tubos circulares de paredes moderadamente finas, sujeitos ao esmagamento axial, ou alternativamente, sujeitos ao esmagamento radial, são frequentemente utilizados para o efeito.

Para o esclarecimento do comportamento destes sistemas sujeitos ao esmagamento radial, contribuíram os trabalhos de John A. De Runtz, Jr. e P. G. Hodge, Jr. [2] e os de R. G. Redwood [3].

Em [2] é analisado o comportamento rígido-perfeitamente plástico de tubos, sujeitos ao esmagamento entre duas placas planas rígidas. Em [3] é feita a análise da mesma situação com o comportamento do material rígido-plástico com um encruamento pré-defindo.

As conclusões destes autores são posteriormente verificadas experimentalmente, e expostas no trabalho de S. R. Reid e T. Yella Reddy [4], que descreve o ensaio de sistemas compostos por tubos de paredes finas, dispostos em camadas empilhadas em colunas. Em [4], são feitas várias experiências variando o número de tubos por camada, o número de camadas, e o carregamento, que varia de uma forma quase-estática a dinâmico. As características dos ensaios mais significativos são apresentadas na tabela 1.

Teste n°	Material	Sistema testado	Diâmetro D (mm)	Espessura t (mm)	Largura L (mm)	Velocidade de impacto V (m/s)	Massa M (Kg)	Dureza Brinell H(MPa)	Tensão Cedência σ_c (MPa)	Módulo Encruamento E_p (GPa)
3	Aço macio	Um Tubo	50	1.6	100	3.42	35	1107.4	269	1.65
4	Aço macio	Um Tubo	50	1.6	100	5.40	13.7	1107.4	269	1.65
7	Alumínio	Um Tubo	50	1.6	100	2.18	35	333.2	100	1.24
8	Alumínio	10 tubos 5 camadas	50	1.6	150	7.16	37.19	333.2	100	1.24

TABELA 1 Características dos Sistemas Ensaiaados

As conclusões dos ensaios de sistemas carregados de uma forma quase-estática e carregados com velocidades de deformação moderadas (ensaios de impacto que usam dispositivos de queda de massa — velocidade de impacto abaixo de 8 m/s), encontram-se apresentadas de uma forma sintética no gráfico da figura 1-1. Os resultados obtidos demonstram que, nestes sistemas, ocorre uma deformação uniforme dos aneis, variando o seu esmagamento de acordo com as propriedades mecânicas dos materiais, com as suas dimensões, e com a energia de impacto. O efeito dinâmico mais significativo nestes ensaios, traduz-se na influência da velocidade de deformação nas propriedades mecânicas dos materiais, sendo, portanto, o encruamento responsável pela maior resistência á deformação dos sistemas carregados dinamicamente.

Relativamente ao comportamento dinâmico destes sistemas, sujeitos a uma taxa de deformação elevada— velocidade de impacto superior a 25 m/s, destaca-se a segunda parte do trabalho de S.R.Reid e T.Yella Reddy [4]. Nesta área é realizada a análise experimental de vários sistemas constituídos por uma coluna de aneis empilhados, dispostos entre uma massa rectangular rígida, sujeita a uma velocidade inicial acima dos 25 m/s, e um alvo plano rígido. Nestas experiências variam as dimensões dos aneis, o material, a velocidade de impacto, e as condições de contacto entre eles — em alguns sistemas colocam-se entre os aneis placas planas rígidas.

As conclusões deste trabalho são apresentadas por S. R. Reid W. W. Bell e R. A. Barr em artigos posteriores, sem ser apresentada uma explicação para dois femómenos, geralmente associados, que surgem no resultado final de alguns dos sistemas ensaiados — "wrap around" e alternância. Estes fenómenos não ocorrem nos sistemas em que os aneis estão separados por placas rígidas, estando, portanto, relacionados com as condições de contacto entre os aneis sujeitos a deformação dinâmica.

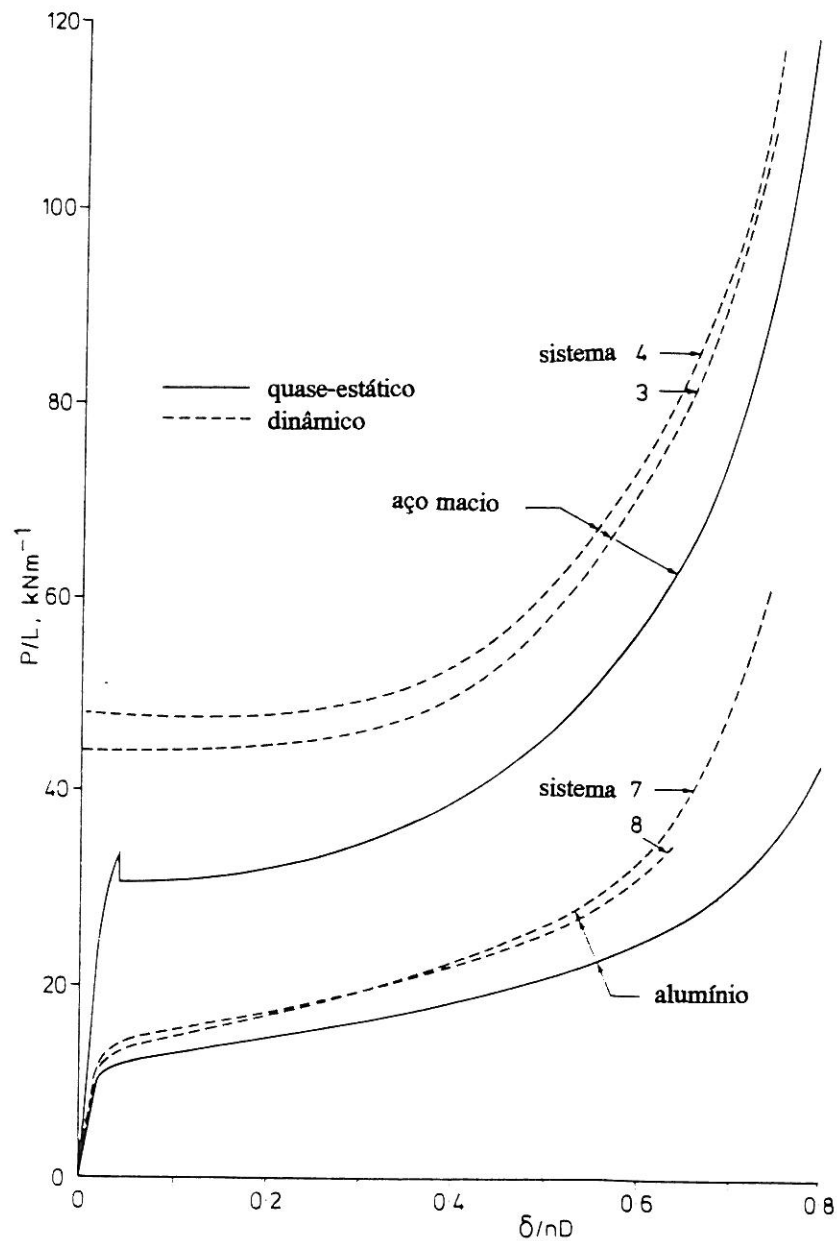


Fig. 1-1 Comparação entre as curvas de carga-deflexão para os sistemas 3,4,7 e 8. Influência dinâmica.

Figura obtida em [4].

Da análise dos resultados obtidos nos ensaios destes sistemas, dos quais se destaca o apresentado na figura 1-2, conclui-se que o comportamento dos anéis não é uniforme, nem varia linearmente ao longo da coluna. De facto, excluindo os efeitos de extremidade, ocorre uma alternância do esmagamento destes componentes estruturais, a um anel completamente deformado sucede um praticamente indeformado, e assim sucessivamente.

Analizando individualmente a forma final dos aneis, nota-se que alguns adquirem um modelo de deformação no qual, a parte mais afastada do ponto sujeito ao impacto, sofre uma inversão de curvatura, "enrolando-se sobre" o anel seguinte. Este fenómeno é designado por modo de deformação em "wrap-around".

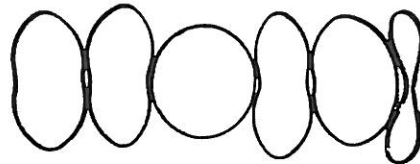


Fig 1-2 Deformação usual de um sistema carregado dinamicamente com velocidade de impacto elevada.

Figura obtida em [4].

O modo de deformação que estes sistemas tubulares sofrem, apresenta certas características interessantes. A estrutura destes dissipadores contém um elemento estrutural (tubo), que se repete ao longo de todo o sistema. Desta forma, seria de esperar que a deformação do conjunto estivesse relacionada com o modo de deformação do componente individual. Nos resultados experimentais a deformação do sistema parece estar relacionada com a deformação de uma célula constituída por dois tubos.

Esta observação, associada ao facto de até ao momento ainda não se ter efectuado qualquer tentativa de simular numericamente o comportamento destes sistemas, despertou o nosso interesse, motivando o presente trabalho.

Pretende-se com este trabalho efectuar um estudo do modo de deformação em "wrap around" e do processo de alternância, acompanhando o processo de carregamento dinâmico dos sistemas em que estes fenómenos ocorrem. Para o efeito recorre-se a uma "simulação numérica" das experiências descritas em [4], utilizando um modelo numérico de elementos finitos.

2. MOTIVAÇÃO DA ANÁLISE

2.1 Introdução

A motivação do presente trabalho, surge da análise dos fenómenos que ocorrem nos ensaios de choque, realizados por S. R. Reid e T. Yella Reddy [4] e S. R. Reid e T. Yella Reddy e R. Barr [5]. A simulação numérica destes ensaios, através de um modelo de elementos finitos, constitui o fulcro deste trabalho. Desta forma, é fundamental descrever a experiência que serve de base a esta dissertação.

Os resultados apresentados, são essencialmente obtidos de [4].

2.2 Sistemas ensaiados

Os sistemas ensaiados são dissipadores de energia de impacto estruturais constituídos por tubos de paredes finas carregados radialmente. Os tubos são dispostos sequencialmente ao longo de uma fila, isto é, os centros geométricos dos tubos são colocados ao longo de uma linha recta, sendo o contacto do tubo com o que o precede e com o que o sucede, feito em pontos diametralmente opostos. O comprimento dos tubos testados é pequeno (12,5 mm), por isso, ao longo deste trabalho vamos designá-los por aneis. O material, as restantes dimensões dos aneis e o número de aneis, variam nos diversos ensaios.

São realizados também ensaios de sistemas, em que, no contacto entre os tubos, se interpôs uma placa de aço, plana e rígida — referiremo-nos a estes, como sistemas com placas.

Posteriormente T. Yella Reddy, S. R. Reid e R. Barr [5], ensaiaram os mesmos sistemas, alterando as condições de contacto — os pontos de contacto entre os aneis, ou entre as placas e os aneis são soldados. Referimo-nos a estes sistemas, como sistemas soldados.

2.3 Equipamento utilizado

O aparelho utilizado para ensaiar os sistemas atrás descritos, consiste numa plataforma horizontal plana com duas barras de guiamento. Um projectil rígido paralelepipedico impelido por um martelo pneumático (pistola pneumática), é projectado ao longo da pista criada pelas barras de guiamento, indo embater no sistema a ensaiar. Os aneis estão dispostos na pista, estando o anel mais afastado do ponto de impacto em contacto com um alvo plano fixo.

Acoplado a este aparelho está todo o equipamento de medição de velocidade, tensões, de fotografia e de impulsão.

Na figura 2.3-1 é representado o equipamento utilizado na experiência.

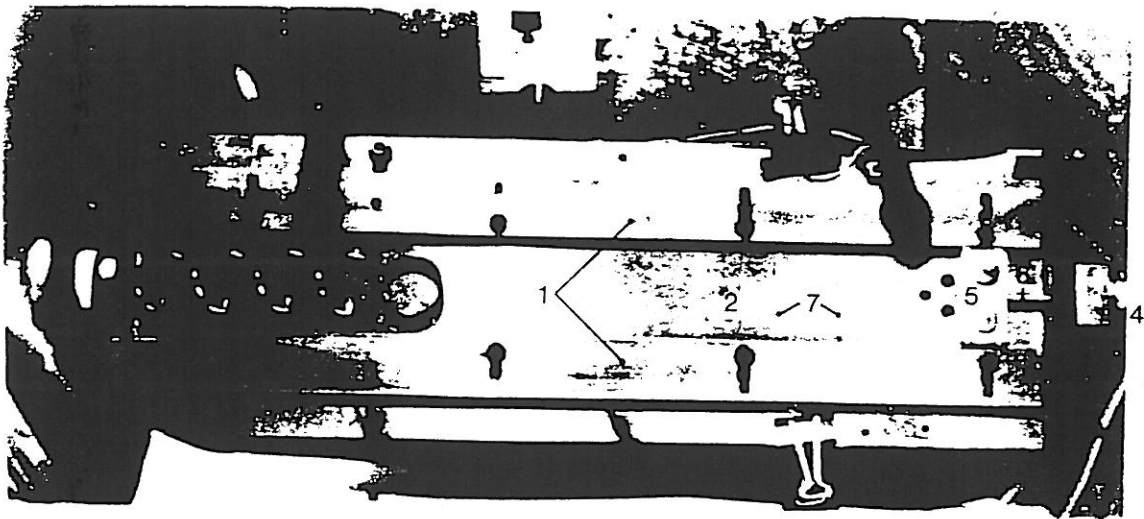


Fig. 2.3-1 Aparado de compressão a velocidade elevada de sistemas de aneis.

1. Barras de guiamento;
2. Pista;
3. Suporte;
4. Martelo pneumático;
5. Projectil;
6. Barra do martelo pneumático;
7. Dispositivo de medição de velocidade.

Figura obtida em [4].

Em experiências realizadas posteriormente [5], é retirado o alvo plano fixo, ficando, portanto, os aneis com a extremidade livre.

2.4 Resultados experimentais

Os principais resultados destas experiências, resumem-se ao facto de, nos sistemas com placas, os aneis sofrerem uma deformação uniforme, ao passo que nos restantes sistemas, os aneis sofrem o fenómeno de " wrap-around " conduzindo a uma alternância no processo de deformação dos aneis. A deformação final de vários sistemas, com e sem placas, encontra-se representada na figura 2.4-1.

Nos gráficos das figuras 2.4-2 e 2.4-3 encontra-se sintetizada informação relativa ao processo de deformação de sistemas com e sem placas.

Da análise destas figuras, exceptuando alguns efeitos de extremidade, é clara a variação linear da deformação, nos sistemas com placas. Quanto aos aneis sem placas constata-se a existencia, no sistema deformado, de alternância na deformação dos aneis, mais ou menos pronunciada de acordo com as características do ensaio.

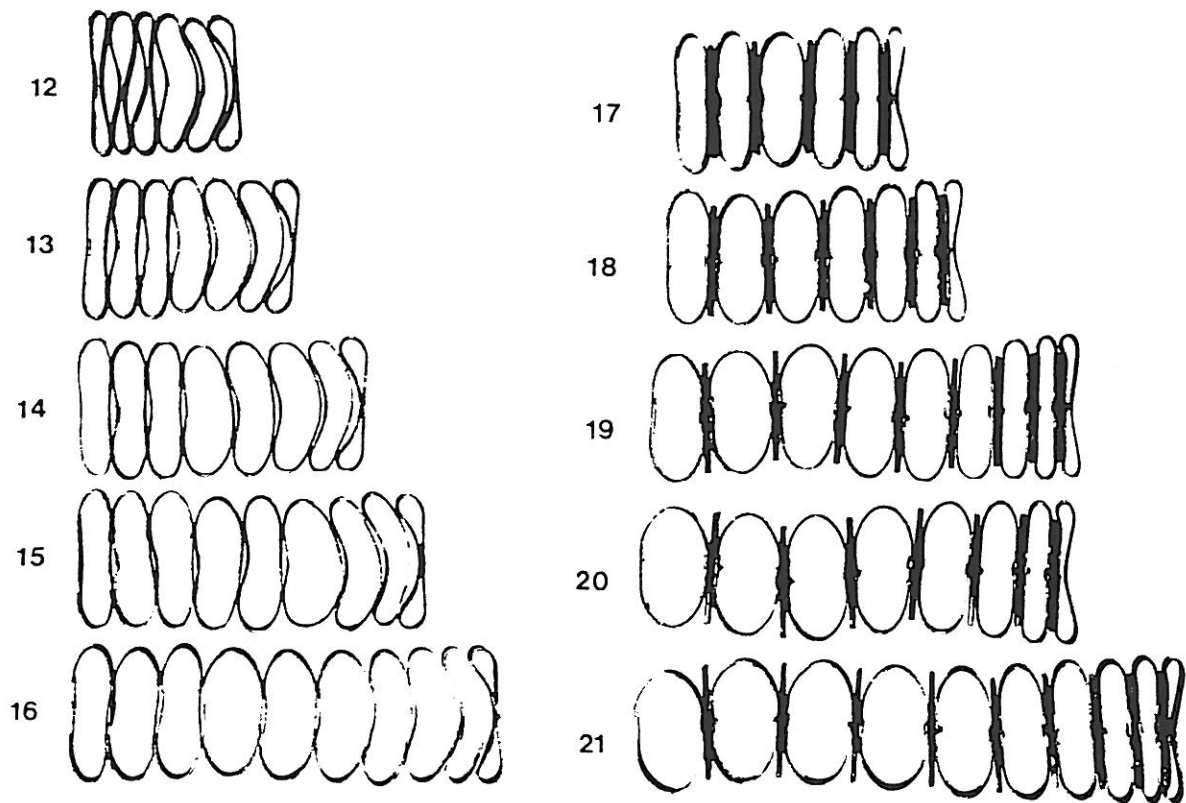


Fig. 2.4-1 Estados deformados de sistemas com e sem placas.

Figura obtida em [4].

Os autores destas experiências, desenvolveram uma teoria de propagação de ondas de tensão, que explica de uma forma aproximada os resultados obtidos nos sistemas com placas. No entanto para o fenómeno de alternância, que surge

normalmente associado ao " wrap-around ", não foi dado, até à actualidade, qualquer explicação aceitavel.

Na figura 2.4-4 encontra-se representado o comportamento dos sistemas com e sem placas, confrontado com os resultados analíticos da teoria de propagação de ondas de tensão desenvolvida por S. R. Reid, W. W. Bell e R. A. Barr em [6].

2.5 Conclusão

Tendo por base a análise dos resultados publicados até à actualidade, propomos estudar os fenómenos de " wrap-around " e de alternância. Seleccionamos, para o efeito, os sistemas que, depois de deformados, apresentam estes fenómenos da forma mais evidente. Estes sistemas serão posteriormente sujeitos a uma simulação no modelo numérico desenvolvido ao longo do trabalho, elaborado sobre o código de elementos finitos ABAQUS.

As características desses sistemas e a sua deformação final, encontram-se representadas na tabela 2 e na figura 2.5-1.

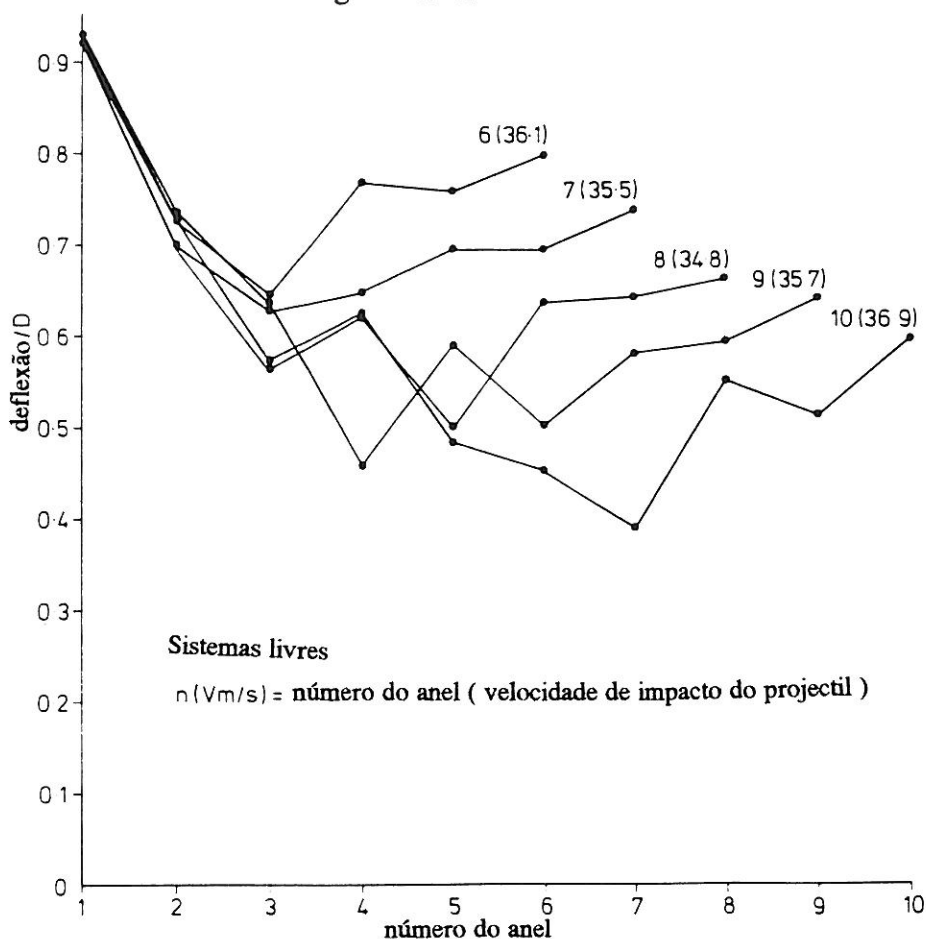


Fig. 2.4-2 Distribuição da deformação nos sistemas 12 - 16 (sem placas).
Figura obtida em [4].

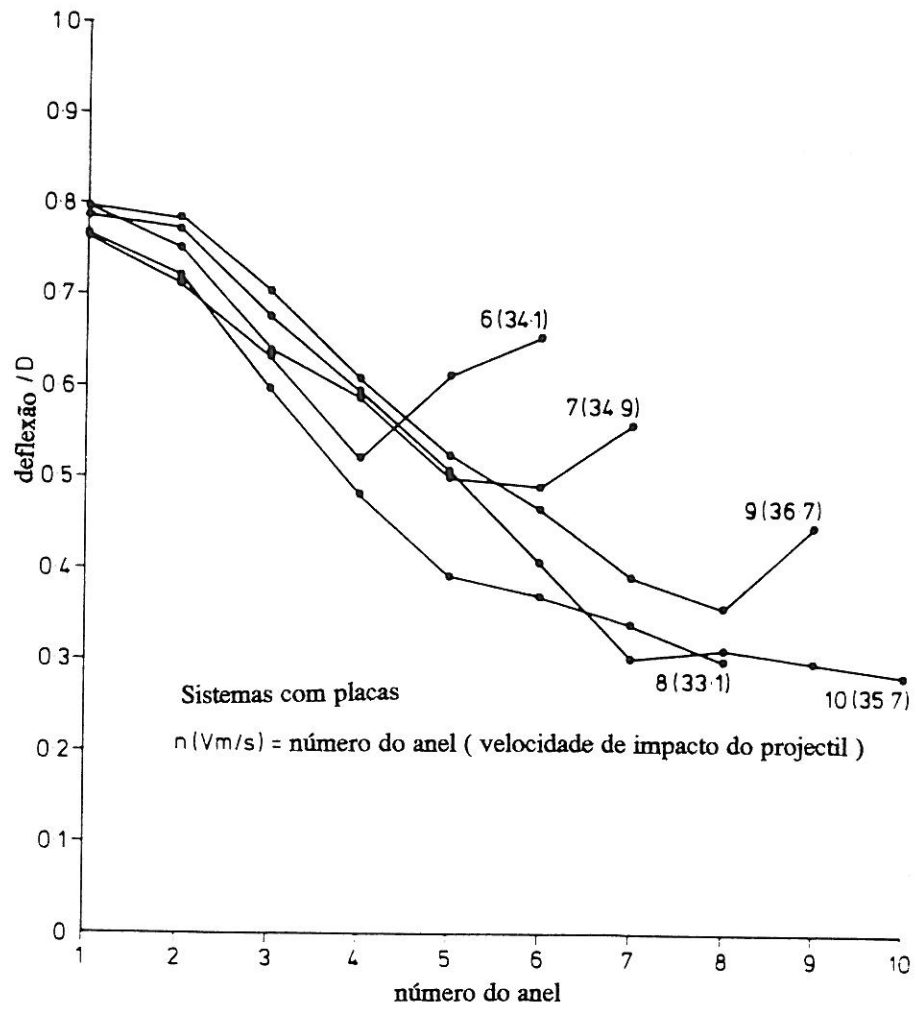


Fig. 2.4-3 Distribuição da deformação nos sistemas 17 - 21 (sistemas com placas).

Figura obtida em [4].

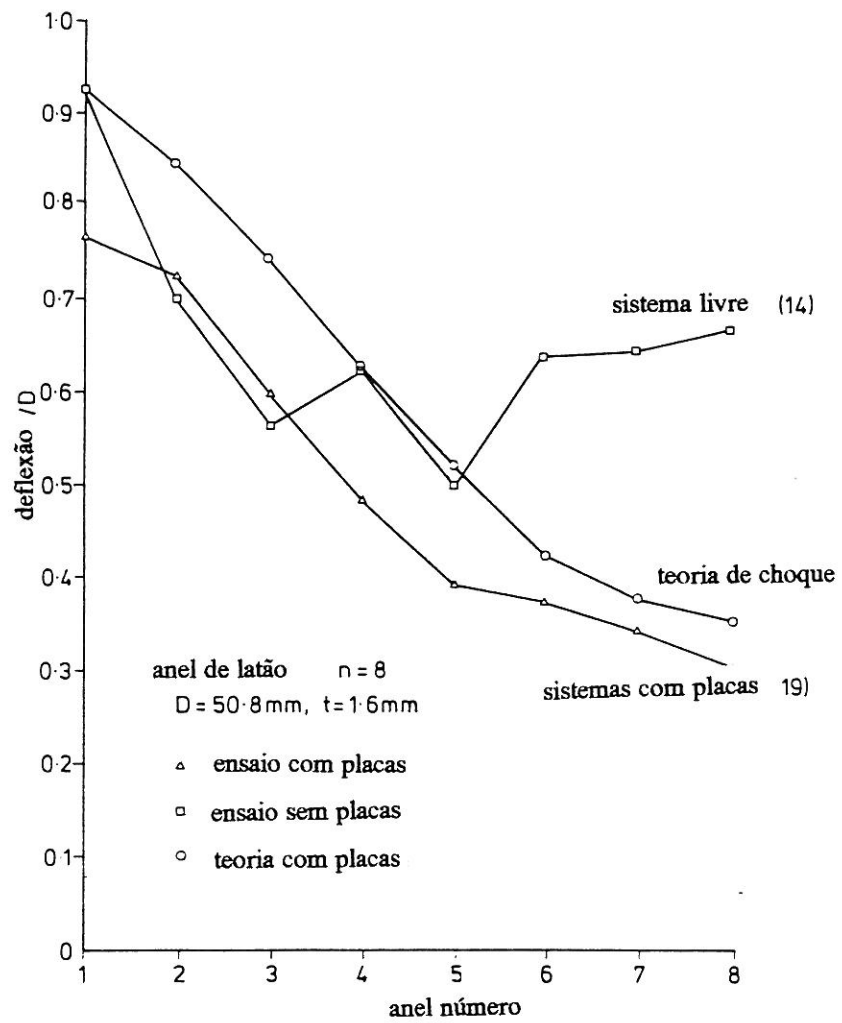


Fig. 2.4-4 Comparação entre os resultados da teoria de choque apresentada em [6] e os experimentais com e sem placas. Figura obtida em [4].

Teste n°	Material	Sistema testado	Diâmetro D (mm)	Espessura t (mm)	Largura L (mm)	Velocidade de impacto V (m/s)	Massa M (Kg)	Dureza Brinell H(MPa)	Tensão Cedência σ_c (MPa)	Módulo Encruamento E_p (GPa)
28	Aço macio	6 aneis	50.8	1.6	12.5	54.1	.106	1107.4	273	2.2
29	Aço macio	6 aneis	50.8	1.6	12.5	43.2	.106	1107.4	273	2.2
30	Aço macio	6 aneis	50.8	1.6	12.5	27.7	.257	1107.4	273	2.2
31	Aço macio	6 aneis	50.8	1.6	12.5	39.7	.257	1107.4	273	2.2

TABELA 2 Características dos sistemas onde são mais evidentes os fenômenos a estudar.

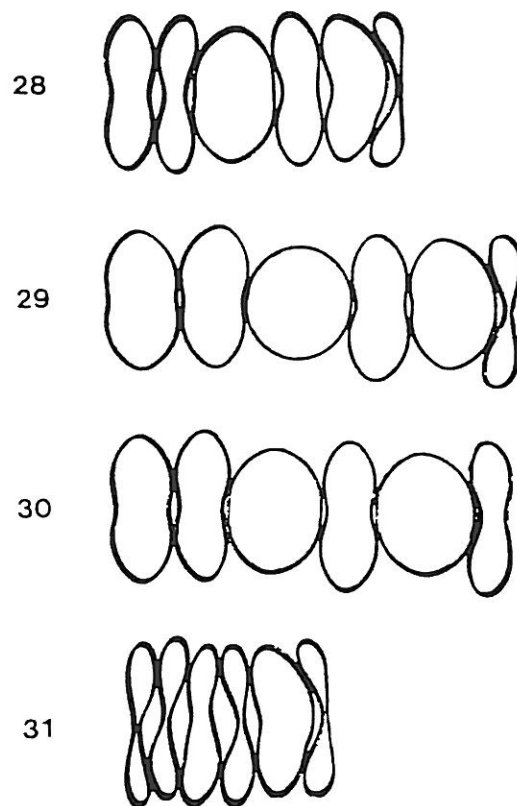


Fig. 2.5-1 Deformação final dos sistemas onde são mais evidentes os fenômenos de "wrap-around" e de alternância.

Figura obtida em [4].

3. MODELO NUMÉRICO

3.1 Introdução

O modelo numérico foi desenvolvido de modo a permitir simular numericamente as experiências realizadas por S. R. Reid, T. Yella Reddy, R. A. Barr e W. W. Bell em [4-6]. Os resultados experimentais apresentados no capítulo anterior serão utilizados para "validar" o modelo numérico. Atendendo às suas características, o código de elementos finitos ABAQUS (Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc.), pareceu ser o mais adequado aos objectivos propostos. Desta forma, todo o modelo é desenvolvido atendendo às características do código ABAQUS, utilizando-se para o efeito, o seu manual [15] e toda a bibliografia referenciada em [7-14].

3.2 Princípio dos trabalhos virtuais

A análise de problemas estruturais, utilizando um código de elementos finitos, consiste em encontrar uma solução aproximada para o campo de deslocamentos, deformações, tensões e forças, num corpo sólido sujeito a uma determinada história de carregamento. A solução exacta deste problema, requer que o equilíbrio de momentos e de forças seja estabelecido em qualquer instante de tempo, e para qualquer parte arbitrária do volume do corpo em estudo. Na análise pelo método de elementos finitos com interpolação de deslocamentos, este equilíbrio é aplicado na sua " forma variacional ", sendo mantido (em média), sobre um número finito de divisões do volume do corpo. Nesta secção apresenta-se a formulação exacta das equações de equilíbrio na sua forma variacional, conhecida pelo princípio dos trabalhos virtuais.

Seja V o volume ocupado por uma parte do corpo na sua configuração actual (depois de deformado), e S a superfície envolvente desse volume. A tracção de superfície em S é designada por t , e a força de volume no interior de V por f . O

equilíbrio de forças nesse volume será estabelecido por :

$$\int_S \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{f} dV = 0 \quad (3.2-1)$$

O tensor das tensões de Cauchy, $\boldsymbol{\sigma}$, em qualquer ponto de S, é definido por :

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3.2-2)$$

em que \mathbf{n} é a normal exterior unitária a S, no ponto em consideração.
Substituindo (3.2-2) em (3.2-1) vem :

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS + \int_V \mathbf{f} dV = 0$$

Pelo teorema de Gauss :

$$\int_S \mathbf{n} \cdot () dS = \int_V \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot () dV$$

em que () é uma função continua — escalar vectorial ou tensorial.

Substituindo vem

$$\int_V \left[\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} \right] dV = 0 \quad (3.2-3)$$

Como o volume é arbitrário, esta equação pode ser aplicada localmente, dando origem á equação diferencial de equilíbrio translacional :

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \quad (3.2-4)$$

que dá origem a três equações algébricas de equilíbrio.

Utilizando um método semelhante para deduzir o equilíbrio de momentos, chegava-se à bem conhecida relação, que estabelece a simetria do tensor das tensões de Cauchy :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$$

Para permitir desenvolver a aproximação por elementos finitos, substituíram-se as três equações de equilíbrio representadas, por (3.2-4), por uma " forma variacional " equivalente — uma única equação escalar de equilíbrio sobre todo o corpo, obtida multiplicando a equação diferencial local por uma função vectorial arbitrária, sujeita a certas restrições (nomeadamente de continuidade e restrições de fronteira), integrando de seguida sobre todo o volume do corpo. A função arbitrária pode ser imaginada como sendo um campo " virtual " de velocidade, $\delta \mathbf{v}$. Desta forma, o produto interno deste campo com a equação de equilíbrio de forças, representa a taxa de trabalho virtual.

Desta forma obtém-se :

$$\int_V \left[\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} \right] \cdot \delta \mathbf{v} \, dV = 0 \quad (3.2-5)$$

Pela regra da derivação da função composta

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{v}) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} \right] \cdot \delta \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} : \left(\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right)$$

portanto,

$$\int_V \left[\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} \right] \cdot \delta \mathbf{v} \, dV = \int_S \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{v} \, dS - \int_V \boldsymbol{\sigma} : \left(\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right) \, dV$$

Logo substituindo em (3.2-5), obtem-se o princípio dos trabalhos virtuais:

$$\int_S \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{v} dS + \int_V \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} dV = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \left(\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right) dV$$

Seja designado o gradiente do campo virtual de velocidades por :

$$\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \delta \mathbf{L}$$

$$\delta \mathbf{D} = \text{Sim.}(\delta \mathbf{L}) = \frac{1}{2}(\delta \mathbf{L} + \delta \mathbf{L}^T)$$

$$\delta \boldsymbol{\Omega} = \text{Asim.}(\delta \mathbf{L}) = \frac{1}{2}(\delta \mathbf{L} - \delta \mathbf{L}^T)$$

Logo,

$$\boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{L} = \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{D} + \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\Omega}$$

Como $\boldsymbol{\sigma}$ é simétrico

$$\boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\Omega} = 0$$

Logo o princípio dos trabalhos virtuais pode ser exprimido por :

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{D} dV = \int_S \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} dS + \int_V \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} dV$$

O princípio dos trabalhos virtuais tem uma interpretação física simples : a taxa de trabalho, realizado pelas forças exteriores devido a um campo de deslocamentos virtuais é igual á taxa de trabalho realizado pelo campo de tensões no interior do corpo, no mesmo movimento virtual.

3.3 Método dos elementos finitos

Partindo do princípio dos trabalhos virtuais :

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{D} \, dV = \int_S \mathbf{t}^T \cdot \delta \mathbf{v} \, dS + \int_V \mathbf{f}^T \cdot \delta \mathbf{v} \, dV$$

Transformando o primeiro membro num integral sobre o volume de referência (inicial) :

$$\int_{V^0} \boldsymbol{\tau}^c : \delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \, dV^0 = \int_S \mathbf{t}^T \cdot \delta \mathbf{v} \, dS + \int_V \mathbf{f}^T \cdot \delta \mathbf{v} \, dV \quad (3.3-1)$$

em que $\boldsymbol{\tau}^c$ e $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ são um par conjugado de tensão e taxa de deformação.

A interpolação por elementos finitos pode ser representada genericamente por

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_N \bar{\mathbf{u}}^N$$

em que \mathbf{N}_N são as funções interpoladoras dependentes dos elementos usados e do sistema de coordenadas utilizado (funções de forma), e $\bar{\mathbf{u}}^N$ são variáveis nodais (na interpolação por deslocamentos correspondem a deslocamentos). É utilizada a convenção de soma para os índices repetidos.

O campo virtual, $\delta \mathbf{v}$, deve ser compatível com todos os constrangimentos cinemáticos. Atendendo às restrições, o campo de deslocamentos, deve ter a mesma forma que $\delta \mathbf{v}$. Desta forma, introduzindo o interpolador,

$$\delta \mathbf{v} = \mathbf{N}_N \delta \bar{\mathbf{v}}^N$$

Como $\delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ é o campo virtual, da taxa de deformação do material, associado a $\delta \mathbf{v}$ e como tem a forma de uma taxa de variação, deve ter uma variação linear com $\delta \mathbf{v}$. Logo a sua interpolação será :

$$\delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{\beta}_N \delta \bar{\mathbf{v}}^N$$

β_N será uma matriz que, em geral, depende da posição, x , do ponto em consideração e da interpolação utilizada. A matriz β_N depende do tipo de deformação (e tensão) utilizados na formulação.

Substituindo em (3.3-1) a equação de equilíbrio na forma discretizada pode ser apresentada por :

$$\delta \bar{v}^N \int_{V^0} \beta_N : \tau^c dV^0 = \delta \bar{v}^N \left[\int_S \mathbf{N}_N^T \cdot \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{N}_N^T \cdot \mathbf{f} dV \right]$$

Como $\delta \bar{v}$ são variáveis independentes, chega-se ao sistema de equilíbrio :

$$\int_{V^0} \beta_N : \tau^c dV^0 = \int_S \mathbf{N}_N^T \cdot \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{N}_N^T \cdot \mathbf{f} dV$$

Note-se que este sistema de N equações poderá ser linear ou não linear. Dependendo do tipo de formulação utilizada.

Este sistema pode ser apresentado da seguinte forma :

$$\bar{\mathbf{F}}^N(\bar{\mathbf{u}}^M) = 0$$

Note-se que

$$\tau^c = \tau^c(\bar{\mathbf{u}}^M, \beta_N)$$

3.4 Análise Estática

Na análise estática de um problema, assume-se que as forças de inércia são nulas ou desprezáveis ao longo da história de carregamento.

O código ABAQUS, na análise estática, permite que o utilizador especifique o incremento de carga a ser seguido, ou alternativamente, será o próprio código a escolher em cada situação, o incremento a ser utilizado, em função de certas tolerâncias especificadas. Neste último caso, o código inicia a análise utilizando um incremento de carga sugerido pelo utilizador, que irá ser alterado de acordo com o critério de convergência utilizado.

Dado um determinado incremento, o código determina os resíduos de carga (forças ou momentos) máximos. Para o efeito supõe que, a partir da quarta

iteração a convergência é uniforme, isto é, se $R_{(i)}$ designar o máximo resíduo à " i ésima" iteração, assume-se que :

$$\frac{R_{(4)}}{R_{(3)}} = \frac{R_{(5)}}{R_{(4)}} = \dots = \frac{R_{(i)}}{R_{(i-1)}} = \lambda$$

A solução é considerada convergente quando o resíduo for inferior a uma determinada tolerância definida pelo utilizador (PTOL).

Desta forma é possível na fase inicial, na iteração i , prever convergência à " n ésima" iteração :

$$PTOL = R_{(n)} = \lambda^{(n-i)} R_{(i)} = \left[\frac{R_{(i)}}{R_{(i-1)}} \right]^{(n-i)} R_{(i)}$$

$$n = i + \frac{\ln\left(\frac{PTOL}{R_{(i)}}\right)}{\ln\left(\frac{R_{(i)}}{R_{(i-1)}}\right)}$$

isto supondo que, $\lambda < 1.0$, caso contrário assume-se que o número de iterações máximo permitido (M iter.) seria ultrapassado logo "a priori". Desta forma :

- se $n > M$ iter., o incremento é considerado muito grande, sendo reduzido a um quarto do seu valor, retomando-se a análise. Esta subdivisão só é permitida desde que o incremento não seja reduzido a baixo do valor mínimo permitido pelo utilizador.
- se $n < M$ iter., o processo iterativo continua.
- se em duas iterações sucessivas for estimado que a convergência ocorrerá para um número de iterações inferior a $M \text{ iter}/2$, o incremento será aumentado de 25%, desde que não seja alcançado o valor máximo de incremento definido pelo utilizador.

3.5 Análise dinâmica

A análise de problemas não lineares, sujeita a uma resposta dinâmica, como é o caso do exemplo que pretendemos resolver, exige, no código ABAQUS, a integração directa, no tempo, das equações de equilíbrio para todos os graus de liberdade do modelo de elementos finitos.

Existem principalmente duas famílias de métodos de integração dinâmica — implícitos e explícitos. Atendendo ao tipo de elementos que vão ser utilizados, e às não-linearidades geométricas que ocorrem na modelização, somos obrigados, no código ABAQUS, a recorrer á integração implícita, com todas as condicionantes que daí advêm.

Na integração optou-se por uma selecção automática do incremento de tempo. Esta selecção é baseada num conceito introduzido por Hibbit e Karlsson (1979) [15] — o de " resíduo a meio do incremento ". Este método baseia-se no cálculo dos resíduos do equilíbrio em $t+\Delta t/2$, a quando da obtenção da solução em $t+\Delta t$. Assim o rigor da solução é testada, e o incremento de tempo será ajustado tendo em vista a próxima iteração.

Quando se analisa a resposta dinâmica de um sistema, na equação de equilíbrio há que contar com a sua inércia. Essa contribuição, pode ser tomada ao nível da força volúmica, f , utilizando uma distribuição volúmica de força de d'Alembert :

$$\mathbf{f} = \mathbf{F} - \rho \ddot{\mathbf{u}}$$

em que \mathbf{F} representa qualquer campo prescrito de forças volúmicas, ρ é a densidade actual do material num determinado ponto, e \mathbf{u} é o deslocamento desse ponto. Assim sendo há que efectuar na equação de equilíbrio (3.3-1) a seguinte substituição.

$$\int_V \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} dV = \int_V \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{v} dV - \int_V \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{v} dV$$

O termo correspondente ás forças de d'Alembert pode ser expresso em termos

do volume e da densidade na configuração de referência

$$\int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{v} dV_0$$

Passando para o modelo aproximado por elementos finitos, o interpolador de deslocamentos vem

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}^N \mathbf{u}^N$$

portanto, desde que \mathbf{N}^N não dependa do deslocamento (como é no caso dos elementos utilizados)

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}^N \ddot{\mathbf{u}}^N$$

Na equação de equilíbrio, o termo correspondente às forças de d'Alembert será então

$$-\left(\int \rho_0 \mathbf{N}^N \cdot \mathbf{N}^M dV_0 \right) \ddot{\mathbf{u}}^M$$

vindo a equação na seguinte forma :

$$\mathbf{M}^{NM} \ddot{\mathbf{u}}^M + \mathbf{I}^N - \mathbf{P}^N = 0 \quad (3.5-1)$$

em que

$$\mathbf{M}^{NM} = \int_{V_0} \rho_0 \mathbf{N}^N \cdot \mathbf{N}^M dV_0$$

corresponde à matriz de massa, consistente,

$$\mathbf{I}^N = \int_{V_0} \boldsymbol{\beta}^N : \boldsymbol{\sigma} \, dV_0$$

corresponde ao vector de forças interiores e

$$\mathbf{P}^N = \int_S \mathbf{N}^N \cdot \mathbf{t} \, dS + \int_V \mathbf{N}^N \cdot \mathbf{F} \, dV$$

corresponde ao vector de forças exteriores.

O operador de integração numérica implícita utilizado, é o definido por Hilber, Hughes e Taylor. É um operador dependente de um único parâmetro, que controla directamente o amortecimento numérico. Desta forma a equação de equilíbrio (3.5-1) é substituída pela seguinte :

$$\mathbf{M}^{NM} \ddot{\mathbf{u}}^M|_{t+\Delta t} + (1 + \alpha) (\mathbf{I}^N|_{t+\Delta t} - \mathbf{P}^N|_{t+\Delta t}) - \alpha (\mathbf{I}^N|_t - \mathbf{P}^N|_t) + \mathbf{L}^N|_{t+\Delta t} = 0$$

(3.5-2a)

Em que $\mathbf{L}^N|_{t+\Delta t}$ representa o vector, soma de multiplicadores de Lagrange associados aos graus de liberdade N. A definição do operador fica completa com as fórmulas de Newmark para o deslocamento e velocidade :

$$\mathbf{u}|_{t+\Delta t} = \mathbf{u}|_t + \Delta t \dot{\mathbf{u}}|_t + \Delta t^2 \left(\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{u}}|_t + \beta \ddot{\mathbf{u}}|_{t+\Delta t} \right)$$

$$\dot{\mathbf{u}}|_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}|_t + \Delta t \left((1 - \gamma) \ddot{\mathbf{u}}|_t + \gamma \ddot{\mathbf{u}}|_{t+\Delta t} \right)$$

$$\text{com } \beta = \frac{1}{4}(1 - \alpha)^2 ; \gamma = \frac{1}{2} - \alpha ; \quad -\frac{1}{3} \leq \alpha \leq 0$$

(3.5-2b)

Em que o parâmetro α controla o amortecimento numérico.

A escolha automática do incremento tempo na integração das equações é efectuada no código ABAQUS, utilizando o "resíduo a meio do incremento" como proposto por Hibbitt e Karlsson. Na integração das equações de equilíbrio, usando a fórmula (3.5-2a), a satisfação do equilíbrio é assegurado unicamente num determinado instante de tempo. Esta condição no entanto não impõe qualquer restrição à natureza do equilíbrio, no interior do intervalo de tempo compreendido entre dois instantes sucessivos, para os quais se verifica essa equação. O objectivo do "resíduo a meio do incremento" é calcular o erro na equação de equilíbrio no instante $t + \Delta t/2$, e avaliar o erro na resposta dinâmica nesse incremento, a partir deste valor. Para efectuar este cálculo supõe-se que a aceleração varia linearmente no interior do incremento de tempo. Desta forma para, qualquer deslocamento nodal \mathbf{u} :

$$\ddot{\mathbf{u}}|_{\tau} = (1-\tau)\ddot{\mathbf{u}}|_t + \tau\ddot{\mathbf{u}}|_{t+\Delta t} \quad , \quad 0 \leq \tau \leq 1$$

Utilizando o valor de $\ddot{\mathbf{u}}|_{\tau}$, e os valores de $\dot{\mathbf{u}}|_{\tau}$ e $\mathbf{u}|_{\tau}$ obtidos através das fórmulas de Newmark, é possível, substituindo na equação de equilíbrio, obter o valor dos resíduos para $\tau = t + \Delta t/2$ que iremos designar por $\mathbf{R}^N|_{t+\Delta t/2}$. O máximo valor do vector resíduo, será designado por $R|_{t+\Delta t/2}$. Esta grandeza traduz a exactidão da solução, a que o escalonamento do incremento de tempo, Δt , conduz .

Desta forma o algoritmo é formado pelos seguintes passos :

1. Escolher a tolerância, (HAFTOL), para o máximo "resíduo a meio do incremento".
2. Usar um incremento de tempo inicial para obter a solução convergente em $t+\Delta t$.
3. Obter $R|_{t+\Delta t/2}$.
4. Se $R|_{t+\Delta t/2} > HAFTOL$ considerar $\Delta t = \Delta t/2$ e recomeçar novamente a partir de t .

5. Se $\text{HAFTOL} \geq R|_{t+\Delta t/2} > \text{HAFTOL}/2$ continuar o processo iterativo com o mesmo incremento de tempo.

6. Se $R|_{t+\Delta t/2} < \text{HAFTOL}/2$ para dois incrementos sucessivos, continuar o processo iterativo com um incremento 25% superior ao anterior.

3.5.1 Contacto / impacto intermitente

É frequente na análise de problemas dinâmicos, a ocorrência de contacto intermitente, por vezes associado a fenómenos de impacto severo, que surgem quando dois componentes estruturais interactuam.

O impacto é modelizado no código ABAQUS, assumindo que, no instante de impacto, os pontos interactuantes das duas superfícies, adquirem instantaneamente a mesma velocidade — impacto perfeitamente plástico [14]. Este conceito é essencial para a introdução deste fenómeno no modelo discreto de elementos finitos. Nesta modelação do impacto é assumido que a energia é dissipada rapidamente e junto ao local que sofre o choque.

Os procedimentos usuais de integração, no tempo, das equações de equilíbrio, aplicados ao modelo discreto, mantêm um balanço energético. Desta forma não são compatíveis com as descontinuidades (saltos) que ocorrem ao nível do campo de velocidades e acelerações, no impacto. Assim torna-se evidente a necessidade de obter outro sistema de equações que modelize o impacto.

Para desenvolver as equações que modelizam o impacto, assume-se que no instante t_0 a parte I, das superfícies de dois corpos, A e B, entra em contacto.

As velocidades e acelerações das superfícies correspondentes, antes (t_0^-) e depois (t_0^+) do impacto, representam-se respectivamente por :

$$\dot{\mathbf{u}}_{AI}^-, \dot{\mathbf{u}}_{BI}^-, \ddot{\mathbf{u}}_{AI}^-, \ddot{\mathbf{u}}_{BI}^-$$

e

$$\dot{\mathbf{u}}_{AI}^+, \dot{\mathbf{u}}_{BI}^+, \ddot{\mathbf{u}}_{AI}^+, \ddot{\mathbf{u}}_{BI}^+$$

Assumindo a hipótese de impacto perfeitamente plástico, pode-se considerar,

que para o instante imediatamente após o impacto (t_0^+)

$$\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{AI} = \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{BI}$$

$$\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{AI} = \mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{BI}$$

em que \mathbf{n} representa a normal à interface I.

Seja $\Delta \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^+ - \dot{\mathbf{u}}^-$ a descontinuidade da velocidade no instante t_0 , desta forma vem :

$$\mathbf{n} \cdot (\dot{\mathbf{u}}_{AI}^- + \Delta \dot{\mathbf{u}}_{AI}) = \mathbf{n} \cdot (\dot{\mathbf{u}}_{BI}^- + \Delta \dot{\mathbf{u}}_{BI}) \quad (3.5.1-1)$$

A componente da tensão superficial em I, \mathbf{N}^I , na direcção da normal ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}^I$), irá satisfazer a :

$$\mathbf{N}_A^I = -\mathbf{N}_B^I \quad \text{para } t \geq t_0$$

$$\mathbf{N}_A^I = \mathbf{N}_B^I = 0 \quad \text{para } t = t_0$$

As descontinuidades finitas (saltos) no campo de velocidades, ocorrem num intervalo de tempo finito e pequeno quando comparado com a escala de tempo da simulação. Assumindo que o impacto ocorre no instante t_0 , na análise destas descontinuidades reportamo-nos ao intervalo de tempo compreendido entre t_0^- e t_0^+ . Desta forma pode-se assumir que todas as forças actuantes no sistema, à excepção das forças de d'Alembert, são desprezáveis face a \mathbf{N}^I . Assim o equilíbrio, durante o intervalo de tempo compreendido entre t_0^- e t_0^+ , pode ser expresso por :

$$\left(\sum_{A,B} \left[\int_V \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} dV \right] \right) + \int_I \mathbf{N}_A \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}_A dS + \int_I \mathbf{N}_B \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}_B dS = 0$$

passando à forma impulsiva e integrando entre t_0^- e t_0^+ ,

$$\left(\sum_{A,B} \left[\int_V \int_{t_0^-}^{t_0^+} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} dV dt \right] \right) + \int_I \int_{t_0^-}^{t_0^+} (N_A \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}_A + N_B \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}_B) dS dt = 0 \quad (3.5.1-2)$$

Como $\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}_A = \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}_B$ em t_0 , e $N_B = -N_A$, o segundo termo da equação (3.5.1-2) é nulo.

O constrangimento representado pela equação (3.5.1-1) deve ser verificado no equilíbrio. Introduzindo na equação (3.5.1-2) este constrangimento através do multiplicador de Lagrange (H), vem

$$\left(\sum_{A,B} \left[\int_V \rho \Delta \dot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} dV \right] \right) + \int_I \delta \left[H \mathbf{n} \cdot (\dot{\mathbf{u}}_{AI}^- + \Delta \dot{\mathbf{u}}_{AI} - \dot{\mathbf{u}}_{BI}^- - \Delta \dot{\mathbf{u}}_{BI}) \right] dS = 0$$

Atendendo ao facto de que \mathbf{n} não pode rodar durante o pequeno intervalo de tempo, pois isso implicaria descontinuidade no campo de deslocamento, o desenvolvimento da variação do segundo termo conduz a :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{A,B} \left[\int_V \rho \Delta \dot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} dV \right] \right) &+ \int_I H \mathbf{n} \cdot (\delta \mathbf{u}_{AI} - \delta \mathbf{u}_{BI}) dS \\ &+ \int_I (\Delta \dot{\mathbf{u}}_{AI} - \Delta \dot{\mathbf{u}}_{BI}) \cdot \mathbf{n} \delta H dS \\ &= - \int_I (\dot{\mathbf{u}}_{AI}^- - \dot{\mathbf{u}}_{BI}^-) \cdot \mathbf{n} \delta H dS \end{aligned}$$

Esta equação pode ser resolvida no modelo discreto, para todas as descontinuidades de velocidade $\Delta \dot{\mathbf{u}}$ em cada nodo. A solução também fornece o impulso por unidade de área, que é o significado físico do multiplicador de Lagrange H. As equações de equilíbrio no instante t_0^+ , incluindo o constrangimento $\mathbf{n} \cdot (\ddot{\mathbf{u}}_{AI} - \ddot{\mathbf{u}}_{BI}) = 0$, podem ser utilizadas para obter o campo de acelerações imediatamente a seguir ao impacto.

Atendendo ao significado físico do multiplicador de Lagrange (H), às equações usuais de equilíbrio (sem impacto), nos incrementos seguintes a t_0^+ , pode ser acrescentado um termo correspondente à restrição $\int_I n \cdot (\dot{\mathbf{u}}_A - \dot{\mathbf{u}}_B) ds = 0$ ponderado pelo multiplicador de Lagrange (H'). Quando (H') for negativo esta restrição é levantada, significando que as superfícies se separam.

3.6 Elementos utilizados no modelo

3.6.1. Elementos sólidos (elementos isoparamétricos, planos de tensão)

3.6.1.1 Introdução

Depois de estudar as características e constrangimentos do sistema a simular numericamente, a sua natureza, os elementos colocados à disposição do utilizador do código ABAQUS, e os exemplos apresentados em [16], optou-se pela utilização de elementos planos de tensão, de segunda ordem, isoparamétricos, com forma geométrica de quadrilátero de oito nós, de " serendipity ", para a discretização dos anéis a analisar. O elemento escolhido tem a designação interna de CPS8. A utilização destes elementos no sistema a analisar — anéis finos sujeitos a flexão, constituindo uma estrutura sujeita a grandes deslocamentos, mas pequenas deformações — conduz a certos problemas. De facto uma integração "completa" destes elementos pode conduzir a um considerável aumento da rigidez da estrutura, podendo em certos casos conduzir a um bloqueio numérico ("shear locking"). Mesmo assim, optou-se por elementos deste tipo em detrimento de elementos mais vocacionados para a simulação da flexão, como sejam elementos tipo viga e tipo casca, devido ao facto da modelização das condições complexas de contacto a que estão sujeitos os anéis, assim o exigir.

3.6.1.2 Modelização das extensões

Nos casos em que as extensões ou as rotações adquirem valores que não podem ser considerados pequenos, a determinação usual de tensor das extensões,

$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{Sim.} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)$, não pode ser aplicada. Com o comportamento do material definido

como elasto-plástico, é assumido que qualquer deformação elástica é pequena quando comparada com a unidade. Deste modo a configuração de referência, no

domínio estático, difere da configuração actual de uma quantidade infinitesimal, utilizando-se na avaliação das tensões, o tensor das tensões de Cauchy.

A taxa de extensão conjugada da tensão de Cauchy é a taxa de deformação :

$$\mathbf{D} = \text{Sim.} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right)$$

em que \mathbf{v} é a velocidade do ponto em consideração, e \mathbf{x} a sua coordenada espacial corrente. A extensão é obtida como a integração da taxa de deformação.

No código ABAQUS, a extensão é obtida, para estes casos, por integração numérica da taxa de deformação. Esta integração é efectuada ao longo do incremento, através de um algoritmo de diferenças centrais.

O algoritmo utilizado baseia-se no método de integração de Hughes-Winget. Este algoritmo define a integração de um tensor , \mathbf{a} , associado ao comportamento mecânico do material, como :

$$\mathbf{a}_{t+\Delta t} = \Delta \mathbf{R} \cdot \mathbf{a}_t \cdot \Delta \mathbf{R}^T + \Delta \check{\mathbf{a}}(\Delta \mathbf{D})$$

em que $\Delta \check{\mathbf{a}}$, é o incremento do tensor associado às relações constitutivas do material, logo dependente do incremento da taxa de extensão, $\Delta \mathbf{D}$, definida por :

$$\Delta \mathbf{D} = \text{Sim.} \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_{t+\Delta/2}} \right)$$

com

$$\mathbf{x}_{t+\Delta/2} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_t + \mathbf{x}_{t+\Delta})$$

$\Delta \mathbf{R}$ é o incremento de rotação, definido por Hughes e Winget por :

$$\Delta \mathbf{R} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\omega} \right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{I} + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\omega} \right)$$

em que $\Delta \boldsymbol{\omega}$ representa o incremento do tensor de rotação, definido por :

$$\Delta \boldsymbol{\omega} = \text{Asim.} \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_{t+\Delta/2}} \right)$$

3.6.1.3. Interpolação do campo de deslocamentos

A interpolação isoparamétrica do elemento CPS8, é definida em função das suas coordenadas, g e h conforme indica a figura (3.6.1-1). Estas são as coordenadas materiais normalizadas, que podem variar entre (-1) e (1) no interior do elemento. A convenção da numeração dos nós do elemento , está representada na figura (3.6.1-1).

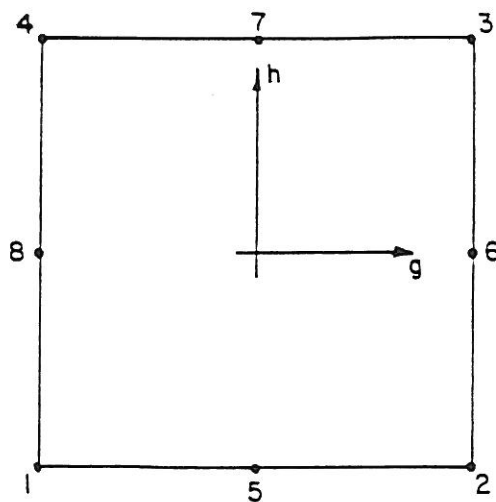


Fig.3.6.1-1 Representação do elemento CPS8

A função de interpolação, utilizada para o campo de deslocamentos

(genericamente representado por \mathbf{u}) é a seguinte :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & -\frac{1}{4}(1-g)(1-h)(1+g+h)\mathbf{u}_1 - \frac{1}{4}(1+g)(1-h)(1-g+h)\mathbf{u}_2 \\ & - \frac{1}{4}(1+g)(1+h)(1-g-h)\mathbf{u}_3 - \frac{1}{4}(1-g)(1+h)(1+g-h)\mathbf{u}_4 \\ & + \frac{1}{2}(1-g)(1+g)(1-h)\mathbf{u}_5 - \frac{1}{2}(1-h)(1+h)(1+g)\mathbf{u}_6 \\ & + \frac{1}{2}(1-g)(1+g)(1+h)\mathbf{u}_7 - \frac{1}{2}(1-h)(1+h)(1-g)\mathbf{u}_8 \end{aligned}$$

em que \mathbf{u}_i representa o deslocamento do nó i .

3.6.1.4 Integração

Nos elementos utilizados, a integração efectuada de forma a obter a sua matriz de rigidez, segue o algoritmo de integração numérica de Gauss.

Na integração "completa" de elementos isoparamétricos, a duas dimensões, sujeitos a deformações finitas, a determinação da variação de volume dos elementos é baseada na extrapolação da variação de volume calculada nos pontos de integração de volume (Pontos de Barlow). Esta técnica é conhecida como "integração reduzida selectiva". A sua aplicação reduz a possibilidade de bloqueio numérico, e produz soluções precisas em casos quase incompressíveis.

A terceira dimensão (fora do plano) não se considera na formulação seguinte (todas as matrizes são portanto consideradas em duas dimensões).

Define-se o seguinte tensor :

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \left(\frac{\mathbf{J}_0}{\mathbf{J}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

em que $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}$ representa o gradiente da deformação no plano;

$\mathbf{J} = \det(\mathbf{F})$ é o jacobiano da transformação no plano, \mathbf{x} ;

$\mathbf{J}_0 = \mathbf{M}^R \mathbf{J}^R$ é um jacobiano interpolado;

$\mathbf{J}^R = \det(\mathbf{F}^R)$ é um vector de jacobianos avaliados nos pontos de integração reduzida;

M^R é um interpolador bilinear, tomado sobre os pontos de integração reduzida.

O tensor de taxa de deformação D é definido a partir de \bar{F} , como :

$$D = \dot{\bar{F}} \cdot \bar{F}^{-1} = \dot{F} \cdot F^{-1} + \frac{1}{2} I \left(\frac{\dot{J}_0}{J_0} - \frac{\dot{J}}{J} \right)$$

Desta forma o operador de diferenças centradas, utilizado para definir o incremento de extensão, referido em (3.6.1.2.) é representado por :

$$\Delta D = \text{Sim.} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} I \left(\text{trac.} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x} \right)^R - \text{trac.} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x} \right)^I \right)$$

em que o índice R se refere a uma quantidade interpolada a partir dos pontos de integração reduzida e o I refere-se a uma quantidade calculada nos pontos de integração completa (Gauss) onde a extensão vai ser calculada; x é a posição do ponto a meio do incremento :

$$x = \left(\frac{1}{2} \right) (x_t + x_{t+\Delta t})$$

O incremento da extensão na terceira direcção é avaliado com base no operador:

$$\Delta D_{33} = M^R \Delta D_{33}^R$$

3.6.2. Elementos de modelização da interacção entre um corpo deformável, e uma superfície rígida

3.6.2.1. Introdução

Para modelizar a interacção entre o projectil (considerado rígido) e o primeiro anel, assim como o contacto entre o último anel e o alvo (considerado rígido), utiliza-se o elemento IRS22, que faz parte de uma família de elementos que o código ABAQUS contém para o efeito.

Durante o processo de deformação, ambos os corpos, corpo deformável e corpo rígido, se podem movimentar. Em cada ponto de integração dos elementos utilizados na modelização deste contacto, é determinando o valor da sobreposição (penetração do ponto da superfície deformável no corpo rígido) e o valor do atrito.

Estes valores são utilizados, em conjunto com uma técnica de multiplicadores de Lagrange, de forma a criar uma teoria de interacção entre as superfícies.

Nesta secção discute-se os aspectos cinemáticos e o equilíbrio das superfícies interactuantes.

3.6.2.2. Cinemática

Seja A um ponto, pertencente à malha da superfície deformável, com as coordenadas correntes \mathbf{x}_A . Seja C o ponto associado ao nodo de referência do corpo rígido, com as coordenadas correntes \mathbf{x}_C .

Seja A' o ponto da superfície do corpo rígido, mais próximo de A, e com normal, \mathbf{n} , a passar pelo ponto A. Esta geometria é representada na figura (3.6.2.2-1).

Designa-se por h, a distância de A a A' ao longo de $-\mathbf{n}$, e representa a medida da sobre posição das superfícies, calculando-se de acordo com a seguinte expressão :

$$\mathbf{n}h = -\mathbf{x}_A + \mathbf{x}_C + \mathbf{r}$$

Designa-se por c a folga permitida no contacto (é uma tolerância). Se $h < -c$ considera-se que não existe contacto nas superfícies em A, não sendo necessários mais cálculos. Se $h \geq -c$ considera-se que as superfícies estão em contacto.

Para impor os constrangimentos do contacto, é necessário calcular a primeira e a segunda variação de h, designadas respectivamente por δh e $d\delta h$.

Seja S^α , $\alpha = 1,2$, um referencial ortogonal local associado ao ponto A', com direcções tangentes à superfície rígida em A'. Como o ponto A e o corpo rígido se movem, então o ponto projectado A' também se pode mover (variar na superfície rígida). O seu movimento consiste de duas parcelas : uma devido ao movimento do corpo rígido e outra devido ao movimento relativo dos corpos :

$$\delta \mathbf{x}_{A'} = \delta \mathbf{x}_c + \delta \mathbf{r}|_{\phi_c} + \delta \mathbf{r}|_{\gamma_\alpha} = \delta \mathbf{x}_c + \delta \phi_c \times \mathbf{r} + \mathbf{t}_\alpha \delta \gamma_\alpha$$

em que $\delta \gamma_\alpha$ representa o escorregamento do ponto A'.

A normal \mathbf{n} , também varia devido à rotação da superfície rígida e devido ao escorregamento do ponto A'

$$\delta \mathbf{n} = \delta \mathbf{n}|_{\gamma_\alpha} + \delta \mathbf{n}|_{\phi_c} = \delta \phi_c \times \mathbf{n} + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S_\alpha} \delta \gamma_\alpha$$

A forma linearizada das equações de contacto ,vêm então :

$$\mathbf{n} \delta h + h \left(\delta \phi_c \times \mathbf{n} + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S_\alpha} \delta \gamma_\alpha \right) = -\delta \mathbf{x}_A + \delta \mathbf{x}_c + \delta \phi_c \times \mathbf{r} + \mathbf{t}_\alpha \delta \gamma_\alpha$$

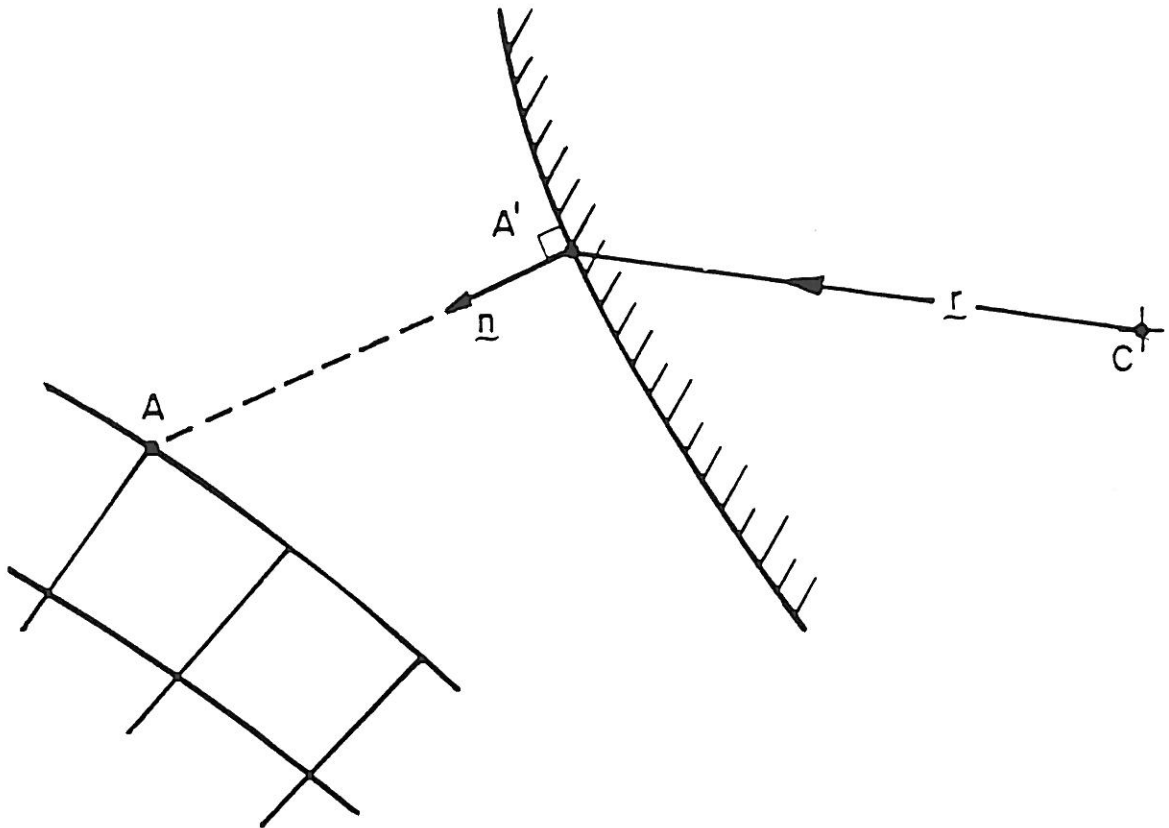


Fig. 3.6.2.2-1 Interação entre uma superfície rígida e uma deformável.

Nas teorias de contacto permitidas (contacto rígido ou contacto "suavizado") assume-se que $h = 0$. Portanto a equação anterior virá:

$$\mathbf{n} \delta h = -\delta \mathbf{x}_A + \delta \mathbf{x}_c + \delta \phi_c \times \mathbf{r} + \mathbf{t}_\alpha \delta \gamma_\alpha$$

Separando esta equação nas suas componentes normal e tangencial vem:

$$\delta h = -\mathbf{n} \cdot (\delta \mathbf{x}_A - \delta \mathbf{x}_C) + (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \cdot \delta \phi_c$$

$$\delta \gamma_\alpha = \mathbf{t}_\alpha \cdot (\delta \mathbf{x}_A - \delta \mathbf{x}_C) - (\mathbf{r} \times \mathbf{t}_\alpha) \cdot \delta \phi_c$$

Para calcular a segunda variação de h, volta-se a supor que $h=0$ e também que $dh = \delta h = 0$. Portanto:

$$nd\delta h = d\delta r$$

logo a equação cinemática linearizada será :

$$nd\delta h = d(\delta \phi_c \times \mathbf{r}) \Big|_{\gamma_\beta} + \delta \phi_c \times d\mathbf{r} \Big|_{\phi_c} + dt \Big|_{\gamma_\beta} \delta \gamma_\alpha + dt \Big|_{\phi_c} \delta \gamma_\alpha + \mathbf{t}_\alpha d\delta \gamma_\alpha$$

Onde se supôs que $d\delta \mathbf{x}_A = d\delta \mathbf{x}_C = d\delta \phi_c = 0$

O primeiro termo desta expressão, corresponde à variação, de segunda ordem, do vector \mathbf{r} , para rotação em torno do ponto C. Este termo pode ser representado por :

$$d(\delta \phi_c \times \mathbf{r}) \Big|_{\gamma_\beta} = \delta \phi_c \cdot d\phi_c \mathbf{r} - \frac{1}{2} \delta \phi_c d\phi_c \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{2} \mathbf{r} \cdot \delta \phi_c d\phi_c$$

O segundo termo pode ser obtido a partir da expressão usada para o escorregamento sobre a superfície :

$$\delta \phi_c \times d\mathbf{r} \Big|_{\phi_c} = \delta \phi_c \times \mathbf{t}_\alpha d\gamma_\alpha$$

O terceiro termo pode ser obtido pela expressão da rotação do corpo rígido :

$$dt \Big|_{\gamma_\beta} \delta \gamma_\alpha = d\phi_c \times \mathbf{t}_\alpha \delta \gamma_\alpha$$

O quarto termo pode ser obtido diferenciando em relação às coordenadas de

superfície,

$$dt|_{\phi_c} \delta\gamma_\alpha = \frac{\partial \mathbf{t}_\alpha}{\partial S_\beta} d\gamma_\beta \delta\gamma_\alpha = \delta\gamma_\alpha \boldsymbol{\kappa}_{\alpha\beta} d\gamma_\beta$$

em que

$$\boldsymbol{\kappa}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathbf{t}_\alpha}{\partial S_\beta} = \frac{\partial \mathbf{t}_\beta}{\partial S_\alpha} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial S_\alpha \partial S_\beta}$$

é a matriz de curvatura da superfície do corpo rígido em torno de A' .

Substituindo vem :

$$\begin{aligned} nd\delta h &= \delta\phi_c \cdot d\phi_c \mathbf{r} - \frac{1}{2} \delta\phi_c d\phi_c \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{2} \mathbf{r} \cdot \delta\phi_c d\phi_c \\ &= \delta\phi_c \times \mathbf{t}_\alpha d\gamma_\alpha + d\phi_c \times \mathbf{t}_\alpha \delta\gamma_\alpha + \delta\gamma_\alpha \boldsymbol{\kappa}_{\alpha\beta} d\gamma_\beta + \mathbf{t}_\alpha d\delta\gamma_\alpha \end{aligned}$$

Pode-se decompor esta equação nas suas componentes, normal e tangencial. Para a componente normal temos :

$$\begin{aligned} d\delta h &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \delta\phi_c \cdot d\phi_c - \frac{1}{2} \delta\phi_c \cdot (\mathbf{n}\mathbf{r} + \mathbf{r}\mathbf{n}) \cdot d\phi_c + \delta\phi_c \cdot (\mathbf{t}_\alpha \times \mathbf{n}) d\gamma_\alpha \\ &\quad + d\phi_c \cdot (\mathbf{t}_\alpha \times \mathbf{n}) \delta\gamma_\alpha + \delta\gamma_\alpha \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\alpha\beta} d\gamma_\beta \end{aligned}$$

para a componente tangencial temos :

$$d\delta\gamma_\alpha = -(\mathbf{t}_\gamma \cdot \mathbf{r}) \delta\phi_c \cdot d\phi_c + \frac{1}{2} \delta\phi_c \cdot (\mathbf{t}_\gamma \mathbf{r} + \mathbf{r} \mathbf{t}_\gamma) \cdot d\phi_c + \delta\gamma_\alpha \mathbf{t}_\gamma \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\alpha\beta} d\gamma_\beta$$

A expressão envolvendo $\boldsymbol{\kappa}_{\alpha\beta}$ pode ser simplificada atendendo a que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}_\alpha = 0$:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\alpha\beta} = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{t}_\alpha}{\partial S_\beta} = -\mathbf{t}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S_\beta} = \mathbf{t}_\beta \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S_\alpha}$$

de modo semelhante,

$$\mathbf{t}_\gamma \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\alpha\beta} = \mathbf{t}_\gamma \cdot \frac{\partial \mathbf{t}_\alpha}{\partial S_\beta} = -\mathbf{t}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{t}_\gamma}{\partial S_\beta}$$

Se o sistema local de coordenadas superficiais for criado projectando um sistema de coordenadas cartesiano na superfície, este último termo anula-se.

Designando $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\alpha\beta}$ por $\kappa_{\alpha\beta}$ obtêm-se as seguintes expressões :

$$\begin{aligned} d\delta h = & (\delta \mathbf{x}_A - \delta \mathbf{x}_C) \cdot \mathbf{t}_\alpha \boldsymbol{\kappa}_{\alpha\beta} \mathbf{t}_\beta \cdot (\mathbf{d}\mathbf{x}_A - \mathbf{d}\mathbf{x}_C) \\ & + (\delta \mathbf{x}_A - \delta \mathbf{x}_C) \cdot \left(\mathbf{t}_\alpha \boldsymbol{\kappa}_{\alpha\beta} (\mathbf{t}_\beta \times \mathbf{r}) + \mathbf{t}_\alpha (\mathbf{t}_\beta \times \mathbf{n}) \right) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\phi}_c \\ & + \delta \boldsymbol{\phi}_c \cdot (\mathbf{t}_\alpha \times \mathbf{r}) \boldsymbol{\kappa}_{\alpha\beta} \left(\mathbf{t}_\beta + (\mathbf{t}_\alpha \times \mathbf{n}) \mathbf{t}_\beta \right) \cdot (\mathbf{d}\mathbf{x}_A - \mathbf{d}\mathbf{x}_C) \\ & + \delta \boldsymbol{\phi}_c \cdot (\mathbf{t}_\alpha \times \mathbf{r}) \boldsymbol{\kappa}_{\alpha\beta} (\mathbf{t}_\beta \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\phi}_c \\ & + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \delta \boldsymbol{\phi}_c \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\phi}_c - \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\phi}_c \cdot (\mathbf{n}\mathbf{r} + \mathbf{r}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\phi}_c \end{aligned}$$

$$d\delta \gamma_\alpha = -(\mathbf{t}_\alpha \cdot \mathbf{r}) \delta \boldsymbol{\phi}_c \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\phi}_c + \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\phi}_c \cdot (\mathbf{t}_\alpha \mathbf{r} + \mathbf{r} \mathbf{t}_\alpha) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\phi}_c$$

Para aplicações dinâmicas,

$$\dot{h} = -\mathbf{n} \cdot (\dot{\mathbf{x}}_A - \dot{\mathbf{x}}_C - \dot{\boldsymbol{\phi}}_c \times \mathbf{r})$$

e

$$\begin{aligned} \ddot{h} = & -\mathbf{n} \cdot (\ddot{\mathbf{x}}_A - \ddot{\mathbf{x}}_C - \ddot{\boldsymbol{\phi}}_c \times \mathbf{r}) + \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}_c \mathbf{r} \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}_c - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \dot{\boldsymbol{\phi}}_c \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}_c \\ & - (\dot{\mathbf{x}}_A - \dot{\mathbf{x}}_C - \dot{\boldsymbol{\phi}}_c \times \mathbf{r}) \cdot \left(\dot{\boldsymbol{\phi}}_c \times \mathbf{n} + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S^\alpha} \mathbf{t}_\alpha \cdot (\dot{\mathbf{x}}_A - \dot{\mathbf{x}}_C - \dot{\boldsymbol{\phi}}_c \times \mathbf{r}) \right) \end{aligned}$$

3.6.2.3. Equilíbrio

O equilíbrio será expresso na sua forma variacional, isto é, através do princípio dos trabalhos virtuais.

Utilizando as variáveis cinemáticas atrás referidas, a contribuição para o equilíbrio, na sua forma variacional, das interacções desenvolvidas ao nível do contacto no corpo deformável, pode ser expressa por :

$$\begin{aligned}\delta W_s &= \int_s (p\delta h + \tau_\alpha \delta \gamma_\alpha) dS \\ &= \delta W_{sn} + \delta W_{st}\end{aligned}$$

em que p representa a pressão no contacto, τ_α representa a tensão de corte nas superfícies e S representa a área da superfície de contacto.

A definição de h implica que p , tenha um valor positivo nos pontos de contacto, e um valor nulo para pontos que não estão em contacto.

É conveniente que a pressão p , seja interpretada como sendo uma função da separação entre as superfícies, h , isto é, $p=p(h)$. No caso de um contacto rígido, pode ocorrer qualquer valor positivo de p , quando $h=0$, portanto, neste ponto $dp/dh \rightarrow \infty$. Para resolver esta indeterminação introduz-se uma variável independente para a pressão, \tilde{p} , em conjunto que o constrangimento $p = \tilde{p}$, imposto pelo múltiplicador de Lagrange $\delta\lambda$:

$$\delta \tilde{W}_{sn} = \int (\tilde{p}\delta h + \delta\lambda(p - \tilde{p})) dS$$

Utilizando um escalar ρ , definido posteriormente, podem combinar-se as equações de forma a obter :

$$\delta \tilde{W} = \rho \delta W_{sn} + (1 - \rho) \delta \tilde{W}_{sn} + \delta W_{st}$$

A utilização de $\delta \tilde{W}$ no algoritmo de Newton, utilizado para resolver as equações de equilíbrio na sua forma discretizada traduz-se em :

$$d\delta \tilde{W} = -\delta \tilde{W}$$

Substituindo obtem-se :

$$\begin{aligned}
 & \int_s \left\{ (\rho dp + (1 - \rho) d\tilde{p}) \delta h + d\tau_\alpha \delta \gamma_\alpha + (1 - \rho) (dp - d\tilde{p}) \delta \lambda \right. \\
 & \left. + (\rho p + (1 - \rho) \tilde{p}) d\delta h + \tau_\alpha d\delta \gamma_\alpha \right. \\
 & \left. + [(\rho p + (1 - \rho) \tilde{p}) \delta h + \tau_\alpha \delta \gamma_\alpha] d\left(\frac{dS}{dS^0}\right) \frac{dS^0}{dS} \right\} dS \\
 & = - \int_s [(\rho p + (1 - \rho) \tilde{p}) \delta h + (1 - \rho) (p - \tilde{p}) \delta \lambda + \tau_\alpha \delta \gamma_\alpha] dS
 \end{aligned}$$

Como $p=p(h)$, pode-se definir que $dp/dh = K$ em que $K \rightarrow \infty$ no contacto rígrado. Identificando $K\delta\lambda = \delta\tilde{p}$ e definindo $\bar{p} = \rho p + (1 - \rho) \tilde{p}$, substituindo na equação anterior vem :

$$\begin{aligned}
 & \int_s \left\{ (\rho K dh + (1 - \rho) d\tilde{p}) \delta h + d\tau_\alpha \delta \gamma_\alpha + (1 - \rho) \left(dh - \frac{1}{K} d\tilde{p} \right) \delta \tilde{p} \right. \\
 & \left. + \bar{p} d\delta h + \tau_\alpha d\delta \gamma_\alpha + (\bar{p} \delta h + \tau_\alpha \delta \gamma_\alpha) d\left(\frac{dS}{dS^0}\right) \frac{dS^0}{dS} \right\} dS \\
 & = - \int_s \left[\bar{p} \delta h + (1 - \rho) \frac{1}{K} (p - \tilde{p}) \delta \tilde{p} + \tau_\alpha \delta \gamma_\alpha \right] dS
 \end{aligned}$$

Definindo $\rho = K_0/K$, em que K_0 é a rígridez do contacto (um valor finito da relação pressão / deslocamento, definida no modelo de contacto) a equação

anterior vem:

$$\int_s \left\{ \delta h \left(K_0 dh + \left(1 - \frac{K_0}{K} \right) d\bar{p} \right) + \delta \gamma_\alpha d\tau_\alpha + \delta \bar{p} \left(1 - \frac{K_0}{K} \right) \left(dh - \frac{1}{K} d\bar{p} \right) + \bar{p} d\delta h + \tau_\alpha d\delta \gamma_\alpha + (\bar{p} \delta h + \tau_\alpha \delta \gamma_\alpha) d \left(\frac{dS}{dS^0} \right) \frac{dS^0}{dS} \right\} dS$$

$$= - \int_s \left[\bar{p} \delta h + \left(1 - \frac{K_0}{K} \right) \frac{1}{K} (p - \bar{p}) \delta \bar{p} + \tau_\alpha \delta \gamma_\alpha \right] dS$$

Como nesta equação só aparece a flexibilidade, $\frac{1}{K}$, esta formulação é válida mesmo para o contacto rígido ($K \rightarrow \infty$). O valor de $p(h)$ e de τ_α depende da teoria de contacto usada.

3.6.3. Elementos de modelização da interacção entre corpos deformáveis

O código ABAQUS, contém uma família de elementos que permitem modelizar o escorregamento finito entre duas superfícies deformáveis. O elemento utilizado para o efeito no modelo desenvolvido, tem a designação interna de ISL22A.

Para definir a interacção entre as duas superfícies, uma delas (a superfície secundária) é coberta por elementos ISL. Os nós da outra superfície (superfície primária), são associados sequencialmente aos elementos ISL, da primeira.

As equações cinemáticas que modelizam o contacto são descritas nesta secção.

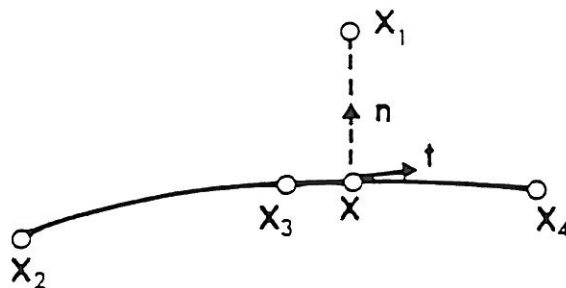


Fig. 3.6.3-1 Interacção entre um nó da superfície secundária com um segmento da superfície primária.

Considere-se o contacto de um nó da superfície secundária, n_1 , de coordenadas x_1 , com um segmento da superfície primária, descrito pelos nodos $n_2, n_3 \dots$ de coordenadas x_2, x_3, \dots (note-se que o número de nós do segmento depende da ordem do segmento — para um segmento linear, associado a um elemento de dois nós, o número de nós é dois, para um segmento quadrático, associado a um elemento de três nós, é três). Se o contacto ocorre no vértice entre dois segmentos, só o nó do vértice interessa para as equações.

Na figura (3.6.3-1) é representado um segmento quadrático. As coordenadas referidas, encontram-se no plano da linha de escorregamento, que no nosso caso, a duas dimensões, coincide com o plano utilizado para descrever a geometria.

O primeiro passo consiste em determinar o ponto x no segmento da superfície primária, mais próximo do ponto x_1 , correspondente ao nodo n_1 da superfície secundária. Determina-se a normal n , e a tangente t , ao segmento nesse ponto. O ponto x e a normal n podem ser relacionados com a penetração das superfícies, h , através da expressão:

$$nh = x - x_1$$

Como x , representa as coordenadas dum ponto no segmento, a sua posição pode ser definida a partir de funções de interpolação $N_i(g)$, em que g representa uma coordenada natural do segmento:

$$nh = N_i(g)x_i \quad (3.6.3.-1)$$

Em que $N_1 = -1$, e para o caso do segmento quadrático:

$$N_2 = \frac{1}{2}g(g-1), \quad N_3 = 1-g^2, \quad N_4 = \frac{1}{2}g(g+1)$$

A tangente t à linha de escorregamento no ponto x , pode ser definida por :

$$t \equiv \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dg} \bigg/ \left| \frac{dx}{dg} \right|$$

em que,

$$\frac{dx}{dg} = \frac{dN_i}{dg} x_i$$

A posição do ponto x é determinada a partir da condição de ortogonalidade da normal e da tangente, que conduz à seguinte equação :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = N_i(g) \frac{dN_j(g)}{dg} x_i \cdot x_j = 0$$

Para obter a equação que governa o contacto / escorregamento, lineariza-se a variação da equação (3.6.3-1), que conduz a :

$$\delta n h + \mathbf{n} \delta h = \frac{dN}{dg} x_i \delta g + N_i \delta x_i = t \delta s + N_i \delta x_i$$

em que δs é o escorregamento.

Separando nas componentes normal e tangencial vem :

$$\delta h = N_i \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{x}_i \tag{ 3.6.3-2 }$$

$$\delta s = - N_i \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{x}_i - h \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{n}$$

O escorregamento é relevante unicamente quando o nodo x_1 está sobre a linha de escorregamento, o que significa que $h=0$, Logo:

$$\delta s = - N_i \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{x}_i \tag{ 3.6.3-3 }$$

Para obter as tensões e rigidez, no início do contacto, a segunda variação de h e s é necessária. A partir de (3.6.3-2):

$$d\delta h = \delta x_i \cdot \mathbf{n} \frac{dN_i}{dg} dg + N_i \delta x_i \cdot d\mathbf{n}$$

Utilizando (3.6.3-3), pode-se expressar o primeiro termo desta equação em função de dx_i :

$$\frac{dN_i}{dg} dg = \frac{dN_i}{ds} ds = - \frac{dN_i}{ds} N_j t \cdot dx_j \quad (3.6.3-4)$$

A variação da normal, dn , pode ser expressa por :

$$dn = (nn + tt) \cdot dn = tt \cdot dn = - tn \cdot dt$$

em que $n \cdot dt$ pode ser obtido de :

$$\begin{aligned} n \cdot dt &= n \cdot d \left(\frac{dx}{dg} \right) \\ &= n \cdot \left(\left(x_i \frac{d^2 N_i}{dg^2} dg + \frac{dN_i}{dg} dx_i \right) \right) \\ &= - \rho_n ds + \frac{dN_i}{ds} n \cdot dx_i \\ &= \rho_n N_i t \cdot dx_i + \frac{dN_i}{ds} n \cdot dx_i \end{aligned}$$

em que ρ_n é a curvatura do segmento, definida por :

$$\rho_n = - n \cdot \frac{d^2 \mathbf{x}}{dg^2} \Big/ \left| \frac{d^2 \mathbf{x}}{dg^2} \right|^2$$

Substituindo em (3.6.3-4) obtem-se :

$$d\delta h = - \delta x_i \cdot \left(\mathbf{n} \frac{dN_i}{ds} N_j \mathbf{t} + \mathbf{t} N_i \frac{dN_j}{ds} \mathbf{n} + \mathbf{t} N_i \rho_n N_j \mathbf{t} \right) \cdot d\mathbf{x}_j$$

A segunda variação de s , pode ser obtida de modo semelhante, conduzindo a

$$d\delta s = \delta x_i \cdot \left(\mathbf{t} \frac{dN_i}{ds} N_j \mathbf{t} - \mathbf{n} N_i \frac{dN_j}{ds} \mathbf{n} - \mathbf{n} N_i \rho_n N_j \mathbf{t} \right) \cdot d\mathbf{x}_j$$

Para que a formulação fique completa, é necessário referir que na junção (vértice) de dois segmentos da linha de escorregamento, pode ocorrer uma descontinuidade do declive. Esta descontinuidade provoca graves problemas na convergência do equilíbrio, em problemas de contacto. Desta forma é importante "suavizar" esta transição entre segmentos. Assim a junção entre dois segmentos contíguos, representada na figura (3.6.3-2), é realizada através de polinómios de Hemite, entre os pontos x_a e x_b .

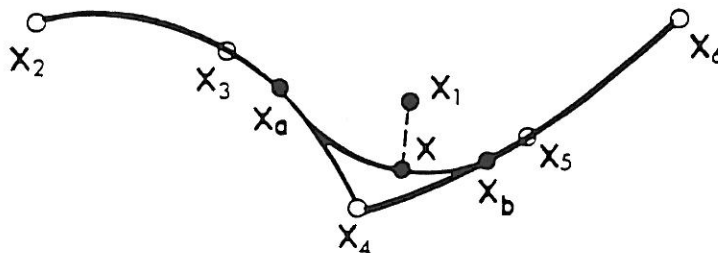


Fig. 3.6.3-2 Junção entre dois segmentos da superfície primária.

Estes pontos, \mathbf{x}_a e \mathbf{x}_b , são definidos por :

$$\mathbf{x}_a = (2\alpha^2 - \alpha)\mathbf{x}_2 + (-4\alpha^2 + 4\alpha)\mathbf{x}_3 + (1 - 3\alpha + 2\alpha^2)\mathbf{x}_4$$

$$\mathbf{x}_b = (2\alpha^2 - \alpha)\mathbf{x}_6 + (-4\alpha^2 + 4\alpha)\mathbf{x}_5 + (1 - 3\alpha + 2\alpha^2)\mathbf{x}_4$$

Assim as posições de \mathbf{x}_a e \mathbf{x}_b são determinados através do parâmetro α (definido pelo utilizador) que varia entre $0 \leq \alpha \leq 0.5$. Utiliza-se uma variável, parametrizada, f , para referenciar o segmento de junção ($-1 \leq f \leq 1$). Os valores extremos de f correspondem às coordenadas \mathbf{x}_a e \mathbf{x}_b .

Desta forma :

$$\frac{d\mathbf{x}_a}{df} = -\alpha \frac{d\mathbf{x}_a}{d\alpha} = (\alpha - 4\alpha^2)\mathbf{x}_2 + (-4\alpha + 8\alpha^2)\mathbf{x}_3 + (3\alpha - 4\alpha^2)\mathbf{x}_4$$

$$\frac{d\mathbf{x}_b}{df} = \alpha \frac{d\mathbf{x}_b}{d\alpha} = (-\alpha + 4\alpha^2)\mathbf{x}_6 + (4\alpha - 8\alpha^2)\mathbf{x}_5 + (-3\alpha + 4\alpha^2)\mathbf{x}_4$$

Utilizando o polinómio de Hemite, a posição de um ponto \mathbf{x} , no interior do segmento de junção é determinado, em função de f , por :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = & \frac{1}{4}(f^3 - 3f + 2)\mathbf{x}_a + \frac{1}{4}(-f^3 + 3f - 2)\mathbf{x}_b \\ & + \frac{1}{4}(f^3 - f^2 - f + 1)\frac{d\mathbf{x}_a}{df} + \frac{1}{4}(f^3 + f^2 - f - 1)\frac{d\mathbf{x}_b}{df} \end{aligned}$$

Substituindo os valores de x_a , x_b , $\frac{dx_a}{df}$, $\frac{dx_b}{df}$ vem :

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{4}\alpha \{ & [-2\alpha f^3 + (4\alpha - 1)f^2 + (-2\alpha + 2)f - 1]x_2 \\ & [4\alpha f^3 + (-8\alpha + 4)f^2 + (4\alpha - 8)f + 4]x_3 \\ & [(8\alpha^2 - 6\alpha)f^2 + (-6\alpha + 4)]x_4 \\ & [-4\alpha f^3 + (8\alpha - 4)f^2 + (-4\alpha + 8)f - 4]x_5 \\ & [2\alpha f^3 + (-4\alpha + 1)f^2 + (2\alpha - 2)f + 1]x_6 \} \end{aligned}$$

3.7. Modelização experimental

3.7.1. Análise estática

O principal objectivo da análise estática, foi desenvolver o modelo discreto que melhor se adaptava ao processo de deformação, a que os aneis estão sujeitos. Desta forma, "ensaiaram-se" vários modelos, variando os tipos de elementos, o número de elementos, optimizaram-se as tolerâncias no contacto, definiram-se incrementos de forma a obter uma solução convergente e com resultados fisicamente aceitáveis. Estes resultados eram confrontados com os apresentados por S.R.Reid e T.Yella Reddy em [4]. Deste processo de optimização resultaram os três modelos apresentados na figura (3.7.1-1).

Em todos eles se utiliza a propriedade de simetria dos sistemas relativamente ao eixo $y=0$. Nos primeiros dois modelos, não se optou pela utilização da simetria relativamente ao eixo $x=0$, visto que, pensando na análise dinâmica, estávamos interessados em modelizar o contacto entre as duas superfícies deformáveis.

Os ensaios modelizados, correspondem ao esmagamento, de uma forma quase-estática, de um anel ou dois aneis dispostos sequencialmente entre duas placas rígidas. Uma das placas, a inferior, é suposto estar estática, e a superior animada de um movimento de translação (quase estático) vertical e para baixo.

Na modelização estrutural dos aneis, foram utilizados elementos planos de tensão CPS8; no contacto entre o anel e as placas, assumidas como rígidas, foram

utilizados elementos IRS22 ; e no contacto entre as superfícies dos aneis foram utilizados elementos ISL22A.

3.7.2. Análise dinâmica

A motivação desta dissertação é simular e analisar os fenómenos que ocorrem nos ensaios dinâmicos apresentados no capítulo 2. Foi realizado um trabalho inicial com o objectivo de otimizar o modelo discreto que melhor simulava a deformação dinâmica dos aneis. Destaca-se neste trabalho a discretização do anel (número de elementos), definição de tolerâncias e parâmetros no contacto e na resolução do sistema de equações, e finalmente, a definição do incremento de tempo a utilizar na integração das equações de equilíbrio. Deste processo de optimização, resultam os três modelos apresentados na figura (3.7.2-1).

A descrição destes sistemas do ponto de vista geométrico, é em tudo semelhante aos sistemas utilizados na análise estática. A simulação numérica dos ensaios dos sistemas constituídos por aneis livres, levantou graves problemas de convergência relacionados com a formulação do contacto. Para ultrapassar estas dificuldades, optou-se por ensaiar dinamicamente os sistemas soldados. Atendendo ao facto dos fenómenos que se pretendem estudar, ocorrerem tanto nos sistemas constituídos por aneis soldados, como nos constituídos por aneis livres, esta opção não levanta qualquer obstáculo.

Do ponto de vista cinemático, refira-se que a placa rígida inferior (alvo) se mantém fixa, ao passo que a placa rígida superior (projectil), tem associadas certas grandezas que variam consoante o ensaio — a massa e a velocidade vertical descendente inicial.

3.7.3. Afição do modelo numérico

Analisando o tempo gasto nas diversas tarefas que constituem o presente trabalho, não podemos deixar de referir a parcela em que foi, provavelmente, dispendido mais tempo—definição do modelo e sua afinação.

Nas secções anteriores referimo-nos ao modelo numérico final, com o qual foram obtidos os melhores resultados. Note-se no entanto que até se chegar a esse modelo final, muitas outras soluções foram testadas.

Nesta secção vamos referir alguns desses trabalhos preliminares, assim como definir os valores dos parâmetros utilizados no modelo numérico.

Temos de referir a tentativa de utilização de elementos do tipo "barra-viga" na modelização estrutural dos aneis. De facto este modelo conduzia a uma solução

numérica muito mais leve, no que respeita ao esforço computacional. No entanto esta solução não permitia modelar a complexidade das restrições de contacto a que os anéis estão sujeitos. Nesta tentativa, conseguiu-se modelar o contacto entre os anéis, no entanto não se conseguiu modelar o contacto entre as paredes interiores de cada anel.

A utilização de elementos tipo "casca" levantou os mesmos problemas. Desta forma, fomos conduzidos à utilização de elementos planos de tensão CPS8.

A definição do número de elementos foi influenciada pelo bloqueio numérico que o elemento CPS8 provoca quando sujeito a grandes deformações. Para tornar o modelo mais flexível aumentou-se o número de elementos. Também contribuiu para este estudo, a necessidade de integrar a instabilidade elástica que precede o colapso dos anéis. Na análise dinâmica, um refinamento adicional foi efectuado com o objectivo, de diminuir o tempo que uma onda de tensão demora a atravessar cada elemento.

A modelação do contacto dinâmico entre os anéis, assim como a instabilidade elástica que ocorre simultaneamente em diversos anéis, restringiu a análise dinâmica aos sistemas soldados.

Na definição dos extremos de variação dos incrementos de tempo utilizados na integração das equações de equilíbrio, e na definição do coeficiente de amortecimento numérico, foram consideradas sugestões referidas em [7] e [15]. Estas sugestões foram testadas e afinadas nesta fase do trabalho.

O modelo numérico revela-se bastante sensível a pequenas variações do parâmetro que é utilizado para "suavizar" a ligação entre os segmentos de contacto ("smooth"). A definição deste parâmetro foi conseguida a partir do estudo apresentado no capítulo anterior. A solução obtida foi refinada através de diversas tentativas.

Na modelização do comportamento mecânico do material, aço macio, é assumido que apresenta um comportamento linear elástico, seguido de um curto período de encruamento linear, ao que se sucede um comportamento perfeitamente plástico.

Os valores utilizados para estes parâmetros encontram-se referidos nas listagens apresentadas no anexo I.

3.7.4 Programação

O desenvolvimento do programa de computador correspondente ao modelo numérico, foi efectuado sobre o código de elementos finitos ABAQUS.

As listagens dos programas tipo realizados para simular numericamente o ensaio dos sistemas para os casos estático e dinâmico, encontram-se no anexo I.

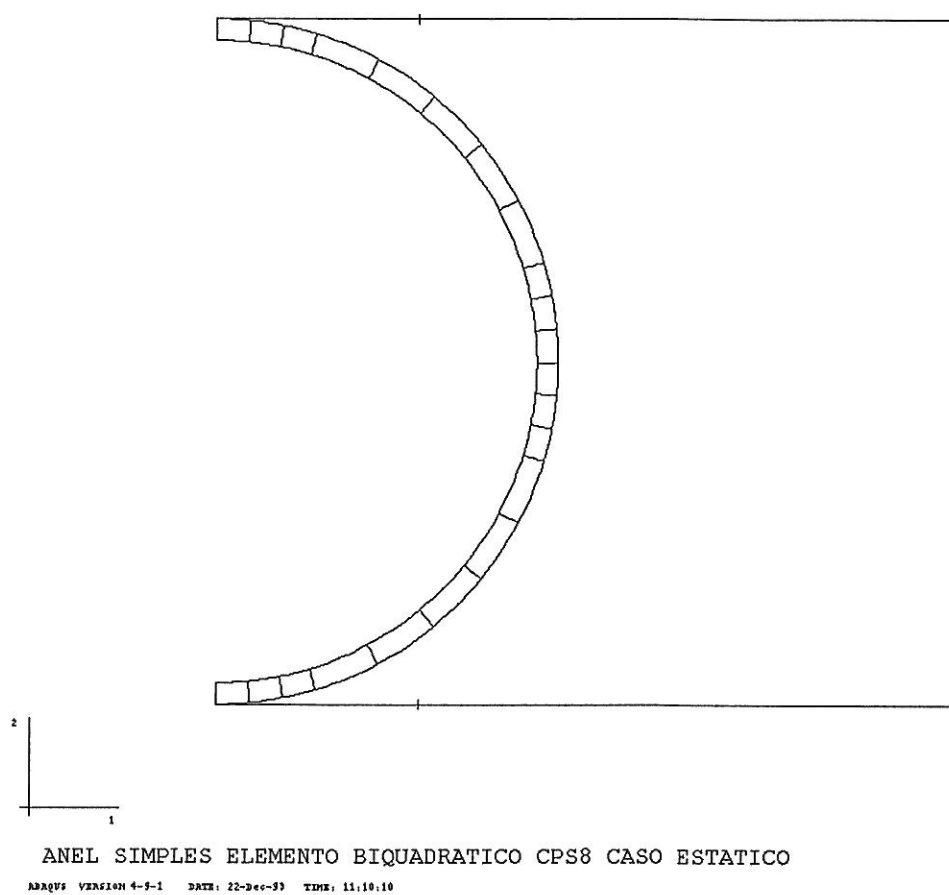


Fig. 3.7.1-1a Modelo utilizado na análise estática.

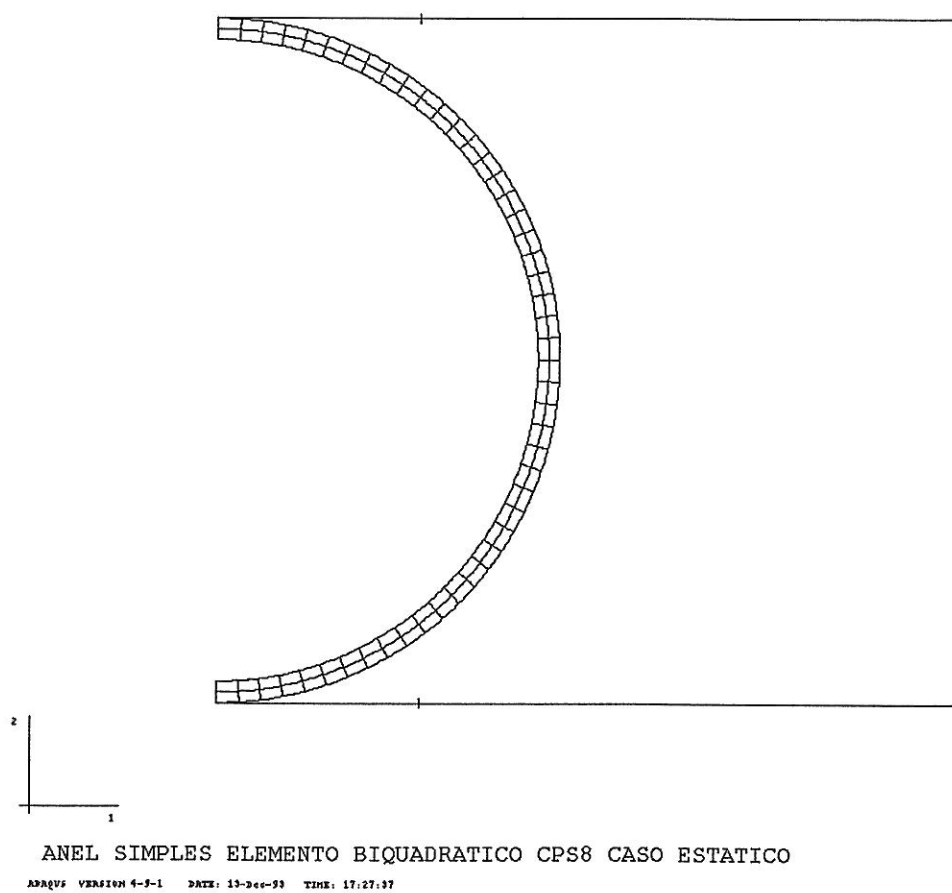


Fig. 3.7.1-1b Modelo utilizado na análise estática.

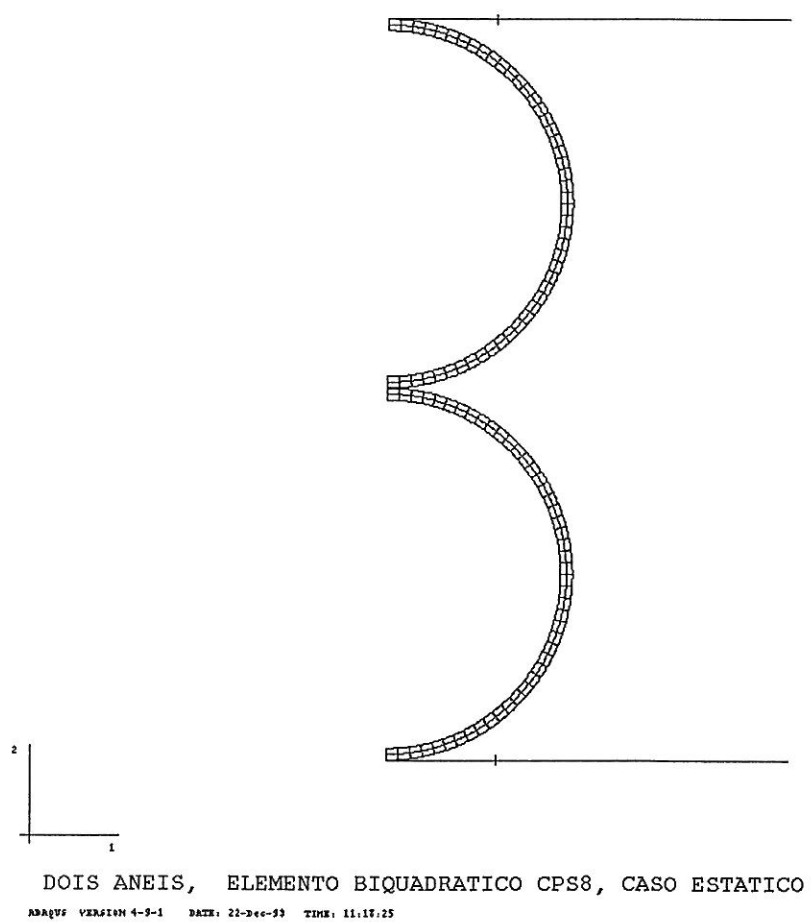


Fig. 3.7.1-1c Modelo utilizado na análise estática.

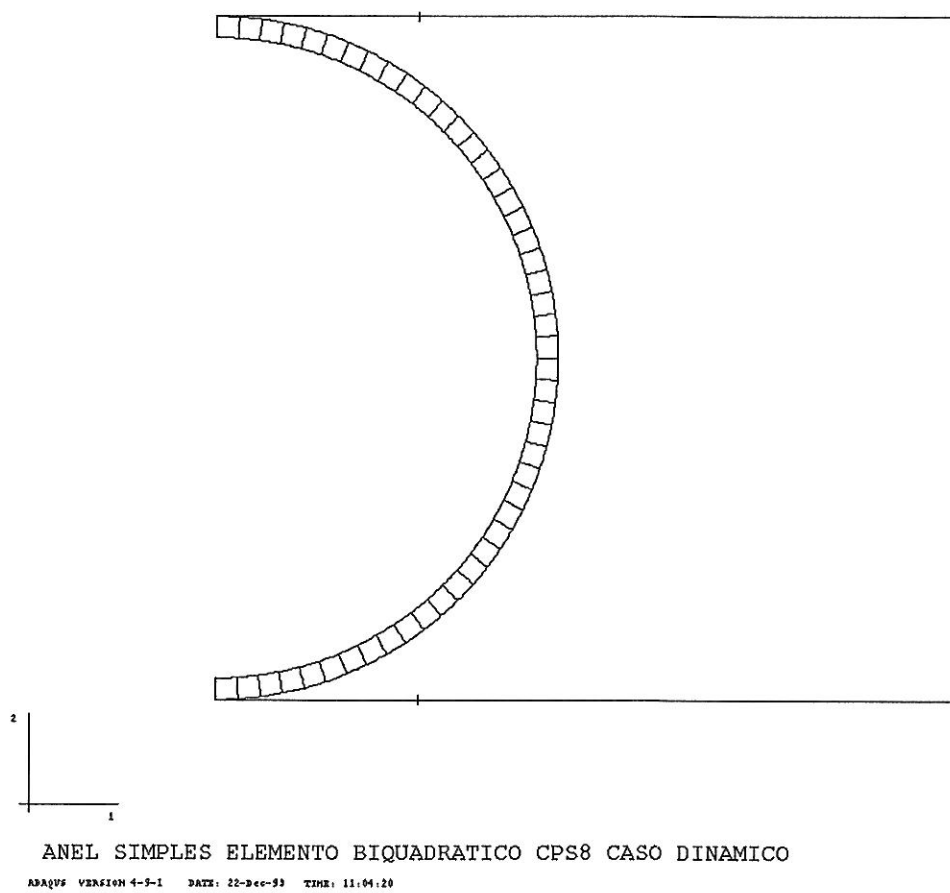


Fig. 3.7.2-1a Modelo utilizado na análise dinâmica.

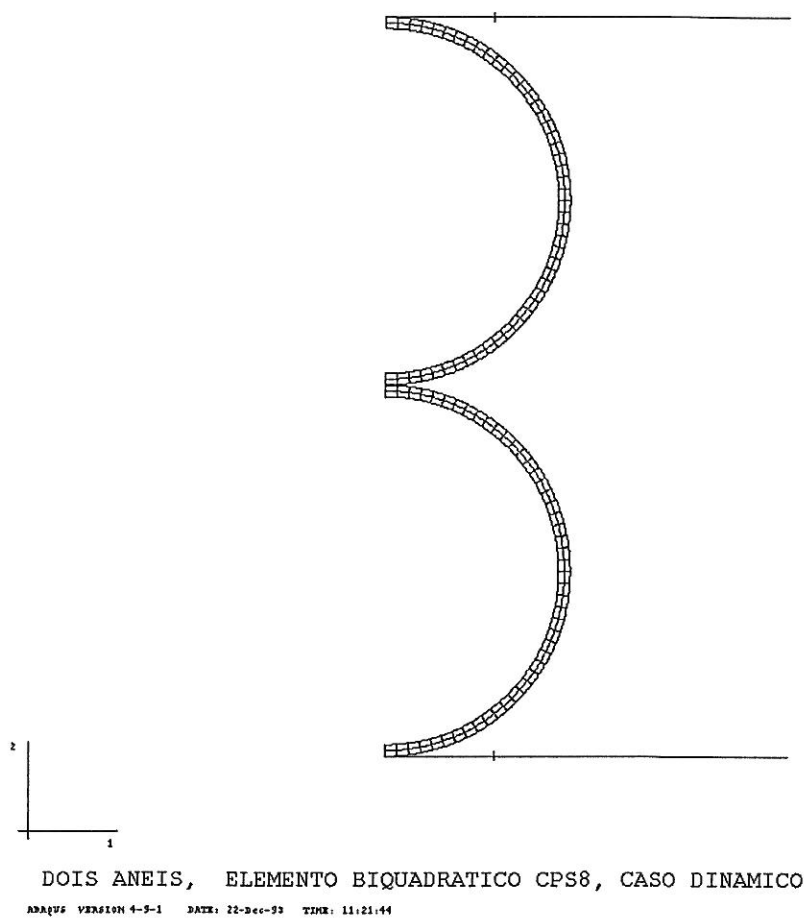


Fig. 3.7.2-1b Modelo utilizado na análise dinâmica.

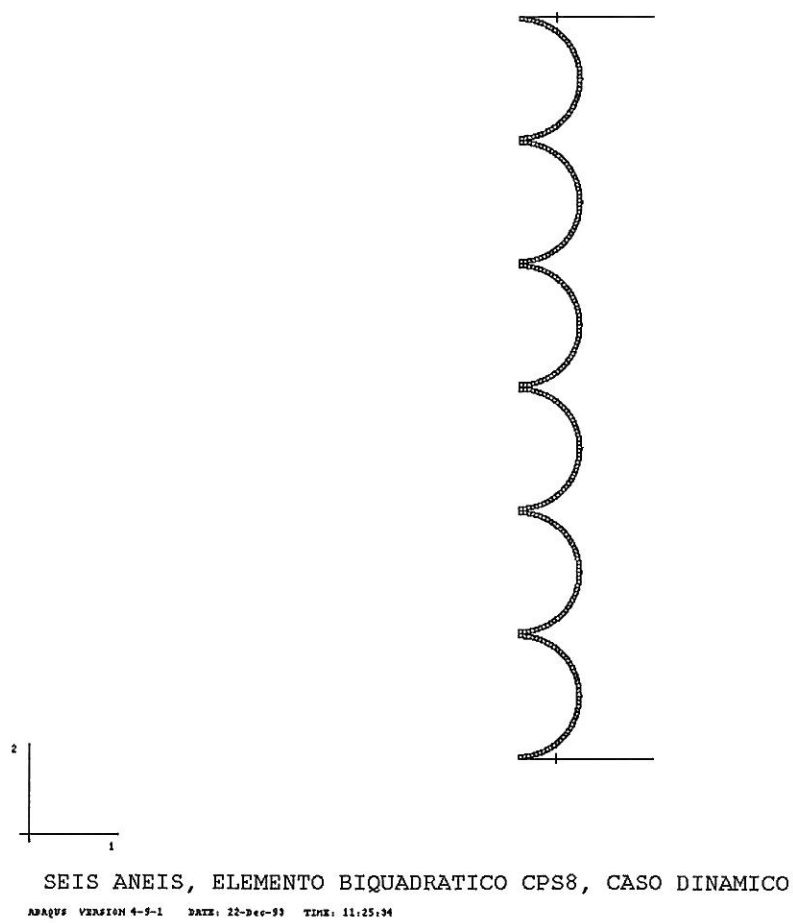


Fig. 3.7.2-1c Modelo utilizado na análise dinâmica.

4. APRESENTAÇÃO E INTERPRETAÇÃO DE RESULTADOS

4.1 Análise estática

Os sistemas sujeitos a uma análise estática foram apresentados na figura (3.7.1-1) no capítulo anterior. Atendendo aos resultados obtidos, o sistema que aqui vamos debater é o apresentado na figura (4.1-1).

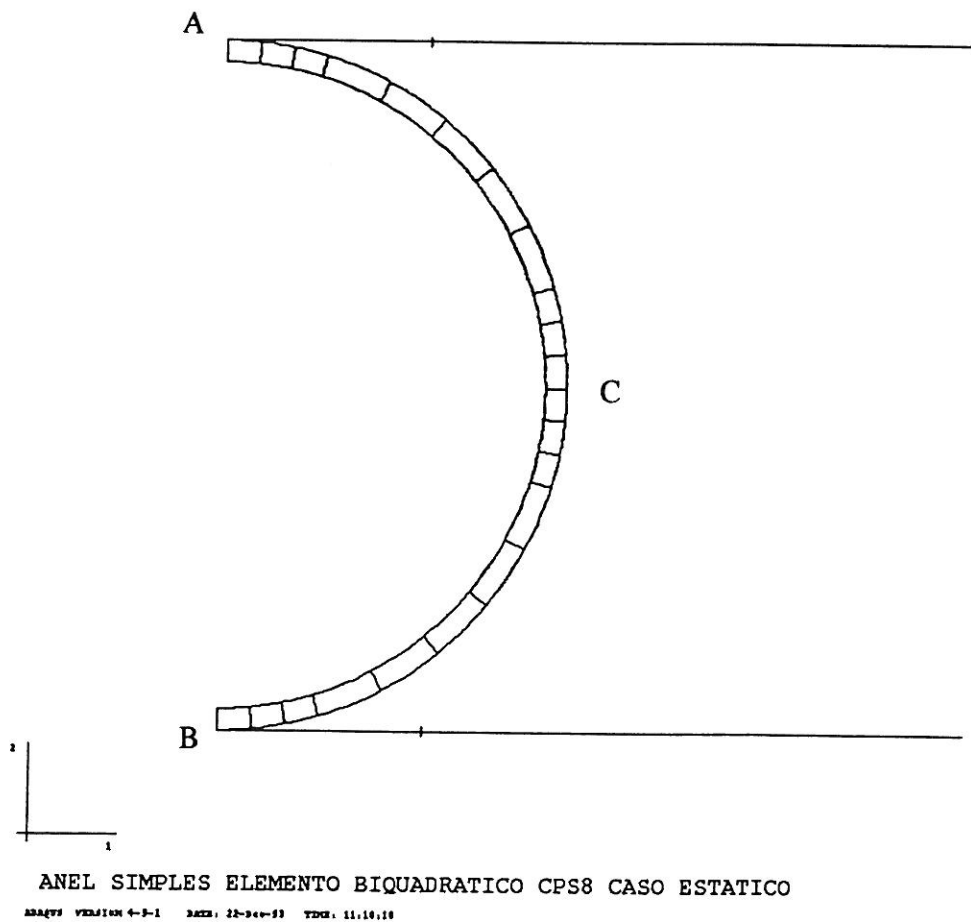


Fig. 4.1-1 Sistema sujeito a um carregamento estático, ensaiado no modelo numérico.

A selecção deste sistema, justifica-se pelo facto de ser o que contém menor número de elementos, e conduzir a uma boa aproximação dos resultados experimentais.

4.1.1 Descrição do processo de deformação do anel

O modo de deformação seguido pelo anel no modelo ensaiado numericamente, é muito semelhante ao sugerido pela solução analítica descrita em [2 e 3].

Imediatamente após o contacto da placa rígida com o anel, começam por se criar duas áreas de plastificação localizada (rótulas plásticas) nos pontos diametralmente opostos, A e B, que coincidem com os pontos de contacto inicial do anel com as placas rígidas.

Prosséguido o carregamento, formam-se mais duas rótulas plásticas nos pontos diametralmente opostos, C e D. Até este instante, o deslocamento vertical relativo das placas rígidas (referido como deflexão do anel), é muito pequeno. À medida que o processo de carregamento prossegue, assiste-se a um crescimento das rótulas situadas em A e B, e ao achatamento dos segmentos circulares do anel localizados em torno destes pontos (os segmentos circulares próximos de A e B rectificam-se sobre os planos rígidos). O comprimento desse segmento rectificado cresce até se atingir a carga de colapso do anel.

Atingida a carga de colapso, a estrutura tubular instabiliza-se perdendo a sua rigidez global. A deformação prossegue, verificando-se um descarregamento das rótulas situadas em A e B, e um crescimento das localizadas em C e D. Este estágio do processo de deformação só é interrompido quando as superfícies interiores do anel entram em contacto, junto aos pontos A e B.

A coalescência das superfícies interiores do anel provoca um aumento de rigidez da estrutura.

A descrição deste processo de deformação é baseada no estudo dos gráficos obtidos ao longo do ensaio numérico realizado sobre o modelo atrás referido. Esses gráficos estão representados no anexo II e correspondem à história de deformação do sistema. De forma a permitir visualizar o aparecimento de zonas plastificadas representa-se também sobre a estrutura deformada o valor local da extensão plástica equivalente acumulada (PEEQ). Esta grandeza é calculada de acordo com a seguinte expressão:

$$PEEQ = \int \sqrt{\frac{2}{3}} d\epsilon^{pl} : d\epsilon^{pl}$$

Em que $d\epsilon^{pl}$ se refere a um incremento da extensão plástica.

4.1.2 Apresentação de resultados

Nesta secção, os resultados conseguidos com o modelo numérico, serão avaliados e confrontados com os obtidos nos ensaios experimentais descritos no capítulo 1. Nesta avaliação, também será utilizada a solução analítica apresentada em [2 e 3].

A curva da carga em função da deflexão revela-se uma forma expedita de representar o comportamento de estruturas tubulares sujeitas a um processo de compressão.

Na figura (4.1.2-1), retirada de [3], confronta-se a curva de carga em função da deformação obtida num ensaio experimental com a obtida através do modelo analítico apresentado em [3]. Nesse modelo a carga é obtida a partir da seguinte expressão:

$$P = \frac{8M_0}{d \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{d}\right)^2}} \left(1 + \frac{E'}{3\sigma_0 \alpha} \arcsin\left(\frac{\delta}{d}\right) \right)$$

em que P representa a carga aplicada sobre o anel através da barra rígida; M_0 é o momento plástico para a secção transversal do anel; δ representa a deflexão do anel; d refere-se ao diâmetro médio do anel; E' é o módulo de encruamento do material; σ_0 é a tensão limite elástica do material; e α é um parâmetro relacionado com a dimensão da rótula plástica.

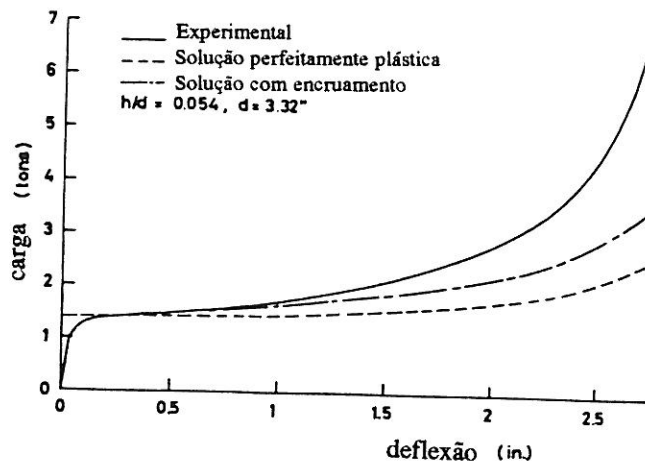


Fig. 4.1.2-1 Comparação entre as curvas de carga em função da deflexão obtidas analiticamente e experimentalmente.

Na figura (4.1.2-2), retirada de [4], representa-se a mesma curva, obtida através do ensaio efectuado sobre um tubo de características semelhantes às do anel ensaiado no modelo numérico.

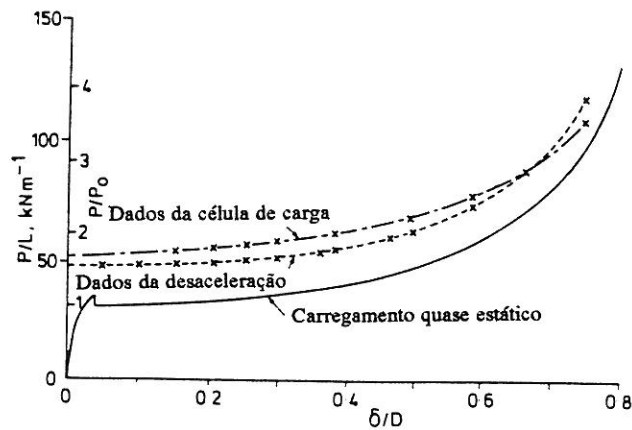


Fig. 4.1.2-2 Curva de carga em função da deflexão do sistema 3 da tabela 1 do capítulo 1.

A curva de carga em função da deflexão obtida através do modelo numérico é representada na figura (4.1.2-3). Confrontando esta figura com os resultados atrás apresentados verifica-se uma boa aproximação.

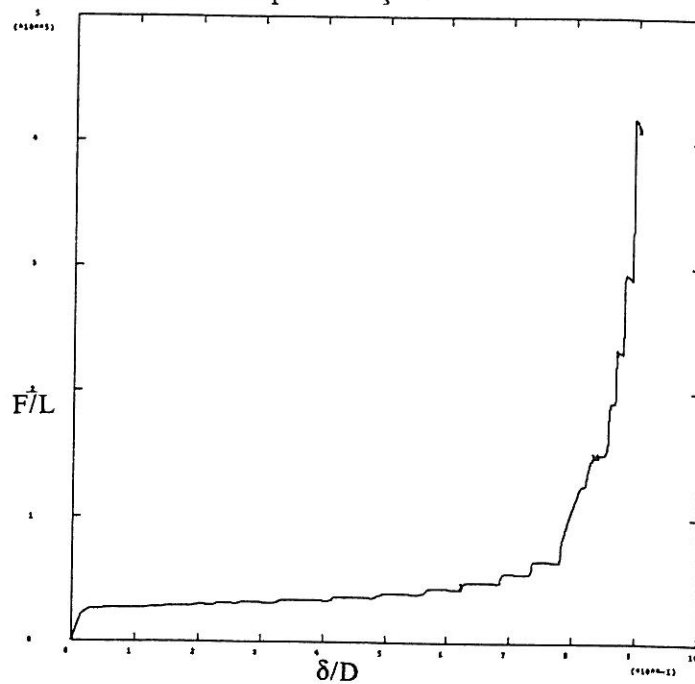


Fig. 4.1.2-3 Curva de carga em função da deflexão obtida no modelo numérico.

4.2 Análise dinâmica

Os principais sistemas sujeitos a uma análise dinâmica foram apresentados na figura (3.7.2-1) no capítulo anterior. Atendendo aos objectivos deste trabalho— estudo dos fenómenos de "wrap-around" e alternância na deformação dos anéis, o sistema que vamos analisar nesta secção é o representado na figura (4.2-1).

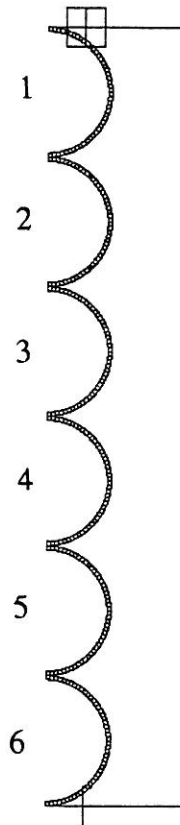


Fig. 4.2-1 Sistema ensaiado dinamicamente no modelo numérico.

4.2.1 Descrição do processo de deformação dos anéis

O modelo numérico em análise representa o ensaio número 30 da tabela 2 do capítulo 3. Em termos energéticos este ensaio é muito semelhante ao referenciado por número 29 na mesma tabela.

A semelhança entre os resultados obtidos na simulação, com os apresentados em [4], justificam a validação do modelo numérico.

A simulação numérica efectuada foi interrompida quando os fenómenos que pretendemos estudar surgiram claramente no modelo deformado. Esta medida tornou-se necessária devido ao elevado espaço de memória requerido pelos ficheiros de resultados.

A seguinte descrição do processo de deformação é baseada no estudo dos gráficos apresentados no anexo III.

Nos instantes iniciais, a deformação concentra-se no primeiro anel. Este componente sofre um achatamento contra o projectil (placa plana rígida), seguido da instabilização do segmento rectificadado. Neste instante o primeiro anel entra em colapso, enrolando-se sobre o segundo ("wrap-around"). Até aqui, a deformação do sistema encontra-se perfeitamente localizada (só é significativa no primeiro anel).

Devido ao enrolamento atrás referido, a parte superior do segundo anel encontra-se reforçada. Este aumento da área de contacto contribui para uma diminuição da pressão nessa zona. Deste modo, compreende-se que a região superior do segundo anel permaneça quase indeformada, enquanto a sua parte inferior se deforma até ficar praticamente plana. Neste momento, o segundo anel apresenta uma configuração estável (rígida). O processo de deformação vai prosseguir no terceiro anel, que de um modo semelhante ao primeiro, se vai enrolar sobre o quarto. Desta forma obtém-se alternância na deformação dos aneis. Este processo é interrompido pela influência da extremidade inferior (alvo plano rígido).

4.2.2 Apresentação de resultados

O mesmo modelo numérico foi utilizado, variando a velocidade de impacto entre 15 e 50 m/s. Em todos os ensaios realizados foi detectado a ocorrência de "wrap-around" e alternância da deformação dos aneis. Desta forma não foi possível associar estes fenómenos a valores discretos de energia de impacto. Também não foi estabelecida uma velocidade de iniciação para a ocorrência destes fenómenos.

Para analisar o processo de deformação destes sistemas obtiveram-se os gráficos de distribuição de tensões, deformações, extensões plásticas acumuladas, pressão no contacto entre aneis, e campo de velocidades.

Os principais resultados obtidos para o sistema em análise encontram-se representados no anexo IV.

4.2.3 Análise qualitativa dos fenômenos envolvidos no processo de deformação

A análise apresentada por S. R. Reid, W. W. Bell e R. A. Barr [6] baseada na propagação de ondas rígido-plásticas através dos anéis, embora conduza a uma boa aproximação para os sistemas com placas, não pareceu adequada para o estudo dos fenômenos de "wrap-around" e alternância. Esta posição justifica-se pelo carácter localizado e periodicidade que ocorrem nestes fenômenos.

Para se excluir a influência da propagação de ondas de tensão nesta análise, mais concretamente, para desprezar a influência da reflexão das ondas elásticas nos extremos do sistema, contribuiu a constatação da existência das rótulas plásticas do primeiro anel antes dessa reflexão ocorrer.

Na explicação proposta o processo de deformação é justificado através da formação de rótulas plásticas em determinados pontos da geometria do anel. Note-se que nesta exposição se admite a oscilação das rótulas em torno destas posições, sem sofrerem movimento significativo ao longo do anel.

A ocorrência de alternância na deformação dos tubos, é justificada através do modo de deformação em "wrap-around". A relação entre estes fenômenos foi exposta na secção 4.2.1.

A posição das rótulas plásticas no anel que se vai enrolar sobre o seguinte é apresentada, no modelo indeformado, na figura (4.2.3-1).

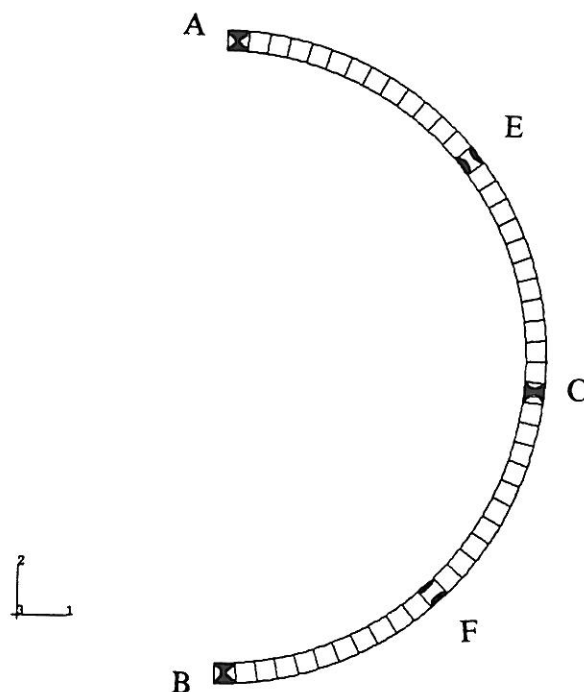


Fig. 4.2.3-1 Posição das rótulas plásticas no anel que sofre deformação em "wrap-around".

Na figura (4.2.3-2) é representada a posição das rótulas plásticas para o anel que sofre o enrolamento do anterior.

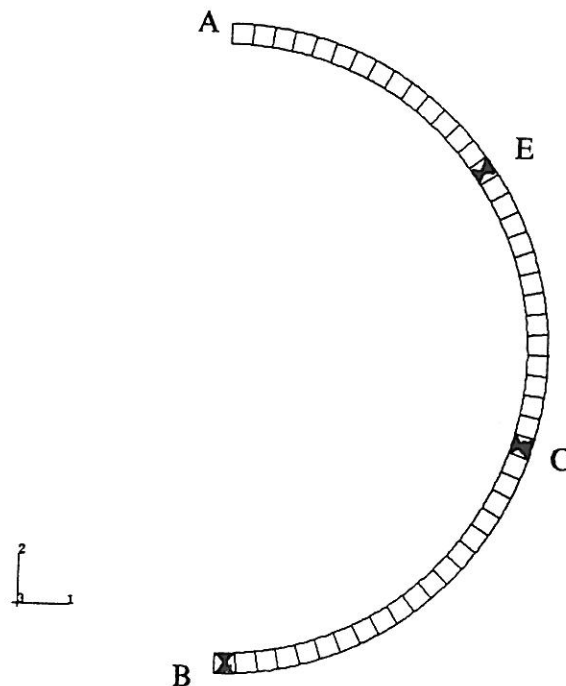


Fig. 4.2.3-2 Posição das rótulas plásticas no anel sujeito ao enrolamento do anterior.

O processo de geração das rótulas apresentadas na figura (4.2.3-1) é semelhante ao que ocorre no caso estático. O modo de deformação em "wrap-around" deste anel, parece estar associado a uma flexibilidade excepcional da sua parte inferior (arco compreendido entre os pontos B e C). Este aumento de flexibilidade está associado a uma plastificação generalizada ao longo da superfície desse troço. Note-se que esta flexibilidade adicional também ocorre no troço AC durante o processo de deformação que precede o enrolamento.

A plastificação superficial responsável pela diminuição da rigidez do anel parece associada à "nucleação inicial" de uma zona de plastificação localizada nos pontos E e F. Esta zona de plastificação exterior sofre um movimento ao longo dos troços AC e CB, generalizando a plastificação a toda a superfície exterior. A coalescência das rótulas plásticas situadas em A e B também contribui para este fenómeno.

R. H. Owens e P. S. Symonds [17], no estudo do processo de deformação de um anel livre sujeito a compressão dinâmica através duma carga concentrada

aplicada em A, justificam o aparecimento de uma rótula plástica junto ao ponto E. No nosso modelo, o movimento da zona de plastificação é justificado pela variação do ponto de aplicação de carga.

No anexo V representa-se o modo de variação da pressão de contacto entre os anéis ao longo do processo de deformação.

O modo de deformação do anel representado na figura (4.2.3-2) é influenciado pela diferente disposição das rótulas plásticas que formam um "mecanismo" distinto.

O enrolamento do anel anterior sobre este impede a geração de uma rótula plástica no ponto A, provovando a sua formação em E. Este facto provoca um descaimento significativo da rótula plástica C.

As forças de contacto a que este anel está sujeito exercem-se essencialmente sobre o arco AE e em torno do ponto B. Desta forma é natural que este mecanismo evolua para a configuração do anel deformado representada na figura (4.2.3-3).

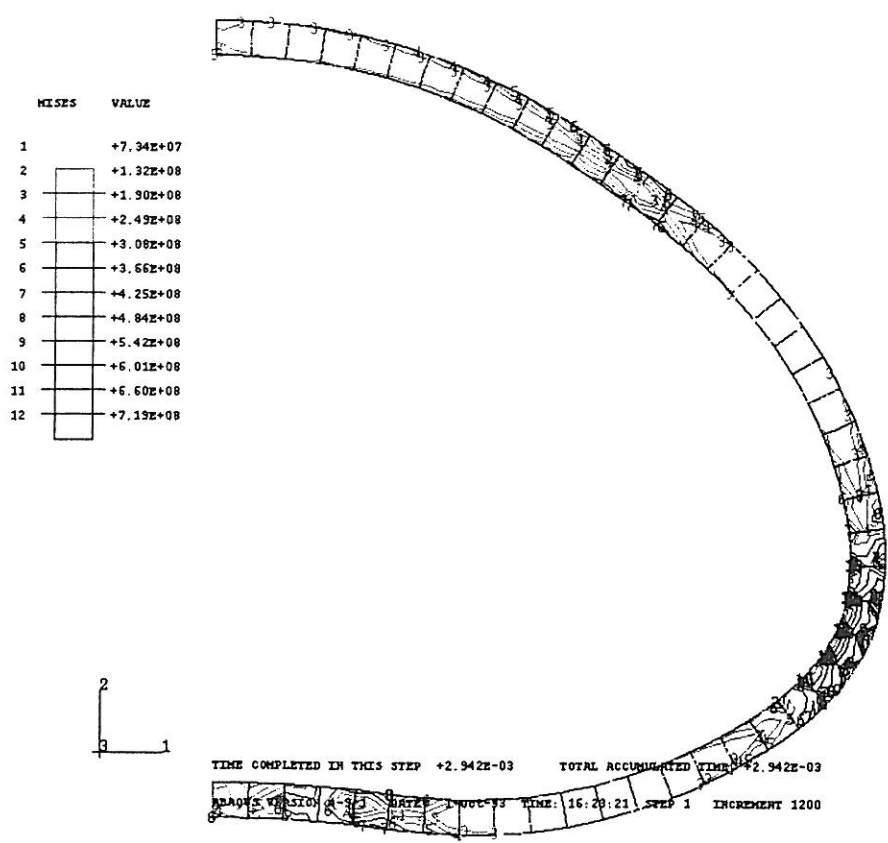


Fig. 4.2.3-3 Configuração deformada do anel número dois do modelo ensaiado

5. CONCLUSÃO

Ao longo dos capítulos anteriores ficou demonstrada a aptidão do modelo desenvolvido para a simulação numérica das experiências realizadas em [4].

Apesar das limitações do modelo numérico, os principais objectivos propostos foram atingidos. O presente trabalho constitui um contributo para o estudo do processo de deformação do dissipador estrutural de energia de impacto, formado por tubos de paredes finas, e sujeito a carregamento radial dinâmico. Utilizando o ensaio numérico fica facilitada a análise do processo de deformação dos tubos.

A explicação avançada para os fenómenos de "wrap-around" e de alternância é baseada na criação de rótulas plásticas que transformam a estrutura periódica num mecanismo.

Sugestões para trabalho futuro:

- Desenvolver o modelo de forma a permitir o ensaio numérico de sistemas de aneis livres;
- Baseado nos trabalhos de R. H. Owens e P. S. Symonds [17] desenvolver um modelo analítico para o processo de deformação, que comporte os fenómenos de "wrap-around" e de alternância.

REFERÊNCIAS

- [1] - Norman Jones - Structural Impact, Cambridge University Press, 1989.
- [2] - John A. DeRuntz, Jr. , P. G. Hodge, Jr. - "Crushing of a tube between rigid plates" - Journal of Applied Mechanics, Setember 1963.
- [3] - R. G. Redwood - "Discussion of crushing of a tube between rigid plates" - Journal of Applied Mechanics, June 1964.
- [4] - S. R. Reid, T. Yella Reddy - "Experimental investigation of inertia effects in one-dimensional metal ring systems subjected to end impact - Fixed-ended systems" - Int. J. Impact Engng Vol. 1, N°1 pp. 85-106, 1983.
- [5] - S. R. Reid, T. Yella Reddy, R. Barr - "Experimental investigation of inertia effects in one-dimensional metal ring systems subjected to end impact - Free-ended systems" - Int. J. Impact Engng Vol. 11, N°4 pp. 463-480, 1991.
- [6] - S. R. Reid, W. W. Bell, R. A. Barr - "Structural plastic shock model for one-dimensional ring systems" - Int. J. Impact Engng Vol. 1, N°2, pp. 175-191, 1983
- [7] - Thomas J. R. Hughes - The finite element method - Linear static and dynamic finite element analysis, Prentice-Hall International, Inc., 1987.
- [8] - Clive L. Dym, Irving H. Shames - Solid mechanics: a variational approach, McGraw Hill Book Co.
- [9] - E. Stein et al. - Finite element and boundary element thechniques from mathematical and engineering point of view, Spring-Verlag, Co, Wien 1988.

- [10] - JasBir S. Arora - Optimum design, McGraw Hill Book Co., 1989.
- [11] - I. S. Sokolnikoff - Tensor analysis, theory and applications to geometry and mechanics of continua, John Wiley & Sons, Inc., 1964.
- [12] - R. W. Ogden - Non-linear elastic deformations, Ellis Horwood Limited.
- [13] - S. Timoshenko, J. N. Goodier - Teoria de la elasticidad, Urmo, S. A. Ediciones, 1968.
- [14] - N. Cristescu - Dynamic plasticity, North-Holland Publishing Company Amsterdam, 1967.
- [15] - ABAQUS, Theory manual, Hibbitt Karlsson & Sorensen, Inc., Version 4.8.
- [16] - ABAQUS, Examples, Hibbitt Karlsson & Sorensen, Inc., Version 4.8.
- [17] - R. H. Owens, P. S. Symonds - "Plastic deformations of a free ring under concentrated dynamic loading" - Journal of Applied Mechanics, December 1955.
- [18] - E. H. Lee, S. J. Tupper - "Analysis of plastic deformation in a steel cylinder striking a rigid target" - Journal of Applied Mechanics, March 1954

ANEXOS

Anexo I - Listagem do programa de computador efectuado

Exemplo estático

```

*HEADING
ANEL SIMPLES ELEMENTO BIQUADRATICO CPS8 CASO ESTATICO
*NODE
101,0.,-23.8E-3
501,0.,-25.4E-3
133,23.8E-3,0.
533,25.4E-3,0.
*NGEN,NSET=XSIM1
101,501,100
*NGEN,NSET=YSIM
133,533,100
*NGEN,LINE=C,NSET=A1
101,133,1,,0.,0.,0.,0.,0.,1.
201,233,1,,0.,0.,0.,0.,0.,1.
301,333,1,,0.,0.,0.,0.,0.,1.
401,433,1,,0.,0.,0.,0.,0.,1.
501,533,1,,0.,0.,0.,0.,0.,1
*ELEMENT,TYPE=CPS8
101,501,503,103,101,502,303,102,301
107,507,511,111,107,509,311,109,307
117,527,529,129,127,528,329,128,327
*ELGEN,ELSET=RING1
101,3,2,1
107,5,4,1
117,3,2,1
*NCOPY,CHANGE NUMBER=33,OLD SET=A1,REFLECT=LINE
50.E-3,0.,0.,0.,0.,0.
*ELCOPY,ELEMENT SHIFT=22,OLD SET=RING1,SHIFT NODES=33,NEW SET=RING2,REFLECT
*ELSET,ELSET=RING
RING1,RING2
*SOLID SECTION,ELSET=RING,MATERIAL=STEEL
12.5E-3
*MATERIAL,NAME=STEEL
*ELASTIC
2.02E11,.3
*PLASTIC
2.73E8,0.
3.2E8,2.113E-2
*NODE,NSET=RSNODE
1000,15.E-3,25.4E-3
2000,15.E-3,-25.4E-3
*RIGID SURFACE,TYPE=SEGMENTS,ELSET=MASSA
START,55.E-3,25.4E-3
LINE,0.,25.4E-3
*RIGID SURFACE,TYPE=SEGMENTS,ELSET=ALVO
START,0.,-25.4E-3
LINE,55.E-3,-25.4E-3
*ELEMENT,TYPE=IRS22,ELSET=MASSA
51,566,565,564,1000
54,560,558,556,1000
59,540,539,538,1000
*ELGEN,ELSET=MASSA
51,3,-2,1
54,5,-4,1
59,3,-2,1
*INTERFACE,ELSET=MASSA
12.5E-3
*FRICTION
0.
*ELEMENT,TYPE=IRS22,ELSET=ALVO

```

```

62,501,502,503,2000
65,507,509,511,2000
70,527,528,529,2000
*ELGEN,ELSET=ALVO
62,3,2,1
65,5,4,1
70,2,2,1
*INTERFACE,ELSET=ALVO
12.5E-3
*FRICTION
0.
*ELEMENT,TYPE=ISL22,ELSET=INT1
72,134,135,136
75,140,142,144
80,160,161,162
*ELGEN,ELSET=INT1
72,3,2,1
75,5,4,1
80,3,2,1
*INTERFACE,ELSET=INT1
12.5E-3
*FRICTION
0.
*SLIDE LINE,TYPE=PARABOLIC,ELSET=INT1,SMOOTH=0.25
101,102,103,104,105,106,107,109,111,113,115,117,119,121,123,125,
127,128,129,130,131,132,133
*MPC
5,133,166
5,333,366
5,533,566
*NSET,NSET=XSIM2
134,234,334,434,534
*NSET,NSET=XSIM
XSIM1,XSIM2
*BOUNDARY
XSIM,XSYMM
2000,ENCASTRE
*PLOT
*DRAW,ELNUM,NODENUM
*RESTART,WRITE,FREQ=25
*STEP,NLGEOM,INC=800,CYCLE=10,SUBMAX
*STATIC,PTOL=6.
0.001,1.0,0.00001,0.01
*BOUNDARY
1000,1
1000,2,,-46.E-3
1000,6
*PRINT,FREQUENCY=10
*PLOT,FREQ=30
*DISPLACED
U, ,1
*CONTOUR
PEEQ
*NODE PRINT,FREQ=200
U
RF
*NODE FILE
U,RF
*EL PRINT,ELSET=RING,FREQ=500
S

```

```
E
SINV
PE
*ENERGY PRINT,FREQ=500
*ENERGY FILE,FREQ=500
*EL PRINT,ELSET=MASSA,FREQ=500
S
E
*EL FILE,ELSET=MASSA,FREQ=300
S
E
*EL PRINT,ELSET=ALVO,FREQ=300
S
E
*EL PRINT,ELSET=INT1,FREQ=300
S
E
*END STEP
```

Exemplo dinâmico

```

*HEADING
ANEL SIMPLES ELEMENTO BIQUADRATICO CPS8 CASO DINAMICO
*NODE
101,0.,-23.8E-3
501,0.,-25.4E-3
197,0.,23.8E-3
597,0.,25.4E-3
*NGEN
101,501,100
*NGEN
197,597,100
*NGEN,LINE=C,NSET=A1
101,197,1,,0.,0.,0.,0.,0.,1.
201,297,1,,0.,0.,0.,0.,0.,1.
301,397,1,,0.,0.,0.,0.,0.,1.
401,497,1,,0.,0.,0.,0.,0.,1.
501,597,1,,0.,0.,0.,0.,0.,1.
*ELEMENT,TYPE=CPS8
1,501,503,103,101,502,303,102,301
*ELGEN,ELSET=RING1
1,48,2,1
*NCOPY,CHANGE NUMBER=1000,OLD SET=A1,SHIFT
0.,-50.8E-3,0.
0.,25.4E-3,0.,0.,25.4E-3,1.,0.000
*NCOPY,CHANGE NUMBER=2000,OLD SET=A1,SHIFT
0.,-101.6E-3,0.
0.,25.4E-3,0.,0.,25.4E-3,1.,0.000
*NCOPY,CHANGE NUMBER=3000,OLD SET=A1,SHIFT
0.,-152.4E-3,0.
0.,25.4E-3,0.,0.,25.4E-3,1.,0.000
*NCOPY,CHANGE NUMBER=4000,OLD SET=A1,SHIFT
0.,-203.2E-3,0.
0.,25.4E-3,0.,0.,25.4E-3,1.,0.000
*NCOPY,CHANGE NUMBER=5000,OLD SET=A1,SHIFT
0.,-254.E-3,0.
0.,25.4E-3,0.,0.,25.4E-3,1.,0.000
*ELCOPY,ELEMENT SHIFT=50,OLD SET=RING1,SHIFT NODES=1000,NEW SET=RING2
*ELCOPY,ELEMENT SHIFT=100,OLD SET=RING1,SHIFT NODES=2000,NEW SET=RING3
*ELCOPY,ELEMENT SHIFT=150,OLD SET=RING1,SHIFT NODES=3000,NEW SET=RING4
*ELCOPY,ELEMENT SHIFT=200,OLD SET=RING1,SHIFT NODES=4000,NEW SET=RING5
*ELCOPY,ELEMENT SHIFT=250,OLD SET=RING1,SHIFT NODES=5000,NEW SET=RING6
*ELSET,ELSET=RING
RING1,RING2,RING3,RING4,RING5,RING6
*NSET,NSET=XSIM
101,301,197,397,597,1101,1301,1197,1397,1597,
2101,2301,2197,2397,2597,3101,3301,3197,3397,3597,
4101,4301,4197,4397,4597,5101,5301,5501,5197,5397,5597
*SOLID SECTION,ELSET=RING,MATERIAL=STEEL
12.5E-3
*MATERIAL,NAME=STEEL
*DENSITY
8410.
*ELASTIC
2.02E11,.3
*PLASTIC
2.73E8,0.
3.2E8,2.113E-2
*NODE,NSET=RSNODE
10,15.E-3,25.4E-3
20,15.E-3,-279.4E-3

```

```

*RIGID SURFACE,TYPE=SEGMENTS,ELSET=MASSA
START,55.E-3,25.4E-3
LINE,0.,25.4E-3
*RIGID SURFACE,TYPE=SEGMENTS,ELSET=ALVO
START,0.,-279.4E-3
LINE,55.E-3,-279.4E-3
*ELEMENT,TYPE=IRS22,ELSET=MASSA
301,597,596,595,10
*ELGEN,ELSET=MASSA
301,24,-2,1
*INTERFACE,ELSET=MASSA
12.5E-3
*FRICTION
0.
*SURFACE CONTACT
5.E-6,2.73E3
*ELEMENT,TYPE=IRS22,ELSET=ALVO
326,5501,5502,5503,20
*ELGEN,ELSET=ALVO
326,24,2,1
*INTERFACE,ELSET=ALVO
12.5E-3
*FRICTION
0.
*SURFACE CONTACT
5.E-6,2.73E3
*ELEMENT,TYPE=ISL22,ELSET=INT1
351,197,196,195
*ELGEN,ELSET=INT1
351,24,-2,1
*INTERFACE,ELSET=INT1
12.5E-3
*FRICTION
0.
*SLIDE LINE,TYPE=PARABOLIC,ELSET=INT1,GENERATE,SMOOTH=0.24
101,149,1
*ELEMENT,TYPE=ISL22,ELSET=INT2
376,1197,1196,1195
*ELGEN,ELSET=INT2
376,24,-2,1
*INTERFACE,ELSET=INT2
12.5E-3
*FRICTION
0.
*SLIDE LINE,TYPE=PARABOLIC,ELSET=INT2,GENERATE,SMOOTH=0.24
1101,1149,1
*ELEMENT,TYPE=ISL22,ELSET=INT3
401,1549,1550,1551
*ELGEN,ELSET=INT3
401,23,2,1
*INTERFACE,ELSET=INT3
12.5E-3
*FRICTION
0.
*SLIDE LINE,TYPE=PARABOLIC,ELSET=INT3,GENERATE,SMOOTH=0.24
549,503,-1
*ELEMENT,TYPE=ISL22,ELSET=INT4
426,2549,2550,2551
*ELGEN,ELSET=INT4
426,23,2,1

```

```

*INTERFACE,ELSET=INT4
12.5E-3
*FRICTION
0.
*SLIDE LINE,TYPE=PARABOLIC,ELSET=INT4,GENERATE,SMOOTH=0.24
1549,1503,-1
*ELEMENT,TYPE=ISL22,ELSET=INT5
451,2197,2196,2195
*ELGEN,ELSET=INT5
451,24,-2,1
*INTERFACE,ELSET=INT5
12.5E-3
*FRICTION
0.
*SLIDE LINE,TYPE=PARABOLIC,ELSET=INT5,GENERATE,SMOOTH=0.24
2101,2149,1
*ELEMENT,TYPE=ISL22,ELSET=INT6
476,3197,3196,3195
*ELGEN,ELSET=INT6
476,24,-2,1
*INTERFACE,ELSET=INT6
12.5E-3
*FRICTION
0.
*SLIDE LINE,TYPE=PARABOLIC,ELSET=INT6,GENERATE,SMOOTH=0.24
3101,3149,1
*ELEMENT,TYPE=ISL22,ELSET=INT7
501,3549,3550,3551
*ELGEN,ELSET=INT7
501,23,2,1
*INTERFACE,ELSET=INT7
12.5E-3
*FRICTION
0.
*SLIDE LINE,TYPE=PARABOLIC,ELSET=INT7,GENERATE,SMOOTH=0.24
2549,2503,-1
*ELEMENT,TYPE=ISL22,ELSET=INT8
526,4549,4550,4551
*ELGEN,ELSET=INT8
526,23,2,1
*INTERFACE,ELSET=INT8
12.5E-3
*FRICTION
0.
*SLIDE LINE,TYPE=PARABOLIC,ELSET=INT8,GENERATE,SMOOTH=0.24
3549,3503,-1
*ELEMENT,TYPE=ISL22,ELSET=INT9
551,4197,4196,4195
*ELGEN,ELSET=INT9
551,24,-2,1
*INTERFACE,ELSET=INT9
12.5E-3
*FRICTION
0.
*SLIDE LINE,TYPE=PARABOLIC,ELSET=INT9,GENERATE,SMOOTH=0.24
4101,4149,1
*ELEMENT,TYPE=ISL22,ELSET=INT10
576,5197,5196,5195
*ELGEN,ELSET=INT10
576,24,-2,1

```

```

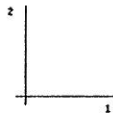
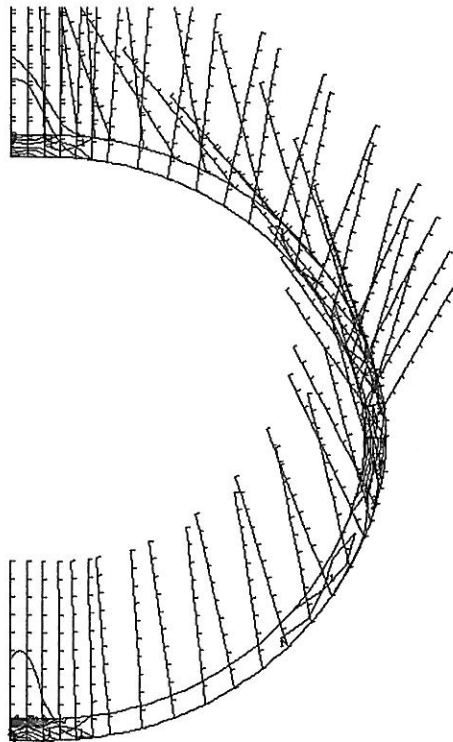
*INTERFACE,ELSET=INT10
12.5E-3
*FRICTION
0.
*SLIDE LINE,TYPE=PARABOLIC,ELSET=INT10,GENERATE,SMOOTH=0.24
5101,5149,1
*ELEMENT,TYPE=ISL22,ELSET=INT11
601,5549,5550,5551
*ELGEN,ELSET=INT11
601,23,2,1
*INTERFACE,ELSET=INT11
12.5E-3
*FRICTION
0.
*SLIDE LINE,TYPE=PARABOLIC,ELSET=INT11,GENERATE,SMOOTH=0.24
4549,4503,-1
*MPC
5,501,1597
5,1501,2597
5,2501,3597
5,3501,4597
5,4501,5597
*NSET,NSET=GRAF
10,20
*ELSET,ELSET=INT
MASSA,ALVO,INT1,INT2,INT3,INT4,INT5,INT6,INT7,INT8,INT9,INT10,INT11
*ELEMENT,TYPE=MASS,ELSET=M1
1000,10
*MASS,ELSET=M1

0.128
*BOUNDARY
XSIM,XYMM
20,ENCASTRE
10,1
10,6
*INITIAL CONDITIONS,TYPE=VELOCITY
10,2,-30.
*PLOT
*DRAW
*RESTART,WRITE,FREQ=300
*STEP,NLGEOM,INC=7000,CYCLE=10,SUBMAX
*DYNAMIC,PTOL=3.,HAFTOL=10000.,ALPHA=-0.105
5.E-7,5.E-2,1.E-12
*CONTROL INTERFACES,MAXCHP=2,UERRMX=1.E-7
*PRINT,FREQUENCY=10
*PLOT,FREQ=500
*DISPLACED
U, ,1
*NODE PRINT,NSET=RSNODE,FREQ=1000
U
*NODE FILE,NSET=GRAF,FREQ=500
U,RF,V
*EL FILE,FREQ=300,ELSET=RING
S
*EL FILE,FREQ=25,ELSET=INT,POSITION=NODES
S
*EL PRINT,ELSET=RING6,FREQ=1000
S
*END STEP

```

Anexo II - Resultados da análise estática

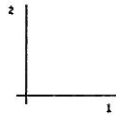
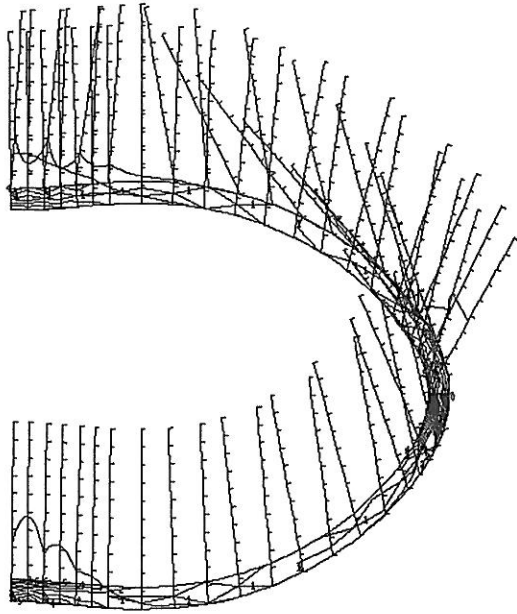
PEXQ	VALUE
1	+5.00E-09
2	+5.00E-09
3	+1.00E-02
4	+1.50E-02
5	+2.00E-02
6	+2.50E-02
7	+3.00E-02
8	+3.50E-02
9	+4.00E-02
10	+4.50E-02
11	+5.00E-02



ANEL SIMPLES ELEMENTO BIQUADRATICO CPS8 CASO ESTATICO

TIME COMPLETED IN THIS STEP +1.292E-01 TOTAL ACCUMULATED TIME +1.292E-01 STEP 1 INCREMENT 30
 ABAQUS VERSION 4-9-1 DATE: 11-Dec-93 TIME: 19:07:27

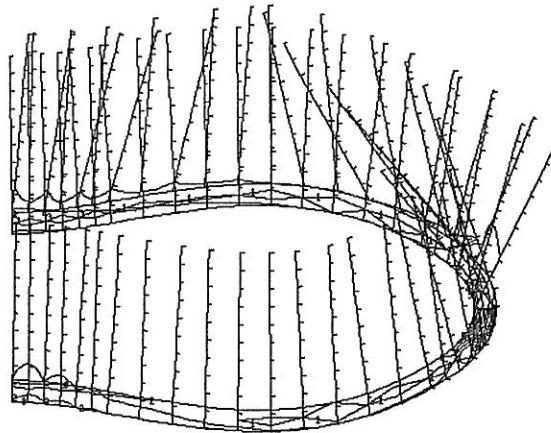
PRQ	VALUE
1	+1.10E-07
2	+1.10E-02
3	+2.20E-02
4	+3.30E-02
5	+4.40E-02
6	+5.50E-02
7	+6.60E-02
8	+7.70E-02
9	+8.80E-02
10	+9.90E-02
11	+1.10E-01



ANEL SIMPLES ELEMENTO BIQUADRATICO CPS8 CASO ESTATICO

TIME COMPLETED IN THIS STEP ++.165E-01 TOTAL ACCUMULATED TIME ++.165E-01 STEP 1 INCREMENT 60
 ABAQUS VERSION 4-3-1 DATE: 11-Dec-93 TIME: 19:07:27

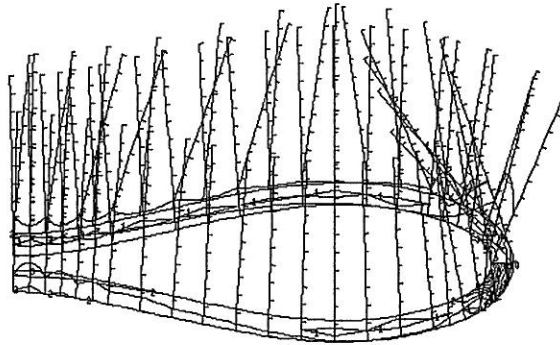
PRQ	VALUE
1	+3.00E-03
2	+3.00E-02
3	+6.00E-02
4	+5.00E-02
5	+1.20E-01
6	+1.50E-01
7	+1.70E-01
8	+2.10E-01
9	+2.40E-01
10	+2.70E-01
11	+3.00E-01



ANEL SIMPLES ELEMENTO BIQUADRATICO CPS8 CASO ESTATICO

TIME COMPLETED IN THIS STEP +7.046E-01 TOTAL ACCUMULATED TIME +7.046E-01 STEP 1 INCREMENT 150
 ABAQUS VERSION 4-3-1 DATE: 11-Dec-93 TIME: 19:07:27

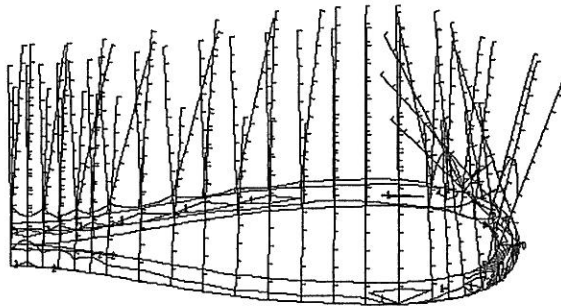
XXXQ	VALUE
1	+4.00E-05
2	+4.00E-02
3	+8.00E-02
4	+1.20E-01
5	+1.60E-01
6	+2.00E-01
7	+2.40E-01
8	+2.80E-01
9	+3.20E-01
10	+3.60E-01
11	+4.00E-01



ANEL SIMPLES ELEMENTO BIQUADRATICO CPS8 CASO ESTATICO

TIME COMPLETED IN THIS STEP +8.450E-01 TOTAL ACCUMULATED TIME +8.450E-01 STEP 1 INCREMENT 210
 ABAQUS VERSION 4-3-1 DATE: 11-Dec-93 TIME: 15:07:27

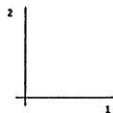
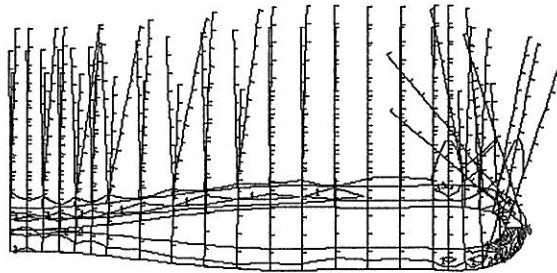
PRQ	VALUE
1	+5.00E-02
2	+5.00E-02
3	+1.00E-01
4	+1.50E-01
5	+2.00E-01
6	+2.50E-01
7	+3.00E-01
8	+3.50E-01
9	+4.00E-01
10	+4.50E-01
11	+5.00E-01



ANEL SIMPLES ELEMENTO BIQUADRATICO CPS8 CASO ESTATICO

TIME COMPLETED IN THIS STEP +9.115E-01 TOTAL ACCUMULATED TIME +9.115E-01 STEP 1 INCORPORATED 240
 ABAQUS VERSION 4-9-1 DATE: 11-Dec-93 TIME: 19:07:27

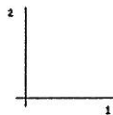
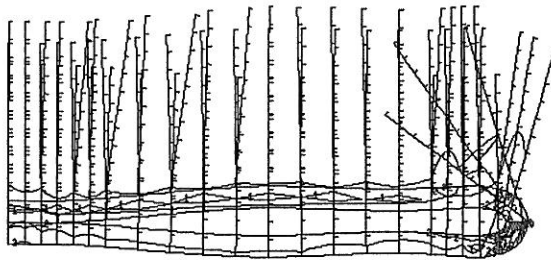
PRG	VALUE
1	+6.00E-03
2	+6.00E-02
3	+1.20E-01
4	+1.70E-01
5	+2.40E-01
6	+3.00E-01
7	+3.60E-01
8	+4.20E-01
9	+4.80E-01
10	+5.40E-01
11	+6.00E-01



ANEL SIMPLS ELEMENTO BIQUADRATICO CPS8 CASO ESTATICO

TIME COMPLETED IN THIS STEP +9.662E-01 TOTAL ACCUMULATED TIME +9.662E-01 STEP 1 INCORPORATED 500
 ABAQUS VERSION 4-9-1 DATE: 11-Dec-93 TIME: 19:07:27

PERI	VALUE
1	+7.00E-08
2	+7.00E-02
3	+1.40E-01
4	+2.10E-01
5	+2.20E-01
6	+3.50E-01
7	+4.20E-01
8	+4.50E-01
9	+5.60E-01
10	+6.30E-01
11	+7.00E-01



ANEL SIMPLES ELEMENTO BIQUADRATICO CPS8 CASO ESTATICO

TIME COMPLETED IN THIS STEP +9.301E-01 TOTAL ACCUMULATED TIME +9.301E-01

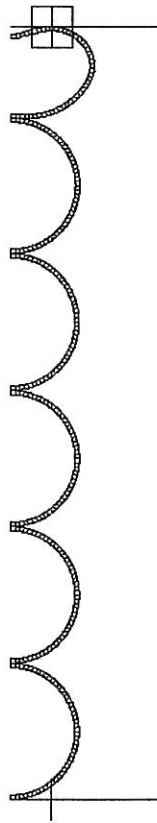
STEP 1 INCREMENT 690

ARGUS VERSION 4-3-1 DATE: 11-Dec-93 TIME: 13:07:27

Anexo III - Sequência da deformação do modelo dinâmico

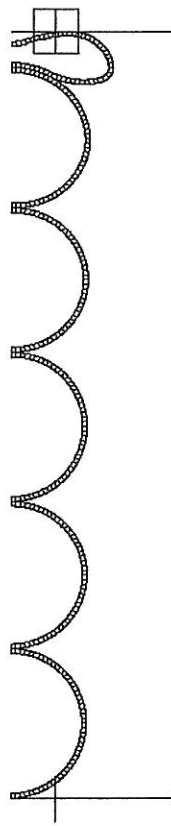


MAG. FACTOR =+1.0E+00



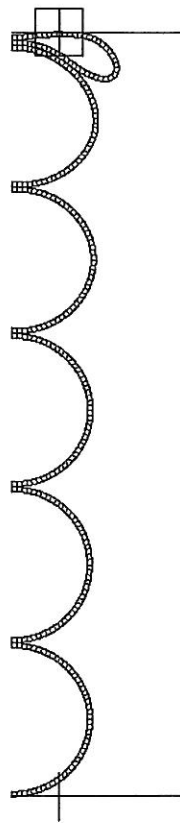


MAX. FACTOR =+1.0E+00



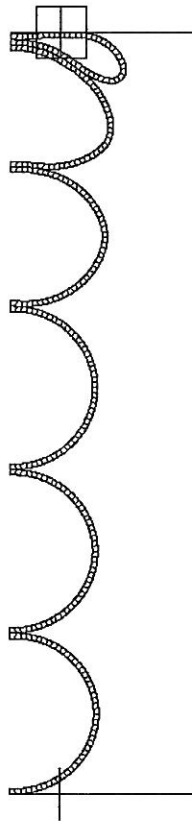


MAG. FACTOR =+1.0E+00



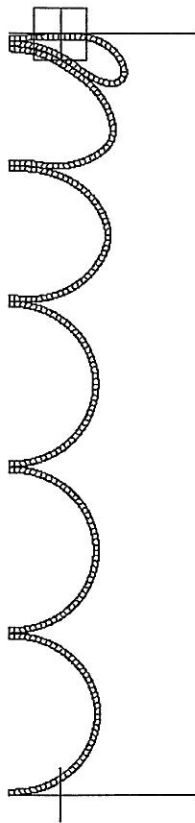


MAG. FACTOR =+1.0E+00



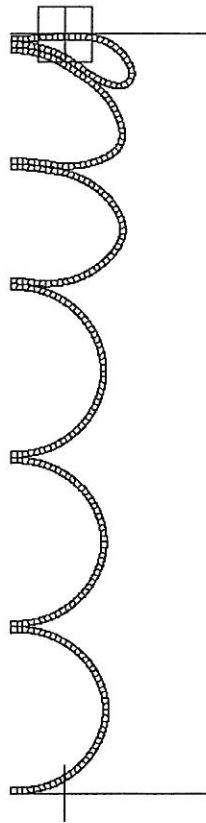


MAG. FACTOR =+1.0E+00



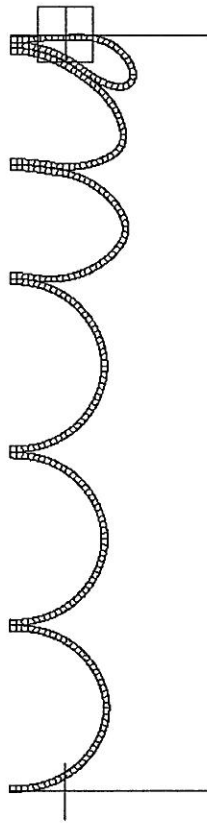


MAG. FACTOR =+1.0E+00



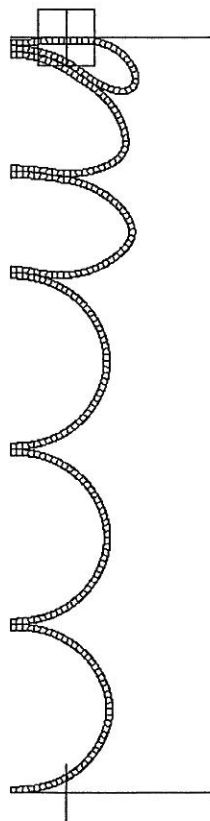


MAG. FACTOR =+1.0E+00



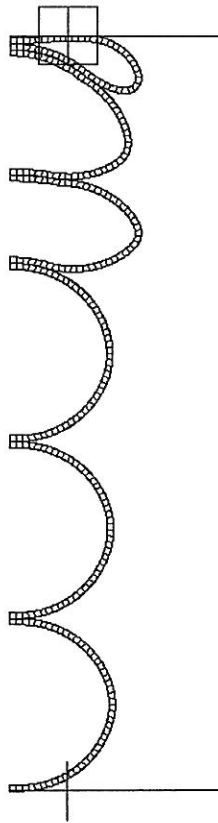


MAC. FACTOR =+1.0E+00



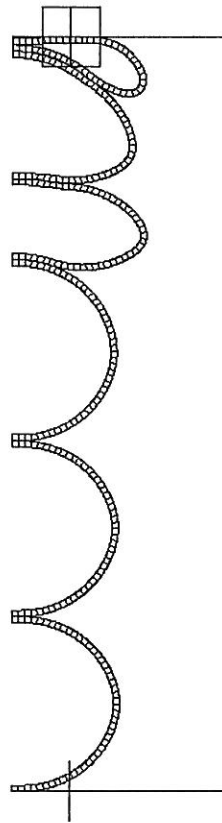


MAG. FACTOR =+1.0E+00



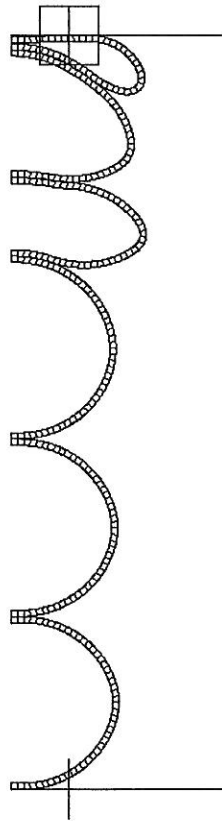


MAG. FACTOR =+1.0E+00



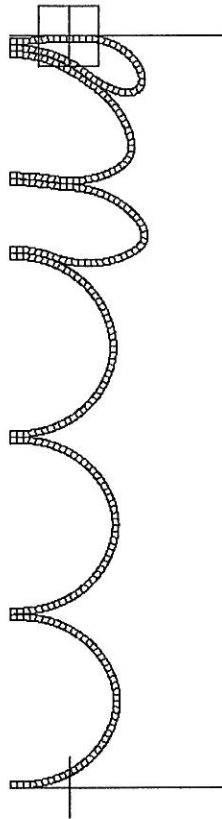


MAG. FACTOR =+1.0E+00



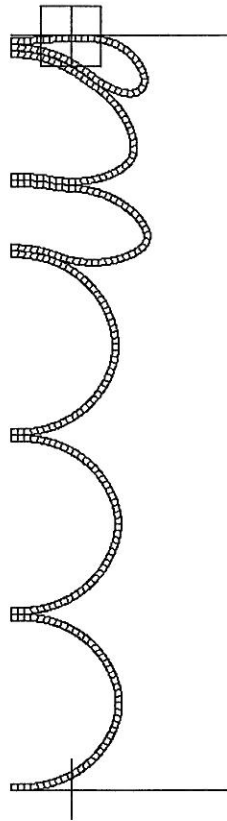


MAG. FACTOR =+1.0E+00



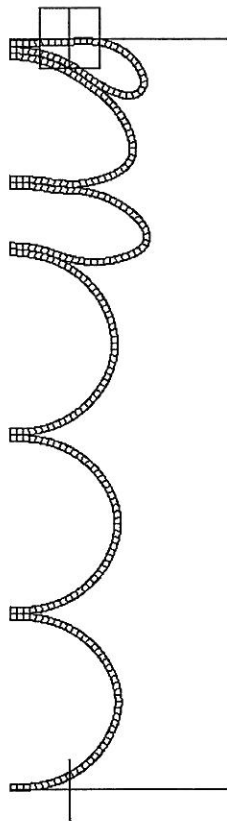


MAG. FACTOR =+1. 0E+00



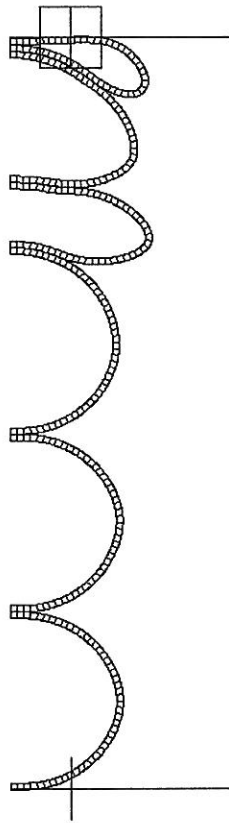


MAG. FACTOR =+1.0E+00



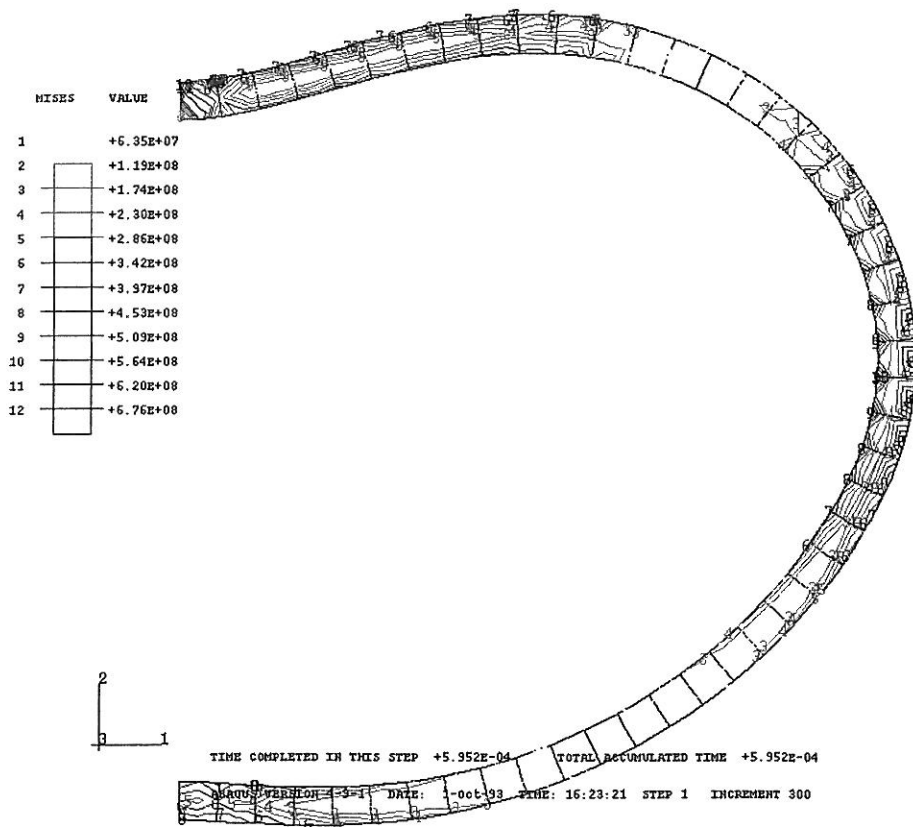


MAG. FACTOR =+1.0E+00

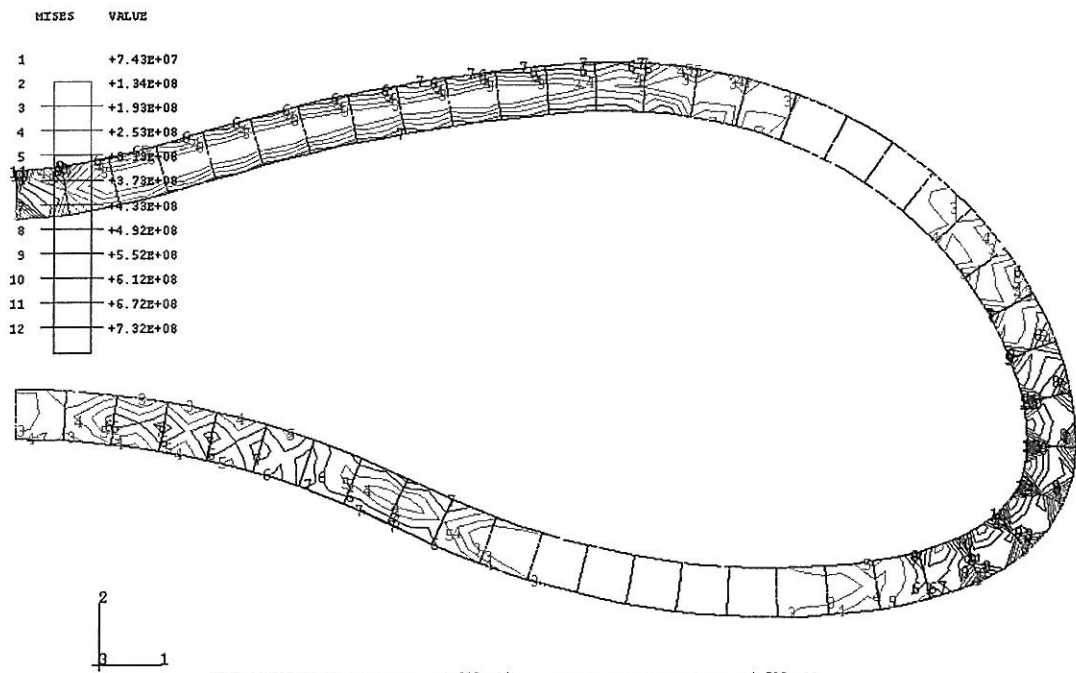


Anexo IV - Distribuição de tensões equivalentes para cada anel do modelo dinâmico

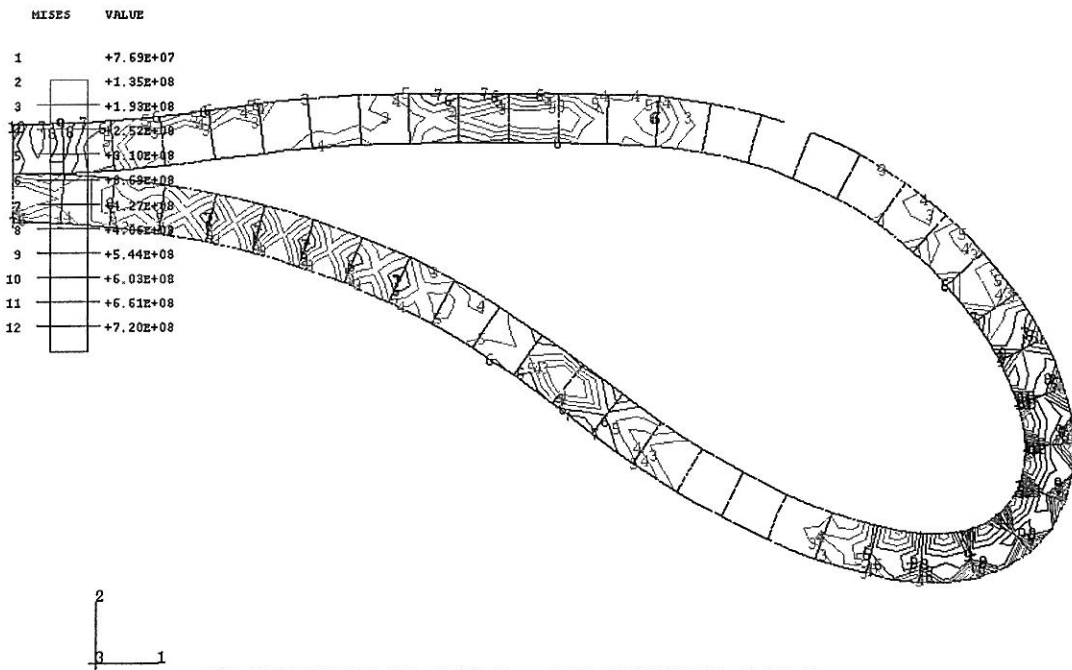
Anel n°1



Anel n°1



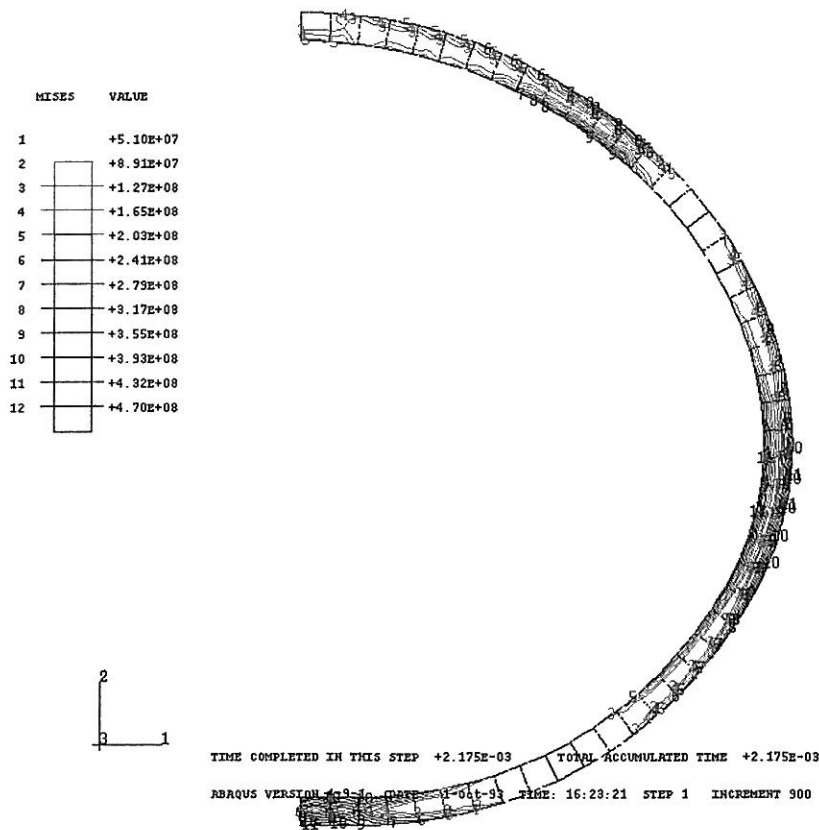
Anel n°1



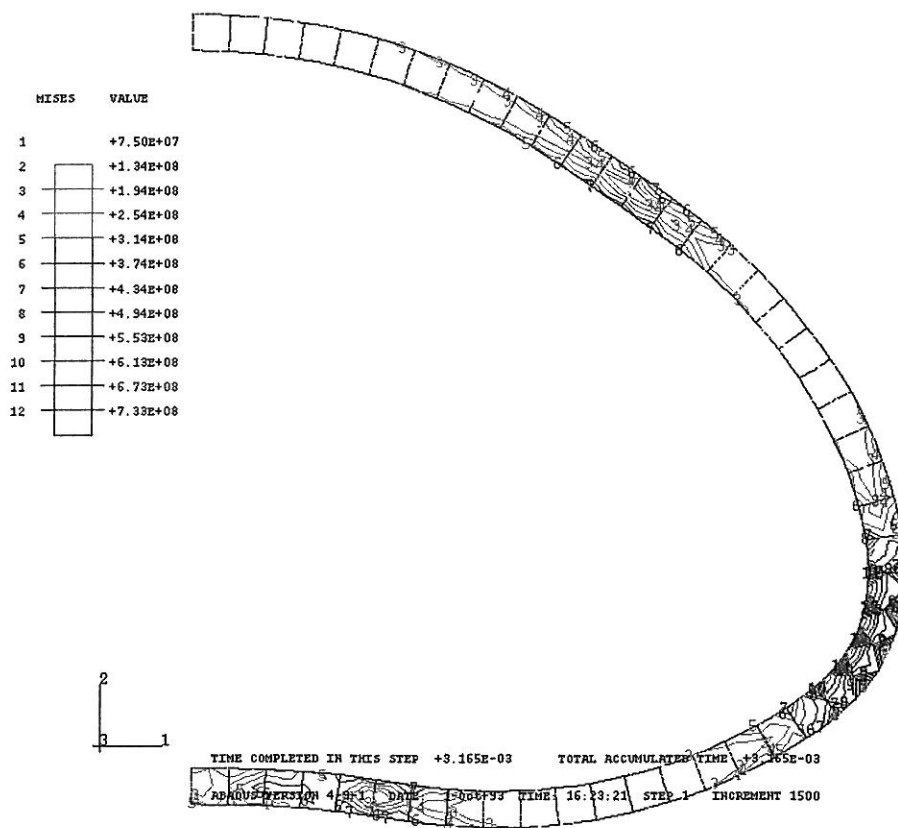
TIME COMPLETED IN THIS STEP +2.175E-03 TOTAL ACCUMULATED TIME +2.175E-03

ABAQUS VERSION 4-9-1 DATE: 1-oct-93 TIME: 16:23:21 STEP 1 INCREMENT 900

Anel n°2

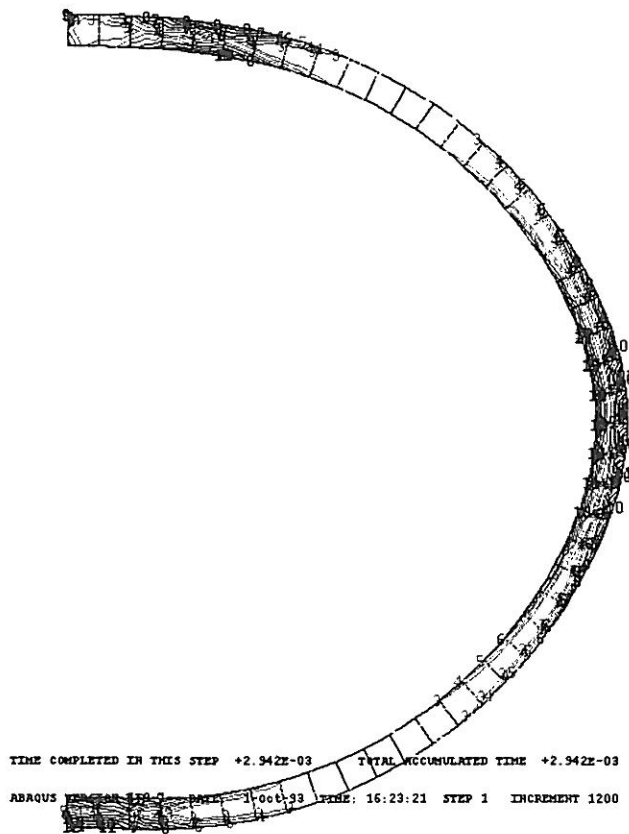


Anel n°2

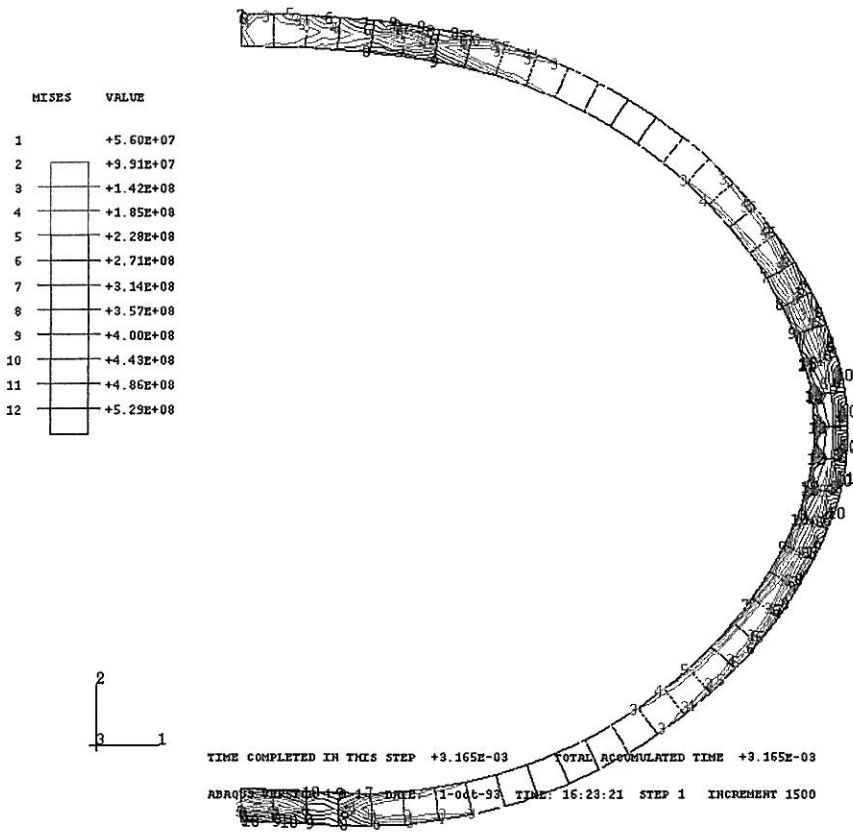


Anel n°3

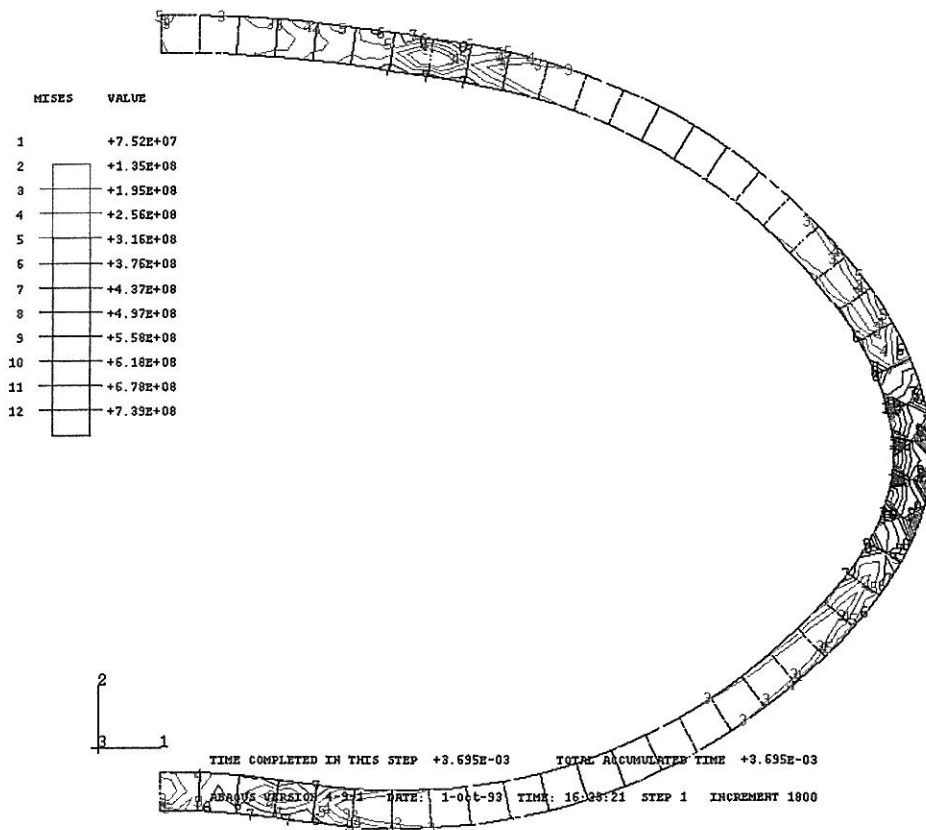
MISES	VALUE
1	+5.19E+07
2	+9.09E+07
3	+1.23E+08
4	+1.58E+08
5	+2.07E+08
6	+2.46E+08
7	+2.85E+08
8	+3.24E+08
9	+3.63E+08
10	+4.02E+08
11	+4.41E+08
12	+4.80E+08



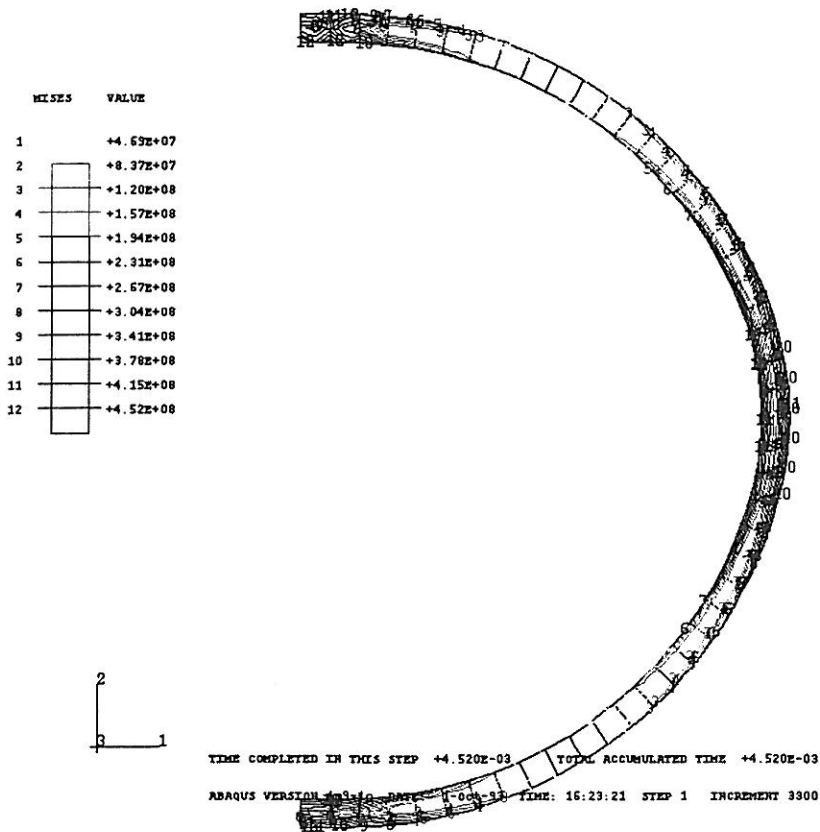
Anel n°3



Anel n°3



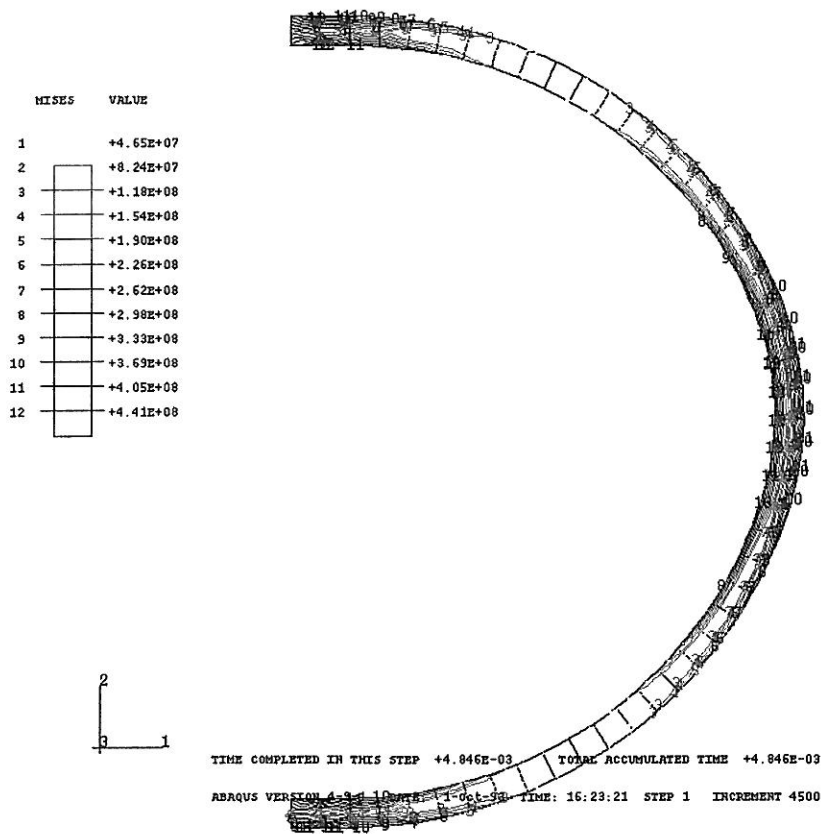
Anel n^o5



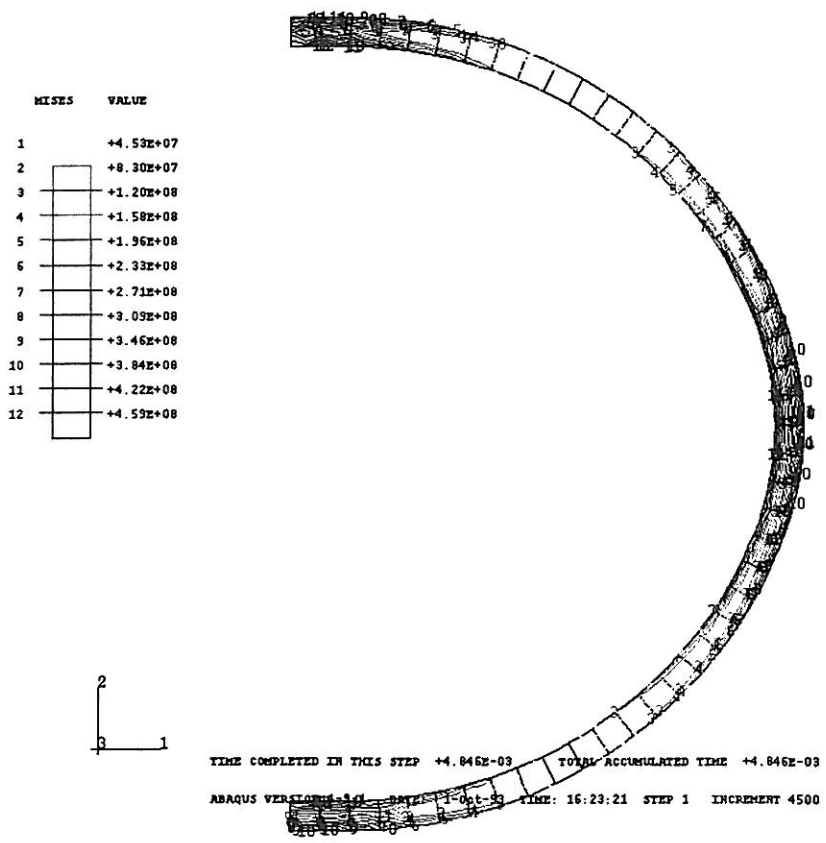
MISES	VALUE
1	+4.63E+07
2	+8.37E+07
3	+1.20E+08
4	+1.57E+08
5	+1.94E+08
6	+2.31E+08
7	+2.67E+08
8	+3.04E+08
9	+3.41E+08
10	+3.78E+08
11	+4.15E+08
12	+4.52E+08



Anel n°5

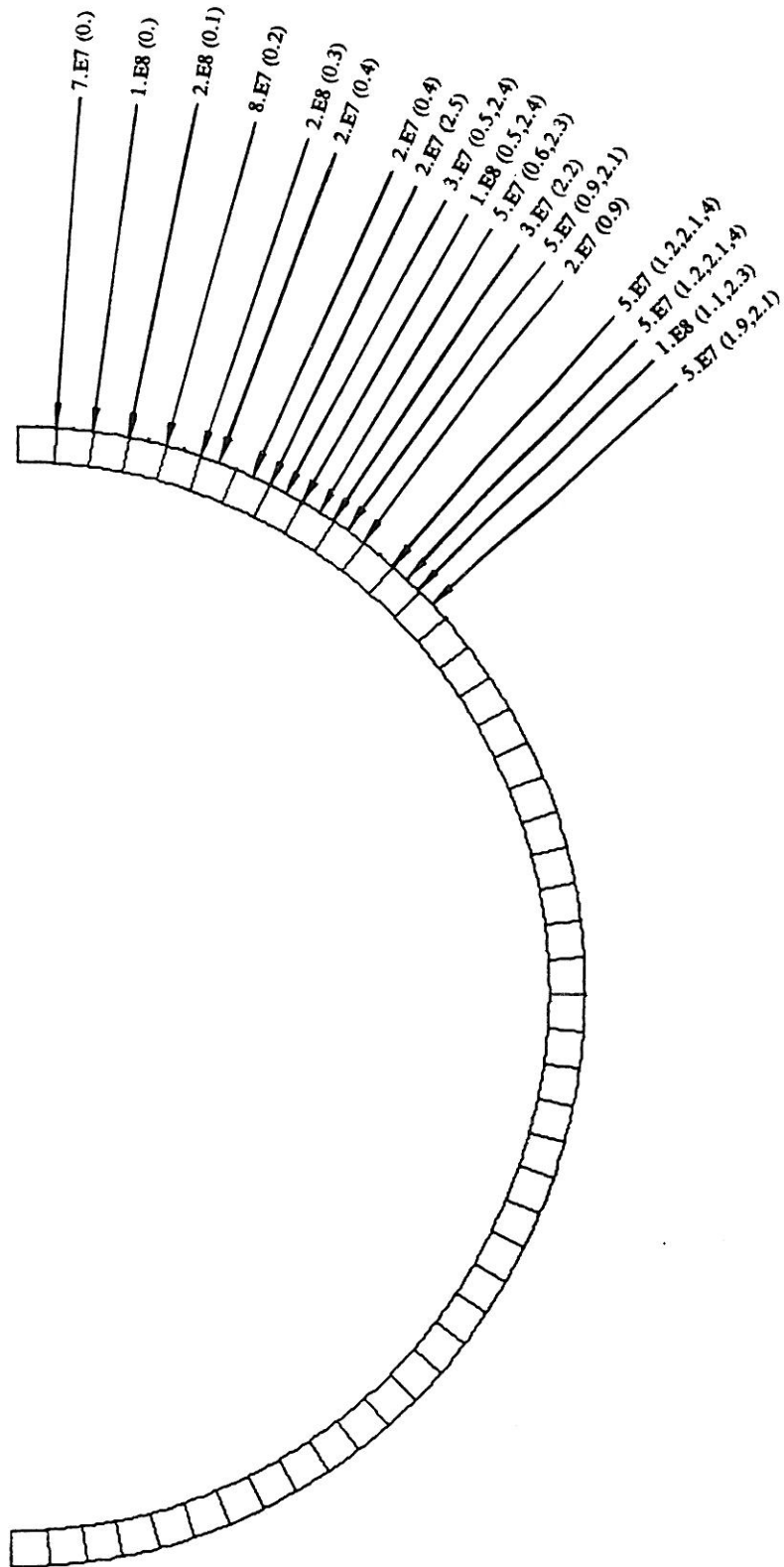
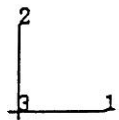


Anel n°6



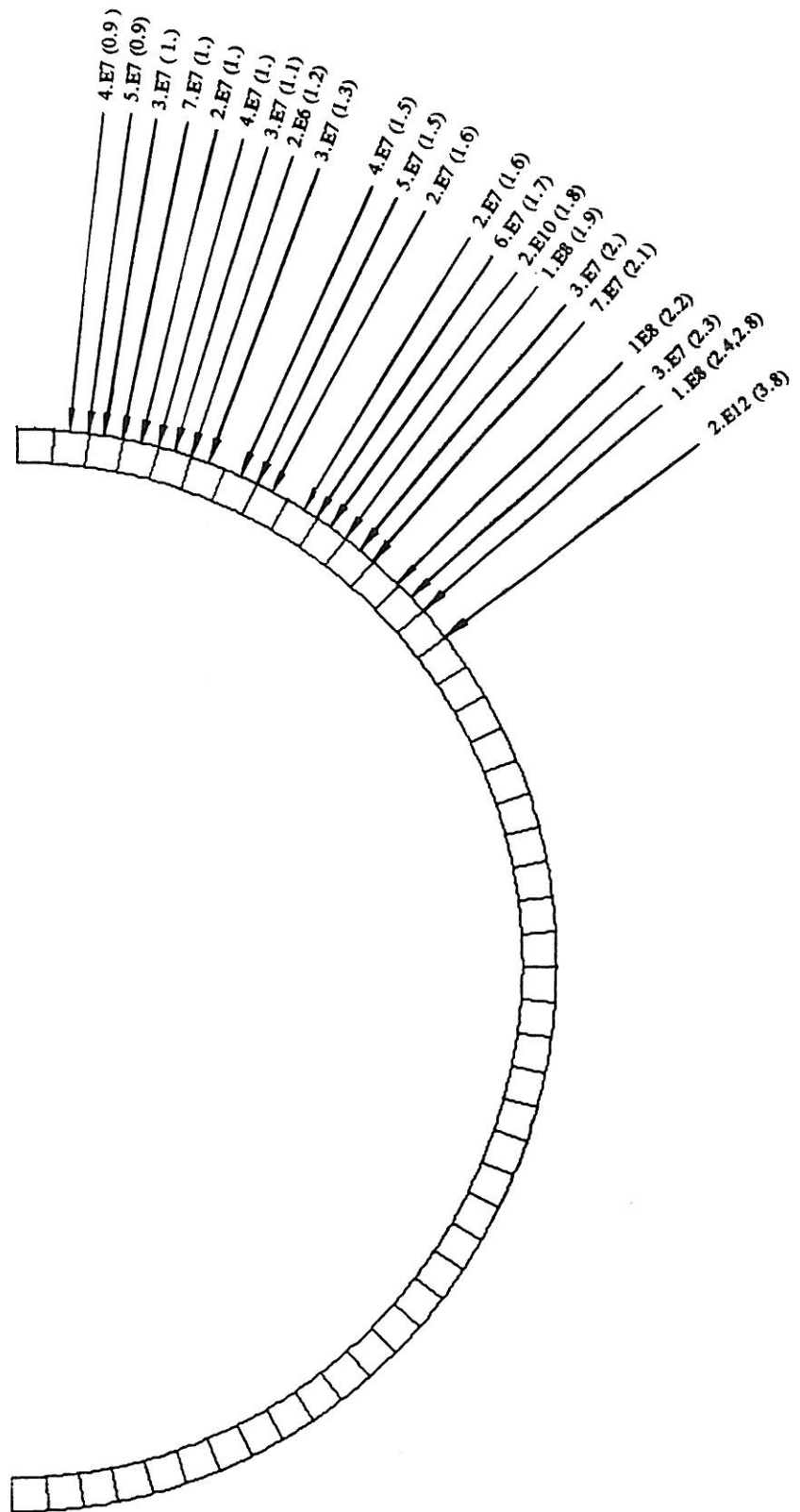
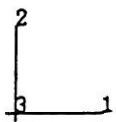
Anexo V - Variação da pressão de contacto entre aneis.

Anel Nº 1



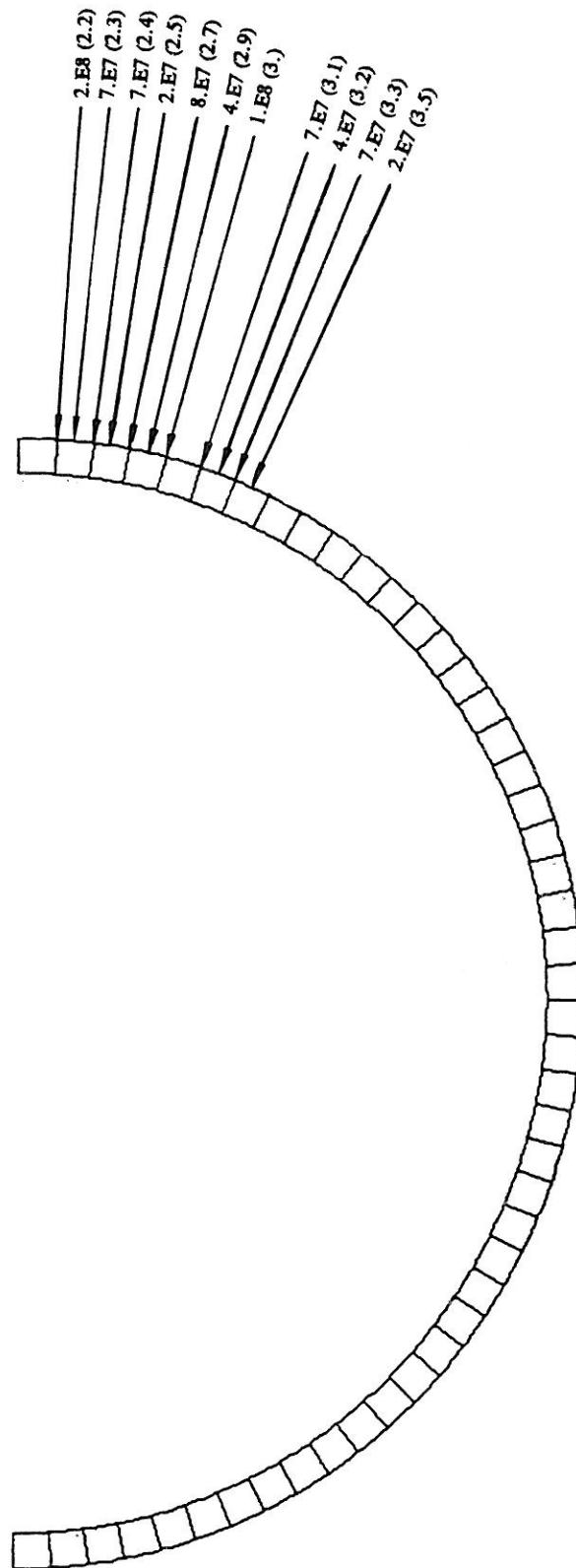
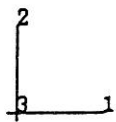
Ordem de grandeza da pressão (instante de tempo em que ela ocorre).
Pressão em Pascal e tempo em milisegundos.

Anel N° 2



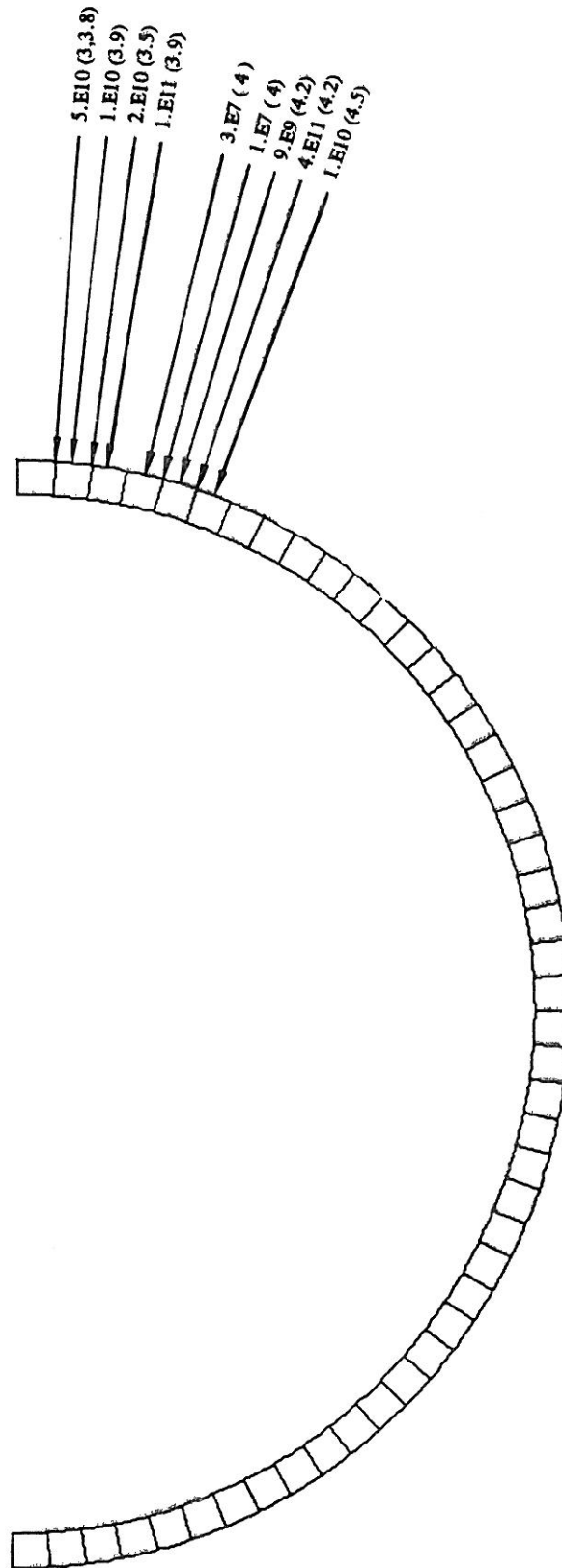
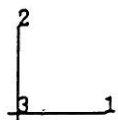
Ordem de grandeza da pressão (instante de tempo em que ela ocorre).
 Pressão em Pascal e tempo em milisegundos.

Anel N° 3



Ordem de grandeza da pressão (instante de tempo em que ela ocorre).
Pressão em Pascal e tempo em milisegundos.

Anel N° 4



Ordem de grandeza da pressão (instante de tempo em que ela ocorre).
Pressão em Pascal e tempo em milisegundos.

