A história da matemática na abordagem de Grandezas e Medidas

Fátima Regina Jorge
frjorge@mail.ese.ipcb.pt,
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Castelo Branco
Isabel Cabrita
icabrita@dte.ua.pt
Departamento de Didáctica e Tecnologia Educativa, Universidade de Aveiro
Fátima Paixão
fatimapaixao@mail.ese.ipcb.pt
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Castelo Branco,

Introdução

O reconhecimento da importância da utilização didáctica da história da ciência/matemática é corroborado pelo número crescente de investigações sobre o tema e pela inclusão, em documentos curriculares, de sugestões explícitas sobre a integração de uma perspectiva histórica no ensino e aprendizagem da Matemática. Porém, esta orientação curricular é ignorada, de uma forma geral, na prática pedagógica. De entre as principais razões, e para além da escassez de materiais didácticos adequados, destaca-se a falta de conhecimentos históricos dos professores e, consequentemente, aponta-se a necessidade de formação dos professores neste domínio. Essa formação deve perseguir três grandes objectivos complementares (1) conhecer e apreciar o passado da matemática (função informativa); (2) aprofundar a própria compreensão da forma como se constrói o conhecimento matemático (função epistemológica); (3) incorporar, reflectida e adequadamente, material histórico no seu ensino (função didáctica) (Schubring, Cousquer e al., 2000).

A investigação recente aponta, também, para a necessidade de criação, organização e validação de bons materiais de ensino (id.).

A história da matemática na abordagem de Grandezas e Medidas

Documentos curriculares oficiais portugueses para o ensino básico apontam que o desenvolvimento da competência matemática do aluno assume uma importância particular no âmbito dos conteúdos relacionados com Grandezas e Medidas. Pelo facto da medição ter as suas raízes históricas em inúmeras questões e problemas do quotidiano que, por sua vez, estiveram na origem de importantes desenvolvimentos conceptuais e tecnológicos, este tema permite relacionar naturalmente vários temas do currículo de matemática e apresenta inúmeras potencialidades no desenvolvimento de competências de resolução e formulação de problemas (Abrantes, Serrazina, Oliveira, 1999).

Sendo explicitamente reconhecido o estímulo positivo que pode despertar no aluno o conhecimento e a compreensão de questões relacionadas com a história das unidades de medida (ME, 2001; Abrantes et al, 1999; ME, 1991), a formação, nesse âmbito, deve proporcionar ao professor, nomeadamente, a oportunidade de reflectir sobre como evoluíram determinados conceitos e processos centrais da medição, sobre algumas dificuldades de aprendizagem e erros frequentes dos alunos e permitir compreender aspectos da metodologia da construção do conhecimento matemático e de relações deste com o quotidiano (Tzanakis e al, 2000).

Os problemas históricos podem desempenhar um papel fundamental em todo este processo. Constituindo-se como fontes primárias do conhecimento matemático, além de reflectirem, em muitos casos, aspectos da vida quotidiana e das necessidades imediatas das sociedades, permitem-nos, como afirma Swetz, tocar o passado, mas também esclarecer o presente (Swetz, 1995).

Grandezas e medidas em problemas históricos

Os livros de Aritmética publicados em Portugal entre 1519 e 1679[1], mais concretamente as obras *Tratado da Prática d'Arismética* de Gaspar Nicolas (alvo de 11 edições entre 1519 e 1679), *Arte de Arismética* de Bento Fernandes (editada em 1555) e *Flor da Arismética Necessária* de Afonso Guiral e Pacheco (editada em 1624), são muito ricos em problemas envolvendo antigas unidades de medida.

Em particular, surgem inúmeros exemplos de problemas correntes na época envolvendo unidades de medida usadas para medir grandezas como o comprimento, a massa ou o volume (de sólidos e líquidos). Pode afirmar-se que muitos desses problemas procuram esclarecer as dificuldades decorrentes do uso de uma grande diversidade de unidades para medir a mesma grandeza, da existência de um grande número de divisores para certas unidades e da diversidade de divisores de unidade para unidade.

[1] Todas estas obras, a exemplo de outros textos de aritmética da época, reflectem a realidade social, económica e mental do seu tempo e, muito particularmente, a experiência da vida dos negócios e as necessidades dos mercadores. Crê-se, aliás, que os destinatários principais destes textos eram aprendizes ou mesmo homens de negócios (Marques de Almeida, 1994b).

De forma a fazer o enquadramento no que respeita aos "pesos e medidas" da época, seleccionaram-se[2] alguns problemas concretos que visam tornar familiares alguns aspectos das antigas unidades de medida. As restantes tarefas propostas incluem um conjunto de problemas a partir dos quais se pretende discutir os conceitos e processos da medição envolvidos, as potencialidades da sua exploração didáctica, nomeadamente no que respeita ao estabelecimento de conexões com outros tópicos curriculares e ao desenvolvimento da competência de resolução de problemas.

Tarefa 1

Nas situações seguintes, Guiral e Pacheco, após indicar as relações entre as unidades mais usadas para medir o pão, o vinho, o azeite, as especiarias, a carne, o pescado, a seda, o linho, ... mostra, detalhadamente, o modo de operar com elas: *Tendo ensinado por taboada as medidas deste Reyno, hé rezão mostrar pello meúdo o modo de proceder com ellas, que, entendidos os valores, ficará mais fácil tratá-las com affavilidade* (Marques de Almeida, 1994b, p. 209).

Leia atentamente os enunciados dos problemas apresentados e procure identificar todas as unidades referidas e estabelecer as relações entre elas. Em cada caso indique a grandeza a que essas unidades dizem respeito.

1.1 Nos pesos e medidas de Portugal, é necessário somar dois quintais, três arrobas, vinte arráteis e dez onças com um quintal, duas arrobas, quinze arráteis e sete onças. Pergunto: qual é a soma?(...)
Solução: A soma das duas parcelas é igual a quatro quintais, duas arrobas, quatro arráteis e uma onça, tal como representado na figura.

2,	3,	20,	10
1,	2,	15,	7
4,	2,	4,	1

(Adaptado de Guiral e Pacheco, transcrito em M. Almèida, 1994b, p. 209)

1.2 Proponho que nos pesos de Valença[3] se calcule a soma de três arrobas, quatro arráteis e seis onças de coisas de valor, com uma arroba, vinte e oito arrátes e catorze onças.(...)

3.	4.	6.
1.	28.	14.
5.	3	8

[2] No caso das duas últimas obras referidas baseámo-nos nas transcrições de Marques de Almeida (1998b). Relativamente à obra de Gaspar Nicolas, os problemas propostos foram adaptados a partir dos enunciados originais da edição fac-similada da Livraria Civilização (1963, fol 80 a 94v). Em todas as adaptações efectuadas teve-se a preocupação de manter tanto quanto possível o sentido do enunciando original. Para cada problema proposto é apresentado também o texto original ou a transcrição de Marques de Almeida.

[3] Actual Valência, em Espanha, e pertencente à época ao Reino de Aragão.

Solução: E, assim, se responderá que a soma é igual a cinco arrobas, três arráteis, oito onças, tal como representado na figura.

(Adaptado de Guiral e Pacheco, transcrito em Marques de Almeida, 1994b, p. 211)

Algumas notas e observações sobre a tarefa 1:

Qualquer uma das situações apresentadas envolve a necessidade de estabelecer quantas unidades de cada tipo são necessárias para perfazer uma nova unidade de ordem superior. Sendo muito semelhantes em termos de enunciado e processo de resolução, tem como finalidades dar a conhecer algumas das antigas unidades usadas para medir a grandeza massa e dar a perceber a diversidade de divisores usados de unidade para unidade, a diversidade de divisores que uma mesma unidade possuía e as dificuldades daí decorrentes, sobretudo se atendermos à coexistência de unidades com o mesmo nome, mas com diferentes relações entre si.

Na resolução da 1ª situação pode-se concluir que sendo a soma de 10 *onças* com 7 *onças* igual a 1 *onça*, isso significa que 16 *onças* perfazem uma nova unidade, o *arrátel*. De modo similar, se conclui que 32 *arráteis* são equivalentes a 1 *arroba* e 4 *arrobas* perfazem 1 *quintal*. Porém, em Valença, a relação entre as mesmas unidades altera-se: 12 *onças* = 1 *arrátel* e 30 *arráteis* = 1 *arroba*.

Tarefa 2

Continuando a ensinar a operar com as unidades mais usuais, Guiral e Pacheco apresenta, no próximo texto, alguns dos divisores do *côvado*[4]. Depois de o ler, identifique-os e estabeleça a relação entre todas as unidades de comprimento referidas. Que outros conceitos matemáticos identifica no texto?

Tive necessidade de somar três côvados e meio e uma sesma de uma coisa com quatro côvados e uma terça. Pergunto: quanto será a soma sem usar números fraccionários?
Ponho as parcelas e os seus símbolos em correspondência e ordenados, que sem isso nada se faz bem feito. Logo se fará a conta: uma sesma com um meio, perfaz três sesmas, às quais juntarei a terça, que é equivalente a duas sesmas, e obtenho seis sesmas que correspondem a um côvado inteiro. A esse côvado juntarei a soma dos inteiros e obterei oito côvados.
E assim se responderá que a soma das duas parcelas é oito côvados, sem haver nenhum número fraccionário.

$$3 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{6}$$
$$4 \quad \frac{1}{3}$$

8 côvados

(Adaptado de Guiral e Pacheco, transcrito em M. Almeida, 1994b, p. 210)

4 Do latim *cubitus* - 'cúbito, cotovelo, medida de comprimento'; em português medieval *côvedo (Dic. Houaiss, vol. II).*

Algumas notas e observações sobre a tarefa 2:

Esta tarefa pretende sensibilizar para o facto de, no séc. XVI, continuarem, apenas, a ser usados números inteiros e fraccionários para exprimir a medida de uma grandeza. Apesar de, à época, já ser vulgar, na Europa Ocidental, o uso do princípio de posição para representar fracções decimais, foi preciso esperar mais de um século para que se vulgarizasse, na Europa, o uso do princípio de numeração decimal posicional na representação de números não inteiros. É curioso referir que foi a criação, em 1793, em plena Revolução Francesa, do sistema métrico decimal o que verdadeiramente contribuiu para o sucesso do sistema de numeração que hoje usamos (Katz, 1998).

A situação proposta envolve o *côvado* e alguns dos seus submúltiplos: a *terça*, o *meio* e a *sesma*. Note-se que o autor pede a soma de duas medidas de comprimento sem usar números fraccionários, o que claramente só é possível dado que a soma das partes do côvado indicadas perfazem um número inteiro de côvados, mais concretamente um côvado. Temos, então, *o meio covâdo*, a *terça* e a *sesma* como sendo, respectivamente metade, a terça parte e a sexta parte do *côvado*, isto é resultantes da subdivisão de uma grandeza em duas, três e seis partes iguais.

Do ponto de vista didáctico, a partir da situação exposta é possível explorar, na escolaridade básica, alguns conceitos como, por exemplo, o de unidade de medida, o de padrão, o de fracção da unidade, o de submúltiplo, etc. A um outro nível e de modo prático, os alunos poderão comparar e ordenar estas fracções do *côvado* e mostrar que a soma _ , 1/3 e 1/6 do *côvado* é equivalente a um *côvado*.

Tarefa 3

Em 1624, referindo-se ao comércio de panos, Guiral e Pacheco escrevia:

O côvado tem três palmos. Excepto alguns panos baixos que chamam de varas, que se medem por varas de cinco palmos.

O pano da Índia de linho e outras coisas de tecer se vendem por vara dos ditos cinco palmos, que chamam portugueses que é a vara e quarta castelhana. De maneira que nas sedas e panos que vêm de Castela se ganha na medida 33% e nas mercadorias que deste Reino vão para Castela se ganha 25%.

(Guiral e Pacheco, fls 17v./18r. transcrito em Marques de Almeida, 1994a, p. 230)

1. Identifique as unidades de medida referidas no excerto transcrito e estabeleça a equivalência entre todas essas unidades.
2. Interprete, do ponto de vista comercial, a afirmação: *De maneira que nas sedas e panos que vêm de Castela se ganha na medida 33% e nas mercadorias que deste Reino vão para Castela se ganha 25%.*

<u>Algumas notas e observações sobre a tarefa 3:</u>

Importa começar por salientar que a transacção comercial descrita no texto se refere à compra e venda de tecidos ao Reino de Castela e portanto envolve a medição de comprimentos. Um aspecto curioso é o facto de o mercador português, em qualquer das situações, ter sempre lucro, e o ganho parecer não depender do preço de compra e venda dos tecidos. Importa, por isso, fazer uma leitura e interpretação cuidadosa do texto tendo em conta a referência a vários tipos de pano (panos da Índia, panos de tear e sedas) e a identificação das unidades usadas na transacção desses produtos.

Estabelecida a equivalência entre as unidades (1 *côvado* = 3 *palmos*, 1 *vara portuguesa* = 5 *palmos*, 1 *vara portuguesa* = 5/4 *vara castelhana*,1 *vara castelhana* = 4 *palmos* = 4/3 *côvado*), cabe reflectir sobre o motivo pelo qual o mercador português tem sempre lucro na transacção.

Uma leitura atenta do texto permite concluir que os panos da Índia de linho e de tear são vendidos pelo mercador português a Castela. Ora, só é possível o lucro de 25% se o mercador, que compra em Portugal panos de linho e de tear medidos em *varas portuguesas*, quando os transacciona, com Castela, o fizer numa unidade menor que a portuguesa. Testada a hipótese de o fazer em *varas de Castela*, conclui-se que por cada *vara portuguesa* de pano o mercador 'faz' uma *vara castelhana* e sobra-lhe _ do tecido inicial, isto é, tem efectivamente um lucro de 25% em pano. De modo similar, se conclui o lucro na transacção dos panos finos.

Este problema permite também reflectir sobre alguns problemas decorrentes da utilização de diferentes unidades de medida para a mesma grandeza e explorar algumas ideias relacionadas com a medição, tais como a importância e a necessidade da medição, a importância da unidade de medida, as dificuldades criadas pela utilização da unidades não estandardizadas e pelo uso de diferentes divisores, bem como da necessidade de relacionar entre si diferentes unidades.

Tarefa 4

Problema 4.1 – *Um alfaiate fez-me um vestido de um pano com 8 côvados de comprimento por sete palmos de largura. Ora, eu tenho outro pano com 9 palmos de largura. Pergunto: quantos côvados deverá ter este pano para poder fazer-se outro vestido?*

Hum alfaiate me faz hum vestido de 8 côvados de pano de 7 palmos de largo e eu tenho outro pano que hé de 9 palmos de largo. Pergunto: quantos côvados averei mester pêra outro vestido?

(adaptado de Bento Fernandes, Tratado da Arte de Aritmética, 1555, transcrito em M. Almeida, 1994b, p. 80)

Problema 4.2 - *Considera uma parede que de comprido tem 20 braças e dois palmos, que são um quinto de braça, e de altura tem 4 braças e 3 palmos que são três dez avos de braça. Pergunto: quantas braças quadradas são?*

HE huũa parede que de comprido tem. 20. braças ⁊ dous palmos que he huũ quinto de braça ⁊ de alto tem. 4. braças ⁊. 3. palmos que sam tres dezavos de braça pregunto quantas braças quadras sam.

(Gaspar Nicolas, Tratado da Prática d'Arismétyca, 1519, fol. 94)

Algumas notas e observações sobre a tarefa 4:

Entende-se que a resolução de problemas que envolvam o trabalho com unidades cuja relação não é decimal releva, em particular, a importância da compreensão dos aspectos conceptuais que estão por detrás das realização de reduções. É nessa linha que se integram todos os problemas que se incluem nesta tarefa e que envolvem antigas unidades de comprimento e unidades derivadas (área e volume).

Problema 4.1

Nada é dito, no texto, relativamente a exigências mínimas nas dimensões do tecido para que se possa confeccionar o vestido. Por outro lado, dado que se fala em largura e comprimento de panos, é natural considerar que estes tivessem uma configuração rectangular. Pode-se pois pressupor que o segundo pano deve ter uma área igual ao primeiro, isto é, que os dois panos têm de ser equivalentes, ou seja, devem ser iguais as medidas das respectivas áreas.

Coloca-se agora a questão de decidir que unidade de área se deve considerar: o *palmo* quadrado (a área de um quadrado de lado igual a um *palmo*), o *côvado* quadrado (a área de um quadrado de lado igual a um *côvado*), ou se se pode considerar a área de um rectângulo de largura um *palmo* e comprimento um *côvado*?

Do ponto de vista teórico, nada invalida que esta seja a estratégia a seguir, esta é, aliás, a resolução adoptada por Bento Fernandes por aplicação directa de uma regra a que chama *regra de três em que o terceiro é o partidor ou divisor*), tratando-se, por isso, de um problema de proporcionalidade inversa.

Porém, o mais natural parece ser trabalhar com os comprimentos expressos numa mesma unidade de comprimento ou seja, *palmos* ou *côvados*. Efectuadas as reduções e os cálculos necessários, conclui-se que o comprimento do segundo pano deve ser de 6 e $\frac{2}{9}$ *côvados* ou, representando a medida na forma de numeral misto, $6\frac{2}{9}$ *côvados*.

Problema 4.2

O enunciado deste problema remete, imediatamente, para o cálculo da área da parede em *braças* quadradas. Destaca-se, porém, que as dimensões da parede não são exprimíveis num número inteiro de *braças*, pois a parede tem um comprimento de 20 *braças* e um quinto de *braça*, ou seja $20\frac{1}{5}$ de *braça* e uma altura de 4 *braças* e 3 palmos ou $4\frac{3}{10}$ *braças*.

Questões como a forma geométrica da parede, o cálculo da área da mesma, a eventual necessidade de redução da medida encontrada à unidade pedida terão de ser tidas em conta na resolução do problema.

Considerações finais

Os problemas históricos que apresentámos traduzem situações do quotidiano, isto é, são problemas reais do dia-a-dia do comerciante do renascimento, que permitem desenvolver alguma compreensão do valor e papel da matemática na sociedade da época, bem como a consciencialização da forma como os conceitos e os problemas matemáticos se desenvolveram. Para além disso, traduzem questões de matemática elementar. O simples facto de envolverem sistemas de unidades desconhecidos, com uma imensa diversidade de relações, permite que se encarem como problemas verdadeiramente novos que permitem ao professor revisitar e reflectir sobre conceitos e processos, considerados rotineiros quando se trabalha no Sistema Internacional de Unidades, bem como desenvolver estratégias de resolução de problemas e, ainda, reflectir sobre as potencialidades didácticas do uso de aspectos históricos das grandezas e medidas na abordagem do tema.

Bibliografia

Abrantes, P.; Serrazina, L.; Oliveira, I. (1999). A Matemática na educação básica. Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

APM (1998). *Matemática 2001. diagnóstico e recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática. Relatório preliminar*. APM.

Carvalho e Silva, J. (1993). A reforma curricular e a história da matemática, *Educação e Matemática, 27, 27-31.*

Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds) (2000). *History in mathematics education: A ICMI study*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

ME (1991). *Programa Matemática. Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem. Ensino Básico 2° Ciclo.* Lisboa: Ministério da Educação.

Marques de Almeida, A. A. (1994a). *Aritmética como Descrição do Real (1519-1679)*. Imprensa Nacional, Casa da Moeda, Vol. I.

Marques de Almeida, A. A. (1994b). *Aritmética como Descrição do Real (1519-1679)*. Imprensa Nacional, Casa da Moeda, Vol. II.

ME (1991). Programa Matemática. Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem. Ensino Básico 2° Ciclo. Lisboa: Ministério da Educação.

ME (2004). *Organização Curricular e Programas. Ensino Básico – 1° Ciclo.* Ministério da Educação - Departamento do Ensino Básico. Lisboa. 4ª Edição.

ME (2001). Currículo Nacional do Ensino Básico. Competências Essenciais. Ministério da Educação - Departamento do Ensino Básico. Lisboa.

Mendo Trigoso, Sebastião Francisco (1815). Sobre os Pesos e Medidas Portuguezas, e sobre a Introdução do Systema Metro-Decimal. *Memórias Económicas da Academia Real das Sciencias de Lisboa para o Adiantamento da Agricultura, das Artes e da Indústria em Portugal, e suas Conquistas*. Tomo V. Lisboa, Typografia da Academia Real das Sciencias., pp. 336 a 411.

Nicolas, G. (1519). *Tratado da pratica D' Aritmetyca*. Edição fac-similada. Livraria Civilização – Editora. Porto, 1963.

Katz, V. (1998) *A History of Mathematics*.Addison Wesley, Second Edition.

Silva Lopes, J. B. (1849). *Memória sobre a Reforma dos Pesos e Medidas em Portugal segundo o Systema Métrico – Decimal.* Lisboa, Imprensa Nacional, 1849.

Struik, D.J. (1980). Why study the history of mathematics?. *UMAP Journal,* vol. 1, nº 1, 1980, 3-28.

Schubring, G., Cousquer, E. et al. (2000). *History of mathematics for trainee taechers.* History in mathematics education: A ICMI study. John Fauvel, Jan van Maanen (eds), Dordrecht: Kluwer, pp. 91-142.

Swetz, F., Fauvel, J., Bekken, O. & Katz, V. (Eds), (1995). Learn from the masters. Washington DC: The Mathematical Association of America.

Tzanakis, C., Arcavi, A. et al. (2000). *Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey.* History in mathematics education: A ICMI study. John Fauvel, Jan van Maanen (eds), Dordrecht: Kluwer, pp. 201-240.