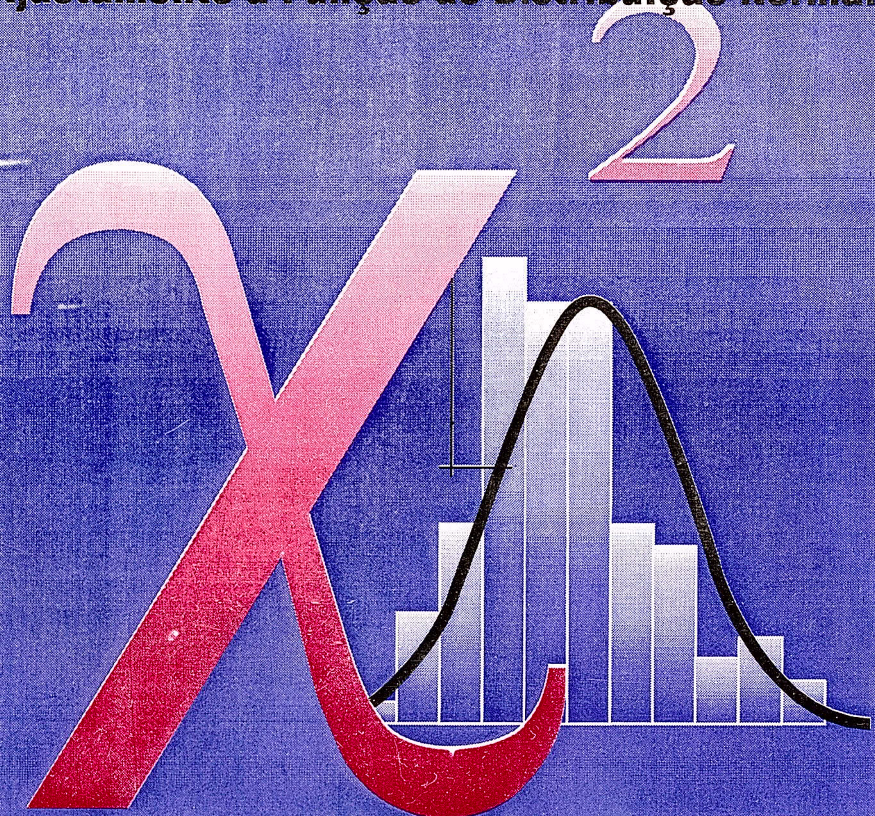
Instituto Politécnico de Castelo Branco
Escola Superior Agrária

Testes de Normalidade

Ajustamento à Função de Distribuição Normal



Armando Mateus Ferreira

Testes de Normalidade

Ajustamento à Função de Distribuição Normal

ESCOLA SUPERIOR AGRÁRIA
INSTITUTO POLITÉCNICO DE CASTELO BRANCO

Testes de Normalidade

Ajustamento à Função de Distribuição Normal

Armando Mateus Ferreira
Prof. Adjunto da Escola Superior Agrária
de Castelo Branco

1994

TÍTULO:
Testes de Normalidade
Ajustamento à Função de Distribuição Normal

AUTOR
Armando Mateus Ferreira

ARRANJO GRÁFICO
Rui Tomás Monteiro

EDIÇÃO
Registo nº 86234/95
Tiragem - 500 exemplares
Instituto Politécnico - Escola Superior Agrária de C. Branco
Rua de S. João de Deus, 25 - 3º

COMPOSIÇÃO, IMPRESSÃO E ACABAMENTOS
Centro de Recursos da Escola Superior Agrária
Quinta da Srª de Mércules
6000 CASTELO BRANCO

À memória de João Rui
À felicidade de Laura e Mafalda

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

A maioria das metodologias estatísticas sobre amostras de valores assumem o pressuposto destas provirem de uma população Normal N(μ,σ), e estão estabelecidas para este modelo, não sendo geralmente válidas (ou se-lo-ão com algumas restrições) se o pressuposto da normalidade não se verifica.

Contudo, é prática generalizada, pelo uso abusivo do **Teorema do Limite Central** ([1]), a adopção, sem mais delongas, do modelo Normal, correndo-se o risco deste não ser aplicável aos dados em questão, conduzindo assim a conclusões erróneas dos resultados e análises efectuadas.

A fim de ultrapassar este óbice, a Estatística dispõe de uma série de metodologias que poderão ser aplicados aos dados da amostra em análise, a fim de testar se na realidade têm como base o modelo Normal N(μ,σ).

A análise do histograma das frequências (absolutas ou relativas) pode dar uma primeira idéia visual da tendência da amostra em aproximar-se de

---

[1] Resumidamente, o Teorema do Limite Central estabelece que, tendo N variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $\overline{x} = \sum x_i / N$ tende para uma Distribuição Normal à medida que N aumenta, independentemente da distribuição original das observações.

uma distribuição normal, pela mais ou menos nítida forma da curva em sino ("*bell shapped curve*"), simétrica em torno da média. Contudo, esta não é uma confirmação formal de que a amostra provém de uma população normal.

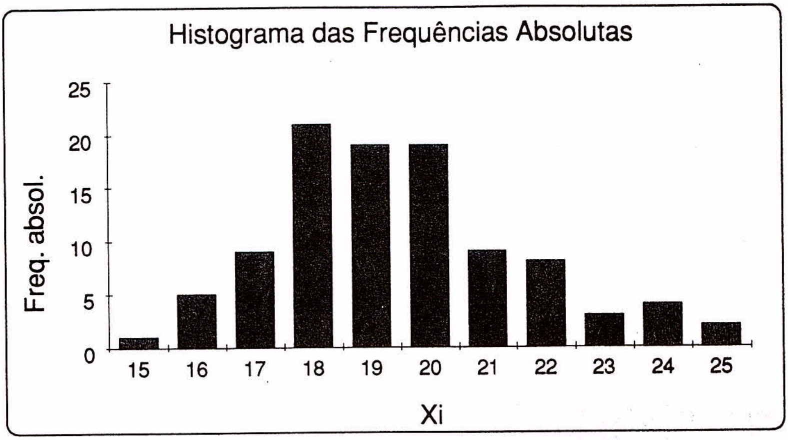


Fig. 1 - Neste histograma parece nítido o ajustamento das observações a uma distribuição Normal

Aliás, o histograma pode dar uma imagem distorcida da população subjacente à amostra, nomeadamente quando o tamanho desta é relativamente reduzido, agravado por uma grande amplitude de variação da amostra.

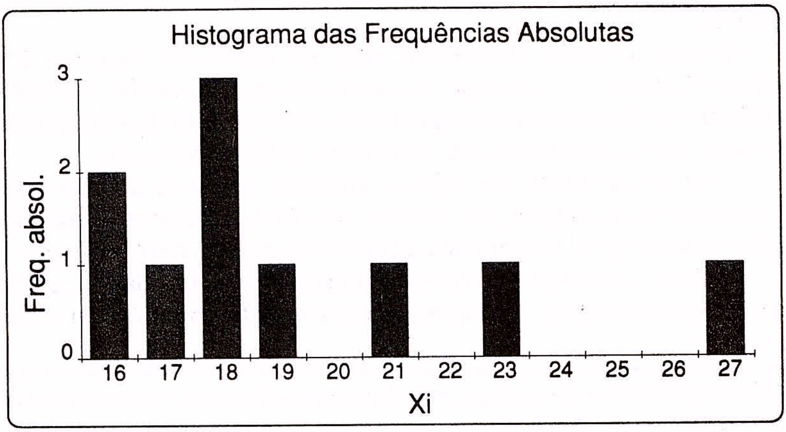


Fig. 2 - O reduzido tamanho da amostra, bem como o amplo intervalo de dispersão, distorce a distribuição real das observações.

Os testes de ajustamento de seguida expostos são os mais frequentemente utilizados para se ter a confirmação formal analítica do **ajustamento** ("***goodness of fit***") da amostra a uma distribuição Normal.

TESTES DE AJUSTAMENTO

TESTE DO QUI-QUADRADO (χ^2)

Um dos testes mais frequentemente utilizados é o teste do **Qui-Quadrado** (χ^2). Refira-se que este método não é específico para testar o ajustamento de uma amostra a uma distribuição Normal N(μ,σ), sendo utilizado genericamente para testar o ajustamento de uma amostra a qualquer função de distribuição cujos parâmetros sejam conhecidos.

Este método, válido para amostras de grande tamanho, de natureza contínua ou discreta, baseia-se em testar o ajustamento das frequências esperadas às frequências observadas, sendo as frequências esperadas calculadas pela lei das probabilidades da função de distribuição conhecida.

O ajustamento faz-se por classes de valores; isto é, os dados da amostra são agrupados em classes, cujas frequências absolutas são os valores observados, às quais se vai testar o ajustamento das frequências esperadas, calculadas pela lei de probabilidades Normal [2].

---

[2] Note-se que a necessidade de o ajustamento ser feito por classes de valores resulta do facto de, teoricamente, em distribuições contínuas, a probabilidade de um ponto ser nula.

Para tal, os limites das classes são transformados na variável z da Normal reduzida N(0,1), pela transformação:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

Vejamos que, para tal, é necessário conhecer os parâmetros da população teórica à qual se está a fazer o ajustamento, o que, de modo geral, não acontece.

Isto é, o teste é da forma:

H_0: a amostra provém de uma população $N(\mu,\sigma)$ *versus* H_1: a amostra não provém de uma população $N(\mu,\sigma)$

Como o teste é válido essencialmente para grandes amostras, as frequências esperadas, calculadas pela lei da distribuição de probabilidades (no caso, pela função de distribuição Normal), não deverão ser muito pequenas, situação que tem tendência a verificar-se nas classes extremas.

Uma regra assumida para o teste é que as frequências esperadas não deverão ser inferiores a 1; eventualmente, pode aceitar-se que as frequências esperadas das duas classes extremas sejam próximas (ou ligeiramente inferiores) a 1, desde que na maior parte das classes restantes, as frequências esperadas sejam superiores a 5.

As classes com frequências esperadas inferiores a 1 deverão ser recombinadas, de modo a ficar-se na regra atrás referida. Neste caso, a contagem dos graus de liberdade deverá ser feita após ter efectuado a combinação das classes.

Se $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots Z_v$ são normais e independentes, tal que $Z = (x-\mu)/\sigma$, então a quantidade:

$$\chi^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 \ldots + Z_v^2$$

segue uma distribuição designada por Qui-quadrado (χ^2), com v graus de liberdade. Esta distribuição está matematicamente formulada, encontrando-se no anexo 2 a tabela dos valores dos percentis (isto é, valores de χ^2 que, com determinada probabilidade - designada por nível de confiança - são excedidos).

Para aplicar a distribuição do Qui-quadrado (χ^2) ao teste de ajustamento de uma amostra de valores a uma população conhecida $N(\mu,\sigma)$, calcula-se para cada classe de valores a quantidade:

$$\frac{\left(Fa_{i_{obs}} - Fa_{i_{esp}}\right)^2}{Fa_{i_{esp}}}$$

em que:

$Fa_{i_{obs}}$ é a frequência absoluta observada da i.^{ésima} classe;

$Fa_{i_{esp}}$ é a frequência absoluta que seria de esperar para a i.^{ésima} classe da amostra, sob o pressuposto de que esta provém da amostra N(μ,σ).

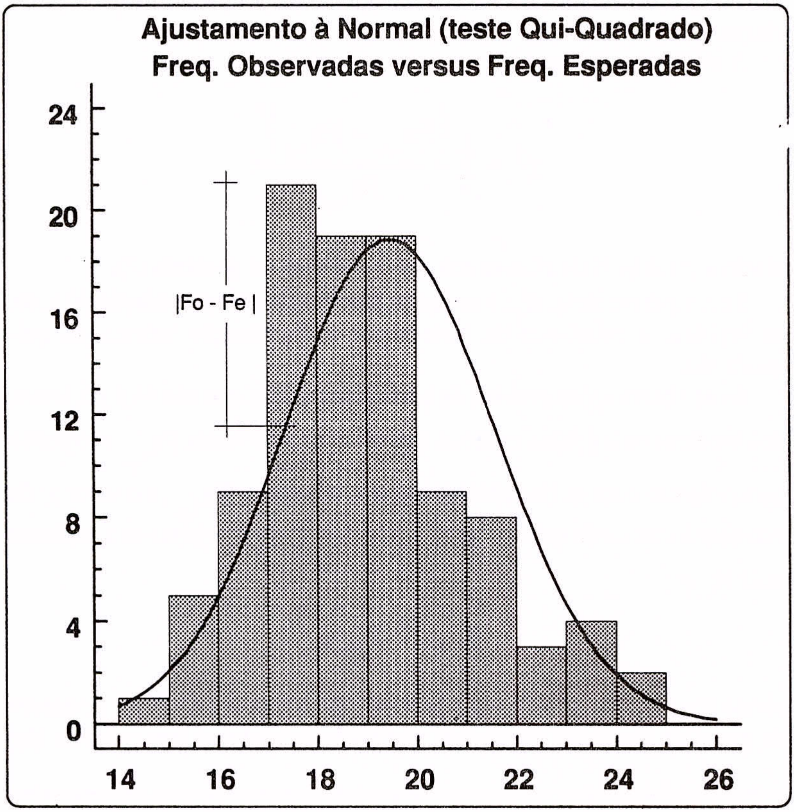


Fig. 3 - Fundamento teórico do teste de ajustamento do χ^2: para cada classe de valores, estima-se o desfasamento entre a frequência observada **Fo** (histograma) e a frequência esperada **Fe** (curva).

Para calcular $Fa_{i_{esp}}$ teremos de, após converter os limites reais de cada classe em valores z de distribuição normal estandardizada, calcular a probabilidade teórica de ocorrência de valores em cada uma das classes. Este cálculo é extremamente simples, bastando para tal a consulta de uma tabela da distribuição N(0,1). Para cálculo de $Fa_{i_{esp}}$ faz-se:

$$Fa_{i_{esp}} = N.\Pr\left(Z_{i_{inf}} \leq Z_{i_{sup}}\right)$$

em que N é o tamanho da amostra, e $\Pr(z_{i_{inf}} \leq Z \leq z_{i_{sup}})$ a probabilidade teórica sob o pressuposto $N(\mu,\sigma)$ de ocorrência de observações na $i.^{ésima}$ classe.

A estatística de teste é:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(Fa_{i_{obs}} - Fa_{i_{esp}}\right)^2}{Fa_{i_{esp}}}$$

sendo k o número de classes em que a amostra foi dividida ([3]).

Se a hipótese nula, ***H_0: a amostra provém de uma população $N(\mu,\sigma)$***, se verifica, a estatística de teste segue a distribuição teórica do qui-quadrado.

Se as observações provêm de outra distribuição que não $N(\mu,\sigma)$, isto é, se a hipótese nula é falsa, então as frequências observadas $Fa_{i_{obs}}$ são pouco concordantes com as frequências teóricas a esperar, $Fa_{i_{esp}}$, e o valor χ^2 da estatística calculada tende a ser elevado. Isto é, deve rejeitar-se a hipótese nula H_0 se:

$$\chi^2_{calc} > \chi^2_{(\alpha,v)}$$

sendo α o nível de significância previamente estabelecido ([4]) e v o número de graus de liberdade. O nível de significância traduz o erro máximo que

(3) Veja-se o que anteriormente se referiu em relação à classes, no que se refere às frequências esperadas.

(4) É frequentemente utilizado o nível de significância $\alpha = 5\%$.

se comete ao rejeitar a hipótese nula H_0, quando na realidade se deveria aceitar como válida.
O número de graus de liberdade é $\nu=(k-1-\Psi)$, sendo k o número de classes em que a amostra foi agrupada e Ψ o número de parâmetros ajustados em teste. Se μ e σ são conhecidos, então $\Psi=0$ e $\nu=k-1$; se se utilizam os parâmetros amostrais x e s como estimativas de μ e σ, então $\Psi=2$ e $\nu=k-3$.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Numa linha de engarrafamento de água mineral é pressuposto que as garrafas tenham capacidade que segue uma lei distribuição Normal, com média $\mu = 1.00$ litros e desvio padrão $\sigma = 0.02$.

A partir de uma amostragem de 100 garrafas, elaborou-se a seguinte tabela de frequências:

Classe	Freq. Absoluta
≤ 0,96	4
0,96 - 0,97	6
0,97 - 0,98	4
0,98 - 0,99	16
0,99 - 1,00	20
1,00 - 1,01	18
1,01 - 1,02	16
1,02 - 1,03	10
1,03 - 1,04	4
>1,04	2
Total	100

Pretende-se testar se a linha de engarrafamento está a funcionar dentro da normalidade.

A primeira etapa é converter os limites das classes para a variável z da distribuição Normal reduzida:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

sendo $\mu = 1.00$ e $\sigma = 0.02$.

Por exemplo, para a classe $x \leq 0.96$, vem a classe $z \leq -2$; para a classe $0.96 < x \leq 0.97$, vem $-2 < z \leq -1.5$.

As probabilidades de ocorrência em cada uma das classes são lidas da tabela da distribuição Normal reduzida (anexo 1).

Para estimar os valores das frequências esperadas, faz-se $Fa_{i_{esp}} = N.\Pr(z_{i_{inf}} \leq Z \leq z_{i_{sup}})$, sendo N=100 (tamanho da amostra) e $\Pr(z_{i_{inf}} \leq Z \leq z_{i_{sup}})$ a probabilidade de ocorrência em cada uma das classes.

Por exemplo, para a classe $0.96 < x \leq 0.97$, $\Pr(-2 < Z \leq -1.5) = 0.044$, e $Fa_{esp} = 4.4$.

Tendo calculado as frequências esperadas, sob a hipótese nula que $x_i \sim N(1.00, 0.02)$, calcula-se a estatística de teste.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(Fa_{i_{obs}} - Fa_{i_{esp}}\right)^2}{Fa_{i_{esp}}}$$

Os cálculos resumem-se no quadro seguinte, que o leitor deverá confirmar.

Estabelecendo um nível de significância α=5%, e $\chi^2_{calc} = 5{,}197 < \chi^2_{(0.05,9)} = 16.92$, conclui-se que não existe evidência estatística para rejeitar o hipótese nula ou, dizendo de outro modo, não se deve rejeitar que a amostra provém de uma população cuja distribuição de frequências é N(1.00, 0.02).

Classe	Freq. Absol.	z	$\Pr(z_{i_{inf}} \le Z \le z_{i_{sup}})$	$Fa_{i_{esp}}$	$\frac{(Fa_{i_{obs}} - Fa_{i_{esp}})^2}{Fa_{i_{esp}}}$
≤ 0.96	4	≤-2.0	0.0228	2.28	1.298
0.96 - 0.97	6	-2.0 , -1.5	0.0440	4.40	0.582
0.97 - 0.98	4	-1.5 , -1.0	0.0919	9.19	2.931
0.98 - 0.99	16	-1.0 , -0.5	0.1498	14.98	0.069
0.99 - 1.00	20	-0.5 , 0.0	0.1915	19.15	0.038
1.00 - 1.01	18	0.0 , 0.5	0.1915	19.15	0.069
1.01 - 1.02	16	0.5 , 1.0	0.1498	14.98	0.069
1.02 - 1.03	10	1.0 , 1.5	0.0919	9.19	0.071
1.03 - 1.04	4	1.5 , 2.0	0.0440	4.40	0.036
>1.04	2	> 2.0	0.0228	2.28	0.034
Total	**100**		**1.0000**	**100.00**	**χ^2=5.197**

Note-se que, pela elaboração da tabela acima apresentada, é fácil perceber qual ou quais as classes que mais contribuem para o incremento do valor do χ^2 o que, em situações de rejeição da hipótese nula, permite a identificação das classes que mais influenciam o não ajustamento da amostra à população teórica admitida.

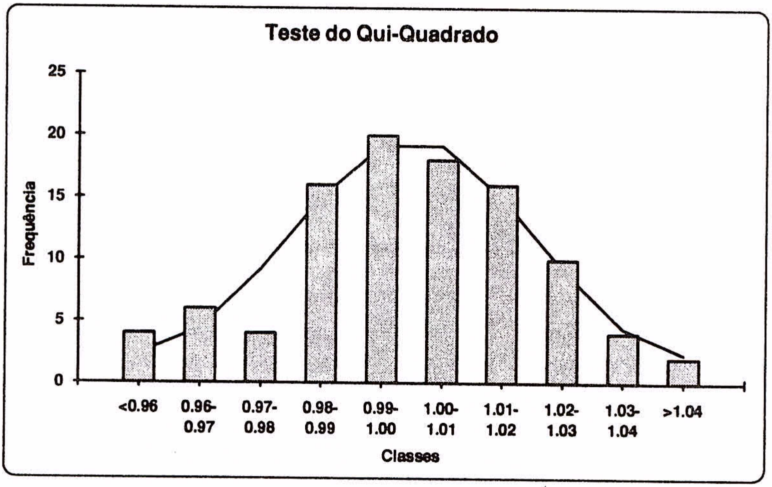


Fig. 4 - Note-se que o ajustamento das frequências esperadas (linha) às frequências observadas (colunas) é quase perfeito. O teste formal do χ^2 traduz analiticamente este ajustamento.

TESTE W DE SHAPIRO E WILK

Este teste de normalidade de uma amostra de valores é usado nas seguintes situações:

i) Não se conhece o modelo Normal N(μ,σ) subjacente. Isto é, não se inclui a média e a variância, na formulação da hipótese em teste, testando-se apenas que a amostra provém de uma população Normal.
Isto é, o teste em causa é:

H_0: a amostra provém de uma população Normal *versus* H_1: a amostra não provém de uma população Normal

ii) O teste é bastante eficaz para pequenas amostras (entre 10 e 50 indivíduos).

iii) Segundo os seus Autores, o teste é geralmente superior (quando comparado com outros testes) na detecção de situações de não normalidade, em condições de amostras simétricas ou assimétricas, concentradas em torno dos valores centrais ou dispersas para valores extremos.

A estatística de teste é obtida dividindo o quadrado de uma combinação linear das estatísticas ordinais da amostra (parâmetro b), que é uma estimativa da variância, baseada nas estatatísticas ordinais, por uma estimativa da variância $(\sum_{i=1}^{N}(x_1-\bar{x})^2)$ (ver algoritmo de teste). Tanto o numerador como o denominador deste quociente são estimativas da variância. Esta razão é invariante em relação à escala e à origem.

ALGORITMO DO TESTE

i) Ordenar as N observações tal como:

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq x_n$$

ii) Calcular:

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2$$

iii) Se N é par, tal que N=2k, calcular:

$$b=\sum_{i=1}^{k} a_{N-i+1}.(x_{N-i+1}-x_i)$$

Se N é ímpar, tal que N=2k+1, então omite-se o valor mediano, X_{k+1}, e calcula-se:

$$b=\sum_{i=1}^{k} a_{N-i+1}.(x_{N-i+1}-x_i)$$

Os coeficientes a_i (para i=2(1)50) apresentam-se no anexo 3.

iv) Calcular:

$$W = \frac{b^2}{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2}$$

v) Comparar W_{calc} com o valor $W_{crítico}$ (tabela em anexo 4).
Pequenos valores de W_{calc} indicam a não normalidade da amostra em teste.

O parâmetro b é, aparte de constantes, o **melhor estimador linear não enviezado** (estimador ***blue*** - *best linear unbiased estimator*) do declive de uma regressão linear das estatísticas ordinais da amostra, em relação aos respectivos valores esperados.

Se a amostra provém de uma população Normal, tanto o coeficiente $\mathbf{b^2}$ como $\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2$ são, aparte de constantes, estimadores da variância.

A estatística **W** (cuja função de distribuição teórica se apresenta em anexo 4) goza das seguintes propriedades:

i) W é invariante em relação à escala e em relação à origem em que as observações são quantificadas.
ii) A função de distribuição de probabilidades de W depende apenas do tamanho amostral para amostras provenientes de populações normais.
iii) W é estatisticamente independente de $\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2$ e de $\overline{x}$, para amostras de populações Normais.
iv) O valor máximo de W é 1.
v) O valor mínimo de W é $Na_1^2/(N-1)$.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Os seguintes dados referem-se aos tempos de desintegração (em segundos) de uma amostra de 10 comprimidos efervescentes:

8 12 10 24 12 10 16 19 9 10

Testar se esta amostra provém de uma população Normal.

Resolução:

Vejamos que, para a realização do teste, é necessário calcular (i) a média amostral, $\bar{x}$, e (ii) $\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$.

Para tal e a fim de seguir o algoritmo apresentado, será útil elaborar um quadro de cálculo organizado da seguinte forma, com o cuidado de identificar as estatísticas ordinais, de modo a facilitar o cálculo do parâmetro b:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	$\sum_{i=1}^{n}$
x_1	8	9	10	10	10	12	12	16	19	24	130 ; $\bar{x} = 13$
$(x_1 - \bar{x})^2$	25	16	9	9	9	1	1	9	36	121	236

De modo a facilitar o cálculo de b, sugere-se a realização do seguinte quadro, onde se enumeram os diferentes valores de x_i, x_{n-i+1} e os valores a_{n-i+1} (para i=1,2,..., k, sendo $k = N/2$ ou $k = (N-1)/2$, conforme N é par ou ímpar; (no exemplo, N=10 e k=5):

i	N-i+1	α_{n-i+1}	x_{n-i+1}	x_i	$\alpha_{N-i+1}.(x_{N-i+1} - x_i)$
1	10	0.5739	24	8	9.1824
2	9	0.3291	19	9	3.2910
3	8	0.2141	16	10	1.2846
4	7	0.1224	12	10	0.2448
5	6	0.0399	12	10	0.0798
					b=14.0826

A estatística de teste é (iv):

$$W = \frac{b^2}{\sum_{i=1}^{N}(x_1 - \bar{x})^2} = \frac{14.0826^2}{236} = 0.840$$

Como $W_{calc} = 0.840 < W_{(0.05, 10)} = 0.842$ (anexo 4), conclui-se que se deverá rejeitar a hipótese de normalidade da amostra, a um nível de significância = 5% (v).

Chama-se a atenção para o facto de algumas transformações das observações (raiz quadrada, logaritmo, arcsin) tendem a normalizá-las (ver SNEDECOR & COCHRAN, 1980).

TESTE DE KOLMOGOROV-SMIRNOV

Este teste foi originalmente desenvolvido por Kolmogorov, para testar hipóteses de ajustamento de distribuições contínuas, cujos parâmetros são conhecidos. Contudo, também é usado em testes de ajustamento de distribuições discretas.

É considerado como um teste conservador, isto é:

$$\textbf{Pr(rejeitar } \mathbf{H_0 | H_0} \textbf{ verdadeira)} < \alpha_{\text{tabelado}}$$

sendo α_{tabelado} o nível de significância fixado para o teste.

O teste fundamenta-se no ajustamento das frequências relativas acumuladas observadas (por vezes, designada por ***função de distribuição cumulativa*** amostral) às respectivas frequências relativas acumuladas esperadas, ou teóricas, sob a hipótese nula.

Se no histograma das frequências relativas acumuladas se notarem disparidades entre os valores observados e os valores teóricos ou esperados, admitindo como válida a hipótese nula da distribuição teórica, então é porque o ajustamento não é correcto, devendo rejeitar-se a hipótese nula.

Igualmente se deverá suspeitar de não ajustamento se se notar uma grande disparidade de valores entre a função de distribuição acumulada numa classe e na classe seguinte: este desajustamento ocorre quando numa das classes se observa uma frequência exagerada (em relação à frequência teórica). Esta situação provoca na função de distribuição acumulada um acréscimo maior ao que seria de esperar para a classe em causa.

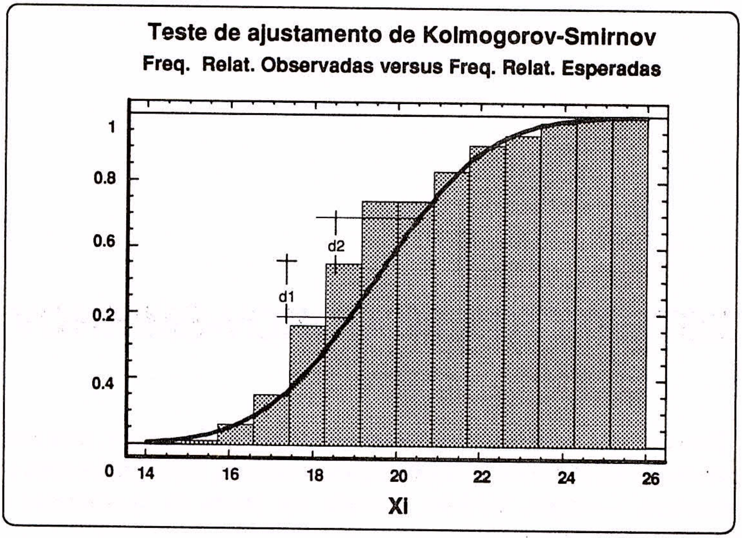


Fig. 5 - Fundamento teórico do teste de Kolmogorov-Smirnov: para cada classe de valores, calcula-se o desfasamento **d1** entre a função de distribuição cumulativa (fdc) observada (histograma) e a fdc teórica (curva). Calcula-se igualmente o desfasamento **d2** entre a fdc observada na classe anterior e a fdc esperada na classe actual. A hipótese de normalidade será rejeitada se alguma destas distâncias for superior à distância crítica.

A fim de estimar as frequências relativas esperadas, é necessário conhecer a função de distribuição teórica, à qual se pretende fazer o teste de ajustamento.

No caso da aplicação ao ajustamento a uma população teórica normal, é necessário conhecer *a priori* os parâmetros μ e σ dessa população.

Isto é, o teste é da forma:

H_0: a amostra provém de uma população $N(\mu,\sigma)$ *versus* H_1: a amostra não provém de uma população $N(\mu,\sigma)$

Se a amostra provém de uma população Normal, então a função de distribuição cumulativa é concordante com a função de distribuição cumulativa teórica da população Normal. Rejeitar-se-á a normalidade da amostra, caso se verifique, pelo menos para um valor (ou classe de valores) da amostra, o não ajustamento. Isto é, o teste atrás referido é, de forma mais explícita, o seguinte:

H_0: $fra_{obs} = fra_{esp}$, para todos os X_i *versus* H_1: $fra_{obs} \neq fra_{esp}$, pelo menos para um X_i

A fim de se estabelecer a função de distribuição cumulativa (fdc) das observações, deverá organizar-se uma tabela de frequências, enumerando os diversos valores observados, a respectiva frequência absoluta e frequência relativa acumuladas.

A função de distribuição cumulativa teórica, sob a hipótese nula, é estabelecida pela transformação à curva Normal reduzida, das observações (ou limites de classes, em amostras contínuas), pela expressão:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Calcula-se a distância entre a frequência relativa acumulada observada e a teórica (ou esperada), para cada observação (ou classe de observações), $\left| fra_{i_{obs}} - fra_{i_{esp}} \right|$, sendo de suspeitar como contradizendo a hipótese nula de normalidade a existência de grandes desfasamentos.

São igualmente indícios de não normalidade as distâncias grandes entre a frequência relativa acumulada observada até ao valor (ou classe de valores) anterior e a frequência relativa acumulada esperada para o valor (ou classe de valores) actual, isto é as distâncias $\left| fra_{i-1_{obs}} - fra_{i_{esp}} \right|$.

A estatística de teste é:

$$DN = \sup\left[\left| fra_{i_{obs}} - fra_{i_{esp}} \right|, \left| fra_{i-1_{obs}} - fra_{i_{esp}} \right| \right]$$

Rejeita-se a hipótese nula de normalidade se $DN > DN_{\alpha}$, sendo o nível de significância estabelecido para o teste. A função de distribuição teórica da estatística DN apresenta-se em anexo 5.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Os seguintes dados referem-se à quantidade de malte (percentagem sobre a matéria seca) extraída de 14 amostras de cevada (STELL & TORRIE, 1980):

77.7	76.0	76.9	74.6	74.7	76.5	74.2
75.4	76.0	76.0	73.9	77.4	76.6	77.3

Pretende-se testar a hipótese:

H_0: a amostra provém de uma população $N(\mu,\sigma)$ *versus* H_1: a amostra não provém de uma população $N(\mu,\sigma)$

utilizando o teste de Kolmogorov-Smirnov.

Como não se conhecem os parâmetros μ e σ da população, utilizam-se as respectivas estimativas amostrais $\hat{\mu} = \overline{x} = 75.943$ e $\hat{\sigma} = s = 1.227$.

X_i	Fa	Fac	fra_{obs}	z	fra_{esp}	$fra_{i_{obs}} - fra_{i_{esp}}$	$fra_{i-1_{obs}} - fra_{i_{esp}}$
73.9	1	1	0.0714	-1.6650	0.0480	0.0235	0.0480
74.2	1	2	0.1429	-1.4205	0.0777	0.0651	0.0063
74.6	1	3	0.2143	-1.0945	0.1369	0.0774	0.0060
74.7	1	4	0.2857	-1.0130	0.1555	0.1302	0.0588
75.4	1	5	0.3571	-0.4425	0.3290	0.0281	0.0433
76.0	3	8	0.5714	0.0465	0.5185	0.0529	**0.1614**
76.5	1	9	0.6429	0.4540	0.6751	0.0322	0.1036
76.6	1	10	0.7143	0.5355	0.7038	0.0105	0.0610
76.9	1	11	0.7857	0.7800	0.7823	0.0034	0.0680
77.3	1	12	0.8571	1.1059	0.8656	0.0085	0.0799
77.4	1	13	0.9286	1.1874	0.8825	0.0461	0.0253
77.7	1	14	1.0000	1.4319	0.9239	0.0761	0.0047

A estatística de teste é:

$$DN = \sup\left[\left|fra_{i_{obs}} - fra_{i_{esp}}\right|, \left|fra_{i-1_{obs}} - fra_{i_{esp}}\right|\right] = 0.1614$$

Para $\alpha = 5\%$, $DN_{0.05} = 0.349$ (anexo 5). Como $DN_{calc} = 0.1614 < DN_{0.05} = 0.349$, não se rejeita (ou, dizendo de outro modo, aceita-se) a hipótese nula de normalidade das observações.

BIBLIOGRAFIA

ANDERSON, V.L. & McLEAN, R.A. (1974). *Design of Experiments. A Realistic Approach*. MARCEL DEKKER, INC.

MOOD, M.A.; GRAYBILL, F.A & BOES, D.C. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics*. McGRAW-HILL INTERNATIONAL EDITIONS. STATISTICAL SERIES.

SHAPIRO, S.S. & WILK, M.B. (1965). An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples). *Biometrika*, **52**, 591-611.

SNEDECOR, G.W. & COCHRAN, W.G. (1980). *Statistical Methods*. IOWA STATE UNIVERSITY PRESS.

STELL, R.G.D. & TORRIE, J.H. (1980). *Principles and Procedures of Statistics. A Biometrical Approach*. McGRAW-HILL.

ANEXOS

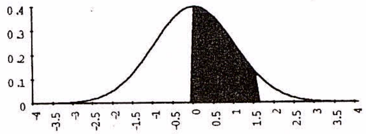
Lista das tabelas em anexo:

Anexo 1:Função de Distribuição Normal Reduzida N(0,1)
Anexo 2: Função de Distribuição do Qui-quadrado (χ^2)
Anexo 3: Coeficientes α_i para o teste de normalidade W de Shapiro-Wilk
Anexo 4: Valores críticos da estatística W de Shapiro-Wilk
Anexo 5: Valores críticos da estatística DN de Kolmogorov-Smirnov

Anexo 1: Função de Distribuição Normal
N(0,1)

Área delimitada pela curva, entre 0 e z

Por exemplo, $\Pr(0 < z \leq 1.5) = 0.4332$



Inteiro e 1ª casa decimal

	(2ª casa decimal)									
Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000									

Anexo 2: Função de Distribuição Qui-Quadrado

$$\Pr(X^2 > \chi^2) = \alpha$$

	Nível de significância α													
Graus de liberdade	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.750	0.500	0.250	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
1					0.02	0.10	0.45	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.83
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	0.58	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	13.82
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84	16.27
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86	18.47
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75	20.52
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.22	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96	26.12
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.34	13.70	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76	31.26
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.34	14.85	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.34	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.17	13.34	17.12	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.04	14.34	18.25	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.91	15.34	19.37	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	12.79	16.34	20.49	24.77	27.59	30.19	33.41	35.73	40.79
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	13.68	17.34	21.60	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	14.56	18.34	22.72	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	15.45	19.34	23.83	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00	45.32
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	16.34	20.34	24.93	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40	46.80
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	17.24	21.34	26.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80	48.27
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	22.34	27.14	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18	49.73
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.34	28.24	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56	51.18
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.34	29.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93	52.62
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	24.48	29.34	34.80	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67	59.70
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	33.66	39.34	45.62	51.80	55.76	59.34	63.69	66.77	73.40
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	42.94	49.33	56.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49	86.66
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	52.29	59.33	66.98	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95	99.61
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	61.70	69.33	77.58	85.53	90.53	95.02	100.42	104.22	112.32
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	71.14	79.33	88.13	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32	124.84
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	80.62	89.33	98.64	107.56	113.14	118.14	124.12	128.30	137.21
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	90.13	99.33	109.14	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17	149.45

Anexo3: Coeficientes α_{N-i+1} *para o teste de normalidade W de SHAPIRO – WILK*

(Para $N = 2(1)50$*)*

$i \backslash N$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.7071	0.7071	0.6872	0.6646	0.6431	0.6233	0.6052	0.5888	0.5739
2		0.0000	0.1677	0.2413	0.2806	0.3031	0.3164	0.3244	0.3291
3				0.0000	0.0875	0.1401	0.1743	0.1976	0.2141
4						0.0000	0.0561	0.0947	0.1224
5								0.0000	0.0399

$i \backslash N$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0.5601	0.5475	0.5359	0.5251	0.5150	0.5056	0.4968	0.4886	0.4808	0.4734
2	0.3315	0.3325	0.3325	0.3318	0.3306	0.3290	0.3273	0.3253	0.3232	0.3211
3	0.2260	0.2347	0.2412	0.2460	0.2495	0.2521	0.2540	0.2553	0.2561	0.2565
4	0.1429	0.1586	0.1707	0.1802	0.1878	0.1939	0.1988	0.2027	0.2059	0.2085
5	0.0695	0.0922	0.1099	0.1240	0.1353	0.1447	0.1524	0.1587	0.1641	0.1686
6	0.0000	0.0303	0.0539	0.0727	0.0880	0.1005	0.1109	0.1197	0.1271	0.1334
7			0.0000	0.0240	0.0433	0.0593	0.0725	0.0837	0.0932	0.1013
8					0.0000	0.0196	0.0359	0.0496	0.0612	0.0711
9							0.0000	0.0163	0.0303	0.0422
10									0.0000	0.0140

$i \backslash N$	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0.4643	0.4590	0.4542	0.4493	0.4450	0.4407	0.4366	0.4328	0.4291	0.4254
2	0.3185	0.3156	0.3126	0.3098	0.3069	0.3043	0.3018	0.2992	0.2968	0.2944
3	0.2578	0.2571	0.2563	0.2554	0.2543	0.2533	0.2522	0.2510	0.2499	0.2487
4	0.2119	0.2131	0.2139	0.2145	0.2148	0.2151	0.2152	0.2151	0.2150	0.2148
5	0.1736	0.1764	0.1787	0.1807	0.1822	0.1836	0.1848	0.1857	0.1864	0.1870
6	0.1399	0.1443	0.1480	0.1512	0.1539	0.1563	0.1584	0.1601	0.1616	0.1630
7	0.1092	0.1150	0.1201	0.1245	0.1283	0.1316	0.1346	0.1372	0.1395	0.1415
8	0.0804	0.0878	0.0941	0.0997	0.1046	0.1089	0.1128	0.1162	0.1192	0.1219
9	0.0530	0.0618	0.0696	0.0764	0.0823	0.0876	0.0923	0.0965	0.1002	0.1036
10	0.0263	0.0368	0.0459	0.0539	0.0610	0.0672	0.0728	0.0778	0.0822	0.0862
11	0.0000	0.0122	0.0228	0.0321	0.0403	0.0476	0.0540	0.0598	0.0650	0.0697
12			0.0000	0.0107	0.0200	0.0284	0.0358	0.0424	0.0483	0.0537
13					0.0000	0.0094	0.0178	0.0253	0.0320	0.0381
14							0.0000	0.0084	0.0159	0.0227
15									0.0000	0.0076

Anexo 3: Coeficientes α_{N-i+1} para o teste de normalidade W de SHAPIRO – WILK (cont)

(Para $N = 2(1)50$)

$i \backslash N$	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	0.4220	0.4188	0.4156	0.4127	0.4096	0.4068	0.4040	0.4015	0.3989	0.3964
2	0.2921	0.2898	0.2876	0.2854	0.2834	0.2813	0.2794	0.2774	0.2755	0.2737
3	0.2475	0.2463	0.2451	0.2439	0.2427	0.2415	0.2403	0.2391	0.2380	0.2368
4	0.2145	0.2141	0.2137	0.2132	0.2127	0.2121	0.2116	0.2110	0.2104	0.2098
5	0.1874	0.1878	0.1880	0.1882	0.1883	0.1883	0.1883	0.1881	0.1880	0.1878
6	0.1641	0.1651	0.1660	0.1667	0.1673	0.1678	0.1683	0.1686	0.1689	0.1691
7	0.1433	0.1449	0.1463	0.1475	0.1487	0.1496	0.1505	0.1513	0.1520	0.1526
8	0.1243	0.1265	0.1284	0.1301	0.1317	0.1331	0.1344	0.1356	0.1366	0.1376
9	0.1066	0.1093	0.1118	0.1140	0.1160	0.1179	0.1196	0.1211	0.1225	0.1237
10	0.0899	0.0931	0.0961	0.0988	0.1013	0.1036	0.1056	0.1075	0.1092	0.1108
11	0.0739	0.0777	0.0812	0.0844	0.0873	0.0900	0.0924	0.0947	0.0967	0.0986
12	0.0585	0.0629	0.0669	0.0706	0.0739	0.0770	0.0798	0.0824	0.0848	0.0870
13	0.0435	0.0485	0.0530	0.0572	0.0610	0.0645	0.0677	0.0706	0.0733	0.0759
14	0.0289	0.0344	0.0395	0.0441	0.0484	0.0523	0.0559	0.0592	0.0622	0.0651
15	0.0144	0.0206	0.0262	0.0314	0.0361	0.0404	0.0444	0.0481	0.0515	0.0546
16	0.0000	0.0068	0.0131	0.0187	0.0239	0.0287	0.0331	0.0372	0.0409	0.0444
17			0.0000	0.0062	0.0119	0.0172	0.0220	0.0264	0.0305	0.0343
18					0.0000	0.0057	0.0110	0.0158	0.0203	0.0244
19							0.0000	0.0053	0.0101	0.0146
20									0.0000	0.0049

$i \backslash N$	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	0.3940	0.3917	0.3894	0.3872	0.3850	0.3830	0.3808	0.3789	0.3770	0.3751
2	0.2719	0.2701	0.2684	0.2667	0.2651	0.2635	0.2620	0.2604	0.2589	0.2574
3	0.2357	0.2345	0.2334	0.2323	0.2313	0.2302	0.2291	0.2281	0.2271	0.2260
4	0.2091	0.2085	0.2078	0.2072	0.2065	0.2058	0.2052	0.2045	0.2038	0.2032
5	0.1876	0.1874	0.1871	0.1868	0.1865	0.1862	0.1859	0.1855	0.1851	0.1847
6	0.1693	0.1694	0.1695	0.1695	0.1695	0.1695	0.1695	0.1693	0.1692	0.1691
7	0.1531	0.1535	0.1539	0.1542	0.1545	0.1548	0.1550	0.1551	0.1553	0.1554
8	0.1384	0.1392	0.1398	0.1405	0.1410	0.1415	0.1420	0.1423	0.1427	0.1430
9	0.1249	0.1259	0.1269	0.1278	0.1286	0.1293	0.1300	0.1306	0.1312	0.1317
10	0.1123	0.1136	0.1149	0.1160	0.1170	0.1180	0.1189	0.1197	0.1205	0.1212
11	0.1004	0.1020	0.1035	0.1049	0.1062	0.1073	0.1085	0.1095	0.1105	0.1113
12	0.0891	0.0909	0.0927	0.0943	0.0959	0.0972	0.0986	0.0998	0.1010	0.1020
13	0.0782	0.0804	0.0824	0.0842	0.0860	0.0876	0.0892	0.0906	0.0919	0.0932
14	0.0677	0.0701	0.0724	0.0745	0.0765	0.0783	0.0801	0.0817	0.0832	0.0846
15	0.0575	0.0602	0.0628	0.0651	0.0673	0.0694	0.0713	0.0731	0.0748	0.0764
16	0.0476	0.0506	0.0534	0.0560	0.0584	0.0607	0.0628	0.0648	0.0667	0.0685
17	0.0379	0.0411	0.0442	0.0471	0.0497	0.0522	0.0546	0.0568	0.0588	0.0608
18	0.0283	0.0318	0.0352	0.0383	0.0412	0.0439	0.0465	0.0489	0.0511	0.0532
19	0.0188	0.0227	0.0263	0.0296	0.0328	0.0357	0.0385	0.0411	0.0436	0.0459
20	0.0094	0.0136	0.0175	0.0211	0.0245	0.0277	0.0307	0.0335	0.0361	0.0386
21	0.0000	0.0045	0.0087	0.0126	0.0163	0.0197	0.0229	0.0259	0.0288	0.0314
22			0.0000	0.0042	0.0081	0.0118	0.0153	0.0185	0.0215	0.0244
23					0.0000	0.0039	0.0076	0.0111	0.0143	0.0174
24							0.0000	0.0037	0.0071	0.0104
25									0.0000	0.0035

Anexo 4: Valores críticos da estatística W de SHAPIRO-WILK

Tamanho da Amostra, N	*Nível de significância* α								
	0.01	0.02	0.05	0.10	0.50	0.90	0.95	0.98	0.99
3	0.753	0.756	0.767	0.789	0.959	0.998	0.999	1.000	1.000
4	0.687	0.707	0.748	0.792	0.935	0.987	0.992	0.996	0.997
5	0.686	0.715	0.762	0.806	0.927	0.979	0.986	0.991	0.993
6	0.713	0.743	0.788	0.826	0.927	0.974	0.981	0.986	0.989
7	0.730	0.760	0.803	0.838	0.928	0.972	0.979	0.985	0.988
8	0.749	0.778	0.818	0.851	0.932	0.972	0.978	0.984	0.987
9	0.764	0.791	0.829	0.859	0.935	0.972	0.978	0.984	0.986
10	0.781	0.806	0.842	0.869	0.938	0.972	0.978	0.983	0.986
11	0.792	0.817	0.850	0.876	0.940	0.973	0.979	0.984	0.986
12	0.805	0.828	0.859	0.883	0.943	0.973	0.979	0.984	0.986
13	0.814	0.837	0.866	0.889	0.945	0.974	0.979	0.984	0.986
14	0.825	0.846	0.874	0.895	0.947	0.975	0.980	0.984	0.986
15	0.835	0.855	0.881	0.901	0.950	0.975	0.980	0.984	0.987
16	0.844	0.863	0.887	0.906	0.952	0.976	0.981	0.985	0.987
17	0.851	0.869	0.892	0.910	0.954	0.977	0.981	0.985	0.987
18	0.858	0.874	0.897	0.914	0.956	0.978	0.982	0.986	0.988
19	0.863	0.879	0.901	0.917	0.957	0.978	0.982	0.986	0.988
20	0.868	0.884	0.905	0.920	0.959	0.979	0.983	0.986	0.988
21	0.873	0.888	0.908	0.923	0.960	0.980	0.983	0.987	0.989
22	0.878	0.892	0.911	0.926	0.961	0.980	0.984	0.987	0.989
23	0.881	0.895	0.914	0.928	0.962	0.981	0.984	0.987	0.989
24	0.884	0.898	0.916	0.930	0.963	0.981	0.984	0.987	0.989
25	0.888	0.901	0.918	0.931	0.964	0.981	0.985	0.988	0.989
26	0.891	0.904	0.920	0.933	0.965	0.982	0.985	0.988	0.989
27	0.894	0.906	0.923	0.935	0.965	0.982	0.985	0.988	0.990
28	0.896	0.908	0.924	0.936	0.966	0.982	0.985	0.988	0.990
29	0.898	0.910	0.926	0.937	0.966	0.982	0.985	0.988	0.990
30	0.900	0.912	0.927	0.939	0.967	0.983	0.985	0.988	0.900
31	0.902	0.914	0.929	0.940	0.967	0.983	0.986	0.988	0.990
32	0.904	0.915	0.930	0.941	0.968	0.983	0.986	0.988	0.990
33	0.906	0.917	0.931	0.942	0.968	0.983	0.986	0.989	0.990
34	0.908	0.919	0.933	0.943	0.969	0.983	0.986	0.989	0.990
35	0.910	0.920	0.934	0.944	0.969	0.984	0.986	0.989	0.990
36	0.912	0.922	0.935	0.945	0.970	0.984	0.986	0.989	0.990
37	0.914	0.924	0.936	0.946	0.970	0.984	0.987	0.989	0.990
38	0.916	0.925	0.938	0.947	0.971	0.984	0.987	0.989	0.990
39	0.917	0.927	0.939	0.948	0.971	0.984	0.987	0.989	0.991
40	0.919	0.928	0.940	0.949	0.972	0.985	0.987	0.989	0.991
41	0.920	0.929	0.941	0.950	0.972	0.985	0.987	0.989	0.991
42	0.922	0.930	0.942	0.951	0.972	0.985	0.987	0.989	0.991
43	0.923	0.932	0.943	0.951	0.973	0.985	0.987	0.990	0.991
44	0.924	0.933	0.944	0.952	0.973	0.985	0.987	0.990	0.991
45	0.926	0.934	0.945	0.953	0.973	0.985	0.988	0.990	0.991
46	0.927	0.935	0.945	0.953	0.974	0.985	0.988	0.990	0.991
47	0.928	0.936	0.946	0.954	0.974	0.985	0.988	0.990	0.991
48	0.929	0.937	0.947	0.954	0.974	0.985	0.988	0.990	0.991
49	0.929	0.937	0.947	0.955	0.974	0.985	0.988	0.990	0.991
50	0.930	0.938	0.947	0.955	0.974	0.985	0.988	0.990	0.991

Anexo 5: Valores críticos para o teste de Kolmogorov-Smirnov

	Nível de significância α				
Teste uni-lateral	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
Teste bi-lateral	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
Tamanho da Amostra, N					
1	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
2	0.684	0.776	0.842	0.900	0.929
3	0.565	0.636	0.708	0.785	0.829
4	0.493	0.565	0.624	0.689	0.734
5	0.447	0.509	0.563	0.627	0.669
6	0.410	0.468	0.519	0.577	0.617
7	0.381	0.436	0.483	0.538	0.576
8	0.358	0.410	0.454	0.507	0.542
9	0.339	0.387	0.430	0.480	0.513
10	0.323	0.369	0.409	0.457	0.489
11	0.308	0.352	0.391	0.437	0.468
12	0.296	0.338	0.375	0.419	0.449
13	0.285	0.325	0.361	0.404	0.432
14	0.275	0.314	0.349	0.390	0.418
15	0.266	0.304	0.338	0.377	0.404
16	0.258	0.295	0.327	0.366	0.392
17	0.250	0.286	0.318	0.355	0.381
18	0.244	0.279	0.309	0.346	0.371
19	0.237	0.271	0.301	0.337	0.361
20	0.232	0.265	0.294	0.329	0.352
21	0.226	0.259	0.287	0.321	0.344
22	0.221	0.253	0.281	0.314	0.337
23	0.216	0.247	0.275	0.307	0.330
24	0.212	0.242	0.269	0.301	0.323
25	0.208	0.238	0.264	0.295	0.317
26	0.204	0.233	0.259	0.290	0.311
27	0.200	0.229	0.254	0.284	0.305
28	0.197	0.225	0.250	0.279	0.300
29	0.193	0.221	0.246	0.275	0.295
30	0.190	0.218	0.242	0.270	0.290
31	0.187	0.214	0.238	0.266	0.285
32	0.184	0.211	0.234	0.262	0.281
33	0.182	0.208	0.231	0.258	0.277
34	0.179	0.205	0.227	0.254	0.273
35	0.177	0.202	0.224	0.251	0.269
36	0.174	0.199	0.221	0.247	0.265
37	0.172	0.196	0.218	0.244	0.262
38	0.170	0.194	0.215	0.241	0.258
39	0.168	0.191	0.213	0.238	0.255
40	0.165	0.189	0.210	0.235	0.252
Aproximação para N > 40	$\frac{1.0730}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.2239}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.3581}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.5174}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.6276}{\sqrt{N}}$